Toutes les astuces de Maths que vous avez besoin pour bien préparer pour les concours des écoles de l’enseignement supérieur

Préparé par: Othmane Chanaâ

Groupe facebook: facebook.com/groups/pec2018

Calcul de limites :

Règle de l'Hospital

- Soit f et g deux fonctions *continues* sur un intervalle $[c,d]$ telles que:

1. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ où $a \in]c,d[$
2. $f'(x)$ et $g'(x)$ sont continues en $x = a$
3. $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]c,d[\setminus \{a\}$

Alors $$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ si cette limite existe ou est infinie}}$$

Exemple :

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \frac{(x^2 - 8x + 16)'}{(x^2 - 16)'} =$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{2x - 8}{2x} =$$

$$\frac{2 \cdot 4 - 8}{2 \cdot 4} =$$

$$\frac{0}{8} = 0$$

Théorème de comparaison

Il est inutile d'insister sur l'intérêt du théorème suivant tant son usage est fréquent ! Ses dénominations (*théorème sandwich* ou *théorème des gendarmes*) résument bien la situation.

Théorème

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites réelles vérifiant :

1. $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n \leq v_n \leq w_n$,
2. $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} w_n = l$;

alors la suite (v_n) converge et a pour limite l .

Théorème de comparaison

Le théorème suivant montre la propriété dite de prolongement des inégalités : il exprime en effet que si deux suites convergentes sont comparables leurs limites vérifient la même inégalité.

Théorème

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles vérifiant

1. $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n \leq v_n$
2. $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = l_1$ *et* $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = l_2$

on a alors $l_1 \leq l_2$.

Ps : théorème de comparaison(gendarmes) est aussi pour les fonctions.

<u>**Exemple :**</u> Soit $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Pour toux $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\cos x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} (-\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, on déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Théorème des accroissements finis

Théorème

Soit f une application de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

1. f est continue sur $[a, b]$,
2. f est dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$

Changement de variable pour calculer les limites :

4. Généralisation :

La méthode est donc "simple", il faut faire un changement de variable $u = g(x)$ qui amène donc $f(x) = F \circ g(u)$ où F et g sont choisies pour avoir des limites connues au voisinages qui nous intéressent.

Le théorèmede la limite d'une fonction composée permet alors de conclure. Mais quel est-il exactement ?

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $g(I)$ et I. Soit $a \in I$ et $b \in g(I)$.

Alors $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} g(x) = b \\ \lim\limits_{u \to b} f(u) = l \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f \circ g(x) = l$

Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x}$? $\quad \frac{e^{2x}}{x} = 2 \times \frac{e^{2x}}{2x} = 2\frac{e^{X}}{X}$

On effectue ensuite le changement de variable suivant :

$X = 2x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^{X}}{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} 2\frac{e^{X}}{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} \frac{e^{2x}}{x} = +\infty$

Exemple : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x-1)\ln(x-1)$?

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x-1) = 0^+ \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln(x-1) = -\infty \end{array}\right\}$ FI du genre "$0 \times \infty$"

$(x-1)\ln(x-1) = X\ln X$ avec $\left\{\begin{array}{l} X = x-1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} X = 0^+ \end{array}\right.$

donc $\lim\limits_{X \to 0} X\ln X = 0$ d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x-1)\ln(x-1) = 0$

Les équivalences et le calcul de limites :

DÉFINITION 3 : **"Est équivalent à ..."**
On dira que f et g sont *équivalentes* au voisinage du point a ssi :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$$

Notation : $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou encore $f(x) \sim g(x)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Équivalents classiques pour les suites

Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors :

$\sin u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ $\quad$ $\tan u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ $\quad$ $[1-\cos u_n] \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$

$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ $\quad$ $[e^{u_n}-1] \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ $\quad$ $[(1+u_n)^\alpha - 1] \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$ $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$.

Équivalents classiques pour les fonctions en 0

$\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$ $\quad$ $e^x - 1 \underset{x\to0}{\sim} x$

$\sin x \underset{x\to0}{\sim} x$ $\quad$ $\tan x \underset{x\to0}{\sim} x$ $\quad$ $\operatorname{sh} x \underset{x\to0}{\sim} x$ $\quad$ $\operatorname{th} x \underset{x\to0}{\sim} x$

$\arcsin x \underset{x\to0}{\sim} x$ $\quad$ $\arctan x \underset{x\to0}{\sim} x$ $\quad$ $\operatorname{argsh} x \underset{x\to0}{\sim} x$ $\quad$ $\operatorname{argth} x \underset{x\to0}{\sim} x$

$\cos x - 1 \underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ $\quad$ $\operatorname{ch} x - 1 \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ $\quad$ $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to0}{\sim} \alpha x$ $\quad$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

Ex 1 **Facile**

En utilisant les équivalents, déterminez la limite de la suite de terme général

$$u_n = n \ln \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$$

$\boxed{Q\ 1}$ Ecrivons pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{n}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)$$

Comme $\dfrac{2}{n-1} \to 0$, $\ln(1+\dfrac{2}{n-1}) \sim \dfrac{2}{n-1} \sim \dfrac{2}{n}$ et donc $u_n \to 1$.

Les Méthodes des études de la convergence :

Théorème. Règle de d'Alembert. *Soit (u_n) une suite à termes positifs. On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est définie pour n assez grand et a une limite L quand n tend vers $+\infty$. Alors*

- si L < 1, la série de terme général u_n est convergente ;

- si L > 1, la série de terme général u_n est divergente.

Théorème. Règle de Cauchy. *Soit (u_n) une suite à termes positifs. On suppose que la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)$ a une limite L quand n tend vers $+\infty$. Alors :*

- si L < 1, la série de terme général u_n est convergente ;

- si L > 1, la série de terme général u_n est divergente.

Série de terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$ $(x \in \mathbf{R}_+^*)$

Il s'agit d'une série à termes tous strictement positifs. On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1}$. On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$.

La série est convergente (on retrouve le fait que le terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$ $(x \in \mathbf{R}_+^*)$ tend vers 0).

On peut même calculer la somme de la série : en appliquant la formule de Taylor-Lagrange (cf. chapitre sur les fonctions de classe C^n) à la fonction exponentielle sur l'intervalle $[0,x]$, pour tout x réel strictement positif, on obtient l'égalité :

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \text{ c'est-à-dire, } e^x = \sum_{0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

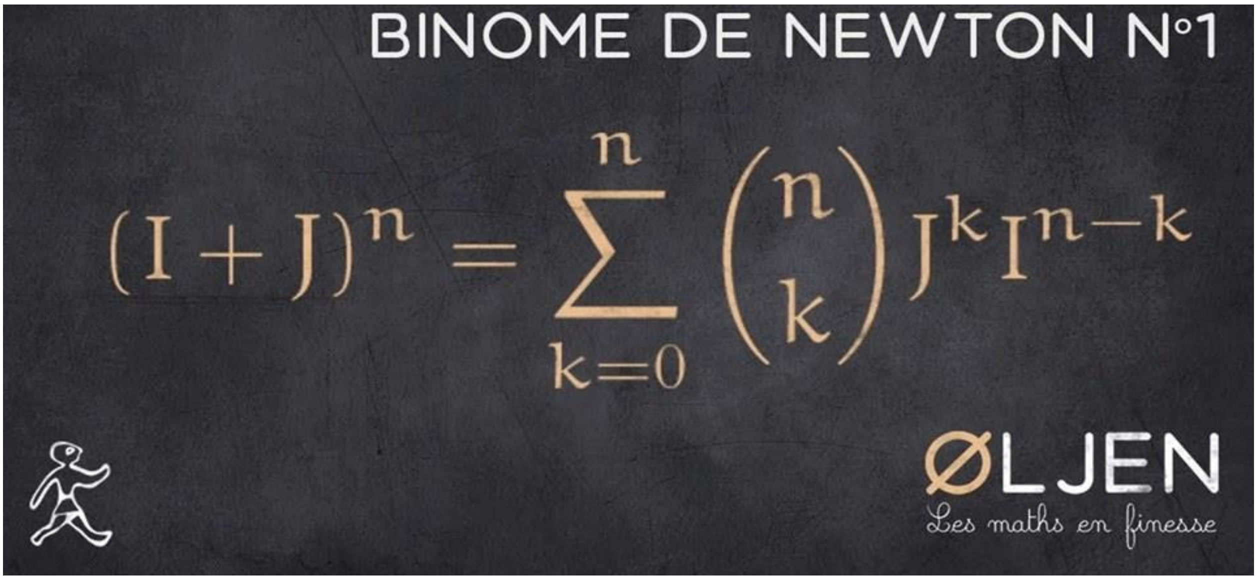
On reviendra sur ce point de vue dans le chapitre sur les séries entières.

Série de terme général $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ $(n \geq 1)$

On a : $\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{e} < 1$. La série est convergente.

Binôme de Newton :



$$(a+b)^n =$$
$$C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n a^0 b^n =$$
$$\binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n =$$
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$(a+b)^2$	=	$a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^3$	=	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a+b)^4$	=	$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a+b)^5$	=	$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$(a-b)^2$	=	$a^2 - 2ab + b^2$
$(a-b)^3$	=	$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a-b)^4$	=	$a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$
$(a-b)^5$	=	$a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

Fonction Arctangente :

Fonction Arctangente

Définition

Soit f la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

$f\ :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \tan x$

La fonction f est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

D'après le théorème dit " des fonctions réciproques " on peut affirmer que

$f(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[) =]\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x), \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)[= \mathbb{R}$

et que f établit une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction réciproque de f est appelée Arctangente et notée $x \mapsto \arctan x$. C'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

$\arctan\ : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

$x \mapsto \arctan x$

Pour tout réel x $\arctan x$ est donc l'unique élément de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ qui a pour tangente le réel x.

- **Dérivée**

La fonction f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $f'(x) = 1+\tan^2 x$. La dérivée de f ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, la fonction Arctangente est donc dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R}\quad (\arctan)'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

On a donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\quad (\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Remarque

La notation $y = \arctan x$ peut se lire : "y est l'**arc** (de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$) dont la tangente vaut x"

Par définition

$$\boxed{\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \arctan x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ \tan y = x \end{cases}}$$

Partie Entière :

Proposition 3.
Soit $x \in \mathbb{R}$, il **existe** *un* **unique** *entier relatif, la* **partie entière** *notée $E(x)$, tel que :*

$$\boxed{E(x) \leqslant x < E(x)+1}$$

Exemple 1.

- $E(2,853) = 2$, $E(\pi) = 3$, $E(-3,5) = -4$.
- $E(x) = 3 \iff 3 \leqslant x < 4$.

Nombres complexes et la formule de Moivre/Euler :

FORMULE de MOIVRE et d'EULER

Formule de Moivre (vers 1730)

$$\forall n \qquad (\cos\theta + i.\sin\theta)^n = \cos n.\theta + i.\sin n.\theta$$

n étant un nombre entier

Note: parfois cos θ + sin θ est noté cis θ

Écriture avec parenthèses, si confusion possible
$(\cos\theta + i.\sin\theta)^n = \cos(n.\theta) + i.\sin(n.\theta)$

Écriture exponentielle

$$\left(e^{i.\theta}\right)^n = e^{n.i.\theta}$$

Formules d'Euler (Rappel)

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2\,i}$$

La formule de De Moivre serait plutôt due à Euler (1748) qui l'a énoncée sans vraiment la démontrer.

z	$=$	$r(\cos\theta + i\sin\theta)$
z^n	$=$	$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n$	$=$	$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
$\ln z$	$=$	$\ln r + i\theta$
$\left(e^{i\theta}\right)^n$	$=$	$e^{i(n\theta)}$
$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$		

Téléscopages et les sommes usuelles :

Sommes et produits téléscopiques

Actualisé: 6 février 2017

vers. 1.0.0

Souvent on peut transformer une somme ou un produit pour leur donner une structure simple. Une somme de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} F(k+1) - F(k)$$

est appelée *somme téléscopique*. évidemment la majorité des termes s'annule et la somme vaut $F(n+1) - F(1)$. De même un produit de la forme

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{F(k+1)}{F(k)}$$

est un *produit téléscopique*. Sa valeur est $F(n+1)/F(1)$. La difficulté majeure dans ces cas-là est la transformation de l'expression donnée dans la forme souhaitée. Voici quelques exemples.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \cdots = 1.\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+\alpha)(k+\alpha+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+\alpha} - \frac{1}{k+\alpha+1}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+1}\right) + \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2}\right) + \cdots$$
$$= \frac{1}{\alpha} + \left(-\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1}\right) + \left(-\frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\alpha+2}\right) + \cdots = \frac{1}{\alpha}.$$

Exemple

Calculons

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

On a

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}$$

Après simplification

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{n+1}{1} = n+1$$

Remarque

On vient en fait de croiser un produit télescopique :

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_0} \text{ (rapport des extrêmes)}$$

Exemple

Calculons $P = \prod_{k=0}^{n} (1 + a^{2^k})$ pour $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$P = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)\ldots(1+a^{2^n})$$

En exploitant $(1-a)(1+a) = 1-a^2$, on obtient

$$(1-a)P = (1-a^2)(1+a^2)(1+a^4)\ldots(1+a^{2^n})$$

En répétant le procédé

$$(1-a)P = 1 - a^{2^{n+1}}$$

et finalement

$$P = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}$$

car $a \neq 1$.

Sommes usuelles :

Dans tout ce qui suit, on considère $n \in \mathbb{N}$.

1. somme des premiers entiers naturels : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$

2. somme des premiers carrés d'entiers naturels : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

3. somme des premiers cubes d'entiers naturels : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$

Proposition (lien somme/produit)

- $\ln\left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln(u_k);$
- $\exp\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \prod_{k=0}^{n} \exp(u_k).$

Proposition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors :

1. $\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} (u_k + v_k);}$
2. $\boxed{\prod_{k=0}^{n} u_k \times \prod_{k=0}^{n} v_k = \prod_{k=0}^{n} u_k v_k.}$

Proposition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

1. $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k;}$
2. $\boxed{\prod_{k=0}^{n} \lambda u_k = \lambda^{n+1} \prod_{k=0}^{n} u_k.}$

Dénombrement et les permutations :

Permutation avec répétition : Soit E un ensemble de cardinal k. Une permutation de n éléments de E avec $n_1, \dots, n_k$ répétitions est un n-uplet d'éléments de E dans lequel chacun des éléments $x_1, \dots, x_k$ de E apparaît respectivement $n_1, \dots, n_k$ fois tels que $n_1 + \dots + n_k = n$.

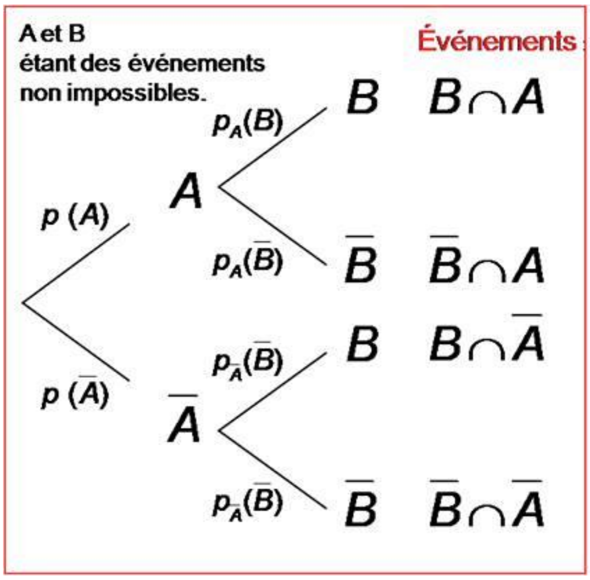
Proposition : Le nombre de permutations de n éléments avec $n_1, \dots, n_k$ répétitions est égal à $\overline{P_n}(n_1, n_2, \dots, n_k) = \begin{pmatrix} n \\ n_1, n_2, \dots, n_k \end{pmatrix} \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$.

Exemple : Combien de mots de 3 lettres peut-on former avec deux lettres de A et une seule lettre de B ?

$$\boxed{\frac{3!}{1!2!} = \frac{3 \cdot 2!}{1!2!} = \frac{3}{1} = 3}$$

AAB BAA ABA

Probabilité conditionnelles et l'arbre :



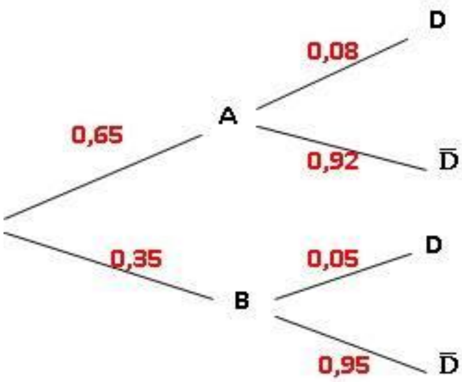
On a alors : $p_A(B) = p(B)$

Or : $p_A(B) = \dfrac{p(B \cap A)}{p(A)}$

Donc, B est indépendant de A est équivalent à

$$p(B) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$$

$$\Leftrightarrow p(B) \times p(A) = p(B \cap A)$$

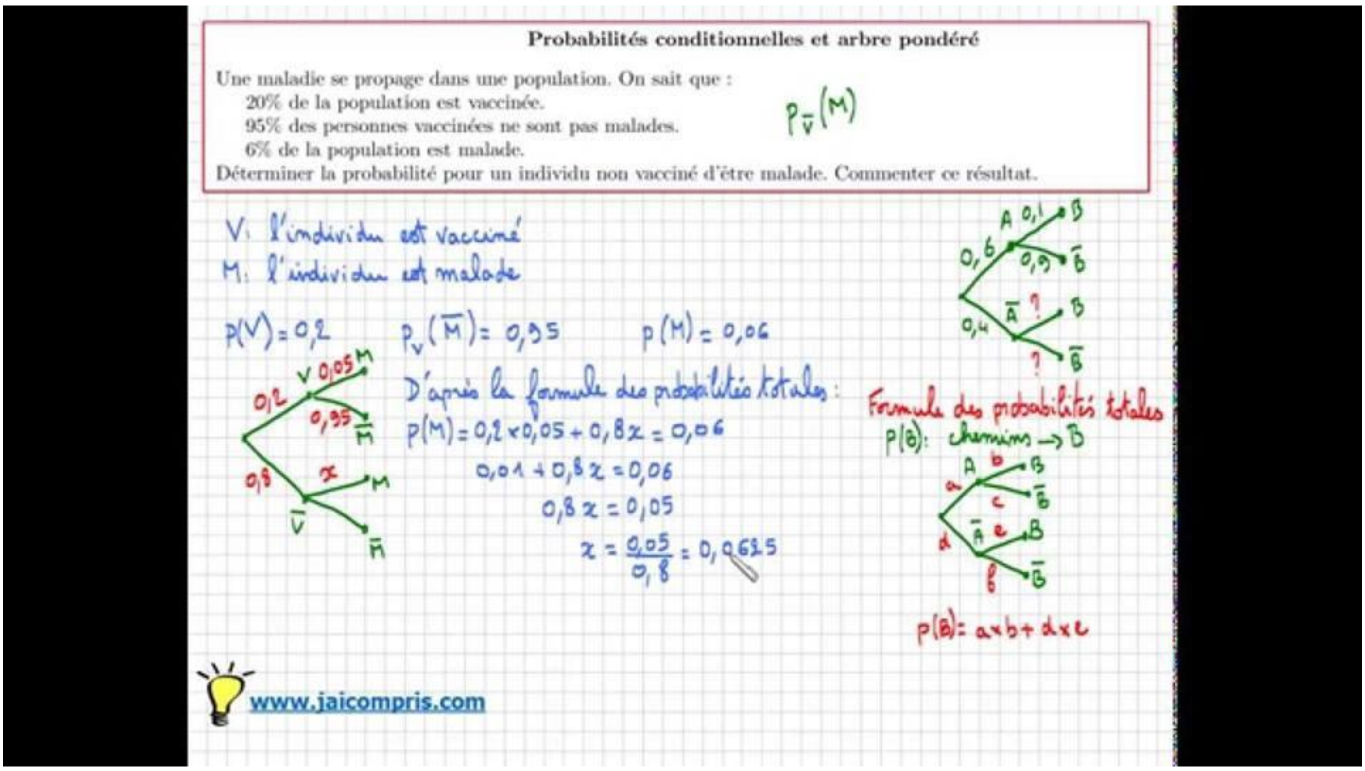


Probabilité totale :

$$P(\bar{D}) = P(A \cap \bar{D}) + P(B \cap \bar{D})$$
$$= 0{,}92 \times 0{,}65 + 0{,}95 \times 0{,}35 = \boxed{0{,}9305}$$

Probabilité conditionnelle :

$$P_{\bar{D}}A = \frac{P(A \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{0{,}65 \times 0{,}92}{0{,}9305} \sim \boxed{0{,}643}$$



Les matrices et le calcul de déterminant :

Une matrice n × m est un tableau de nombres à n lignes et m colonnes :

Exemple avec n = 2, m = 3 : $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

II.A. Addition, soustraction

L'addition et la soustraction des matrices se font terme à terme. Les matrices doivent avoir les mêmes dimensions :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

II.B. Multiplication par un nombre

Chaque terme de la matrice est multiplié par le nombre :

$$2 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

II.D. Multiplication des matrices

Ce produit est appelé *produit scalaire* des vecteurs **x** et y, noté **x** · y. Les vecteurs doivent avoir la même dimension.

Le produit matriciel s'en d�duit : le produit de la matrice **A** (n × m) par la matrice **B** (m × p) est la matrice **C** (n × p) telle que l'élément C_{ij} est égal au produit scalaire de la ligne i de la matrice **A** par la colonne j de la matrice **B**.

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} B_{kj} \qquad i = 1..n \quad j = 1..p$$

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 23 & 9 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + a_{13} \times b_{31} = c_{11}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Matrice inversible et sa matrice inverse

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Lorsqu'elle existe, on appelle **inverse** de A, et l'on note A^{-1}, une matrice telle que : $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Cette matrice inverse (nécessairement de taille $n \times n$) est alors unique, et A est dite **inversible**.

- Une matrice carrée A, d'ordre n est inversible si et seulement s'il existe une matrice notée A^{-1} telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

- A inversible $\Longrightarrow det(AA^{-1}) = det(A)det(A^{-1}) = det(I_n) = 1$
  A inversible$\Longrightarrow det(A) \neq 0$

- On démontrera dans les modules suivants que:
  $det(A) \neq 0 \Longrightarrow A$ est inversible

$$A \text{ inversible} \Longleftrightarrow det(A) \neq 0$$

Calul de déterminant :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -1\big(2 \times 10 - 3 \times 8\big) - 2\big(1 \times 10 - 3 \times (-2)\big) + 5\big(1 \times 8 - 2 \times (-2)\big)$$

$$= -1(-4) - 2(16) + 5(12) = 4 - 32 + 60 = 32$$

Fonction Injective/Surjective :

1.injectivité

Définition: Une fonction f de E vers F est injective si et seulement si tout élément de F possède au plus un antécédent dans E.

2.surjectivité

Définition: une fonction f de E vers F est surjective si et seulement si tout élément de F possède au moins un antécédent dans E.

3.Bijectivité

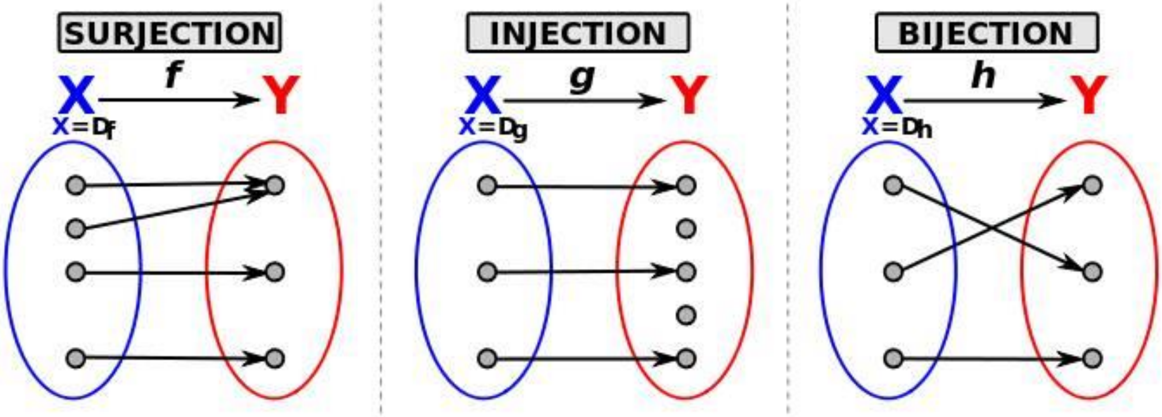
Définition: une fonction f de E vers F est bijective si et seulement si tout élément de F possède exactement un antécédent dans E (ce qui équivaut à dire que f est à la fois injective et surjective).

Mathématiquement, en prenant E l'ensemble de départ et F l'ensemble d'arrivée, on dira qu'une fonction $f : E \to F$ est surjective si et seulement si :

$$\forall y \in F, \exists x \in E : f(x) = y$$

La vraie définition est la suivante :

$f : E \to F$ est injective si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.



Exercice 3

Soit $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000202]

Correction de l'exercice 3 ▲

- f est injective : soient $x, y \in [1, +\infty[$ tels que $f(x) = f(y)$:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1 \\ &\Rightarrow x = \pm y \text{ or } x, y \in [1, +\infty[\text{ donc } x, y \text{ sont de même signe} \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

- f est surjective : soit $y \in [0, +\infty[$. Nous cherchons un élément $x \in [1, +\infty[$ tel que $y = f(x) = x^2 - 1$. Le réel $x = \sqrt{y+1}$ convient !

Géometrie spatiale :

Les vecteurs

Comme en 2 dimensions, un vecteur a une direction, un sens et une norme. Ses coordonnées se calculent de la même façon, saauf qu'il y en a 3 :

$$\overrightarrow{AB}:\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Sa norme est donc de manière logique :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Produit scalaire

Haut de page

Tu te souviens comment on calcule le produit scalaire dans le plan ? Et bien pour l'espace c'est quasiment pareil ! 😁

Exemple :

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{u}.\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\times1 + 9\times4 + 5\times2 = 17$$

Comme dans le plan, on multiplie less x entre eux, les y entre eux, les z entre eux, et on additionne tout !

$$Si\ \vec{u}.\vec{v}=0, \vec{u}\ et\ \vec{v}\ sont\ perpendiculaires\,!$$

Un petit exemple :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-18\\-1\\11\end{pmatrix}$

On suppose que l'on a montré que $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}$ n'étaient pas colinéaires, donc A, B et C forment un plan.

Nous allons montré que $\overrightarrow{DE}$ est un vecteur normal au plan (ABC), il faut donc montrer qu'il est orthogonal aux 2 autres vecteurs, donc on calcule le produit sclaire :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-18\\-1\\11\end{pmatrix}=3\times(-18)+1\times(-1)+5\times 11=0$$

Equation de plan

Haut de page

Tu te souviens que dans le plan, une équation de droite est de la forme : ax + by + c = 0.
Et bien l'équation d'un plan dans l'espace ressemble beaucoup, il suffit de rajouter z :

$$ax+by+cz+d=0$$

Là encore il y a un avantage à l'écrire sous cette forme, car on sait qu'alors, un vecteur NORMAL au plan est :

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

Que l'équation du plan soit ax + by + cz + d = 0 signifie que tous les points du plan vérifient cette équation.
Par exemple, si le point A appartient au plan, ses coordonnées vérifient :

$$ax_A+by_A+cz_A+d=0$$

Equation paramétrique de droite

Haut de page

On attaque ici quelque chose de complètement nouveau par rapport à la géométrie dans le plan.
Dans le plan, une équation de droite était de la forme ax + by + c = 0. Dans l'espace, on fait complètement différemment, on fait un système avec un paramètre, que l'on notera t.
Si (D) est la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ = (a ; b ; c) passant par A, l'équation paramétrique de (D) est :

$$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

En faisant varier le t, on obtient tous les points de la droite.

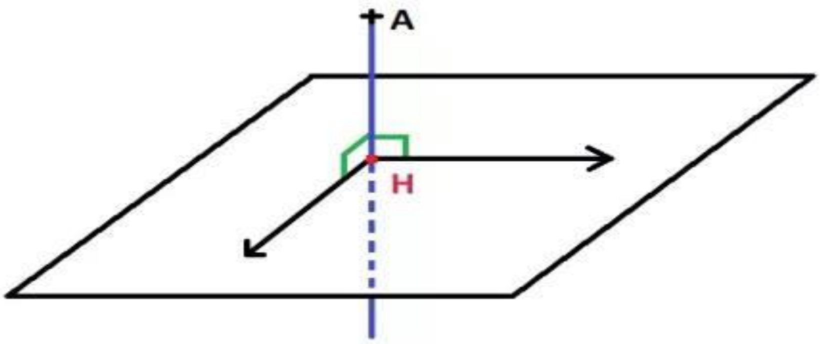
Exemple : la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ = (2 ; 7 ; 5) passant par A(6 ; 8 ; 3) a pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2t + 6 \\ y = 7t + 8 \\ z = 5t + 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Distance et projection orthogonale

Haut de page

Dans le plan, nous avons vu comment calculer la distance d'un point à droite et comment construire le projeté orthogonal.
Dans l'espace, on calcule la distance d'un point à un PLAN et on projette le point sur ce plan.
Pour cela, on trace le vecteur normal au plan passant par le point :



H est le projeté orthogonal de A sur le plan

La distance du point au plan, notée d(A,P), est la longueur AH, et est donnée par :

$$d(A,P) = AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Equation de cercle

Haut de page

Dans l'espace, l'équation d'un cercle est quasiment la même que dans le plan !
Nous te donnerons donc directement la formule sans démonstration, c'est la même que celle dans le chapitre précédent, mais il y a une coordonnée en plus : z.
Tu peux toujuors t'amuser à refaire la démonstration pour 3 dimensions

L'équation d'un cercle de centre A et de rayon R est :

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$$

Exemple : donner l'équation du cercle de centre B (4 ; -6 ; 3) et de rayon 8.
Il suffit de remplacer :

$$(x-4)^2+(y-(-6))^2+(z-3)^2=8^2$$

$$(x-4)^2+(y+6)^2+(z-3)^2=64$$

Produit vectoriel de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, on appelle produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur noté
$\vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors
  * $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$
  * $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est tel que la base ($\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{u} \wedge \vec{v}$) est **directe.**
  * $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\ |\sin(\vec{u} \wedge \vec{v})|$

Intégrales :

Changement de variable pour le calcul des intégrales $\int_a^b f(x)dx$

La fonction f est définie et continue sur $[a, b]$.

- **Changement de variable** $u = \Psi(x)$ **Methode (1)**

  Dans le cas où l'élément différentiel $f(x)dx$ peut se mettre sous la forme $g[\Psi(x)]\Psi'(x)dx$, en posant $u = \Psi(x)$ nous obtiendrons :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g[\Psi(x)]\Psi'(x)dx = \int_{\Psi(a)}^{\Psi(b)} g(u)du}$$

- **Changement de variable** $x = \varphi(t)$ **Methode (2)**

  La fonction φ admet une dérivée continue sur un intervalle $[t_1; t_2]$

  défini par : $t_1 = \varphi^{-1}(a)$ et $t_2 = \varphi^{-1}(b)$.

  L'élément différentiel étant $f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$, l'intégrale s'exprimera par :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt}$$

Exemple

Intégration avec changement de variable $u = \Psi(x)$ **methode (1)**

Calculer $I = \int_0^{\pi/3} \cos^2 x \sin x dx$

Posons $u = \cos x \Leftrightarrow du = -\sin x dx$ et $\begin{cases} u_1 = \cos 0 = 1 \\ u_2 = \cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$, d'où

$$I = \int_0^{1/2} u^2(-du) = [-\frac{u^3}{3}]_1^{1/2} = -\frac{1}{3}(\frac{1}{8} - 1) = \frac{7}{24}$$

Exemple

Intégration avec changement de variable $x = \varphi(t)$ **methode (2)**

Calculer $I = \int_e^{e^3} \dfrac{dx}{x \ln x}$ $(x > 0)$

Posons $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$ et $\begin{cases} t_1 = \ln e = 1 \\ t_2 = \ln e^3 = 3 \end{cases}$

avec $dx = e^t dt$ d'où :

$$I = \int_1^3 \frac{e^t dt}{e^t t} = \int_1^3 \frac{dt}{t} = [\ln |t|]_1^3 = \ln 3$$

Intégrales des fonctions trigonométriques :

Primitivation des fonctions polynômes en $\sin x$, $\cos x$.

Forme : $I = \int P(\sin x, \cos x)dx = \int \sin^p x \cos^q x dx \ \ (p, q \in \mathbb{N})$

- si p **est impair**, on peut poser $u = \cos x$
- si q **est impair**, on peut poser $u = \sin x$
- si p **et** q **sont impairs**, on peut poser $u = \sin x$ ou $u = \cos x$ ou $u = \cos 2x$
- si p **et** q **sont pairs**, on pourra **linéariser**, puis primitiver.

Exemple

$$\boxed{I_1 = \int \sin^3 x \cos^2 x dx}$$

$$I_1 = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x dx$$

Posons $u = \cos x \Leftrightarrow du = -\sin x dx$

d'où $I_1 = -\int (1 - u^2)u^2 du = -\int (u^2 - u^4)du = -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C$

$$I_1 = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

Exemple

$$\boxed{I_3 = \int \sin^3 x \cos x dx}$$

$$I_3 = \int \sin^2 x \sin x \cos x dx = \int (\frac{1 - \cos 2x}{2})\frac{1}{2}\sin 2x dx$$

Posons $u = \cos 2x \Leftrightarrow du = -2\sin 2x dx$

d'où

$$I_3 = -\frac{1}{8}\int (1 - u)du = -\frac{1}{8}(u - \frac{u^2}{2}) + C$$

$$I_3 = -\frac{1}{8}(\cos^2 2x - \frac{1}{2}\cos^2 x) + C$$

Exemple

$$\boxed{I_4 = \int \sin^2 x \cos^2 x dx}$$

$$I_4 = \int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4}\int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{8}[\int dx - \int \cos 4x dx]$$

d'où : $I_4 = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$

Si m et n sont pairs on utilise la méthode dite (de façon incorrecte) de linéarisation.

On utilise les formules connues (sinon les revoir dans le module fonctions classiques) $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}, \sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$, qui ne linéarisent pas les monômes en sinus et cosinus mais en abaissent le degré.

Exemple

Calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^4 t dt$

On a :

$$\begin{aligned}\cos^2 t \sin^4 t &= \cos^2 t \sin^2 t \sin^2 t = \frac{1}{4}\sin^2 2t \sin^2 t = \frac{1}{16}(1-\cos 4t)(1-\cos 2t) \\ &= \frac{1}{16}(1-\cos 4t - \cos 2t + \cos 4t \cos 2t) = \frac{1}{16}(1-\cos 4t - \cos 2t + \frac{1}{2}(\cos\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^4 t dt = \frac{1}{16}\left[t - \frac{\sin 4t}{4} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 6t}{12} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{32}$

Méthode particulière : Règles de Bioche

Posons $\omega(x) = F(\sin x, \cos x)$ dx l'élément différentiel à primitiver.

- si $\omega(-x) = \omega(x)$ alors $\int F(\sin x, \cos x)dx$ se calcule par le changement de variable $t = \cos x$
- si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ alors $\int F(\sin x, \cos x)dx$ se calcule par le changement de variable $t = \sin x$
- si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$ alors $\int F(\sin x, \cos x)dx$ se calcule par le changement de variable $t = \tan x$

Cette méthode est à privilégier car elle simplifie "bien souvent" les calculs.

Exemple

$$\boxed{I_8 = \int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx \ \ (x \neq (2k+1)\pi) \ \ k \in \mathbb{Z}}$$

Posons $\omega(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}dx$ l'élément différentiel.

Comme $\omega(-x) = \dfrac{\sin(-x)d(-x)}{1+\cos(-x)} = \dfrac{\sin x dx}{1+\cos x} = \omega(x)$

Posons $t = \cos x$ d'où $dt = -\sin x dx$ alors :

$$I_8 = \int -\frac{dt}{1+t} = -\ln|1+t| + C$$

$$I_8 = -\ln|1+\cos x| + C$$

Exemple

$$\boxed{I_9 = \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + 1} dx \ \ (x \neq \frac{3\pi}{2} + k\pi) \ \ k \in \mathbb{Z}}$$

Posons $\omega(x) = \dfrac{\sin x \cos x}{\sin x + 1} dx$ l'élément différentiel

Comme

$$\omega(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)\cos(\pi - x) d(\pi - x)}{\sin(\pi - x) + 1}$$
$$= \frac{\sin x(-\cos x) d(-x)}{\sin x + 1} = \omega(x)$$

Posons $t = \sin x$ d'où $dt = \cos x dx$ alors :

$$I_9 = \int \frac{t}{t+1} dt = \int \frac{t+1-1}{t+1} dt$$
$$= \int dt - \int \frac{dt}{t+1}$$
$$= t - \ln|t+1| + C$$

d'où $I_9 = \sin x - \ln(1 + \sin x) + C$

Exemple

$$\boxed{I_{10} = \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}}$$

Posons $\omega(x) = \dfrac{dx}{1 + \sin^2 x}$ l'élément différentiel

Comme

$$\omega(\pi + x) = \frac{d(\pi + x)}{1 + \sin^2(\pi + x)}$$
$$= \frac{dx}{1 + (-\sin x)^2} = \omega(x)$$

Posons $t = \tan x$ d'où $dt = (1 + \tan^2 x) dx = (1 + t^2) dx$ alors :

$$I_{10} = \int \frac{dt}{(1 + t^2)[1 + \frac{t^2}{1 + t^2}]} = \int \frac{dt}{1 + 2t^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan t\sqrt{2} + C$$

$$I_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + C$$

Intégration des fonctions comprenant des radicaux

Forme $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

- si $a = 0$: poser $t = bx + c$
- si $a \neq 0$: Mettre le trinôme sous forme canonique :

$$ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] \text{ avec } \Delta = b^2 - 4ac$$

- 1er cas : $a > 0$, $D < 0$, poser $t = \frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}}$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) + C$$

- 2ème cas : $a > 0$, $D > 0$, poser $t = \frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}}$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln|t + \sqrt{t^2 - 1}| + C \text{ avec } |t| > 1$$

- 3ème cas $a < 0$, $D > 0$, poser $t = -\frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}}$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin t + C \text{ avec } |t| < 1$$

Exemple

$$\boxed{I_{17} = \int \frac{dx}{\sqrt{3x + 2}}}$$

Posons $t = 3x + 2 \Leftrightarrow dt = 3dx$

et $I_1 = \int \frac{dt}{3\sqrt{t}} = \frac{2}{3}\sqrt{t} + C = \frac{2}{3}\sqrt{3x + 2} + C$

Exemple

$$\boxed{I_{18} = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 3x + 5}}}$$

Forme canonique du trinôme :

$$4x^2 - 3x + 5 = 4(x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}) = 4[(x - \frac{3}{8})^2 + (\frac{\sqrt{71}}{8})^2]$$

en posant $t = \frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} = \frac{8x - 3}{\sqrt{71}}$ nous trouvons :

$$I_{18} = \frac{1}{2} \ln(\frac{8x - 3}{\sqrt{71}} + \sqrt{(\frac{8x - 3}{\sqrt{71}})^2 + 1}) + K$$

Exemple

$$\boxed{I_{19} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x}}}$$

Forme canonique du trinôme :

$$x^2 - 4x = x^2 - 4x + 4 - 4 = (x-2)^2 - 2^2$$

en posant $t = \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} = \frac{2x-4}{4}$ nous trouvons :

$$I_3 = \ln\left|\frac{2x-4}{4} + \sqrt{(\frac{2x-4}{4})^2 + 1}\right| + K$$

$$I_3 = \ln(|x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x}|) + C$$

Exemple

$$\boxed{I_{20} = \int \frac{dx}{\sqrt{5 + 2x - 4x^2}}}$$

Forme canonique du trinôme :

$$-4x^2 + 2x + 5 = -4(x^2 - \frac{x}{2} - \frac{5}{4})$$

$$= -4[(x - \frac{1}{4})^2 - (\frac{\sqrt{21}}{4})^2]$$

$$= 4[(\frac{\sqrt{21}}{4})^2 - (x - \frac{1}{4})^2]$$

en posant $t = -\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} = \frac{4x-1}{\sqrt{21}}$ nous trouvons :

$$I_4 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{4x-1}{\sqrt{21}} + C$$

Intégration des fonctions rationnelles

Le calcul d'une intégrale $\int_a^b R(t)dt$ où R est une fonction rationnelle qui n'a aucun pôle dans l'intervalle $[a,b]$ comporte des calculs des types suivants:

- $\int_a^b E(t)dt$ où E est une fonction polynomiale,
- $\int_a^b \frac{dt}{(t-\alpha)^r}, r \in N^*$,
- $\int_a^b \frac{tdt}{(t^2+pt+q)^s}$ et $\int_a^b \frac{dt}{(t^2+pt+q)^s}, p^2-4q<0$.

Les deux premiers ne posent aucun problème. Pour résoudre les deux autres, qui présentent au dénominateur un trinôme du second degré sans racine réelle, on commence, suivant une démarche très fréquente dans ce cas à ***mettre le trinôme sous forme canonique***; ainsi

$$t^2+pt+q = \left(t+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

En posant alors :

$$q-\frac{p^2}{4} = \lambda^2 \text{ et } t+\frac{p}{2} = \lambda u$$

le changement de variable ainsi défini conduit à se ramener à des calculs d'intégrales du type :

$$\int_a^b \frac{udu}{(u^2+1)^s} \text{ et } \int_a^b \frac{du}{(u^2+1)^s}, s \in N^*$$

Or nous avons déjà rencontré des intégrales de ces deux types :

- le calcul de $\int_a^b \frac{udu}{(u^2+1)^s}, s \in N^*$ se fait en remarquant que le numérateur est au facteur $1/2$ près la dérivée de (u^2+1) .
- celui de $\int_a^b \frac{du}{(u^2+1)^s}, s \in N^*$ a été fait en application de la méthode d'intégration par parties, par récurrence.

Rassurez vous, on n'a pas l'habitude de demander de calculer : $\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^{25}}$. Le calcul est très ennuyeux bien avant 25!

Intégration des fonctions rationnelles - Exemple

Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)(t^2+1)}$:

On a : $\displaystyle 2\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)(t^2+1)} = \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)} - \int_0^1 \frac{tdt}{(t^2+1)} + \int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)}$, soit

$$2\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)(t^2+1)} = [\ln(t+1)]_0^1 - \frac{1}{2}[\ln(t^2+1)]_0^1 + [\arctan t]_0^1$$

Donc, finalement

$$\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2$$

Formes particulières

Formes $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^n x}$ et $J_n = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^n x}$ $n \in \mathbb{N}^*$

- **1er cas : n est pair** poser $t = \tan x$
- **2ème cas : n est impair** poser $t = \tan(x/2)$

Exemple

$$\boxed{I = \int \frac{dx}{\cos^2 x}}$$

$n = 2$ est pair :

Posons $t = \tan x \Leftrightarrow dt = (1 + \tan^2 x)dx = dx/\cos^2 x$

d'où $I = \int dt = t + C = \tan x + C$

Exemple

$$\boxed{J = \int \frac{dx}{\sin x}}$$

$n = 1$ est impair :

Posons $t = \tan(x/2) \Leftrightarrow x = 2\arctan t$ et $dx = 2dt/(1+t^2)$

Sachant que $\sin x = 2t/(1+t^2)$, nous obtenons :

$$J = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\dfrac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \ln|t| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

Intégration des fonctions trigonométriques

Forme : $I = \int \sin px \cos qx dx$; $J = \int \sin px \sin qx dx$; $K = \int \cos px \cos qx dx$ $(p, q \in \mathbb{R})$

Transformer les produits en sommes par l'utilisation des formules trigonométriques :

- $\sin p \cos q = \frac{1}{2}[\sin(p+q) + \sin(p-q)]$
- $\sin p \sin q = \frac{1}{2}[\cos(p-q) - \cos(p+q)]$
- $\cos p \cos q = \frac{1}{2}[\cos(p+q) + \cos(p-q)]$

Exemple

$\boxed{I_5 = \int \sin 2x \cos 3x dx}$

$\sin 2x \cos 3x = \frac{1}{2}[\sin(2x+3x) + \sin(2x-3x)] = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x)$

d'où $I_5 = \frac{1}{2}\int(\sin 5x - \sin x)dx = -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$

Exemple

$\boxed{I_6 = \int \sin 3x \sin 2x dx}$

$\sin 3x \sin 2x = \frac{1}{2}[\cos(3x-2x) - \cos(3x+2x)] = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 5x)$

d'où $I_6 = \frac{1}{2}\int(\cos x - \cos 5x)dx = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin 5x + C$

Exemple

$\boxed{I_7 = \int \cos 3x \cos 4x dx}$

$\cos 3x \cos 4x = \frac{1}{2}[\cos(3x+4x) + \cos(3x-4x)]$

$= \frac{1}{2}(\cos 7x + \cos x)$

d'où $I_7 = \frac{1}{2}\int(\cos 7x + \cos x)dx = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{14}\sin 7x + C$

Intégration des fonctions trigonométriques

Primitivation des fractions rationnelles en $\sin x,\ \cos x$

Forme : $I = \int F(\sin x, \cos x)dx$

Par changement de variable, on se ramène à la recherche de primitives d'une fraction rationnelle d'une variable t.

Méthode générale

Poser $t = \tan\frac{x}{2}$ (pour $t \in \mathbb{R}$ et $-\pi < x < \pi$) $\Leftrightarrow x = 2\arctan t\ \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

sachant que $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

Nous obtenons $I = \int F(\sin x, \cos x)dx = \int F(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}dt$ qui est une fraction rationnelle en t (dont la primitivation demande souvent de longs calculs).

Exemple

$$\boxed{I_8 = \int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx\ \ (x \neq (2k+1)\pi)\ \ k \in \mathbb{Z}}$$

Posons $t = \tan(x/2)$ d'où

$x = 2\arctan t \Leftrightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

avec $\sin t = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

et

$$I_8 = \int \frac{2t}{(1+t^2)(1+\frac{1-t^2}{1+t^2})}\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$= \int \frac{2t}{1+t^2}dt = \ln(1+t^2) + C$$

$I_8 = \ln(1+\tan^2\frac{x}{2}) + C_1$ (avec $C_1 = C + \ln 2$)

Autres expressions :

$$1 + \tan^2\frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \Rightarrow I_8 = -\ln\cos^2\frac{x}{2} + C$$

ou $I_8 = -\ln\frac{|1+\cos x|}{2} + C$ ou $I_8 = -\ln|1+\cos x| + C$

Forme $K_n = \int \tan^n x dx,\ \ n \in \mathbb{Z}^*$

- **1er cas : n est pair** poser $t = \tan x$ (si n est positif, ajouter et retrancher 1 pour faire apparaître la différentielle de $\tan x$)
- **2ème cas : n est impair** poser $t = \sin x$ ou $t = \cos x$ ou $t = \tan x$

(on préférera $t = \cos x$ si $n > 0$, et $t = \sin x$ si $n < 0$)

Exemple

$$\boxed{K = \int \tan^2 x dx}$$

$n = 2$ est pair et positif:

Ajoutons et retranchons 1 :

$$K = \int (\tan^2 x + 1 - 1) dx$$
$$= \int (\tan^2 x + 1) dx - \int dx$$
$$K = \tan x - x + C$$

Exemple

$$\boxed{L = \int \frac{1}{\tan x} dx}$$

$n = -1$ est impair et négatif:

Posons $t = \sin x \Leftrightarrow dt = \cos x dx$

$$L = \int \frac{1}{\tan x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$
$$= \frac{dt}{t} = \ln |t| + C$$
$$L = \ln |\tan x| + C$$

Formules d'addition

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\\
\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\\
\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\\
\sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)
\end{aligned}$$

Formules de duplication

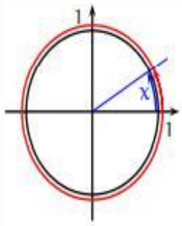
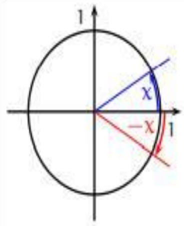
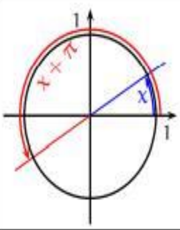
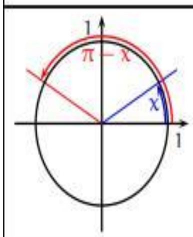
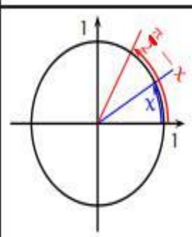
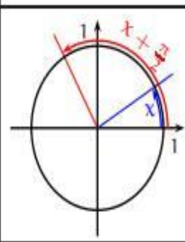
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \qquad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Formules de linéarisation

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Formules de factorisation

$$1+\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \qquad 1-\cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Tour complet	Angle opposé	Demi-tour
 $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$	 $\cos(-x) = \cos(x)$ $\sin(-x) = -\sin(x)$	 $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$
Angle supplémentaire	**Angle complémentaire**	**Quart de tour direct**
 $\cos(\pi-x) = -\cos(x)$ $\sin(\pi-x) = \sin(x)$	 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$	 $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

Des sources supplémentaires :

-http://uel.unisciel.fr/

-http://exo7.emath.fr/

« Le monde pourra devenir plus mieux si on ne cesse pas à partager le savoir, N'oublier pas de partager avec vos amis. la connaissance de l'homme est à la base tout succès »