LIVRE D'EXERCICES — MP-MP*

MP-MP* — 2026-2027

Chapitre 001 — Groupes, anneaux : Rappels et complèments (L2)

EXERCICE 1 Morphisme de groupe et images direct et réciproque

Titre : Morphisme de groupe et images direct et réciproque
ID : 22 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 2 | ID : 22
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit G un groupe additif et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

1. Montrer que pour tout sous-groupe H de G, on a $f^{-1}(f(H)) = H + \ker(f)$
2. Montrer que pour tout sous-groupe H' de G', on a $f(f^{-1}(H')) = H' \cap \mathrm{Im}(f)$

Solution

1. Soit $x \in G$ alors :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(f(H)) &\Leftrightarrow f(x) \in f(h) \\ &\Leftrightarrow \exists h \in H, f(x) = f(h) \\ &\Leftrightarrow \exists h \in H f(x-h) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists h \in H, x - h \in \ker(f) \\ &\Leftrightarrow \exists (h,k) \in H \times \ker(f), x - h = k \\ &\Leftrightarrow \exists (h,k) \in H \times \ker(f), x = h + k \\ &\Leftrightarrow x \in H + \ker(f), \end{aligned}$$

donc $f^{-1}(f(H)) = H + \ker(f)$

2. Soit $y \in H'$, on a :

$$\begin{aligned} y \in f(f^{-1}(H')) &\Leftrightarrow \exists x \in f^{-1}(H'), y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in E, f(x) \in H' \text{ et } y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in E, y = f(x) \text{ et } y \in H' \\ &\Leftrightarrow y \in \mathrm{Im}(f) \text{ et } y \in H' \\ &\Leftrightarrow y \in H' \cap \mathrm{Im}(f) \end{aligned}$$

donc $f(f^{-1}(H')) = H' \cap \mathrm{Im}(f)$

EXERCICE 2 Groupes non isomorphes

Titre : Groupes non isomorphes
ID : 30 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 17 | ID : 30
Difficulté : ★★☆☆☆

1)Soient (G_1, T) et $(G_2, *)$ deux groupe. On note $G = G_1 \times G_2$ et pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de G, on pose $x \perp y = (x_1 T y_1, x_2 * y_2)$. Démontrer que $(G, \perp)$ est un groupe et préciser eon élément neutre et le symétrique de chaque élément
2) Démontrer que les groupes additifs $G = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ et $G' = ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, +)$ ne sont pas isomorphes.

Solution

1) élémentaire.
2) Dans G, l'élément $\overline{1}$ est d'ordre 4 alors que dnans G', on a $\forall x' \in G', 2x' = (\overline{0}, \overline{0})$, par suite suit, il n'y a aucun élément d'ordre 4 dans G'.

EXERCICE 3 Bases du groupe Z^2 en tant que $Z-$module

Titre : Bases du groupe Z^2 en tant que $Z-$module
ID : 37 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 24 | ID : 37
Difficulté : ★★★☆☆

1. Démontrer que le groupe $(\mathbb{Z}^2, +)$ n'est pas monogène.
2. Démontrer que le groupe $(\mathbb{Z}^2, +)$ admet une partie génératrice à deux éléments.
3. Soit $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$. A quelle condition sur a, b, c, d, on a $\mathbb{Z}^2 = \langle (a, b), (c, d) \rangle$?

Solution

1. Si $\mathbb{Z}^2$ est monogène il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\mathbb{Z}^2 = \langle (a, b) \rangle$, donc il existe $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(1, 0) = k(a, b)$ et $(0, 1) = \ell(a, b)$ donc $ka = 1$ et $\ell a = 0$ donc $a \neq 0$ par suite $\ell = 0$ et cela donne une contradiction car on aurait l'égalité de $(0, 1)$ et $(0, 0)$, chose fausse.
2. Si $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ alors $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$ donc $\mathbb{Z}^2 = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle$.
3. Si $\mathbb{Z}^2 = \langle (a, b), (c, d) \rangle$ alors pour tout $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, il existe $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x(a, b) + y(c, d) = (u, v)$, c'est-à-dire que le système :

$$\mathfrak{s}_{u,v} : \quad \begin{cases} ax + cy = u \\ bx + dy = v \end{cases},$$

admet au moins une solution pour tout $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$. remarquns que si (x, y) est une solution de $\mathfrak{s}_{u,v}$ alors $\begin{cases} adx + cdy = du \\ bcx + cdy = cv \end{cases}$ et $\begin{cases} abx + bcy = bu \\ abx + ady = av \end{cases}$, donc en effectuant la différence, on a : $(ad - bc)x = du - cv$ et $(ad - bc)y = av - bu$, donc pour tout $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, on a $\begin{cases} ad - bc | av - bu \\ ad - bc | du - cv \end{cases}$, en particulier si on note $\delta = ad - bc$ on a $\delta | a, \delta | b, \delta | c, \delta | d$. il en découle que $\delta \neq 0$ car sinon on aurait $a = b = c = d = 0$, chose impossible car $\mathbb{Z}^2$ serait réduit à $\{(0, 0)\}$. Ainsi il existe $a', b', c', d' \in \mathbb{Z}$ tel que : $a = \delta a', b = \delta b', c = \delta c', d = \delta d'$ et $\delta = \delta^2(a'd' - b'c')$ donc $1 = \delta\delta'$ où $\delta' = a'd' - b'c'$ et alors $\delta | 1$, donc $|\delta| = 1$, ce qui donne $|ad - bc| = 1$ est une condition nécessaire pour avoir $\mathbb{Z}^2 = \langle (a, b), (c, d) \rangle$. Réciproquement si $ad - bc = 1$ alors pour tout $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, le retour au systéme $\mathfrak{s}_{u,v}$ ci-dessus donne pour : $x = \pm(du - cv)$ et $y = \pm(av - bu)$, on a : $(u, v) = x(a, b) + y(c, d)$ donc $\mathbb{Z} = \langle (a, b), (c, d) \rangle$. En conclusion, on a $\mathbb{Z} = \langle (a, b), (c, d) \rangle \Leftrightarrow |ad - bc| = 1$.

EXERCICE 4 Produit cartésien de deux groupes cycliques et ordre

Titre : Produit cartésien de deux groupes cycliques et ordre
ID : 38 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 25 | ID : 38
Difficulté : ★★☆☆☆

1. Soit $(G,.)$ un groupe et $a,b \in G$ tel que $ab = ba$ et ordre$(a) = m$ et ordre$(b) = n$ et $m \wedge n = 1$. Démontrer que ordre$(ab) = mn$.
2. Soient G_1 et G_2 deux groupes cycliques tel que card$(G_1) = m$ et card$(G_2) = n$. Démontrer que si $n \wedge m = 1$ alors $G_1 \times G_2$ est cyclique et si $G_1 = \langle a_1 \rangle$ et $G_2 = \langle a_2 \rangle$ alors $G_1 \times G_2 = \langle (a_1, a_2) \rangle$

Solution

1. Tout d'abord, comme $ab = ba$, on a $(ab)^{mn} = (a^m)^n.(b^n)^m = e$. Il en découle que ab est d'ordre fini et que si d est l'ordre de ab alors $d|mn$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(ab)^k = e$ alors $((ab)^k)^m = e = b^{km}$, donc $n|km$ et comme $n \wedge m = 1$ donc $n|k$. Par symétrie des rôles, on a aussi $m|k$ et comme $m \wedge n = 1$ on a $mn|k$, donc ordre$(ab) = mn$
2. Notons e_k l'élément neutre de G_k pour tout $k \in \{1,2\}$. Soit $A = (a_1, e_2)$ alors $A^m = (e_1, e_2)$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, si $A^k = (e_1, e_2)$ alors $a_1^k = e_1$, et comme a_1 est d'ordre m, on a $m|k$, donc A est d'ordre m. De même $B = (e_1, a_2)$ est d'ordre n. Comme $AB = BA = (a_1, a_2)$, et que $m \wedge n = 1$, la question permet de dire que $AB = (a_1, a_2)$ est d'ordre mn et comme $mn =$ card$(G_1 \times G_2)$, on a $G_1 \times G_2$ est cyclique et (a_1, a_2) est une générateur de $G_1 \times G_2$.

EXERCICE 5 Groupe dans lequel $x^2 = e$ pour tout élément x

Titre : Groupe dans lequel $x^2 = e$ pour tout élément x
ID : 43 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 30 | ID : 43
Difficulté : ★☆☆☆☆

1. Soit $(G,.)$ un groupe tel que
$$(\star) \quad \forall x \in G, x^2 = e.$$
Démontrer que G est commutatif.
2. Donner des exemples de groupe G vérifiant la condition $(\star)$ dans les cas :
   (a) G fini.
   (b) G infini.
3. Démontrer que si G est un groupe fini qui vérifie la condition $(\star)$ ci-dessus alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que card$(G) = 2^m$.

Solution

1. Si $x, y \in G$ on a $(xy)(xy) = e = xyxy$, donc $yxe = yxxyxy = xy$, donc $yx = xy$, ce qui términe la preuve.
2. (a) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$
   (b) $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}, +)$
3. Par récurrence : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{P}(n)$ la propriété : Pour tout groupe G fini tel que card$(G) \leq n$, si $\forall x \in G, x^2 = e$ alors $\exists \alpha \in \mathbb{N}$, card$(G) = 2^\alpha$.
   • On a $\mathscr{P}(1)$ car le seul cas à traiter est card$(G) = 1$ et on a $1 = 2^0$.
   • Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et soit G un groupe fini tel que card$(G) = n+1$. Comme $n+1 \geq 2$, il existe au moins un sous-groupe K de G tel que card$(K) <$ card(G), en effet $K = \{e\}$ convient. Soit H un sous-groupe de G de cardinal maximal tel que $H \subsetneq G$. Il existe alors $b \in G$ tel que $b \notin H$. On a $H \cap bH = \emptyset$ car si $x \in H \cap bH$, il s'écrit $x = h_1 = bh_2$, donc $b = h_1 h_2^{-1} \in H$, chose fausse. Par ailleurs $G' = H \cup bH$ est un sous-groupe de G car $H \subset G'$ et si

$x, y \in G'$ alors soit $x, y \in H$ donc $xy^{-1} \in H$ donc $xy^{-1} \in G'$. Si $x, y \in bH$ alors $x = bh_1, y = bh_2$ pour $h_1, h_2 \in H$, donc $xy^{-1} = bh_1h_2^{-1}b^{-1} = h_1h_2^{-1} \in H$. Finalement si $x \in H$ et $y \in bH$, $x = h_1, y = bh_2$ avec $h_1, h_2 \in H$, donc $xy^{-1} = h_1h_2^{-1}b^{-1} = bh_1h_2 \in bH$ (rappelons que pour tout $g \in G, g^{-1} = g$). On a G' est un sous-groupe de G et $\text{card}(G') = 2\,\text{card}(H) > \text{card}(H)$, par définition de H, on a $G' = G$, donc $\text{card}(G) = 2\,\text{card}(H)$, comme $\text{card}(H) \leq n$, l'hypothèse de récurrence permet de dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $\text{card}(H) = 2^\alpha$, donc $\text{card}(G) = 2.2^\alpha = 2^{\alpha+1}$.

EXERCICE 6 — Sous-groupes de (Z,+)

Titre : Sous-groupes de (Z,+)
ID : 46 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 33 | ID : 46
Difficulté : ★☆☆☆☆

Démontrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ est de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Solution

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Si $H = \{0\}$ alors $H = n\mathbb{Z}$ pour $n = 0$, sinon $H^+ = \mathbb{N}^* \cap H$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$, elle admet un plus petit élément n. On a donc $n \in H$, par suite $n\mathbb{Z} \subset H$. Si $x \in H$, la division euclidienne de x par n donne $x = qn + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < n$, on a $r = x - nq \in H$, donc $r = 0$ et $x = nq$, donc $H \subset n\mathbb{Z}$ et alors $H = n\mathbb{Z}$.

EXERCICE 7 — Union de deux sous-groupes

Titre : Union de deux sous-groupes
ID : 49 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 35 | ID : 49
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G, \star)$.
A quelle condition l'ensemble $H \cup K$ est-il un sous-groupe de $(G, \star)$?

Solution

Supposons que $H \cup K$ est un sous-groupe de G et qu'aucun des deux sous-groupes n'est inclus dans l'autre. Il existe alors $(a, b) \in G^2$ tel que $a \in H$ et $b \in K$ et $a \notin K$ et $b \notin H$. Soit $c = a \star b$; alors $c \in H$ ou $c \in K$. Si $c \in H$, comme $a \in H$, le symétrique a' de a réalise $a' \in H$ et par suite $a' \star (a \star b) \in H$, ce qui donne $b \in H$, contradiction. Ce raisonnement est valable si on suppose $c \in K$. On a don prouvé que l'assertion :

$$G = H \cup K \quad \text{et} \quad H \not\subset K \quad \text{et} \quad K \not\subset H$$

est fausse; par suite sa négation est vraie, laquelle est :

$$\neg(H \cup K = G) \quad \text{ou} \quad (H \subset K \quad \text{ou} \quad K \subset H)$$

qui n'est autre que l'implication logique :

$$H \cup K = G \Rightarrow H \subset K \quad \text{ou} \quad K \subset H$$

EXERCICE 8 — Les plus petits groupes

Titre : Les plus petits groupes
ID : 50 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 36 | ID : 50
Difficulté : ★☆☆☆☆

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer le nombre de lois de composition internes sur G et le nombre maximale de celles d'entre elles qui fait de G un groupe :

1. $G = \{a\}$ est un singleton
2. $G = \{a, b\}$ est une paire
3. $G = \{a, b, c\}$ est un ensemble à trois éléments.

Solution

Généralement, si E est un ensemble fini de cardinal n, $n \in \mathbb{N}^*$, une loi de composition interne sur E est une application de E^2 vers E. Comme $\text{card}(E) = n$, on a $\text{card}(E^2) = n^2$ et par suite le nombre de telles lois de composition internes est $\text{card}(E^{E^2}) = n^{n^2}$, ce qui donne 1, 16 et 19683 respectivement pour $n = 1, 2$ et 3.
• Pour $n = 1$, en posant $E = \{a\}$, il y'a une unique loi de composition interne possible $\star$ sur E définie par $a \star a = a$.
• Pour $n = 2$, si $(E, \star)$ est un groupe et si on pose $E = \{a, b\}$ et on suppose que a est l'élément neutre de $(E, \star)$ alors forcément, on a : $a \star a = a, a \star b = b \star a = b$ et $b \star b = a$. La tables de $(E, \star)$ et celle de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$:

$\star$	a	b
a	a	b
b	b	a

et

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

montrent que l'application $f : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to E; \begin{cases} \overline{0} \mapsto a \\ \overline{1} \mapsto b \end{cases}$ est un isomomrphisme de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ vers $(E, \star)$ et comme $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ est un groupe, il en est de même de $(E, \star)$. En intervertissant les rôles de a et b on voit qu'il y'a une autre loi de composition interne sur E qui fait de E un groupe, ce qui fait au total deux lois de composition internes
• Si $E = \{a, b, c\}$ et $\star$ une loi qui fait de $(E, \star)$ un groupe, le début de la table de $(E, \star)$ est

$\star$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	?	?
c	c	?	?

La case correspondant à $c \star b$ ne peut recevoir ni b (car sur la colonne de cette case) ni c (car sur sa ligne), donc on n'a pas le choix : $c \star b = a$, ce qui permet de compléter la table comme suit :

$\star$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

. La table de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$:

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

montre que l'application $g : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to E$ définie par $f(\overline{0}) = a, f(\overline{1}) = b, f(\overline{2}) = c$ est un isomorphisme de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ vers $(E, \star)$ et par suite que $(E, \star)$ est un groupe. En affectant le rôle de l'élément neutre respectivement à b puis c, on obtient au total trois lois de composition internes qui font de E un groupe.

EXERCICE 9 Exemple de générateurs d'un groupe fini

Titre : Exemple de générateurs d'un groupe fini
ID : 51 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 37 | ID : 51
Difficulté : ★☆☆☆☆

G désigne le groupe additif $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

1. Préciser les générateurs de G.
2. Sans faire des calculs, quels sont les ordres possibles des éléments de G ?
3. Dresser le tableau donnant les ordres des éléments de G et expliciter le sous-groupe engendré par chaque élément de G.

4. Monter que si A est l'ensemble des générateurs de G alors $(A, \times)$ est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Solution

1. On sait que les générateurs de G sont $\overline{k}$ avec $k \in [\![1, 12]\!]$ et $k \wedge 12 = 1$, donc ce sont : $\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}$.
2. Les ordres sont les diviseurs de 12, donc : $1, 2, 3, 4, 6, 12$.
3. Le tableau suivant indique les ordres des éléments de G :

$\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
ordre$(\overline{x})$	1	12	6	4	3	12	2	12	3	4	6	12

On a : $\langle\overline{0}\rangle = \{\overline{0}\}$,
$\langle\overline{1}\rangle = \langle\overline{5}\rangle = \langle\overline{7}\rangle = \langle\overline{11}\rangle = G$,
$\langle\overline{2}\rangle = \langle\overline{10}\rangle = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$
$\langle\overline{3}\rangle = \langle\overline{9}\rangle = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$
$\langle\overline{4}\rangle = \langle\overline{8}\rangle = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \}$
$\langle\overline{6}\rangle = \{\overline{0}, \overline{6}\}$

4. $A = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\}$ dont la table de multiplication est donnée ci-dessus et à côté, la table de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ avec la convention d'omettre les barres aux classes d'équivalence. En examinant ces tables, on en déduit que $(A, \times)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, +)$.

$\times$	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

,

$+$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$

EXERCICE 10 Groupe fini et ordre d'un élément

Titre : Groupe fini et ordre d'un élément
ID : 52 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 38 | ID : 52
Difficulté : ★★☆☆☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}/z^n = 1\}$ et soit $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$

1. Prouver que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Démontrer que G est un sous-groupe infini de $(\mathbb{C}^*, \times)$, dans lequel tout élément est d'ordre fini.
3. Donner un exemple de groupe G infini dans lequel tout élément différent de l'élément neutre est d'ordre 2.

Solution

1. $\mathbb{U}_n$ est une partie de $\mathbb{C}^*$, non vide car $1 \in \mathbb{U}_n$ et si $x, y \in \mathbb{U}_n$ alors $x^n = y^n = 1$ donc $(xy^{-1})^n = x^n(y^n)^{-1} = 1$ et alors $xy^{-1} \in \mathbb{U}_n$. Donc $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

2. On a $G \neq \emptyset$ car $1 \in G$. Si $x, y \in G$ alors $\exists n, m \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{U}_n$ et $y \in \mathbb{U}_m$. Soit $N = nm$ alors $x, y \in \mathbb{U}_N$ car $x^N = x^{nm} = (x^n)^m = 1^m = 1$ et $y^N = 1$ de la même façon. par la question 1) ci-dessus $xy^{-1} \in \mathbb{U}_N$ donc $xy^{-1} \in G$, donc G est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
   • Si $n \in \mathbb{N}^*$, on voit que $\omega_n = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$ est un élément de G d'ordre n.
   • G est infini car la partie $\{\omega_n / n \in \mathbb{N}\}$ est une partie infinie de G puisque ses éléments sont deux à deux distincts car ils ont des ordres deux à deux distincts.
3. Si $G = \mathbb{U}_2^{\mathbb{N}}$ alors il convient comme exemple. On peut rempalcer $\mathbb{U}_2$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Un autre exemple $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ où Δ est la différence symétrique ensembliste.

EXERCICE 11 Matrices de transvections et groupes

Titre : Matrices de transvections et groupes
ID : 53 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 39 | ID : 53
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.On appelle matrice de transvection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme $T_{i,j,a} = I_n + aE_{i,j}$ où $i, j \in [\![1, n]\!]$ et $i \neq j$. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble de telles matrices

1. Est ce que $\mathcal{T}$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$?
2. Même question pour $\mathcal{T}_{ij} = \{T_{i,j,a} / a \in \mathbb{K}\}$ pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ fixé tel que $i \neq j$

Solution

1. Si $n \geq 2$ alors $\mathcal{T}$ n'est pas un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ car si $i, j, k, \ell \in [\![1, n]\!]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a : $T_{i,j,\alpha} \times T_{k,\ell,\beta} = (I_n + \alpha E_{ij})(I_n + \beta E_{k,\ell} = I_n + \alpha E_{ij} + \beta E_{k\ell} + \delta_{jk}\alpha\beta E_{i\ell}$. Si, par exemple, on prends : $(i, j) = (\ell, k) = (1, 2)$ et $\alpha = \beta = 1$, il vient : $T_{1,2,1} \times T_{2,1,1} = I_n + E_{12} + E_{21} + E_{11} = T$ n'est pas une matrice de transvection car par exemple $T_{11} = 2$.
2. Si on fixe $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, la relation $(\star)$ ci-dessus montre que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a : $T_{i,j,\alpha} \times T_{i,j,\beta} = T_{i,j,\alpha+\beta}$ donc $\mathcal{T}_{ij}$ est stable par $\times$ et de plus si $T_{i,j,\alpha} \in \mathcal{T}_{ij}$, on voit que $T_{i,j,\alpha}^{-1} = T_{i,j,-\alpha}$, donc $\mathcal{T}_{ij}$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$.

EXERCICE 12 loin duale et structure de groupe

Titre : loin duale et structure de groupe
ID : 54 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 40 | ID : 54
Difficulté : ★☆☆☆☆

1. Soit $(G, \perp)$ un groupe et $\top$ la loi de composition interne définie par :
$$\forall (x, y) \in G^2, x \top y = y \perp x$$
Montrer que $(G, \top)$ est un groupe isomorphe au groupe $(G, \perp)$.
2. Determiner tous les morphismes de groupe de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer tous les morphismes de groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Solution

1) Soit $\varphi : G \to G; x \mapsto x^{-1}$. Pour tout $x, y \in G$, $\varphi(x \perp y) = (x \perp y)^{-1} = y^{-1} \perp x^{-1} = x^{-1} \top y^{-1} = \varphi(x) \top \varphi(y)$. Donc φ est un morphisme de $(G, \perp)$ vers $(G, \top)$. De plus φ est bijective, donc c'est un isomorphisme et comme $(G, \perp)$ est un groupe, $(G, \top)$ est aussi un groupe isomorphe à $(G, \perp)$.
2) Soit $\varphi : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ un morphisme de groupes. Notons $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}, \tilde{5}\}$. On a $4.\bar{1} = \bar{0}$, donc $4.\varphi(\bar{1}) = \varphi(\bar{0}) = \tilde{0}$.Il en découle que $\varphi(\bar{1}) \in \{\tilde{0}, \tilde{3}\}$. Réciproque-

ment si $\varphi(\bar{1}) = \tilde{0}$ alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi(\bar{k}) = \tilde{0}$ et c'est bien un morphisme. Si $\varphi(\bar{1}) = \tilde{3}$ alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi(\bar{k}) = \tilde{3}.\tilde{k}$ qui est une application bien définie car pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$ si $\bar{k} = \bar{\ell}$ alors $4|(\ell - k)$, par suite $6|3(\ell - k)$ et donc $\tilde{k} = \tilde{\ell}$. Par ailleurs φ est bien un morphisme dans ce cas car pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$, on a $\varphi(\bar{k} + \bar{\ell}) = \varphi(\overline{k + \ell}) = k\tilde{+}\ell = \tilde{k} + \tilde{\ell} = \varphi(k) + \varphi(\ell)$.
Conclusion : Il y'a exactement deux morphismes de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$, à savoir : $\varphi_0(\bar{k}) = \tilde{0}$ et $\varphi_3(\bar{k}) = \tilde{3}.\tilde{k}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Remarquons que $\varphi_3(\bar{0}) = \varphi_3(\bar{2}) = \tilde{0}$ et $\varphi_3(\bar{1}) = \varphi_3(\bar{3}) = \tilde{3}$. En particulier, on a $\mathrm{Im}(\varphi_3) = \langle\tilde{3}\rangle = \{\tilde{0}, \tilde{3}\}$ et $\ker(\varphi_3) = \langle\bar{2}\rangle = \{\bar{0}, \bar{2}\}$.
3) Soit $\varphi : \mathcal{S}_n \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupe. Comme $\tau_{1,2}^2 = \mathrm{Id}$, on a $\varphi(\tau_{1,2})^2 = 1$, donc $\varphi(\tau_{1,2}) = \pm 1$. Par ailleurs, si $\tau_{i,j}$ est une transposition quelconque, considérons une permutation σ tel que $\sigma(1) = i$ et $\sigma(2) = j$, il en découle que $\sigma\tau_{1,2}\sigma^{-1} = \tau_{\sigma(1),\sigma(2)} = \tau_{i,j}$, donc $\varphi(\tau_{i,j}) = \varphi(\sigma)\varphi(\tau_{1,2})\varphi(\sigma)^{-1} = \varphi(\tau_{1,2})$. Il en découle que soit $\varphi(\tau) = 1$ pour toute transposition τ, soit $\varphi(\tau) = -1$ pour toute transposition τ, donc, et compte tenu du fait que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions, on a : $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \varphi(\sigma) = 1$ ou $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \varphi(\sigma) = \varepsilon(\sigma)$ où ε est la signature. Réciproquement on reconnaît le morphisme trivial et la signature qui sont bien des morphismes, donc ce sont les seuls.

EXERCICE 13 — Un groupe G sinjecte dans S(G)

Titre : Un groupe G sinjecte dans S(G)
ID : 55 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 41 | ID : 55
Difficulté : ★★★☆☆

1. Soit $(G, \star)$ un groupe. Démontrer qu'il existe un morphisme injectif Φ, de $(G, \star)$ vers $(\mathscr{S}(G), \circ)$ où $(\mathscr{S}(G), \circ)$ est le groupe des bijections de G vers G pour la composition des applications.
2. Précise les cas où Φ est un isomoprphisme.

Solution

1) Pour tout $a \in G$, notons $\varphi_a : G \to G; x \mapsto \varphi_a(x) = a \star x$. Alors $\varphi_a \in \mathcal{S}(G)$ puisque pour tout $y \in G$, on a pour tout $x \in G$, $\varphi_a(x) = y \Leftrightarrow y = a \star x \Leftrightarrow x = a^{-1} \star y$, donc y admet un unique antécédent par φ_a. L'application : $\Phi : G \to \mathcal{S}(G), x \mapsto \Phi(x) = \varphi_x$ est un morphisme de $(G, \star)$ vers $(\mathcal{S}(G), \circ)$ car pour tout $(x, y) \in G^2$ et tout $g \in G$, on a $\Phi(x \star y)(g) = \varphi_{x\star y}(g) = (x \star y) \star g = x \star (y \star g) = \varphi_x(\varphi_y(g)) = (\varphi_x \circ \varphi_y)(g)$, donc $\forall (x, y) \in G^2, \Phi(x \star y) = \Phi(x) \circ \Phi(y)$. Par ailleurs Φ est injectif car si $a \in \ker\Phi$ alors $\Phi(a) = \mathrm{Id}_G$ donc pour tout $g \in G$ on a $a \star g = g$ donc $a = e$ (il suffit de remplacer g par e par exemple).
2) si G est infini ou fini de cardinal strictement supérieur à 2 alors il existe au moins $\sigma \in \mathcal{S}(G)$ tel que $\sigma \neq \mathrm{Id}_G$ et σ admet un point fixe au moins : Il suffit de fixer $(a, b) \in G^2$ tel que $a \neq b$ et de prendre $\sigma = \tau_{a,b}$ la permutation qui transpose a et b et laisse fixe les autres éléments de G. Remarquons que sauf pour $a = e$, la permutation φ_a n'admet aucun point fixe, donc $\Phi(G) \subsetneq \mathcal{S}(G)$ et Φ n'est pas en conséquence surjectif donc n'est pas un isomorphisme. Si $\mathrm{card}(G) = 1$, il est clair que Φ est un isomorphisme puisque $\Phi(G) = \mathcal{S}(G) = \{\mathrm{Id}_G\}$ et si $\mathrm{card}(G) = 2$ alors $\mathrm{card}(\Phi(G)) = \mathrm{card}(G) = 2 = 2! = \mathrm{card}(\mathcal{S}(G))$ donc dans ce cas aussi Φ est un isomorphisme. En conclusion Φ est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{card}(G) = 1$ ou $\mathrm{card}(G) = 2$.

EXERCICE 14 — Des exemples sur l'existence d'éléments d'ordre fini

Titre : Des exemples sur l'existence d'éléments d'ordre fini
ID : 56 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 42 | ID : 56
Difficulté : ★★☆☆☆

Donner un exemple de groupe(non trivial) où :

1. Tout élément est d'ordre fini.

2. Aucun élément différent de l'élément neutre n'est d'ordre fini.
3. Il y'a en même temps des éléments différents de l'élément neutre, d'ordres finis et d'autres qui ne sont pas d'ordre fini.
4. G est infini et tout élément est d'ordre fini.
5. G est infini et tous les éléments différents de l'élément neutre sont d'ordre fini et ont le même ordre.

Solution

1)Dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+)$, tout élément est d'ordre fini puisque $\forall k \in \mathbb{Z}, 6\bar{k} = \bar{0}$.
2) Dans $(\mathbb{R},+)$, seul 0 est d'ordre fini, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \neq 0 \Rightarrow nx \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3) Dans $(\mathbb{C}^*,\times)$ toutes les racines n èmes de l'unité sont d'ordre fini, par ailleurs tout nombre complexe z tel que $|z| \neq 1$ ne peut être d'ordre fini car soit $|z|^n$ tends vers 0 soit vers $+\infty$ quand n tends vers $+\infty$.
4)Soit $G = \cup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{U}_n$ alors G est un sous-groupe infini de $(\mathbb{C}^*,\times)$ dans lequel tout élément est d'ordre fini.
5) Soit $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ alors G est infini et pour tout $f \in G$ on a $2f = \theta$ où θ est l'application nulle de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, puisque dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a $\forall k \in \mathbb{Z}, 2\bar{k} = \bar{0}$. Ainsi pour tout $f \in G\backslash\{\theta\}$ on a $f \neq \theta \quad$ et $\quad 2f = \theta$ donc ordre$(f) = 2$.

EXERCICE 15 Centre d'un groupe : études

Titre : Centre d'un groupe : études
ID : 57 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 43 | ID : 57
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $(G,.)$ un groupe et pour tout $a \in G$, on note φ_a l'application :

$$\varphi_a : G \to G; x \mapsto \varphi_a(x) = axa^{-1}$$

et

$$C_a = \{x \in G / xa = ax\}.$$

On note : $\mathscr{S}(G)$ le groupe des bijections de G vers G, Aut(G) l'ensemble des automorphismes de G ,

$$\text{Int}(G) = \{\varphi_a / a \in G\}$$

et

$$Z(G) = \{x \in G / \forall g \in G, xg = gx\},$$

appelé le centre de G.

1. (a) Montrer que pour tout $a \in G$, C_a est un sous-groupe de G.
   (b) En déduire que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
   (c) Soit $g \in G$. On pose
   $$gZ(G)g^{-1} = \{gxg^{-1} / x \in Z(G)\}.$$
   Prouver que $gZ(G)g^{-1} = Z(G)$.
2. Démontrer que Aut(G) est un sous-groupe de $(\mathscr{S}(G),\circ)$ et que Int(G) est un sous-groupe de $(\text{Aut}(G),\circ)$.
3. Démontrer que $\Phi : G \to \mathscr{S}(G); x \mapsto \Phi(x) = \varphi_x$ est un morphisme et préciser son image et son noyau.
4. **Exemple de détermination du centre d'un groupe :**
   Démontrer que $Z(\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})) = \mathbb{R}I_2$.

Solution

1. (a) On va montrer que C_a est un sous-groupe de G en utilisant la propriété caractéristique d'un sous-groupe.
   - On a $C_a \neq \emptyset$ car $e \in C_a$ puisque $\forall x \in G, xe = ex$.
   - Si $x, y \in C_a$ alors $xy \in C_a$ car $(xy)a = x(ya) = x(ay) = (xa)y = (ax)y = a(xy)$.
   - Si $x \in C_a$ alors $xa = ax$, donc $x^{-1}xax^{-1} = x^{-1}axx^{-1}$, d'où $ax^{-1} = x^{-1}a$ donc $x^{-1} \in C_a$.

   Il découle des trois points que C_a est un sous-groupe de G.

   (b) On remarque que $Z(G) = \bigcap_{a\in G} C_a$, donc comme intersection de sous-groupes de G, $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

   (c) Soit $x \in gZ(G)g^{-1}$, alors il existe $h \in Z(G)$ tel que $x = ghg^{-1}$. Comme $h \in Z(G)$, on a $gh = hg$, par suite $x = hgg^{-1} = h$, donc $x \in Z(G)$. Réciproquement si $x \in Z(G)$ alors $gx = xg$, donc $x = gxg^{-1}$, donc $x \in gZ(G)g^{-1}$. On a donc l'égalité ensembliste demandée :
   $$(\star) \quad \forall g \in G, gZ(G)g^{-1} = Z(G).$$

2. Tout d'abord, il est clair que $\mathrm{Aut}(G) \subset \mathcal{S}(G)$. On a : $\mathrm{Aut}(G) \neq \emptyset$ car $\mathrm{Id}_G \in \mathrm{Aut}(G)$. Si $f, g \in \mathrm{Aut}(G)$ alors pour tout $x, y \in G$, on a : $(f \circ g^{-1})(x \times y) = f(g^{-1}(x) \times g^{-1}(y)) = f(g^{-1}(x)) \times f(g^{-1}(y)) = (f \circ g^{-1})(x) \star (f \circ g^{-1})(y)$ donc $f \circ g^{-1}$ est un endomorphisme de $(G, \times)$, et comme il est bijectif (composé de deux bijections) c'est un automorphisme de G. Donc $\mathrm{Aut}(G)$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}(G)$.
   Montrons que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$.
   Tout d'abord, $\mathrm{Int}(G) \subset \mathrm{Aut}(G)$, puisque si $a \in G$, l'application φ_a est un morphisme de G vers G car si $x, y \in G$ alors $\varphi_a(xy) = axya^{-1} = axeya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = \varphi_a(x)\varphi_a(y)$. Par ailleurs si $x \in G$ alors $x \in \ker(\varphi_a) \Leftrightarrow \varphi_a(x) = e \Leftrightarrow axa^{-1} = e \Leftrightarrow x = a^{-1}ea = e$, donc $\ker(\varphi_a) = \{e\}$ et φ_a est injectif. Finalement si $y \in G$, pour $x = a^{-1}xa$, on a $\varphi_a(x) = y$, donc φ_a est surjectif et finalement $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(G)$.
   On a $\mathrm{Id}_G \in \mathrm{Int}(G)$ car $\mathrm{Id}_G = \varphi_e$. Si $f, g \in \mathrm{Int}(G)$, posons $f = \varphi_a$ et $g = \varphi_b$ avec $a, b \in G$. Pour tout $x \in G$, on a $(f \circ g)(x) = \varphi_a(\varphi_b(x)) = abxb^{-1}a^{-1} = (ab)x(ab)^{-1} = \varphi_{ab}(x)$, donc $f \circ g \in \mathrm{Int}(G)$. On a $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow x = aya^{-1} \Leftrightarrow y = a^{-1}xa$ donc $f^{-1} = \varphi_{a^{-1}}$ et par suite $\forall f \in \mathrm{Int}(G), f^{-1} \in \mathrm{Int}(G)$ et donc $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$.

3. On a démontré ci-dessus que :$\forall (a, b) \in G^2, \Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$ donc Φ est un morphisme de G vers $\mathcal{S}(G)$. On a clairement $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Int}(G)$. Soit $a \in$ 'G, alors :
   $$\begin{aligned} a \in \ker\Phi &\Leftrightarrow \varphi_a = \mathrm{Id}_G \\ &\Leftrightarrow \forall x \in G,\ axa^{-1} = x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in G, ax = xa \\ &\Leftrightarrow x \in Z(G) \end{aligned}$$
   Il en découle que $\ker(\Phi) = Z(G)$.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in Z(\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}))$. On va démntrer que $b = c = 0$ et que $a = d$. Pour cela remarquons que $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ donc réalise $MA = AM$, ce qui donne :
   $$\begin{pmatrix} a+b & c+d \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{pmatrix}$$
   donc $a = d$ et $b = 0$. En utilisant de la même façon $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ on obtient $c = 0$, donc $b = c = 0$ et $a = d$ donc $A = \lambda I_2$ avec $\lambda = a \in \mathbb{R}$. Réciproquement si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $A = \lambda I_2$ réalise $\forall M \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R}), AM = MA$, donc $A \in Z(\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}))$. Il découle de tout que $Z(\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}I_2$.

EXERCICE 16 Etude de $x \mapsto x^k$ de G vers G

Titre : Etude de $x \mapsto x^k$ de G vers G
ID : 58 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 44 | ID : 58
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit G un groupe fini de cardinal n et $k \in \mathbb{N}$. On considère l'application :

$$\varphi_k : G \to G; x \mapsto x^k$$

1. Démontrer que si le groupe G est commutatif alors φ_k est un morphisme, et que φ_k est un isomorphisme si et seulement si $k \wedge n = 1$.
2. Donner un exemple de groupe G de cardinal n et d'entier naturel k tel que $k \wedge n = 1$ et φ_k n'est pas un morphisme.

Solution

1. Supposons que G est commutatif, alors pour tout $a, b \in G$, on a $(ab)^k = a^k b^k$ donc $\varphi_k(ab) = \varphi_k(a)_p h_k(b)$ et φ est un morphisme de G vers G. Si $k \wedge n = 1$, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ku + nv = 1$, donc pour tout $y \in G$, on a $y = y^1 = y^{ku+nv} = (y^u)^k (y^n)^v = x^k$ où $x = y^u$, donc φ_k est surjectif, et comme G est fini c'est un automorphisme.[a]
2. Soit G le sous groupe de $\mathcal{S}_4$ engendré par la transposition $\tau = (1,3)$ et le $n-$cycle $\sigma = (1,2,3,4)$.On sait que si on pose $A = \{\sigma, s^3, \tau\}$ alors G est l'ensemble de tous les produits finis des éléments de A. On remarque que $\sigma\tau = \tau\sigma^3 = (1,4)(2,3)$ et que $\sigma^3\tau = \tau\sigma = (1,2)(3,4)$, donc en posant $G_1 = \langle\sigma\rangle = \{\mathrm{Id}, \sigma, \sigma^3\}$, on a : $G = G_1 \cup \tau G_1$ où de sorte que $\mathrm{card}(G) = 8$. Ensuite on remarque que $(\sigma\tau)^3 = \sigma\tau$ et $\sigma^3\tau^3 = \sigma^3\tau = \tau\sigma$ et comme $\sigma\tau \neq \tau\sigma$(car $\sigma\tau(1) = 4$ et $\tau\sigma(1) = 2$), on voit aisément que $(\sigma \circ \tau)^3 \neq \sigma^3 \circ \tau^3$, donc φ_3 n'est pas un morphisme de G vers G.

a. Généralement si E est un ensemble fini, alors une application $f : E \to E$ est bijective si et seulement si elle est surjective si et seulement si elle est injective.

EXERCICE 17 Sous-groupes du groupe additf (R,+)

Titre : Sous-groupes du groupe additf (R,+)
ID : 59 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 45 | ID : 59
Difficulté : ★★☆☆☆

1. Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Prouver que soit H est de la forme $H = \omega\mathbb{Z}$ avec $\omega \in \mathbb{R}_+$ (on dit que H est discret), soit H est partout dense dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $H = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $b \neq 0$. Montrer que H est discret si et seulement si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.
3. Démontrer que pour tout $(x, y) \in [-1, 1]^2$, tel que $x < y$, il existe au moins un entier naturel n tel que $x < \cos n < y$.

Solution

1. Posons $H_+^* = H \cap \mathbb{R}_+^*$. Si $H_+^* = \emptyset$ alors $H = \{0\}$, en effet si $x \in H$ avec $x \neq 0$ on a $-x \in H$ donc $|x| \in H$ et $|x| > 0$. Ainsi si $H_+^* = \emptyset$ alors $H = \omega\mathbb{Z}$ avec $\omega = 0$.
Si $H_+^* \neq \emptyset$ alors H_+^* est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$, donc elle admet une borne inférieure ω. On a $\omega \geq 0$ et deux cas sont possibles : Premier cas : $\omega > 0$. Montrons que $\omega \in H$. Sinon, comme $\omega = \inf(H_+^*)$, $\exists x_1 \in H, \omega < x_1 < \frac{3\omega}{2}$, de même $\exists x_2 \in H, \omega < x_1 < x_2 < \frac{3\omega}{2}$. Il en découle que $\omega' = x_2 - x_1 \in H$ et de plus on a $\omega' > 0$ et $\omega' < \omega$, ce qui contredit la définition de ω, donc $\omega \in H$. Il en découle que $\omega\mathbb{Z} \subset H$. Réciproquement soit $x \in H$ et soit $k = E\left(\frac{x}{\omega}\right)$ la partie entière de $\frac{x}{\omega}$; alors $k\omega \leq x < k\omega + \omega$ donc $0 \leq \omega'' = x - k\omega < \omega$ et comme $\omega'' \in H$, on

a forcément $\omega'' = 0$ donc $x = k\omega$ et $H = \omega\mathbb{Z}$.
Deuxième cas $\omega = 0$; on va démontrer que H est dense dans $\mathbb{R}$, pour cela considérons $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$, donc $y - x > 0$, et par définition de la borne inférieure, $\exists h \in H_+^*, 0 < h < y - x$.Soit $k = E\left(\frac{x}{h}\right)$ alors $kh \leq x < (k+1)h$. Soit $a = (k+1)h$ alors $a \in H$ et $x < a$. Par ailleurs, on a $a = kh + h$ et $kh \leq x$ et $h < y - x$ donc $a < x + y - x = y$ et finalement on a $x < a < y$ et $a \in H$, donc H est dense dans $\mathbb{R}$.

2. si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, si $a = 0$ alors $G = b\mathbb{Z}$, sinon $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$. On a $G = \mathbb{Z}\frac{a}{q}$, en effet $b = \frac{pa}{q}$ donc si $x \in G$, alors $x = ka + \ell b$ avec $k, \ell \in Z$, donc $x = (kq + \ell p)\omega$ où $\omega = \frac{a}{q}$. Réciproquement si $x = m\omega$ avec $m \in \mathbb{Z}$, comme $p \wedge q = 1$, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tel que $up + vq = 1$, donc $x = m\omega(up + vq) = m\frac{a}{q}(up + vq) = (um)b + (vm)a \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$.
Réciproquement, si $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est discret, posons $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \omega\mathbb{Z}$, comme $a, b \in G$, il existe $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k\omega$ et $b = \ell\omega$, donc $\frac{a}{b} = \frac{k}{\ell} \in \mathbb{Q}$.

3. Soit $x, y \in [-1, 1]$ tel que $x < y$. Posons $\alpha = \arccos(x)$ et $\beta = \arccos(y)$; alors $\beta < \alpha$ par décroissance stricte de arccos. D'après la question précédente, $Z + 2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$, donc il existe $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\beta < k + 2\pi\ell < \alpha$ et par décroissance stricte de la fonction cos sur $[0, \pi]$, on a $\cos(\alpha) < \cos(k + 2\pi\ell) < \cos(\beta)$, et comme cos est $2\pi-$périodique et paire, en posant $n = |k|$, on a $x < \cos(n) < y$.

EXERCICE 18 Condition pour que HK soit un sous-groupe

Titre : Condition pour que HK soit un sous-groupe
Difficulté :
ID : 60 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 46 | ID : 60

G est un groupe multiplicatif. Soient H et K deux sous-groupes de G et on note

$$HK = \{hk / (h, k) \in H \times K\}.$$

1. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $HK \subset KH$
   (ii) $KH \subset HK$
   (iii) $HK = KH$
   (iv) HK est un sous-groupe de G.
2. En considérant le groupe symétrique $\mathcal{S}_3$, donner un contre exemple où HK n'est pas un sous-groupe.

Solution

1. • $(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons que $HK \subset KH$, soit $x \in KH$, alors $\exists k \in K, \exists h \in H, x = kh$, donc $x^{-1}x = h^{-1}k^{-1} \in HK$ et comme $HK \subset KH$, on a $x^{-1}x = k_1h_1$ avec $k_1 \in K$ et $h_1 \in H$, donc $x = h_1^{-1}k_1^{-1} \in HK$, donc $(i) \Rightarrow (ii)$ et par symétrie des rôles on a même $(i) \Leftrightarrow (ii)$.
   • C'est clair que $(iii) \Rightarrow (i)$ et (ii).
   • Réciproquement si on a (i), on a (i) et (ii) donc (iii).
   • Si on a (iv) alors HK est un sous-groupe de G. Soit $x \in HK$ alors $x^{-1} \in HK$ donc $x^{-1} = hk, h \in H, k \in K$ donc $x = k^{-1}h^{-1} \in KH$, donc $HK \subset KH$, donc $(iv) \Rightarrow (i)$.
   • Finalement si on suppose qu'on a (iii) montrons que HK est un sous-groupe de G : On a $e \in HK$. Si $x, y \in HK$ alors $x = h_1k_1$ et $y = h_2k_2$ avec $h_1, h_2 \in H$ et $k_1, k_2 \in K$ donc $xy = h_1k_1h_2k_2$ comme $KH = HK$, on a $k_1h_2 = h_3k_3$ avec $h_3 \in H, k_3 \in K$ donc $xy = h_1h_3k_3k_2 = h_4k_4$ avec $h_4 = h_1h_3 \in H$ et $k_4 = k_3k_2 \in K$ donc $xy \in HK$. Soit $x \in HK$ donc $x = hk, k \in H, k \in K$ donc $x^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH$ et comme $KH = HK$, on a $x^{-1} \in HK$ donc HK est un sous groupe et on a bien établit l'équivalence des quatres assertions.
2. Prenons $H = \langle(1,2)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,2)\}$ et $K = \langle(2,3)\rangle = \{\mathrm{Id}, (2,3)\}$, alors $HK = \{\mathrm{Id}, (2,3), (1,2), (1,2,3)\}$. On a en posant $s = (1,2,3)$, on a $s^2(1,2)s^{-2} = (3,1)$ qui n'est

pas dans HK, donc HK n'est pas un sous-groupe de $\mathcal{S}_3$. On aurait pu le deviner en remarquant que $HK \neq KH$ et pour le voir on a $(2,3)(1,2) = (1,3,2)$ qui n'est pas dans HK.

EXERCICE 19 Moins d'hypothése donnent un groupe

Titre : Moins d'hypothése donnent un groupe
ID : 61 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 47 | ID : 61
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $(G,\star)$ un magma tel que G est fini et $\star$ est associative et tout élément est régulier dans $(G,\star)$. Démontrer que $(G,\star)$ est un groupe.

Solution

Soit $a \in G$. L'application $\varphi_a : G \to G; x \mapsto x \star a$ est injective car tout élément est régulier et comme G est fini, elle est surjective, donc $\exists e \in G, \varphi_a(e) = a$, donc $e \star a = a$. On va prouver que e est l'élément neutre de $(G,\star)$. Soit $x \in G$, on a $e \star a = a$, donc $x \star (e \star a) = x \star a$ donc $(x \star e) \star a = x \star a$, et comme a est régulier, il vient : $x \star e = x$.
On a alors $x \star e \star x = x \star x$ donc $e \star x = x$. Ainsi e est l'élément neutre de $(G,\star)$.
Soit $a \in G$. Les applications $\varphi_a : G \to G, x \mapsto x \star a$ et $\psi_a : G \to G; x \mapsto a \star x$ sont bijectives donc il existe $a', a'' \in G$ tel que $a \star a' = a'' \star a = e$ (ce sont les antécédent respectifs de a par ψ_a et φ_a. On a :

$$a'' \star a \star a' = a' = a''$$

donc $a' = a''$ et a' est le symétrique de a. Alors $(G,\star)$ est un groupe.

Une autre méthode pour prouver l'existence de l'élément neutre

Soit a un élément de G, on va montrer qu'il existe $e \in G$ tel que $e^2 = e$. Si $a^2 = a$ on prends $a = e$, sinon l'application $\mathbb{N}^\star \to G, k \mapsto a^k$ étant non injective, il existe p, q de valeurs minimales tel que $p < q$ et $a^q = a^p$. Si $p \geq 2$, alors $a^{p-1} \star a^{q-p+1} = a^{p-1} \star a$ donc, pour $m = q - p + 1$, on a $m \geq 2$ et $a^m = a$. Si $p = 1$, on a $a^q = a$ et $q \geq 2$. Dans tous les cas on a prouvé l'existence de $m \geq 2$ tel que $a^m = a$. Soit alors $e = a^{m-1}$ alors $e \star e = a^{2m-2} = a^m \star a^{m-2} = a \star a^{m-2} = a^{m-1} = e$ donc $e^2 = e$. Si $x \in G$, on a $x \star e \star e = x \star e$ et comme e est régulier on a $x \star e = x$; de même $e \star e \star x = e \star x$ donc $e \star x = x$ donc e est l'élément neutre de $(G,\star)$.

EXERCICE 20 Groupe de cardinal premier

Titre : Groupe de cardinal premier
ID : 62 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 48 | ID : 62
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit G un groupe de cardinal p avec p un entier naturel premier. Démontrer que G est cyclique.

Solution

Supposons que G est un groupe de cardinal p et soit a un élément de G différent de e l'élément neutre de G. Comme $p > 1$, il existe $a \in G$ tel que $a \neq e$. L'ordre d de a divise p donc $d = 1$ ou $d = p$; comme $a \neq e$, on a $d \neq 1$, donc $d = p$. Le sous-groupe $H = \langle a \rangle$ est cyclique de cardinal p, donc $H = G$ et G est cyclique en conséquence.

EXERCICE 21 Les groupe dordre 4 à isomorphisme près

Titre : Les groupe dordre 4 à isomorphisme près
ID : 63 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 49 | ID : 63
Difficulté : ★☆☆☆☆

1. Démontrer que les groupes $G_1 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $G_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ne sont pas isomorphes.
2. Démontrer que tout groupe H de cardinal 4 est isomorphe à G_1 ou G_2.

Solution

1. G_1 et G_2 ne sont pas isomorphe car on a :

$$(1) \quad \forall x \in G_2, 2x = 0$$

alors que (1) n'a pas lieu dans G_1.

2. Soit H un groupe de cardinal 4. S'il existe un élément a de G tel que $G = \langle a \rangle$, alors $H \sim G_1$; sinon, on aura $H = \{e, a, b, c\}$ avec la table suivante

$\star$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Pour justifier par exemple que $a \star b = c$ on a $a \star b = a \Rightarrow b = e$ et $a \star b = b \Rightarrow a = e$ et $a \star b = e \Rightarrow a \star b = a \star a$ donc $a \star b = e \Rightarrow b = a$.
La seule possibilité correcte est donc $a \star b = c$
On a $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{1})\}$ et si on note :

$$e' = (\overline{0}, \overline{0}), a' = (\overline{0}, \overline{1}), b' = (\overline{1}, \overline{0}), c' = (\overline{1}, \overline{1})$$

la table du groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ est :

$+$	e'	a'	b'	c'
e'	e'	a'	b'	c'
a'	a'	e'	c'	b'
b'	b'	c'	e'	a'
c'	c'	b'	a'	e'

Ce qui prouve que l'application :

$$f : H \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2; x \mapsto f(x) = x'$$

est un isomorphisme de groupe donc $H \simeq G_2$.

EXERCICE 22 Générateurs du groupe symétrique S_n

Titre : Générateurs du groupe symétrique S_n
ID : 64 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 50 | ID : 64
Difficulté : ★☆☆☆☆

On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, le groupe symétrique $\mathscr{S}_n$ est engendré par les transpositions.

1. Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. Démontrer que pour toute transposition $\tau_{i,j}$ de $\mathscr{S}_n$, on a

$$\sigma \tau_{i,j} \sigma^{-1} = \tau_{\sigma(i),\sigma(j)}$$

2. (a) Prouver que les transpositions de la forme $\tau_{1,k}, 2 \leq k \leq n$ engendrent $\mathscr{S}_n$.

(b) Même question pour les transpositions de la forme $\tau_{k,k+1}, 1 \leq k \leq n-1$,

(c) Montrer que $\mathscr{S}_n$ est engendré par le cycle : $s = (1, 2, \cdots, n)$ et la transposition $\tau = (1, 2)$.
Indication : Considérer pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le composé : $s^k \tau s^{-k}$.

3. Déterminer tous les morphismes de groupe de $(\mathscr{S}_n, \circ)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Solution

1. On a $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = \sigma \circ (i, j) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i), \sigma(j))$. En effet si on pose $\tau' = \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\tau'(k) = k \Leftrightarrow \tau(\sigma^{-1}(k)) = \sigma^{-1}(k) \Leftrightarrow \sigma^{-1}(k) \in \{i, j\} \Leftrightarrow k \in \{s(i), s(j)\}$ cela montrer que seulement les deux éléments $\sigma(i)$ et $\sigma(j)$ ne sont pas fixés par τ' et il va de soi que τ' les permutent entre eux et que $\tau' = (\sigma(i), \sigma(j))$ en conséquence.

2. (a) La remarque ci-dessus permet de dire que si $\tau = (i, j)$ avec $1 < i < j \leq n$, est une transposition alors pour $\sigma = (1, i)$, compte tenu de $\sigma^{-1} = (1, i)$, on a $(1, i)(1, j)(1, i) = (i, j)$. Il en découle que toute transposition est produit de transpositions de la forme $(1, k)$ avec $1 < k \leq n$ et que ces dernières engendrent $\mathcal{S}_n$.

(b) Pour tout $k \in [\![1, n-1[\![$, on a, compte tenu de la remarque ci-dessus : $(1, k+1) = (1, k)(k, k+1)(1, k)$, ce qui prouve, par récurrence finie sur k et compte tenu de la question 1), que toute transposition est produit de transpositions de la forme $(k, k+1)$ avec $k \in [\![2, n]\!]$ et que ces dernières engendrent le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.

(c) On a $s = (1, 2, \ldots, n)$ et $t = (1, 2)$ Compte tenu de la remarque ci-dessus, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a : $s^k \circ t \circ s^{-k} = (s^k(1), s^k(2)) = (k+1, k+2)$ et comme les transpositions de cette dernière forme engendrent le groupe symétrique, il en est de même de s et t.

3. Soit f un morphisme de $\mathscr{S}_n$ vers $\mathbb{C}^*$. Pour toute transpostion τ, on a $\tau^2 = \mathrm{Id}$, donc $(f(\tau))^2 = 1$, donc $f(\tau) = 1$ ou $f(\tau) = -1$. Par ailleurs, deux cas se présentent :
• Si $n = 2$, alors $\mathscr{S}_2 = \{\mathrm{Id}, \tau\}$ où $\tau = (1, 2)$ donc il y'a exactement deux morphismes cherchés :
• f_1 défini par $f(\mathrm{Id}) = f(\tau) = 1$.
• f_2 défini par $f(\mathrm{Id}) = 1$ et $f(\tau) = -1$.
• Si $n > 2$, et $\tau_{i,j}$ et $\tau_{k,\ell}$ sont deux transpositions, comme $\mathrm{card}([\![1, n]\!] \setminus \{i, j\}) = \mathrm{card}([\![1, n]\!] \setminus \{k, \ell\} = n - 2$, il existe une bijection φ de $[\![1, n]\!] \setminus \{i, j\}$ vers $[\![1, n]\!] \setminus \{k, \ell\}$. Soit σ la permutation définie par

$$\begin{cases} \sigma(i) = k \\ \sigma(j) = \ell \\ \forall k \in [\![1, n]\!] \setminus \{i, j\},\ \sigma(k) = \varphi(k) \end{cases}$$

Comme $\sigma(i) = k$ et $\sigma(j) = \ell$, la question 1. permet de dire que $\sigma \circ \tau_{i,j} \circ \sigma^{-1} = \tau_{k,\ell}$. Il en découle que $f(\tau_{i,j}) = f(\sigma) f(\tau_{k,\ell}) [f(\sigma)]^{-1} = f(\tau_{k,\ell})$. Il en découle que f est constant sur les transpositions, ce qui fournit deux solutions : Soit $\forall \sigma \in \mathscr{S}_n, f(\sigma) = 1$, soit $\forall \sigma \in \mathscr{S}_n, f(\sigma) = \varepsilon(\sigma)$ où ε est la signature. Réciproquement il s'agit bien de morphismes de $\mathscr{S}_n$ vers $\mathbb{C}^*$, donc ce sont les deux seuls.

EXERCICE 23 Groupe engendré par deux matrices

Titre : Groupe engendré par deux matrices
ID : 65 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 51 | ID : 65
Difficulté : ★★☆☆☆

On considère les matrices carrées de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ suivantes : $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et soit $G = \langle R, S \rangle$ le sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ engendré par $\{R, S\}$ et $H = \langle A \rangle$ le sous-groupe engendré par R.

1. Démontrer que $\langle R \rangle$ est cyclique de cardinal 4 et que tout élément de G est de la forme $\prod_{k=1}^{m} M_k$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $M_k \in \{R, R^3, S\}$

2. Démontrer que $\forall p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z}, R^p S = S R^q$.

3. En déduire que $\text{card}(G) = 8$ et préciser les éléments de G.
4. Dans le groupe symétrique $\mathscr{S}_4$, on considère le cycle $s = (1,2,3,4)$ et la permutation $t = (1,2) \circ (3,4)$ produit des transpositions $(1,2)$ et $(3,4)$. Démontrer que $G \simeq \langle s,t \rangle$.

Solution

1. On a $R^2 = -I_2, R^3 = -R, R^4 = I_2$, par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{Z}, R^k = R^r$ où $r \in \{0,1,2,3\}$ est le reste de la division euclidienne de k par 4. Donc $\langle R \rangle$ est cyclique de cardinal 4.
Posons $A = \{R,S\}$ alors l'ensemble des inverses des éléments de A est $A' = \{R^3, S\}$, or le sous-groupe $\langle R,S \rangle$ est l'ensemble des produits des éléments de $A \cup A'$ et comme $A \cup A' = \{R,S,R^3\}$, on a établit le résultat demandé.
2. On a RS est une symétrie orthogonale donc $RS = (RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1} = SR^3$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si on suppose que : $R^pS = S^qR$, alors $R^{p+1}S = RR^pS = RSR^q = SR^{q+3}$. Il en découle que $R^pS = SR^{3p}$ qui s'établit facilement par récurrence. Par ailleurs $R^{-p}S = R^{3p}S = SR^{9p} = SR^p$, ce qui établit la propriété demandée.
3. La forme générale d'un élément de $\langle R,S \rangle$ est $X = M_1^{k_1} \times \cdots \times M_s^{k_s}$ avec $M_j \in \{R,S\}$ et $k_j \in \mathbb{Z}$ pour tout $j \in Z$. Compte tenu de la question précédente, ce produit peut avoir la forme S^kR^q avec $k \in \{0,1\}$ et $q \in \mathbb{Z}$. Comme $\langle R \rangle = \{R^q / q \in [\![0,3]\!]\}$, on a $\langle R,S \rangle = \{S^kR^q / k \in \{0,1\}, q \in \{0,1,2,3\}\}$. Comme les huit éléments sont deux à deux distincts, on a $\text{card}(G) = 8$.Distincts car les quatres éléments $R^q, q \in \{0,1,2,3\}$ sont distincts eux à deux, il en découle que les quatre éléments $SR^q, q \in \{0,1,2,3\}$ le sont aussi. Par ailleurs $SR^q \neq R^q$ pour tout $q \in \{0,1,2,3\}$ car $\det(SR^q) = 1$ et $\det(R^q) = 1$

EXERCICE 24 — $\mathbb{Z}$ non monogène et $\mathbb{Q}$ non de type fini

Titre : $\mathbb{Z}$ non monogène et $\mathbb{Q}$ non de type fini
ID : 66 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 52 | ID : 66
Difficulté : ★★☆☆☆

1. Démontrer que le groupe $(\mathbb{Z}^2, +)$ n'est pas monogène.
2. Soit A une partie finie de $\mathbb{Q}$. Démontrer que le sous-groupe $\langle A \rangle$ du groupe additif $(\mathbb{Q}, +)$ engendré par A est *strictement* inclus dans $\mathbb{Q}$.

Solution

1) Supposons que $\mathbb{Z}^2$ est monogène engendré par (a,b) alors il existe $m,n \in \mathbb{Z}$ tel que $(1,0) = m(a,b)$ et $(0,1) = n(a,b)$ donc $mb = na = 0$ et comme $(a,b) \neq (0,0)$ on a forcément $m = 0$ ou $n = 0$, ce qui est absurde car on aurait $(0,1)$ ou $(1,0)$ nul.
2) Si $A = \emptyset$, c'est clair car $\langle A \rangle = \{(0,0)\}$. Sinon A non vide de cardinal m avec $m \in \mathbb{N}^*$. Notons $r_k = \frac{p_k}{q_k}$ les éléments de A avec $p_k \in \mathbb{Z}, q_k \in \mathbb{N}^*$, et soit p un nombre entier naturel premier tel que $p \not| q_k$ pour tout $k \in [\![1,m]\!]$ alors $\frac{1}{p} \notin \langle A \rangle$ car sinon il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{p_k}{q_k}$ donc de la forme $\frac{1}{p} = \frac{M}{N}$ avec $M \in \mathbb{Z}$ et $N = \prod_{k=1}^{m} q_k$ donc $p|N$ et comme p est premier , il existe $k \in [\![1,m]\!]$ tel que $p|q_k$, ce qui contredit la définition de p, donc $\langle A \rangle \subsetneq \mathbb{Q}$.

EXERCICE 25 — L'anneau $Z + Z[\sqrt{(2)}]$

Titre : L'anneau $Z + Z[\sqrt{(2)}]$
ID : 67 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 53 | ID : 67
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $A = \{m + n\sqrt{2}/m, n \in \mathbb{Z}\}$.

1. Prouver que A est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$. On note $U(A)$ le groupe des inversibles de A.
2. Pour tout $x = m + n\sqrt{2} \in A$, on pose $N(x) = |m^2 - 2n^2|$. Démontrer que pour tout $x, y \in A$, on a $N(xy) = N(x)N(y)$.
3. Démontrer que $U(A) = \{\varepsilon(1+\sqrt{2})^n / \varepsilon \in \{-1, 1\}, n \in \mathbb{Z}\}$.

Solution

1. - On a $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in A$, donc $A \neq \emptyset$.
   - Si $x, y \in A$ tel que $x = m + n\sqrt{2}$ et $y = m' + n'\sqrt{2}$ avec $m, n, m', n' \in \mathbb{Z}$ alors $x - y = (m - m') + (n - n')\sqrt{2}$ avec $(m - m', n - n') \in \mathbb{Z}^2$, donc $x - y \in A$.
   - Si $x, y \in A$ tel que $x = m + n\sqrt{2}$ et $y = m' + n'\sqrt{2}$ alors $xy = (mm' + 2nn') + (mn' + m'n)\sqrt{2}$ avec $(mm' + 2nn', mn' + m'n) \in \mathbb{Z}^2$, donc $xy \in A$.
   - On a $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in A$.
   Il découle de tout ce qui précéde que A est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
2. Si pour tout $x \in A$ tel que $x = m + n\sqrt{2}$ on note $\overline{x} = m - n\sqrt{2}$, il est aisé de voir que $N(x) = |x\overline{x}|$. Si $y = m' + n'\sqrt{2}$ alors $xy = (mm' + 2nn') + (mn' + m'n)\sqrt{2}$ et par suite : $\overline{xy} = (mm' + 2nn') - (mn' + m'n)\sqrt{2}$. Par ailleurs : $\overline{xy} = (m - n\sqrt{2})(m' - n'\sqrt{2}) = (mm' + 2nn') - (mn' + m'n)\sqrt{2}$, donc $\overline{(xy)} = \overline{xy}$. Il en découle que $N(xy) = |xy\overline{xy}| = |xy\overline{xy}| = |x\overline{x}||y\overline{y}| = N(x)N(y)$.
3. Soit $z = \varepsilon(1+\sqrt{2})^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$, alors $N(z) = N(\varepsilon)N(u)^n$ où $u = 1 + \sqrt{2}$, donc $N(u) = 1$ donc $N(z) = 1$ dons $z \in U(A)$. Réciproquement, soit $z = x + y\sqrt{2} \in U$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$ et $|x^2 - 2y^2| = 1$. On remarque que $z \in U(A) \Leftrightarrow \pm x \pm y\sqrt{2} \in U(A)$, ce qui permet de supposer que x, y sont positifs sans nuire à la généralité. On ne peut pas avoir $x = 0$ car si c'est le cas alors $2y^2 = 1$, chose impossible, on suppose donc que $x > 0$ et $y \geq 0$. Remarquons que la suite de terme général $u_n = (1+\sqrt{2})^n$ est une suite réelle positive strictement croissante et réalisant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, donc il existe un et un seul $n \in \mathbb{N}$ tel que : $u_n \leq x < u_{n+1}$, ce qui donne $1 \leq \frac{x}{u_n} < 1 + \sqrt{2}$ et comme $N\left(\frac{x}{u_n}\right) = 1$, on peut poser $\frac{x}{u_n} = a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et $|a^2 - 2b^2| = 1$. On a $a \neq 0$ et on a $b = 0$ car sinon,Comme $a + b\sqrt{2} > 0$ on ne peut pas avoir a et b tous négatifs. Si toutefois a et b sont de signes contraires alors comme b est supposé non nul, on aurait $1 \leq a + b\sqrt{2} = |a + b\sqrt{2}| < |a - b\sqrt{2}|$, donc $\begin{cases} |a + b\sqrt{2}| \geq 1 \\ |a - b\sqrt{2}| > 1 \end{cases}$, et par le produit on aurait $|a^2 - 2b^2| > 1$, ce qui est faux car $N(a + b\sqrt{2}) = 1$. Donc $b = 0$ et en conséquence $a = 1$ et alors $z = (1+\sqrt{2})^n$. Les cas qui restent donnent $z = -x - y\sqrt{2} = -(1+\sqrt{2})^n$ ou $z = x - y\sqrt{2} = \pm(1+\sqrt{2})^{-n}$

EXERCICE 26 — Anneau avec nombre fini d'idéaux

Titre : Anneau avec nombre fini d'idéaux
ID : 68 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 54 | ID : 68
Difficulté : ★★★☆☆

Soit A un anneau commutatif non réduit à un singleton et on note $\mathscr{U}(A)$ le groupe des inversibles de A.
1) Démontrer que si I est un idéal de A tel que $I \cap \mathscr{U}(A) \neq \emptyset$ alors $I = A$.
2) Montrer que si les seuls idéaux de A sont A et $\{0_A\}$ alors A est un corps.
3) Montrer que si A est intègre et n'admet qu'un nombre fini d'idéaux alors A est un corps.

Solution

1) Soit $a \in I \cap \mathscr{U}(A)$, alors $\begin{cases} a^{-1} \in A \\ a \in I \end{cases}$ donc $a^{-1}a \in I$ donc $1_A \in I$. Soit $x \in A$ alors $\begin{cases} x \in A \\ 1_A \in A \end{cases}$ donc $x = x \times 1_A \in A$ donc $x \in A$. Ainsi $A \subset I$, donc $A = I$.

2) Soit $x \in A\backslash\{0_A\}$ et $I = \langle x \rangle$ l'idéal engendré par x. Comme $x \neq \{0_A\}$, on a $I \neq \{0_A\}$, donc par l'hypothèse ci-dessus, on a $I = A$ donc $1_A \in I$ donc $\exists x' \in A$ tel que $1_A = x'x$ donc x est inversible et $x^{-1} = x'$.
3) Soit $a \in A\backslash\{0_A\}$. Considérons la famille des idéaux $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $I_n = \langle a^n \rangle$ est l'idéal engendré par a^n. Comme A n'admet qu'un nombre fini d'idéaux il existe n, m tel que $n < m$ et $I_n = I_m$ donc $a^n \in \langle a^m \rangle$ donc il existe $x \in A$ tel que $a^n = xa^m$ donc $1_A = (xa^{m-n-1})a$, donc $a'a = 1_A$ avec $a' = xa^{m-n-1}$ et a est inversible. Donc A est un corps.

EXERCICE 27 Générateurs de $\mathbb{Z}^2$ et de ceux de $\mathbb{Q}$

Titre : Générateurs de $\mathbb{Z}^2$ et de ceux de $\mathbb{Q}$
ID : 69 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 55 | ID : 69
Difficulté : ★☆☆☆☆

1. Prouver que le groupe additif $\mathbb{Z}^2$ n'est pas monogène.
2. Démontrer que si A est une partie finie de $\mathbb{Q}$ alors le groupe $\langle A \rangle$ engendré par A est strictement inclus dans $\mathbb{Q}$.
3. Soit $A = \left\{ \frac{1}{p^\alpha} / p \in \mathbb{P}, \alpha \in \mathbb{N} \right\}$ où $\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers positifs. Démontrer que $\langle A \rangle = \mathbb{Q}$.

Solution

1. Par l'absurde. Supposons que $\mathbb{Z} = \langle (a, b) \rangle$ alors il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tel que $(1, 0) = m(a, b)$ et $(0, 1) = n(a, b)$, alors $mb = na = 0$ et $ma = nb = 1$ donc $m \neq 0$ et $n \neq 0$ et $a = b = 0$, ce qui est absurde car $(1, 0) \neq (0, 0)$. Donc $\mathbb{Z}^2$ n'est pas monogène.
2. Si $A = \emptyset$ alors $\langle A \rangle = \{1\} \subsetneq \mathbb{Q}$. Sinon posons $A = \{r_1, \ldots, r_m\}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, posons $r_k = \frac{p_k}{q_k}$ et soit p un nombre premier tel que $\forall k \in [\![1, m]\!]$, $p \nmid q_k$ alors $\frac{1}{p} \in \mathbb{Q}$ et si $\frac{1}{p} \in A$ on aurait $\frac{1}{p} = \sum \alpha_k \frac{p_k}{q_k}$ avec $\alpha_k \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in [\![1, m]\!]$. Donc $\frac{1}{p} = \frac{M}{N}$ avec $M \in \mathbb{Z}$ et $N = \prod_{k=1}^{m} q_k$ et on a alors $N = pM$ donc $p|N$ donc il existe $k \in [\![1, m]\!]$ tel que $p|q_k$, ce qui contredit la définition de p, donc $\frac{1}{p} \notin \langle A \rangle$ et $\langle A \rangle \subsetneq \mathbb{Q}$.
3. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Si $r \in \mathbb{Z}$ alors $r = 2r\frac{1}{2}$, donc $r \in \langle A \rangle$. Sinon alors $r = \frac{\ell}{k}$ avec $\ell \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}^*$ et $k \neq 1$, donc k admet une décomposition en facteurs premiers $k = \prod_{j=1}^{m} {p_j}^{\alpha_j}$.
   - Si $m = 1$ alors on a clairement $r \in \langle A \rangle$.
   - Si $m \geq 2$, pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, posons ${p_j}' = \frac{k}{{p_j}^{\alpha_j}}$. les entiers ${p_j}', j \in [\![1, m]\!]$ sont premiers entre eux dans leurs ensemble car sinon on aurait p premier tel que $p|{p_j}'$ pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, donc $p|{p_1}' = \prod_{i=2}^{m} {p_i}^{\alpha_i}$ donc il existe $j \in [\![2, m]\!]$ tel que $p = p_j$ or $p|{p_j}'$ et $p_j \nmid {p_j}'$, ce qui est absurde.

   Par Bezout, il existe $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{Z}$ tel que $\sum_{j=1}^{m} u_j {p_j}' = 1$ et par suite : $r = \frac{\ell}{k} = \sum_{j=1}^{m} \ell u_j \frac{1}{{p_j}^{\alpha_j}}$ donc $r \in \langle A \rangle$. Ainsi $\mathbb{Q} = \langle A \rangle$.

EXERCICE 28 Ordre du composé de deux éléments

Titre : Ordre du composé de deux éléments
ID : 70 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 56 | ID : 70
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit G un groupe. On considère deux éléments a et b de G d'ordres respectifs p et q et on suppose de plus que $ab = ba$ et $p \wedge q = 1$. Démontrer que ab est d'ordre pq.

Solution

On a $(ab)^{pq} = (a^p)^q (b^q)^p = e^q e^p = e$, donc ab est d'ordre fini et si on note d l'ordre de ab on a $d|pq$. On a :

$$a^{qd} = (ab)^{qd}.b^{-qd} = ((ab)^d)^q.(b^q)^{-d} = e.e = e,$$

donc $p|qd$, et comme $p \wedge q = 1$, par le théorème de Gauss, on a $p|d$. Par symétrie des rôles, on a aussi $q|d$, et comme $p \wedge q = 1$, on déduit de $\begin{cases} p|d \\ q|d \end{cases}$ que $pq|d$, donc $pq = d$. Il en découle que l'ordre de ab est pq

EXERCICE 29 Monoides et groupes

Titre : Monoides et groupes
ID : 71 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 57 | ID : 71
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit E un ensemble non vide et $\star$ une loi de composition interne associative et admettant un élément neutre e (on dit que $(E, \star)$ est un monoïde). Pour tout élément a de E et tout entier naturel n non nul, on note :

$$a^n = \underbrace{a \star \cdots \star a}_{n \text{ fois}}$$

1. Donner un exemple de monoïde fini qui n'est pas un groupe.
2. Démontrer que si $(G, \star)$ est un groupe fini alors on a :

$$(1) : \quad \forall x \in G, \forall \nu \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, \begin{cases} p \geq \nu \\ x^p = x \end{cases}$$

3. Démontrer que (1) peut ne pas être vrai si on suppose juste que $(G, \star)$ est un monoïde fini(on pourra donner un contre-exemple).
4. Soit M un ensemble non vide et $\star$ une loi de composition interne sur M (On dit que $(M, \star)$ est un magma). On suppose que M est fini et que la loi $\star$ est associative. Démontrer que :

$$(2) : \quad \exists x \in M, \forall p \in \mathbb{N}^*, x^p = x$$

Solution

1. On prend $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \times)$ pour tout entier naturel n non premier.
2. si $|G| = n$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, $p = 1 + n\nu$ convient puisque $1 + n\nu \geq \nu$ et $x^{1+n\nu} = x.(x^n)^\nu = x$.
3. Dans $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \times)$ on a $\overline{2}^p = \overline{0}$ pour tout $p \geq 2$, donc pour $\nu \geq 2$, il n'existe aucun $p \geq \nu$ tel que $\overline{2}^p = \overline{2}$
4. On va d'abord prouver qu'il existe $x \in M$ tel que $x^2 = x$, ensuite on en déduit facilement le résultat
   Fixons $a \in M$ et Soit $f : \mathbb{N} \to M, n \mapsto a^{2^n}$ alors f n'est pas injective car $\mathbb{N}$ est infini, tandis que M est fini, donc il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tel que $p < q$ et $f(p) = f(q)$ donc, en posant $m = q - p$, on a $m \in \mathbb{N}^*$ et $a^{2^p} = a^{2^q} = (a^{2^p})^{2^m}$, donc $y^s = y$ pour $y = a^{2^p}$ et $s = 2^m$. On remarque que $s \geq 2$, alors :
   • Si $s = 2$ on a $y^2 = y$, donc $x = y$ vérifie $x^2 = x$.
   • Si $s > 2$, on considère $x = y^{s-1}$ alors $x^2 = y^{2s-2} = y^s y^{s-2} = yy^{s-2} = y^{s-1} = x$ donc $x^2 = x$
   Ainsi dans tous les cas on a : il existe $x \in M$ tel que $x^2 = x$. Comme déjà $x^p = x$ pou $p = 1$, une simple récurrence prouve que $x^p = x$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Remarque : Contrairement à ce que l'on peut croire, dans les magmas $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \times)$ les éléments $\overline{0}$ et $\overline{1}$ ne sont pas toujours les seuls qui vérifient $x^2 = x$. En effet, par exemple dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, on a $x^2 = x \Leftrightarrow x \in \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{4}\}$.

EXERCICE 30 Morphise de S_n vers $\mathbb{C}^*$

Titre : Morphise de S_n vers $\mathbb{C}^*$
ID : 72 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 58 | ID : 72
Difficulté : ★☆☆☆☆

Determiner tous les morphismes du groupe $\mathscr{S}_n$ vers le groupe $\mathbb{C}^*$

Solution

Soit f un morphismes du groupe $\mathscr{S}_n$ vers le groupe $\mathbb{C}^*$. Si t est une transposition, on sait que $t^2 = \text{Id}$ donc $(f(t))^2 = 1$ donc $f(t) = \pm 1$. Si on considère deux transpositions $t = \tau_{i,j}$ et $t' = \tau_{k,\ell}$, soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$ une permutation tel que $\begin{cases} \sigma(i) = k \\ \sigma(j) = \ell \end{cases}$. On a $t'' = \sigma \circ t \circ \sigma^{-1} = t'$ car $t''(k) = (\sigma \circ t \circ \sigma^{-1})(\sigma(i)) = \sigma(t(i)) = \sigma(j) = \ell$ et de la même manière on a $\sigma(\ell) = k$. Si $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $p \notin \{k, \ell\}$ alors $\sigma^{-1}(p) \notin \{\sigma^{-1}(k), \sigma^{-1}(\ell)\} = \{i, j\}$, donc $t(\sigma^{-1}(p)) = \sigma^{-1}(p)$, donc, en composant par σ : $\sigma(t(\sigma^{-1}(p))) = p$, c'est-à-dire $t'(p) = p$. Cela démontre donc que $t' = \sigma \circ t \circ \sigma^{-1}$, donc $f(t) = f(\sigma)f(t)f(\sigma^{-1}) = f(t)$ (car f est un morphisme et C^* est un groupe commutatif. Il découle de cette étude que :
• Soit $f(t) = 1$ pour toute transposition, dans ce cas et compte tenu du fait que toute permutation est produit de transpositions, on a $f(\sigma) = 1$ pour tout $\sigma \in \mathscr{S}_n$.
• Soit $f(t) = -1$ pour toute transposition, dans ce cas et compte tenu du fait que toute permutation est produit de transpositions, on a $f(\sigma) = \epsilon(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathscr{S}_n$, où ε est la signature.
Réciproquement ce sont bien des morphismes de groupe et en conclusion, il y' a exactement deux morphismes de $\mathscr{C}_n$ vers $\mathbb{C}^*$, à savoir, le morphisme trivial et la signature.

EXERCICE 31 Morphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

Titre : Morphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$
ID : 73 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 59 | ID : 73
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer tous les morphismes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$, et notamment leur nombre.

Solution

Notons $\overline{k}$ et $\tilde{k}$ la classe d'équivalence d'un entier relatif k respectivement modulo n et modulo m. Soit f un morphisme de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$. f est parfaitement determiné par $f(\overline{1})$. Notons alors $\tilde{\alpha} = f(\overline{1})$ avec $\alpha \in [\![1, m]\!]$ et remarquons que $m\tilde{\alpha} = \tilde{0}$, et que comme $n\overline{1} = \overline{0}$, on a en appliquant le morphisme f : $m\tilde{\alpha} = \tilde{0}$. Il en découle que si $d = n \wedge m$ est le pgsd de n et m alors $d\tilde{\alpha} = \tilde{0}$, en effet il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $d = un + vm$, donc $d\tilde{\alpha} = u(n\tilde{\alpha}) + v(m\tilde{\alpha}) = \tilde{0}$. Il en découle que $m | d\alpha$, donc que $\frac{m}{d} | \alpha$, donc $\alpha \in \{k\frac{m}{d} / k \in [\![1, d]\!]\}$.Réciproquement Soit $\alpha = k\frac{m}{d}$ avec $k \in [\![1, d]\!]$ et posons $f(\overline{x}) = x\tilde{\alpha}$, pour tout $x \in \mathbb{Z}$. Si $x, y \in \mathbb{Z}$ tel que $\overline{x} = \overline{y}$, démontrons que $x\tilde{\alpha} = y\tilde{\alpha}$. Autrement dit montrons que $n | (y - x) \Rightarrow m | (\alpha(y - x))$. Or $\alpha(y - x) = k\frac{m}{d}(y - x)$ et si $n | (y - x)$, alors $y - x = \ell n$ avec $\ell \in \mathbb{Z}$, donc $\alpha(y - x) = k\frac{m}{d}\ell n = \ell' m$ où $\ell' = k\frac{n}{d}$, donc on a bien ce qu'il faut, ce qui permet de dire que $x \mapsto f_k(x) = x\tilde{\alpha}$ où $\alpha = k\frac{m}{d}$, est bien une application de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$. Par ailleurs,

il est aisé de voir que pour tout $x, y \in \mathbb{Z}$, on a $f_k(x+y) = (x+y)\tilde{\alpha} = x\tilde{\alpha} + y\tilde{\alpha} = f_k(x) + f_k(y)$. Il en découle que les seuls morphismes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ sont les f_k et comme ils sont distintc deux à deux pour $k \in [\![1, d]\!]$, leur nombre est d où $d = m \wedge n$.

EXERCICE 32 Transvections de GL_2(ℝ) engendrent SL_2(ℝ)

Titre : Transvections de **GL**_2(ℝ) engendrent **SL**_2(ℝ)
ID : 74 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 60 | ID : 74
Difficulté : ★☆☆☆☆

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ designe l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels. On rappelle que $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \det(A) \neq 0\}$ et on note $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R}) / \det(A) = 1\}$. Pour tout nombre réel α, on note $\Gamma_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ et $\Lambda_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On appelle matrice de transvection de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, toute matrice de la forme Γ_α ou Λ_α avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\gamma(\gamma - 1) \neq 0$. On pose $M_\gamma = \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que M_γ ne peut être produit de m matrices de transvection pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \leq 3$.
   (b) Démontrer que M_γ est un produit de matrices de transvections.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $a \neq 0$ et $ad - bc = 1$.
   (a) Soit $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}$ la matrice obtenue à partir de A par l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{b}{a}L_1$. Démontrer qu'il existe une matrice de transvection T_1 à préciser tel que $A_1 = T_1 A$.
   (b) Démontrer que si la matrice A_2 est celle obtenue à partir de A_1 par l'opération élémentaire $C_2 \leftarrow C_2 - \frac{c}{a}C_1$ alors il existe une matrice de transvection T_2 tel que $A_2 = A_1 T_1$.
3. Déduire de tout ce qui précéde que toute matrice $A \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ est un produit de matrices de transvections.

Solution

1. (a) On va discuter les cas, suivant que $m = 1, 2$ ou 3.
   • Si $m = 1$, c'est clair puisqu'une matrice de transvection n'est pas de la forme M_γ car $\gamma \neq 1$.
   • Si $m = 2$ alors, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a :
   • $\Gamma_\alpha \times \Gamma_\beta = \Gamma_{\alpha+\beta}$ donc $\Gamma_\alpha \times \Gamma_\beta \neq M_\gamma$.
   • $\Lambda_\alpha \times \Lambda_\beta = \Lambda_{\alpha+\beta}$ qui est aussi une matrice de transvection donc différente de M_γ.
   • $\Gamma_\alpha \times \Lambda_\beta) = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \alpha & \alpha\beta + 1 \end{pmatrix}$, donc si $\Gamma_\alpha \times \Lambda_\beta = M_\gamma$, on aurait $\alpha = \beta = 0$, donc $\gamma = 1$, ce qui est faux.
   • $\Lambda_\beta \Gamma_\alpha = \begin{pmatrix} 1 + \alpha\beta & \beta \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$, donc si $\Gamma_\alpha \times \Lambda_\beta = M_\gamma$, on aurait $\alpha = \beta = 0$, donc $\gamma = 1$, ce qui est faux. Il découle de cette discussion que la produit de deux matrices de transvection ne peut être égal à M_γ.
   • Si $m = 3$, les seuls cas à discuter sont $\Gamma_\alpha \times \Lambda_\beta \times \Gamma_\lambda$ et $\Lambda_\alpha \times \Gamma_\beta \times \Lambda_\lambda$ car les autres cas se ramènent aux cas traités précédement.
   • $\Gamma_\alpha \times \Lambda_\beta \times \Gamma_\lambda = \begin{pmatrix} 1 + \lambda\beta & \beta \\ \alpha + \lambda(1 + \alpha\beta) & 1 + \alpha\beta \end{pmatrix}$, donc si $\Gamma_\alpha \times \Lambda_\beta \times \Gamma_\lambda = M_\gamma$, on aurait $\beta = 0$, donc $\lambda = 1$, ce qui n'est pas vrai.
   • $\Lambda_\alpha \times \Gamma_\beta \times \Lambda_\lambda = \begin{pmatrix} 1 + \alpha\beta & \lambda(1 + \alpha\beta) + \alpha \\ \beta & \lambda\beta + 1 \end{pmatrix}$, donc si $\Lambda_\alpha \times \Gamma_\beta \times \Lambda_\lambda = M_\gamma$, on aurait

$\beta = 0$, donc $\lambda = 1$, ce qui n'est pas vrai.
• Conclusion : M_γ ne peut être un produit de m matrices de transvection pour tout $m \in \{1,2,3\}$.

(b) On va donc essayer à exprimer M_γ sous forme d'un produit $(\star)$ $\quad M_\gamma = \Gamma_\alpha \times \Lambda_\beta \times \Gamma_\lambda \times \Lambda_\mu$. Tout calcul fait on a :

$$(\star) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+\beta\lambda & \mu+\beta(1+\lambda\mu) \\ \alpha+\lambda(1+\alpha\beta) & \alpha\mu+(1+\alpha\beta)(1+\lambda\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Tout calcul fait, on obtient :

$$(\star) \Leftrightarrow \beta = \frac{\gamma-1}{\alpha}, \lambda = -\frac{\alpha}{\gamma}, \mu = \frac{\gamma(1-\gamma)}{\alpha}$$

avec α un nombre réel non nul arbittraire. On peut vérifer directement que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{\gamma-1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\alpha}{\gamma} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{\gamma(1-\gamma)}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $a \neq 0$ et $ad - bc = 1$.

(a) Soit $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}$ la matrice obtenue à partir de A par l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{b}{a}L_1$. Démontrer qu'il existe une matrice de transvection T_1 à préciser tel que $A_1 = T_1 A$.

(b) Démontrer que si la matrice A_2 est celle obtenue à partir de A_1 par l'opération élémentaire $C_2 \leftarrow C_2 - \frac{c}{a}$ alors il existe une matrice de transvection T_2 tel que $A_2 = A_1 T_1$.

3. Déduire de tout ce qui précéde que toute matrice $A \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ est un produit de matrices de transvections.

EXERCICE 33 — Un exercice sur les parties génératrices de Q

Titre : Un exercice sur les parties génératrices de Q
ID : 75 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 61 | ID : 75
Difficulté : ★★☆☆☆

Si X est une partie de $\mathbb{Q}$, on note $\langle X \rangle$, le sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$ engendré par X.
Soit A une partie de $\mathbb{Q}$ tel que

$$\langle A \rangle = \mathbb{Q}.$$

Démontrer que :

$$\forall a \in A, \quad \langle A \backslash \{a\} \rangle = \mathbb{Q}.$$

Solution

Soit $a \in A$ et notons $B = A\backslash\{a\}$. Comme $\frac{a}{2} \in \mathbb{Q} = \langle A \rangle$, il s'écrit $\frac{a}{2} = ma + b$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $b \in \langle B \rangle$, donc en posant $m' = 1 - 2m$, on a $m' \in \mathbb{Z}$ et $m' \neq 0$ et $m'a = 2b$. On a $\frac{a}{m'} \in \langle A \rangle$, donc il s'écrit : $\frac{a}{m'} = m''a + b'$ avec $m'' \in \mathbb{Z}$ et $b' \in \langle B \rangle$, donc $a = m''(m'a) + m'b' = 2m''b + m'b' \in \langle b \rangle$, donc $\langle A \rangle = \langle B \rangle = \mathbb{Q}$.

EXERCICE 34 — Ordre du produit de deux transpositions du groupe symétrique

Titre : Ordre du produit de deux transpositions du groupe symétrique

Difficulté : ★☆☆☆☆

ID : 76 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 62 | ID : 76

n est un entier naturel tel que $n \geq 2$ et $\mathfrak{S}_n$ le groupe symetrique. On considère deux transpositions t et τ éléments de $\mathfrak{S}_n$ et soit $\sigma = t \circ \tau$. Quelles sont les valeurs possibles de l'ordre de la permutation σ ?

Solution

• *Premire cas :* Si $t = \tau$ alors $\sigma = \text{Id}$, donc d'ordre 1.
• *Deuxième cas :* S'il existe $i, j, k \in [\![1, n]\!]$ tel que $t = (i, j)$ et $\tau = (j, k)$ (cela suppose que $n \geq 3$), alors $\sigma = t \circ \tau = (i, j, k)$ est un $3-$cycle, donc l'ordre de σ est 3.
• *Troisième cas :* Il existe $i, j, k, \ell \in [\![1, n]\!]$ tel que $t = (i, j)$ et $\tau = (k, \ell)$ (cela suppose que $n \geq 4$.) Dans ce cas on a $\sigma(i) = t \circ \tau(i) = t(i) = j$, donc $\sigma^2(i) = \sigma(j) = t(j) = i$, donc $\sigma^2(i) = i$, et par symétrie des rôles, on a aussi : $\sigma^2(j) = j$ et $\sigma^2(k) = k$ et $\sigma^2(\ell) = \ell$. Par ailleurs, pour tout $p \in [\![1, n]\!] \setminus \{i, j, k, \ell\}$, on a $\sigma(p) = p$, donc $\sigma^2 = \text{Id}$ et comme $\sigma \neq \text{Id}$, l'ordre de σ est 2.
• *Conclusion :* Les valeurs possibles de l'ordre de σ sont 1, 2 ou 3.

EXERCICE 35 Sous-groupe engendré par le complémentaire d'un sous-groupe propre

Titre : Sous-groupe engendré par le complémentaire d'un sous-groupe propre

Difficulté : ★☆☆☆☆

ID : 77 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 63 | ID : 77

Soit G un groupe et H un sous-groupe de G tel que H est strictement inclus dans G. On pose $A = G \setminus H$. Démontrer que $\langle A \rangle = G$

Solution

Comme $H \neq G$, il existe un élément $g \in G$ tel que $g \notin H$. Soit x un élément de H, alors $gx \in A$ car sinon on aurait $gx \in H$ et comme $x \in H$, on a $x^{-1} \in H$, par suite on a $gxx^{-1} = g \in H$, ce qui n'est pas vrai. Comme $gx \in A$, on a aussi $gx \in \langle A \rangle$ et comme $g \in A$, on a $g \in \langle A \rangle$, donc $x = g^{-1}gx \in \langle A \rangle$ donc $x \in \langle A \rangle$ pour tout $x \in H$, donc $H \subset \langle A \rangle$, donc $G = H \cup A \subset \langle A \rangle$ et finalement $G = \langle A \rangle$.

EXERCICE 36 Elément nilpotent d'un anneau

Titre : Elément nilpotent d'un anneau

Difficulté : ★☆☆☆☆

ID : 78 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 64 | ID : 78

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On note 0_A et 1_A respectivement, l'élément neutre de la première et la deuxiéme loi de A. Un élément x de A est dit nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^k = 0_A$. On appelle indice de nilpotence de x, l'entier naturel $\nu = \min\{k \in \mathbb{N}^* / x^k = 0_A\}$.

1. Démontrer que pour tout élément nilpotent x de A, d'indice de nilpotence ν, on a $1 - x$ est inversible et exprimer son inverse $(1 - x)^{-1}$ en fonction de x et ν.
2. Démontrer que si a et b sont deux éléments nilpotents de A tel que $ab = ba$, il en est de même de $a + b$ et ab.
3. Démontrer que si A est commutatif l'ensemble $\mathcal{N}(A)$ des éléments nilpotents de A est un idéal de A.

Solution

1. Posons $y = \sum_{k=0}^{\nu-1} x^k$, alors :

$$\begin{aligned}(1-x)y &= y - xy \\ &= \sum_{k=0}^{\nu-1} x^k - \sum_{k=1}^{\nu} x^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\nu-1} x^k - \sum_{k=1}^{\nu-1} x^k - x^\nu \\ &= 1.\end{aligned}$$

De même $y(1-x) = 1$, donc $1-x$ est inversible et $(1-x)^{-1} = y = \sum_{k=0}^{\nu-1} x^k$.

2. Si $a^p = 1$ et $b^q = 1$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ alors :
   - Puisque $ab = ba$, on a $(a+b) = p+q = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} a^k \times b^{p+q-k} = 0_A$ car pour tout $k \in [\![0, p+q]\!]$, deux cas sont possibles :
   - Soit $k \geq p$, donc $a^k = 0_A$.
   - Soit $k < p$, donc $p+q-k > q$ et $b^{p+q-k} = 0_A$.

   Il en découle que $a+b$ est nilpotent.
   - On a $(a \times b)^p = a^p \times b^p = 0_A \times b^p = 0_A$, donc ab est nilpotent. On remarque que si on suppose seulement que a est nilpotent alors ab est nilpotent.
3. Montrons que $\mathcal{N}(A)$ est un idéal de A.
   - Il est clair que $0 \in \mathcal{N}(A)$.
   - Pour tout $a, b \in \mathcal{N}(A)$, on a $-b \in \mathcal{N}(A)$ et d'après la question précédente on a $a - b \in \mathcal{N}(A)$.
   - Pour tout $a \in \mathcal{N}(A)$ et tout $x \in A$, on a d'après la remarque ci-dessus dans la question précédente, $ax \in \mathcal{N}(A)$, donc $\mathcal{N}(A)$ est un idéal de A.

EXERCICE 37 Moins d'hypothèses donnent un anneau

Titre : Moins d'hypothèses donnent un anneau
ID : 79 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 65 | ID : 79
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $(A, +, \times)$ un ensemble non vide tel que tous les axiomes d'un anneau sont satisfait sauf celui de la commutativité de la première loi $+$. Démontrer que $(A, +, \times)$ est tout de même un anneau.

Solution

Soit $x, y \in A$, alors :

$$(1) \quad (a+b) \times (1+1) = a \times (1+1) + b \times (1+1) = a + a + b + b.$$

$$(2) \quad (a+b) \times (1+1) = (a+b) \times 1 + (a+b) \times 1 = a + b + a + b.$$

Il en découle que :

$$a + a + b + b = a + b + a + b$$

et par régularité de a à gauche et de b à droite, il vient $b + a = a + b$.

EXERCICE 38 Conditions suffisantes d'inversibilité

Titre : Conditions suffisantes d'inversibilité
ID : 80 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 66 | ID : 80
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit A un anneau et x un élément de A.

1. Démontrer que si x est inversible à gauche et régulier à droite. Démontrer que x est inversible.
2. Démontrer que s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que x^n est inversible alors x est inversible.

Solution

Soit A un anneau et x un élément de A.

1. Il existe $y \in A$ tel que $yx = 1$. On a $(xy-1)x = xyx - x = x - x = 0 = 0.x$, par régilarité de x à droite, on a $xy - 1 = 0$, donc $xy = 1$, donc $xy = yx = 1$ et x est inversible.
2. Il existe $y \in A$ tel que $x^n y = yx^n = 1$. Donc en posant $b = x^{n-1}y$ et $c = yx^{n-1}$, on a $xb = cx = 1$, donc $cxb = b = c$ et par suite $xb = bx = 1$, donc x est inversible.

EXERCICE 39 Nombre d'anneaux à quatre éléments

Titre : Nombre d'anneaux à quatre éléments
ID : 81 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 67 | ID : 81
Difficulté : ★☆☆☆☆

1. Démontrer qu'il existe au moins un corps $\mathbb{K}$ ayant quatre éléments.
2. Pour tout $x = (x_1, x_2) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et $y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, on pose $x \otimes y = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2y_1)$. Démontrer que $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, +, \otimes)$ est un anneau.
3. Démontrer qu'il y'a au moins quatre anneaux non isomorphes à quatre éléments.

Solution

1. Puisque Pour simplifier notons $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ et soit c un élément n'appartenant pas à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Soit $K = \{0, 1, c, d\}$ muni des lois commutatives $+$ et $\times$ dont les tables sont données ci-dessous :

$+$	0	1	c	d
0	0	1	c	d
1	1	0	d	c
c	c	d	0	1
d	d	c	1	0

$\times$	0	1	c	d
0	0	0	0	0
1	0	1	c	d
c	0	c	d	1
d	0	d	1	c

Il est aisé de vérufier que $(K, +)$ est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et que $(K^\star, \times)$ est un groupe commutatif isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et que $+$ est distrubutive par rapport à $\times$, donc que $(K, +, \times)$ est un corps.

2. C'est un anneau isomrphe à l'anneau des matrices :

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} / x, y \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \right\}$$

3. Ce sont $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +, \times)$, $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, +, \times)$, K et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \otimes)$. On va prouver qu'ils sont deux à deux non isomorphes.

EXERCICE 40 Sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ isomorphe à un autre connu

Titre : Sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ isomorphe à un autre connu
ID : 82 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 68 | ID : 82
Difficulté : ★☆☆☆☆

On note :

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / a+b = c+d \right\}.$$

Démontrer que $\mathcal{A}$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ isomorphe au sous-anneau $\mathcal{T}(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$, donc $a+b = c+d = \lambda$. La matrice transposée $M^\top = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de M réalise $MV_1 = \lambda V_1$ où $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc si on note u l'endomorphisme canoniquement associé à $M^\top$, c'est-à-dire que $M^\top$ est la matrice de u relativement à la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$, alors on a $u(V_1) = \lambda V_1$. Soit $V_2 = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc (V_1, V_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et si on pose $u(V_2) = xV_1 + yV_2$, comme $u(V_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, on a $\begin{cases} x &= b \\ x+y &= d \end{cases}$, donc $x = b$ et $y = d-b$. Il en découle que $\begin{cases} u(V_1) = \lambda V_1 \\ u(V_2) = bV_1 + (d-b)V_2 \end{cases}$. Cela permet de dire que si on note $\mathcal{V} = (V_1, V_2)$, la matrice de u relativement à $\mathcal{V}$ est $T' = \begin{pmatrix} a+b & b \\ 0 & d-b \end{pmatrix}$ et comme la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{V}$ est $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et que $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $M^\perp = UT'U^{-1}$, donc $M = (U^{-1})^\top T U^\top$ où l'on a $T = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ b & d-b \end{pmatrix}$, donc $M = PTP^{-1}$ où $P = (U^{-1})^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = U^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Soit donc $\Phi : \mathcal{T} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); T \mapsto \Phi(T) = PTP^{-1}$, alors Φ est un morphisme de l'anneau $\mathcal{T}$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on voit aisément que $\ker\Phi = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathcal{A}$, donc Φ induit un isomorphisme $\widehat{\Phi}$ de $\mathcal{T}$ vers $\mathcal{A}$, ce qui justifie que les sous-anneaux $\mathcal{T}$ et $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont isomorphes. Notons que l'on a explicitement :
Si

$$T = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$$

avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ alors

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} x-y & x-y-z \\ y & y+z \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 41 — A est un anneau et $u, v \in A$ tel que $Au = Av$

Titre : A est un anneau et $u, v \in A$ tel que $Au = Av$
ID : 83 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 69 | ID : 83
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit A un anneau et u et v deux éléments de A tel que $Au = Av$. Démontrer qu'il existe une et une seule application $f : uA \to vA$ telle que :

$$\begin{cases} f(u) = v \\ \forall (x,y) \in (uA)^2, \forall (\lambda, \mu) \in A^2, \quad f(x\lambda + y\mu) = f(x)\lambda + f(y)\mu \end{cases}.$$

Solution

• Pour tout $x \in A$, posons $f(ux) = vx$.
• Démontrons tout d'abord que f est bien définie. Soit $x_1, x_2 \in A$ tel que $ux_1 = ux_2$ donc $u(x_1 - x_2) = 0$, on a $vx_1 - vx_2 = v(x_1 - x_2)$. Or $v \in Av$ et $Au = Av$, donc ilexiste $a \in A$ tel que $v = au$ et par suite $vx_1 - vx_2 = au(x_1 - x_2) = a.0 = 0$. Donc :

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad ux_1 = ux_2 \Rightarrow vx_1 = vx_2$$

ce qui permet d'affirmer que f est bien définie.
• On a alors $f(u) = f(1.u) = 1.v = v$.
• Soit $\lambda, \mu \in A$ et $x, y \in uA$ tel que $x = ux_1$ et $y = uy_1$ avec $x_1, y_1 \in A$, alors :

$$\begin{aligned} f(x\lambda + y\mu) &= f(u(x_1\lambda + y_1\mu)) \\ &= v(x_1\lambda + y_1\mu) \\ &= (vx_1)\lambda + (vy_1)\mu \\ &= f(ux_1)\lambda + f(uy_1)\mu \\ &= f(x)\lambda + f(y)\mu. \end{aligned}$$

• Unicité : Si une telle application f existe alors pour tout $x \in A$, on a :

$$f(ux) = f((u.1)x) = f(u.1)x = (v.1)x = vx,$$

ce qui prouve l'unicité de f.

EXERCICE 42 Anneau de Gauss

Titre : Anneau de Gauss
ID : 84 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 70 | ID : 84
Difficulté :

Soit $\mathbb{Z}(i) = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\} \cdot \mathbb{Z}(i)$ est un anneau. On pose :

$$N(a + ib) = a^2 + b^2$$

1. Montrer que :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}(i)^2, \quad N(xy) = N(x)N(y).$$
En déduire les éléments inversibles de $\mathbb{Z}(i)$.
2. Si $x \in \mathbb{Z}(i)$ et si $N(x)$ est un entier premier, montrer que x est irréductible (i.e. $x = \alpha.\beta \Rightarrow \alpha$ ou β inversible). La réciproque est-elle vraie ?
3. **Division euclidienne dans $\mathbb{Z}(i)$:**
Soient $x \in \mathbb{Z}(i), y \in \mathbb{Z}(i)^*$. On pose $\frac{x}{y} = u + iv$, où $(u, v) \in \mathbb{Q}^2$. On prend $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $|u - u_0| \leqslant \frac{1}{2}$ et $|v - v_0| \leqslant \frac{1}{2}$. Montrer qu'on a : $x = y\,(u_0 + iv_0) + r$ avec $N(r) < N(y)$. Dans quel cas $u_0 + iv_0$ et r sont-ils uniques ?
4. En déduire que $\mathbb{Z}(i)$ est principal.
5. Soit p un nombre premier dans $\mathbb{Z}$. Montrer que p est irréductible ssi il n'existe pas $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p = a^2 + b^2$
6. Montrer que si p est un nombre premier tel que $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$, alors
$$a^2 + b^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p) \Rightarrow a \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p) \text{ et } b \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$$
En déduire que tout nombre premier $\geqslant 3$ est irréductible dans $\mathbb{Z}(i)$ ssi $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$.

7. Montrer q'un entier n peut se mettre sous la forme d'une somme de 2 carrés ssi il est de la forme :

$$n = \left(\prod_j p_j^{\alpha_j}\right)\left(\prod_{4k+3 \text{ premier}} (4k+3)^{2\beta_k}\right)$$

où p_j est un nombre premier tel que $p_j \not\equiv 3 (\mathrm{mod} 4)$, i.e. les exposants des facteurs premiers de la forme $4k+3$ sont pairs.

8. Donner une C.N.S. pour que $x \in \mathbb{Z}(i)$ soit irréductible.

Solution

1. On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, |xy|^2 = |x|^2|y|^2$, donc

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}(i)^2, N(xy) = N(x)N(y)$$

Si x est inversible : $N\left(x^{-1}\right) = \frac{N\left(x \cdot x^{-1}\right)}{N(x)} = \frac{1}{N(x)} \in \mathbb{N}^*$, donc $N(x) = 1$ Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}(i)$ sont donc ± 1 et $\pm i$.

2. Soit $x = \alpha\beta$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}(i)^2$, et $p = N(x) = N(\alpha)N(\beta)$. L'un des deux nombres $N(\alpha)$ et $N(\beta)$ est égal à p, et l'autre est égal à 1, car p est premier. Or y est inversible ssi $N(y) = 1$. Donc α ou β est inversible. Donc x est irréductible.
La réciproque est fausse : par exemple, 3 est irréductible, mais $N(3) = 9$ n'est pas premier. Mais si $x = a + ib$ est tel que $ab \neq 0$, alors l'implication réciproque est vraie(Essayer d'y penser).

3. On a :

$$\frac{r}{y} = \frac{x}{y} - u_0 - iv_0 = (u - u_0) + i(v - v_0)$$

et

$$\frac{N(r)}{N(y)} = N\left(\frac{r}{y}\right) = (u-u_0)^2 + (v-v_0)^2 \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Donc $N(r) < N(y)$. Le couple $(u_0 + iv_0, r)$ convient ssi $N(r) < N(y)$, i.e. $(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2 < 1$, i.e. (u,v) appartient au disque ouvert de centre (u_0, v_0) et de rayon 1. $(u_0 + iv_0, r)$ est unique ssi $\frac{x}{y} \in \mathbb{Z}(i)$. (Découper le plan en carrés de sommets : $\left(\frac{m-1}{2}; \frac{n}{2}\right), \left(\frac{m}{2}; \frac{n+1}{2}\right), \left(\frac{m+1}{2}; \frac{n}{2}\right)$ $\left(\frac{m}{2}; \frac{n-1}{2}\right)$ où m et n sont des entiers tels que $m+n$ est impair.)

4. On va démontrer que $\mathbb{Z}(i)$ est principal, c'est-à- dire intègre et tout idéal est principal.
• Tout d'abord, $\mathbb{Z}(i)$ est intègre, car $\mathbb{Z}(i) \subset \mathbb{C}$ et $\mathbb{C}$ est un corps.
• Tout idéal $\mathcal{I}$ de $\mathbb{Z}(i)$ est principal : Soient $n = \min_{x \in \mathcal{I} - \{0\}} N(x)$ et $a \in \mathcal{I}$ tels que $N(a) = n$. Soient $x \in \mathcal{I}$ et $(u_0 + iv_0, r)$ tels que $x = a(u_0 + iv_0) + r$ avec $N(r) < N(a)$. Or $r \in \mathcal{I}$. Donc $r = 0$, et $x \in a \cdot \mathbb{Z}(i)$, donc $\mathcal{I}$ est principal.

5. - Si $\exists (a,b) \in \mathbb{N}^2, p = a^2 + b^2$, alors $p = (a+ib)(a-ib)$, et p n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}(i)$ − Si p n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}(i)$, alors $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}(i)^2, p = \alpha\beta$ avec $N(\alpha) > 1$ et $N(\beta) > 1$. Or $N(\alpha)N(\beta) = N(p) = p^2$. Donc $N(\alpha) = N(\beta) = p$ (car p est premier), et $p = \mathrm{Re}(\alpha)^2 + \mathrm{Im}(\alpha)^2$

6. Soit p un nombre premier impair. Supposons que $a^2 + b^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$ et $b \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$. Soit $\alpha = a \cdot b^{-1}$ (dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). Alors $\alpha^2 = -1$ et $(-\alpha)^2 = -1$.
Les autres éléments non nuls de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ peuvent être associés deux par deux de la manière suivante : x et y sont associés ssi $xy = -1$, i.e. $x = -y^{-1}$ (on a $x \neq y$ car -1 a au plus 2 racines carrées). Donc $(p-1)! = (-1)^{(p-3)/2}$. Or $(p-1)! = -1$ (théorème de Wilson). Donc $p \equiv 1 (\mathrm{mod} 4)$.Si -1 n'a pas de racine carrée, alors $(p-1)! = (-1)^{(p-1)/2}$ et $p \equiv 3 (\mathrm{mod} 4)$. - Si p est un nombre premier $\geqslant 3$ non irréductible, $\exists (a,b) \in \mathbb{N}^2, p = a^2 + b^2$ (question e). Or $a^2 \equiv 0$ ou $1 (\mathrm{mod} 4)$ et $b^2 \equiv 0$ ou $1 (\mathrm{mod} 4)$. Donc $p \not\equiv 3 (\mathrm{mod} 4)$. - Si $p \equiv 1 (\mathrm{mod} 4)$, alors $\exists \alpha \in \mathbb{N}^*, \alpha^2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$ (cf ci-dessus), et $p \mid (\alpha + i)(\alpha - i)$. Si p divise l'un des deux facteurs, alors il divise l'autre (passer aux conjugués), et la différence $2i$, ce qui est impossible. Donc p ne divise aucun des deux facteurs. Donc p n'est pas premier dans $\mathbb{Z}(i)$. Or $\mathbb{Z}(i)$ est principal. Donc p n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}(i)$.

7. On va prouver les deux sens :
   • Si n est de la forme donnée ci-dessus, alors n est une somme de 2 carrés, car si $c = e^2 + f^2$ et $d = g^2 + h^2$, alors
   $$cd = [(e+if)(g+ih)]\overline{[(e+if)(g+ih)]} = m^2 + n^2$$
   et le second terme est un carré.
   • Si n n'est pas de la forme donnée ci-dessus, alors il existe $p = 4k+3$ premier d'exposant impair, et si n est somme de 2 carrés, n s'écrit : $n = k^2\left(a^2+b^2\right)$ avec $a \wedge b = 1$. Mais d'après la question f (début), $a \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$ et $b \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$ car $p \mid a^2 + b^2$, ce qui contredit $a \wedge b = 1$. Donc n n'est pas une somme de 2 carrés.
8. Soit $x = a + ib$ tel que $N(x)$ soit un nombre composé (le cas $N(x)$ premier a été traité en b). $N(x)$ est une somme de 2 carrés, donc $N(x)$ est de la forme donnée au début de g. – Si $N(x)$ n'est pas le carré d'un nombre premier de la forme $4k+3$: Alors il existe c et d, sommes de 2 carrés, tels que $N(x) = cd$. On a : $c = e^2 + f^2$ et $d = g^2 + h^2 . x\bar{x} = cd = (m+in)(m-in)$ avec $m + in = (e+if)(g+ih)$. Supposons que x soit irréductible. Alors x divise l'un des deux facteurs ($m + in$ par exemple). On a : $\alpha x = m + in$ avec $N(\alpha) = 1$ car $N(m+in) = N(x)$. Donc
   $$x = \alpha^{-1}(m+in) = \alpha^{-1}(e+if)(g+ih)$$
   Contradiction. Donc x est reductible. – Si $N(x)$ est le carré d'un nombre premier de la forme $4k+3$: Soit $x = \alpha\beta . N(\alpha) \neq p$ car $N(\alpha)$ est une somme de 2 carrés, mais pas p. Donc x est irreductible.
   On a de plus, d'après la question f : $a \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$ et $b \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, car $a^2 + b^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$. Donc x est de la forme $i^s p$

EXERCICE 43 Sous-groupes d'un groupe cyclique

Titre : Sous-groupes d'un groupe cyclique
ID : 85 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 71 | ID : 85
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $G = \langle \omega \rangle$ un groupe cyclique de cardinal n. Pour tout diviseur d de n on note $\tilde{d}$ l'unique entier naturel tel que $d\tilde{d} = n$ et on note $\omega_d = \omega^{\tilde{d}}$ et $G_d = \{x \in G / x^d = e\}$.

1. Démontrer que pour tout diviseur d de n, l'ordre de ω_d est égal à d et que G admet au moins un sous-groupe H de cardinal d.
2. Démontrer que si H est un sous-groupe de G alors H est cyclique et $d = |H|$ divise n.
3. Démontrer que pour tout diviseur d de n, on a G_d est un sous-groupe de G, et en déduire qu' il existe un seul sous-groupe H de G de cardinal d et expliciter un générateur de H en fonction de a, n et d.

Solution

1. On a $(\omega_d)^d = (\omega^{\tilde{d}})^d = \omega^n = e$. Si $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(\omega_d)^k = e$ alors $\omega^{k\tilde{d}} = e$, donc $n | k\tilde{d}$, donc $d\tilde{d} | k\tilde{d}$, donc $d | k$. Il en découle que d est l'ordre de ω_d. Le groupe cyclique $H = \langle \omega_d \rangle$ est un sous-groupe de G de cardinal d.
2. Si $d = 1$ alors $H = \langle e \rangle$. Si $d > 1$ alors il existe au moins $x \in G$ tel que $x \in H$ et $x \neq e$, donc x s'écrit $x = a^k$ avec $k \in [\![1, n-1]\!]$. Donc $a^k \in H$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Soit alors
   $$p = \min\{k \in \mathbb{N}^* / a^k \in H\}$$
   et posons $b = a^p$, alors le sous-groupe cyclique $H_1 = \langle b \rangle$ réalise $H_1 \subset H$, H car $b \in H$. Par ailleurs, si $h \in H$, comme $h \in G$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k = a^k$. La division euclidienne de k par p s'écrit $k = qp + r$ avec $0 \leq r < p$, donc $a^r = h(a^p)^{-q} \in H$. Par définition de p, on a forcément

$r = 0$, donc $k = qp$ et $h = b^q$, par suite $h \in H_1 = \langle b \rangle$, d'où $H = H_1 = \langle b \rangle$, donc H est cyclique. Il en découle que l'ordre de b est égal à d et comme l'ordre de b divise n on a $d|n$.

3. Soit d un diviseur de n. On a $G_d = \{x \in G / x^d = e\}$.
• On remarque que $f : G \to G; x \mapsto x^d$ est un morphisme de G vers G, car G étant cyclique, il est commutatif donc $\forall g_1, g_2 \in G; (g_1 g_2)^d = g_1^d g_2^d$. On a $G_d = \ker f$, donc G_d est un sous-groupe de G.
• D'après la question 1), il y'a au moins un sous-groupe de G de cardinal d.
• Soit H un sous-groupe de G de cardinal d alors $\forall x \in H, x^d = e$, donc $H \subset G_d$. D'après la question 2) G_d est cyclique et si c est un générateur de G_d alors $c^d = e$ donc l'ordre δ de c réalise $\delta \leq d$, et comme $\omega_d \in G_d$ et ω_d est d'ordre d, on a alors $\delta \geq d$, donc $\delta = d$ et $H = G_d$. Il en découle que G_d est l'unique sous-groupe de G de cardinal d et que $G_d = \langle \omega_d \rangle$, ce qui donne un générateur de G_d comme demandé : $\omega_d = a^{\frac{n}{d}}$

EXERCICE 44 Produit cartésien de deux groupes monogènes

Titre : Produit cartésien de deux groupes monogènes
ID : 86 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 72 | ID : 86
Difficulté : ★☆☆☆☆

On considère deux groupes monogènes G_1 et G_2 dont les lois sont notées multiplicativement et les éléments neutres respectifs sont notés e_1 et e_2.

1. On suppose de plus que $G_1 \neq \{e_1\}$ et $G_2 \neq \{e_2\}$. Démontrer que si $G_1 \times G_2$ est monogène alors G_1 et G_2 sont cycliques.
2. On suppose que G_1 et G_2 sont cycliques de cardinaux respectifs n_1 et n_2. Démontrer que $G_1 \times G_2$ est cyclique si et seulement si $n_1 \wedge n_2 = 1$.

Solution

1. Posons $G_k = \langle a_k \rangle$ pour $k \in \{1, 2\}$. Si $G = G_1 \times G_2$ est monogène, soit $a = (a_1, a_2)$ un générateur de G. Comme $G_1 \neq \{e_1\}$ on a $a_1 \neq e_1$ et comme $G_2 \neq \{e_2\}$, on a aussi $a_2 \neq e_2$. Comme (e_1, a_2) et (a_1, e_2) sont des éléments de G, il existe $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\begin{cases} (e_1, a_2) = a^k \\ (a_1, e_2) = a^\ell \end{cases}$. De plus $k \neq 0$ et $\ell \neq 0$. On a alors :
$$(e_1, a_2)^\ell = (a_1, e_2)^k = a^{k\ell}$$
donc
$$\begin{cases} (a_1)^{|k|} = e_1 \\ (a_2)^{|\ell|} = e_2 \end{cases} \quad \text{et } |k|, |\ell| \in \mathbb{N}^*,$$
par suite a_1 et a_2 sont d'ordres fini respectivement dans G_1 et G_2, donc ces derniers sont cycliques.
2. Si $G_1 = \langle a_1 \rangle$ et $G_2 = \langle a_2 \rangle$ sont cyclique de cardinaux respectifs n_1 et n_2 :
• Supposons que $n_1 \wedge n_2 = 1$ Démontrons que l'ordre de $a = (a_1, a_2)$ est égal à $n = n_1 n_2$.
- On a $a^n = ((a_1)^{n_1})^{n_2}, (a_2)^{n_2})^{n_1}) = (e_1, e_2)$.
- Si pour $k \in \mathbb{Z}$, on a $a^k = e$ alors $a_1^k = e_1$ et $a_2^k = e_2$ donc $n_1|k$ et $n_2|k$ et comme $n_1 \wedge n_2 = 1$, on a $n|k$. Donc $n = n_1 n_2 = \text{card}(G_1 \times G_2)$ est l'ordre que $(a_1, a_2) = a$ donc $G_1 \times G_2 = \langle (a_1, a_2) \rangle$ et comme il est fini, il est cyclique.
• Réciproquement, supposons que G est cyclique et soit $a = (a_1, a_2)$ un générateur de G, donc l'ordre de a vaut mn. Soit δ un diviseur positif commun de n_1 et n_2 et écrivons $n_1 = \delta n_1'$ et $n_2 = \delta n_2'$ et soit $k = n_1' n_2' \delta$. On a : $a^k = ((a_1^{n_1})^{n_2'}, (a_2^{n_2})^{n_1'}) = (e_1, e_2)$, donc $n_1 n_2 | k$ donc $\delta^2 n_1' n_2' | \delta n_1' n_2'$ donc $\delta | 1$, donc $\delta = 1$, d'où $n_1 \wedge n_2 = 1$.

EXERCICE 45 Groupe des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$

Titre : Groupe des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 87 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 73 | ID : 87

1. Soit x un entier relatif impair. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 3 \Rightarrow x^{2^{n-2}} \equiv 1 \ [2^n]$$
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$, le groupe $\mathscr{U}(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ n'est pas cyclique.

Solution

1. Par récurrence :
   • Le démarrage : $n = 3$: $x^2 \equiv 1 \ [8]$ car si on pose $x = 2k+1$, on a :
   $$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 2.k.2(k+1) = 4k(k+1)$$
   et comme $k(k+1)$ est pair il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $k(k+1) = 2k'$, donc $x^2 - 1 = 8k'$, ce qui termine la preuve.
   • Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$ tel que $x^{2^{n-2}} \equiv 1 \ [2^n]$. Il existe alors $q \in \mathbb{Z}$ tel que $x^{2^{n-2}} = 1 + q2^n$. On a :
   $$\begin{aligned} x^{2^{n-1}} - 1 &= (x^{2^{n-2}})^2 - 1 \\ &= (1+q2^n)^2 - 1 = (q + q^2 2^{n-1})2^{n+1}, \end{aligned}$$
   ce qui prouve que : $x^{2^{n-1}} \equiv 1 \ [2^{n+1}]$, et termine la démonstration par récurrence du résultat demandé.
2. Le cardinal du groupe $\mathscr{U}(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ est, φ étant l'indicatrice d'Euler :
$$|\mathscr{U}(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})| = \varphi(2^n) = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}.$$
Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\overline{x} \in \mathscr{U}(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \wedge 2^n = 1$, donc $\mathscr{U}(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ est constitué des classe des entiers relatifs impairs. La question précédente montrer que si $\overline{x} \in \mathscr{U}(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ avec $x \in 2\mathbb{Z}+1$, alors, dans $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$, on a $\overline{x}^{2^{n-2}} = 1$, donc l'ordre de $\overline{x}$ dans $\mathscr{U}(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ est strictement inférieur à 2^{n-1} qui est le cardinal de $\mathscr{U}(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$, donc ce dernier n'est pas cyclique car il ne posséde aucun élément d'ordre son cardinal.

EXERCICE 46 Extension de corps

Titre : Extension de corps **Difficulté :** ★★★☆☆
ID : 88 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 74 | ID : 88

Pour toute partie A de $\mathbb{C}$, et tout sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$, on note $\mathbb{K}(A)$ le plus petit sous-corps $\mathbb{L}$ de $\mathbb{C}$ tel que $A \subset \mathbb{L}$ et $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$. Si A est finie non vide, $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ on notera $\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ au lieu de $\mathbb{K}(A)$.

1. Démontrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$ et que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) + \mathbb{Q}(\sqrt{2})\sqrt{3}$.
2. Démontrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
3. Démontrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2} + \mathbb{Q}\sqrt{3} + \mathbb{Q}\sqrt{6}$
4. Soit $\theta = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

(a) Démontrer que $\mathfrak{I}_\theta = \{P \in \mathbb{Q}[X]/P(\theta) = 0\}$ est un idéal non nul de $\mathbb{Q}[X]$. En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire $\pi_\theta \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\mathfrak{I}_\theta = \pi_\theta \mathbb{Q}[X]$.

(b) Démontrer que π_θ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. En déduire que la famille $(1, \theta, \theta^2, \theta^3)$ est libre dans le $\mathbb{Q}-$ espace vectoriel $\mathbb{R}$

(c) Démontrer que :

$$\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\theta + \mathbb{Q}\theta^2 + \mathbb{Q}\theta^3.$$

Solution

Pour toute partie A de $\mathbb{C}$, et tout sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$, on note $\mathbb{K}(A)$ le plus petit sous-corps $\mathbb{L}$ de $\mathbb{C}$ tel que $A \subset \mathbb{L}$ et $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$. Si A est finie non vide, $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ on notera $\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ au lieu de $\mathbb{K}(A)$.

1. On a deux choses à démontrer :
   • La première : $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$: Posons $\mathbb{L} = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$. Par définition de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, on a $\mathbb{L} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, donc il suffit de prouver que $\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
   • On a $1 = 1 + 0.\sqrt{2} \in \mathbb{L}$.
   • Si $x, y \in \mathbb{L}$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$ et $y = c + d\sqrt{2}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ alors $x - y = (a - c) + (b - d)\sqrt{2} \in \mathbb{L}$.
   • Si $x, y \in \mathbb{L}$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$ et $y = c + d\sqrt{2}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ alors $xy = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$ donc $xy \in \mathbb{L}$.
   • Finalmenet si $x = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{L}^*$ alors $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ et par suite on a aussi $x' = a - b\sqrt{2} \in \mathbb{L}^*$, donc $xx' \neq 0$ donc $a^2 - 2b^2 \neq 0$ et comme $x^{-1} = \frac{x'}{xx'} = \frac{a}{a^2-2b^2} + \frac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$, on a $x^{-1} \in \mathbb{L}$, donc $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
   • Deuxiéme : $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) + \mathbb{Q}(\sqrt{2})\sqrt{3}$, et comme ci-desssus, il suffit de prouver que $\mathbb{L}' = \mathbb{L} + \mathbb{L}\sqrt{3}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ (on a noté $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$).
   • On a $1 \in \mathbb{L}'$ car $1 \in \mathbb{L}$ et $\mathbb{L} \subset \mathbb{L}'$.

   • Si $x, y \in \mathbb{L}'$ tel que $x = a + b\sqrt{3}$ et $y = c + d\sqrt{3}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{L}$ alors $x - y = (a - c) + (b - d)\sqrt{3} \in \mathbb{L}'$.
   • Si $x, y \in \mathbb{L}'$ tel que $x = a + b\sqrt{3}$ et $y = c + d\sqrt{3}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{L}$ alors $xy = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{3}$ donc $xy \in \mathbb{L}'$.
   • Finalmenet si $x = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{L}'^*$ alors $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ et par suite on a aussi $x' = a - b\sqrt{3} \in \mathbb{L}'^*$, donc $xx' \neq 0$ donc $a^2 - 3b^2 \neq 0$ et comme $x^{-1} = \frac{x'}{xx'} = \frac{a}{a^2-3b^2} + \frac{-b}{a^2-3b^2}\sqrt{3}$, on a $x^{-1} \in \mathbb{L}'$, donc $\mathbb{L}'$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, donc $\mathbb{L}' = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{2})$.
2. Par définition $\mathbb{L}'' = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ est le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ tel que $\sqrt{2} \in \mathbb{L}''$ et $\sqrt{3} \in \mathbb{L}''$. Il en découle que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{L}''$ et $\sqrt{3} \in \mathbb{L}''$, donc $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) \in \mathbb{L}''$, et comme $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, on a $\mathbb{L}'' = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$. Donc $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$.
3. Notons $\mathbb{L}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ et $\mathbb{L}_2 = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2} + \mathbb{Q}\sqrt{3} + \mathbb{Q}\sqrt{6}$. On a $\mathbb{L}_2 \subset \mathbb{L}_1$ car tout simplement $\sqrt{6} \in \mathbb{L}_2$ puisque $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$ et $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{L}_1$. Par ailleurs on peut remarquer que $\mathbb{L}_2 = \mathbb{L} + \mathbb{L}\sqrt{3}$ avec $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et on a vu dans la question précédente que $\mathbb{L} + \mathbb{L}\sqrt{3} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$ est un corps, donc $\mathbb{L}_2$ est un corps contenu dans $\mathbb{L}_1$. Donc $\mathbb{L}_2$ est le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ donc $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$.
4. Soit $\theta = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
   (a) Démontrer que $\mathfrak{I}_\theta = \{P \in \mathbb{Q}[X]/P(\theta) = 0\}$ est un idéal non nul.
   • On a $0 \in \mathfrak{I}_\theta$, donc $\mathfrak{I}_\theta \neq \emptyset$.
   • Si $P, Q \in \mathfrak{I}_\theta$, alors $P - Q \in \mathfrak{I}_\theta$, car $(P - Q)(\theta) = P(\theta) - Q(\theta) = 0$.
   • Si $P \in \mathbb{Q}[X]$ et $Q \in \mathfrak{I}_\theta$, alors $PQ \in \mathfrak{I}_\theta$ car $PQ(\theta) = P(\theta)Q(\theta) = P(\theta).0 = 0$.
   Il en découle que $\mathfrak{I}_\theta$ est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$.
   • Pour démontrer que $\mathfrak{I}_\theta$ est non nul, il faut trouver un polynôme non nul à coefficients rationnels qui annule θ. Pour cela, remarquons que $\theta + \frac{1}{\theta} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, ce qui permet de dire que $\theta + \frac{1}{\theta} = 2\sqrt{3}$, donc $(\theta + \frac{1}{\theta})^2 = 12$ et finalement $P(\theta) = 0$ où $P(X) = X^4 - 10X^2 + 2$. D'après le cours on déduit qu'il existe un unique polynôme unitaire $\pi_\theta \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\mathfrak{I}_\theta = \pi_\theta \mathbb{Q}[X]$.

(b) π_θ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ car sinon on aurait $\pi_\theta = P_1P_2$ avec P_1 et P_2 non constants et comme $\pi_\theta(\theta) = 0$ on a $P_1(\theta) = 0$ ou $P_2(t) = 0$, chose impossible car cela donnerait $\pi_\theta | P_1$ ou $\pi_\theta | P_2$. Démontrons que :

$$\forall (r_0, r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{Q}^4, \sum_{k=0}^{3} r_k \theta^k = 0 \Rightarrow r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = 0$$

On a vu ci-dessus que le polynôme $P = X^4 - 10X^2 + 2$ réalise $P(\theta) = 0$, donc on a $\pi_\theta | P$. Si on démontre que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, on a aura donc prouvé que $\pi_\theta = X^4 - 10X^2 + 2$, ce qu'on va faire effectivement :
• Pour prouver que $P = X^4 - 10X^2 + 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, il suffit de prouver que :

(i) P ne posséde aucune racine rationnelle.
(ii) P ne peut se factoriser en produit de deux trinômes à coefficients rationnels.

• Pour (i) supposons que P admet une racine rationnelle $r = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}^*$ et $p \wedge q = 1$, donc $\frac{p^4}{q^4} - 10\frac{p^2}{q^2} + 2 = 0$ et alors $p^4 - 10p^2q^2 + 2q^4 = 0$, donc $p^4 = q(10p^2q - 2q^3)$ et par suite $q | p^4$, et comme $p \wedge q = 1$ on a $q = 1$ et alors $r = p \in \mathbb{Z}$ et $p^4 - 10p^2 + 2 = 0$, donc $p | 2$, donc $p \in \{-1, 1, 2, -2\}$, ce qui n'est pas le cas par simple vérification.
• Supposons que $P = P_1P_2$ avec $P_1, P_2 \in \mathbb{Q}[X]$ unitaires de degré 2 chacun. Comme $P(\theta) = 0$ on a $P_1(\theta) = 0$ ou $P_2(\theta) = 0$. Supposons par exemple que $P_1(\theta) = 0$ et $P_1(X) = X^2 - pX - q$ avec $p, q \in \mathbb{Q}$, donc $\theta^2 = p\theta + q$ et par suite il existe $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tel que $P(\theta) = r_1\theta + r_2$, ce qui donne $\theta \in \mathbb{Q}$, chose fausse car $\theta^2 = 5 + \sqrt{6}$ et comme $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$, on a $\theta \notin \mathbb{Q}$. Ainsi P est irréductible donc comme on l'a dit ci-dessus $P = \pi_\theta$.
• Si $r_0, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Q}$ tel que $\sum_{k=0}^{3} r_k \theta^k = 0$ alors pour $Q(X) = \sum_{k=0}^{3} r_k X^k$, on a $\mathbb{Q}(\theta) = 0$ donc $\pi_\theta | Q$ et comme $\deg(\pi_\theta) = 4 > 3 = \deg(Q)$, on a $Q = 0$, donc $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = 0$ et on a la famille $(1, \theta, \theta^2, \theta^3)$ est libre dans le $\mathbb{Q}-$espace vectoriel $\mathbb{Q}$.

(c) Par définition de $\mathbb{Q}(\theta)$, on a $\mathbb{L}_1 = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\theta + \mathbb{Q}\theta^2 + \mathbb{Q}\theta^3 = \text{Vect}\{1, \theta, \theta^2, \theta^3\} \subset \mathbb{Q}(\theta)$. Il en découle que si on démontre que $\mathbb{L}_1$ est un sous-corps de $\mathbb{Q}$, on aura prouver que $\mathbb{L}_1 = \mathbb{Q}(\theta)$.
Pour montrer que $\mathbb{L}_1$ est un sous-corps de $\mathbb{Q}$, il suffit de prouver sa stabilité par le produit et l'inverse pour les éléments non nuls :
• Si $x_1 = \mathbb{P}_1(\theta)$ et $x_2 = \mathbb{P}_2(\theta)$ sont deux éléments de $\mathbb{L}_1$ où P_1 et P_2 sont deux polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ de degrés ≤ 3 alors $x_1x_2 = Q(\theta)$ avec $Q = P_1P_2$. La division euclidienne de Q par π_θ donne $Q(X) = Q_1(X)\pi_\theta(X) + R(X)$ avec $R(X) = r_0 + r_1\theta + r_2\theta^2 + r_3\theta^3$ avec $r_0, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Q}$, donc $x_1x_2 = r_0 + r_1\theta + r_2\theta^2 + r_3\theta^3$ et $x_1x_2 \in \mathbb{L}_1$
• Soit $x = r_0 + r_1\theta + r_2\theta^2 + r_3\theta^3 \in \mathbb{L}_1$ tel que $(r_0, r_1, r_2, r_3) \neq (0, 0, 0, 0)$. Démontrons que $\frac{1}{x} \in \mathbb{L}_1$. Remarquons que $x = P(\theta)$ avec $P(X) = r_0 + r_1X + r_2X^2 + r_3X^3$, donc $P \wedge \pi_\theta = 1$ car sinon, comme π_θ est irréductible on aurait $P \wedge \pi_\theta = \pi_\theta$, chose impossible car $\pi_\theta(\theta) = 0$ et $P(\theta) \neq 0$. Par le théorème de Bezout, il existe $Q, Q_1 \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(X)Q(X) + \pi_\theta(X)Q_1(X) = 1$, donc $P(\theta)Q(\theta) = 1$ et par suite $\frac{1}{x} = \frac{1}{P(\theta)} = Q(\theta)$ et en effectuant la division euclidienne de Q par π_θ, on trouve $\frac{1}{x} = Q_2(\theta)$ avec $Q_2(X) = \rho_0 + \rho_1X + \rho_2X^2 + \rho_3X^3$ et $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathbb{Q}$, donc $\frac{1}{x} \in \mathbb{L}_1$.
• EN conclusion on a $\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{L}_1$. Or il est aisé de prouver que $\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, donc $\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{L}_1$, c'est ce qui est demandé.

EXERCICE 47 Sous-groupes de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

Titre : Sous-groupes de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ **Difficulté :**
ID : 477 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 460 | ID : 477

Trouver tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Soignez vos réponses

Solution

On utilise le résultat vu dans un autre exercice que si G est un groupe cyclique de cardinal n alors pour tout diviseur d de n, il existe un et un seul sous-groupe G_d de G de cardinal d et que G_d est lui même un groupe cyclique.
Un sous-groupe de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ est donc un groupe cyclique de cardinal un diviseur de 12. Les ordres possibles des éléments sont $1, 2, 3, 4, 6, 12$. Voici une liste d'éléments ayant ces ordres respectivement : $0, 6, 4, 3, 2, 1$, donc les sous-groupes en question sont :

1. $\langle 0 \rangle = \{0\}$.
2. $\langle 6 \rangle = \{0, 6\}$.
3. $\langle 4 \rangle = \{0, 4, 8\}$.
4. $\langle 3 \rangle = \{0, 3, 6, 9\}$.
5. $\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.
6. $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

EXERCICE 48 Morphisme d'anneau de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

Titre : Morphisme d'anneau de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ **Difficulté :**
ID : 483 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 465 | ID : 483

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme d'anneaux non nul.

1. Calculer $f(0), f(1), f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis $\mathbb{Z}$, puis $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que $x \geqslant 0$ entraîne $f(x) \geqslant 0$ (dans $\mathbb{R}$, tout positif est un carré).
3. En déduire f croissante, puis $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Solution

1. $f(0) = 0$ car f est un morphisme de groupe. De même $f(1) = 1$ car f est un morphisme d'anneaux. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $f(n) = n$ (par simple récurrence). Si $n \in \mathbb{N}$ alors $f(n + (-n)) = f(0) = 0 = f(n) + f(-n)$, donc $f(-n) = -n$, donc $f(k) = k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Si $r = p/q$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ alors $qr = p$, donc $p = f(p) = f(qr) = qf(r)$, donc $f(r) = p/q = r$.
2. si $x \geq 0$ soit $b = \sqrt{x}$, donc $x = b^2$ et $f(x) = (f(b))^2 \geq 0$.
3. Si $x, y \in \mathbb{R}$ et $x \leq y$ alors $y - x \geq 0$, donc $f(y - x) \geq 0$ donc $f(y) - f(x) \geq 0$ et $f(y) \geq f(x)$. Si $x \in \mathbb{R}$, il existe deux suites (r_n) et (r'_n) de rationnels tel que $r_n \leq x \leq r'_n$ et (r_n) et (r'_n) convergent vers x, donc $f(r_n) \leq f(x) \leq f(r'_n)$ donc $r_n \leq f(x) \leq r'_n$ et par passage à la limite $x \leq f(x) \leq x$, donc $f(x) = x$

EXERCICE 49 Partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est un groupe

Titre : Partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est un groupe **Difficulté :**
ID : 502 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 484 | ID : 502

Soit G une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non réduite à la matrice nulle. On suppose que $(G,\times)$ est un groupe. Montrer qu'il existe $r\in\mathbb{N}^*$ tel que le groupe $(G,\times)$ soit isomorphe à un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_r(\mathbb{R}),\times)$

Solution

Notons E l'élément neutre de $(G,\times)$, alors $E\neq 0$ car on a supposé $G\neq\{0\}$. On a $E^2=E$ (élément neutre), et donc E est la matrice d'un projecteur. Notons $r=\mathrm{rg}\,(E)$, alors $r\in\mathbb{N}^*$. Si u est l'endomorphisme canoniquement associé à E alors $\mathrm{Im}(u)\oplus\ker(u)=\mathbb{R}^n$, et si $\mathscr{V}=(v_1,\ldots,v_r,v_{r+1},\ldots,v_n)$ est une base adaptée à la somme directe citée, la matrice de u relativement à $\mathscr{V}$ est $E'=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=J_r$. Par suite E et E' sont sembalbles et il existe $P\in\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $E=PJ_rP^{-1}$. Soit Pour toute matrice $M\in G$, on a $M'=P^{-1}MP=\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ avec $A\in\mathcal{M}_r(\mathbb{R}),D\in\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R}),B\in\mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$ et $C\in\mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$. Comme $EM=M=ME$ (car E l'élément neutre de G), on a : $M'J_r=J_rM'=M'$, donc après calcul $\begin{pmatrix} A & B\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0\\ C & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}$, donc $B=0$ et $C=0$ et $D=0$ et par suite $M'=\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Soit φ l'application définie par

$$\varphi: G\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M\mapsto A.$$

Remarquons que si $M\in G$ alors de $ME=M$, on a $\mathrm{rg}\,(M)=\mathrm{rg}\,(ME)\leq\mathrm{rg}\,(E)=r$. Comme il existe $M_1\in G$ tel que $MM_1=E$, on $\mathrm{rg}\,(M)\leq r$, donc $\mathrm{rg}\,(M)=r$, comme M est semblable à $\begin{pmatrix}\varphi(M) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, il s'en suit que $\mathrm{rg}\,(A)$ est inversible dans $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, donc $A\in\mathbf{GL}_r(\mathbb{R})$. Il en découle que φ est bien une application de G à valeurs dans $\mathbf{GL}_r(\mathbb{R})$, donc elle induit une application notée aussi φ de G vers $\mathbf{GL}_r(\mathbb{R})$.

- Si $M_1,M_2\in G$ et $A_1=\varphi(M_1)$ et $A_2=\varphi(M_2)$ alors $M_k=P\begin{pmatrix} A_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ alors :
- Pour tout $k\in\{1,2\}$, donc

$$\begin{aligned}\varphi(M_1)=\varphi(M_2) &\Rightarrow A_1=A_2\\ &\Rightarrow M_1=M_2,\end{aligned}$$

par suite φ est injective et réalise une bijection de G vers $\varphi(G)$.

- Si $M_1M_2=P\begin{pmatrix} A_1A_2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, montre que $\varphi(M_1M_2)=A_1A_2=\varphi(M_1)\varphi(M_2)$, donc φ est un morphisme de groupe de G vers $\mathbf{GL}_r(\mathbb{R})$. Il en découle que $\varphi(G)$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_r(\mathbb{R})$ et que G est isomorphe à $\varphi(G)$.

EXERCICE 50 — Partie multiplicative de matrices, caractérisations diverses

Titre : Partie multiplicative de matrices, caractérisations diverses
Difficulté : ★★★☆☆
ID : 512 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 494 | ID : 512

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Etablir que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) Il existe une partie $\mathcal{G}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par le produit des matrices tel que $(\mathcal{G},\circ)$ est un groupe et $A\in\mathcal{G}$.
(ii) $\mathrm{rg}\,(A)=\mathrm{rg}\,(A^2)$
(iii) $\ker(A)=\ker(A^2)$
(iv) $\mathrm{Im}(A)\oplus\ker(A)=\mathbb{R}^n$
(v) $\exists B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AB=BA$ et $A^2B=A$ et $B^2A=B$.

Solution

On démontre les implications :
• $(i) \Rightarrow (ii)$ Si E est l'élément neutre de $\mathcal{G}$ on $AA' = E$ avec A' le symétrique de A, donc $\text{rg}(A) \geq \text{rg}(AA') \geq \text{rg}(E)$, par ailleurs $A = EA$ donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(EA) \leq \text{rg}(E)$, donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(E)$ pour tout $A \in \mathcal{G}$, et comme $A^2 \in \mathcal{G}$, on a aussi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2) = \text{rg}(E)$.
• $(ii) \Rightarrow (iii)$ immédiat par le théorème du rang : on a déjà $\ker(A) \subset \ker(A^2)$, ensuite comme $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2)$, le théorème du rang donne $\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(A^2))$, d'où $\ker(A) = \ker(A^2)$.

• $(iii) \Rightarrow (iv)$ On a déjà $\dim(\text{Im}(A)) + \dim(\ker(A)) = n$, il suffit de prouver que $\text{Im}(A) \cap \ker(A) = \{0\}$, soit $x \in \text{Im}(A) \cap \ker(A)$, il existe $a \in E$ tel que $Aa = x$ et $Ax = 0$, donc $A^2a = 0$, donc $a \in \ker(A^2) = \ker(A)$, donc $x = Aa = 0$.
• $(iv) \Rightarrow (v)$, supposons pour le moment que A est non nulle et non inversible donc $\text{rg}(A) = r$ avec $0 < r < n$. Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A, puisque $\text{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$, il existe une base $\mathfrak{b}$(adaptée à la somme directe) tel que $A' = \underset{\mathfrak{b}}{\text{mat}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $A_1 \in \mathbf{GL}_r(\mathbb{K})$. Il en découle qu'il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PA'P^{-1}$. Prenons $B = PB'P^{-1}$ avec $B' = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il est aisé de voir que $AB = BA$ et $A^2B = A$ et $AB^2 = B$.
• $(v) \Rightarrow (i)$ Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que : $AB = BA$ et $A^2B = A$ et $B^2A = B$. On a alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2B) \leq \text{rg}(A^2) \leq \text{rg}(A)$, donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2)$ et en conséquence on a (ii) donc on a (iv) à savoir $\text{Im}(A) \oplus \ker(A) = \mathbb{R}^n$. Il en découle que dans une base adaptée la matrice de l'endomorphisme u canoniquement associé à A s'écrit $A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc il existe une matrice $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PA'P^{-1}$. Soit $\mathcal{G} = \{P \begin{pmatrix} M^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} / k \in \mathbb{Z}\}$, alors pour $k = 1$, on obtient $A \in \mathcal{G}$. Il est aisé de vérifier que $(\mathcal{G}, \circ)$ est un groupe, ce qui termine la preuve de l'implication demandée.
Remarque : Une autre proposition pour $(v) \Rightarrow (i)$ est de prendre la partie

$$\mathcal{G} = \{A^kB^l / k, l) \in \mathbb{N}^2 \backslash \{(0,0)\}.$$

En effet on a les points suivants :
• Pour $(k,l) = (1,0)$, on a $A \in \mathcal{G}$.
• La stabilité $(A^kB^l)(A^nB^m) = A^{k+n}B^{l+m}$.
• L'élément neutre $E = AB$ car si $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ avec par exemple $k \neq 0$ on a $A^kB^l(AB) = A^{k+1}B^l = A^{k-1}(A^2B)B^l = A^{k-1}AB^l = A^kB^l$.
• Le symetrique de $M = A^kB^l$ est $M' = A^lB^k$ car $MM' = (AB)^{k+l} = AB$ car $(AB)^2 = AB$.

EXERCICE 51 Une fraction rationnelle qui est un polynôme

Titre : Une fraction rationnelle qui est un polynôme
ID : 515 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 496 | ID : 515
Difficulté : ★★☆☆☆

Soient $\mathbb{K}$ un corps et

$$f(X) = \frac{(1+X)\left(1+X^{15}\right)}{\left(1+X^3\right)\left(1+X^5\right)}$$

1. Montrer que $f(X) \in \mathbb{K}[X]$.
2. En calculant modulo X^9, montrer que

$$f(X) = X^8 + X^7 - X^5 - X^4 - X^3 + X + 1$$

Solution

1. On montre que $(1+X^3, 1+X^5) = 1+X$ dans $\mathbb{K}[X]$ soit directement en distinguant les cas sur la caractéristique de $\mathbb{K}$, soit en se plaçant d'abord sur $\mathbb{Z}$. On en déduit ensuite facilement que $f(X) \in \mathbb{K}[X]$.
2. Il est clair que $\deg f = 8$. Si $g(X) \in \mathbb{K}[X]$ vérifie les deux conditions $\deg g \leq 8$ et $g(X) \equiv f(X) \pmod{X^9}$ alors $g(X) = f(X)$. Or on a :

$$\begin{aligned} f(X) &\equiv \frac{1+X}{(1+X^3)(1+X^5)} \pmod{X^9} \\ &\equiv \frac{(1+X)(1-X^3)(1-X^5)}{1-X^6} \pmod{X^9} \\ &\equiv (1+X)(1-X^3)(1-X^5)(1+X^6) \pmod{X^9} \\ &\equiv \left(1+X-X^3-X^4\right)(1-X^5+X^6) \pmod{X^9} \\ &\equiv X^8+X^7-X^5-X^4-X^3+X+1 \pmod{X^9} \\ &\text{donc } f(X) = X^8+X^7-X^5-X^4-X^3+X+1. \end{aligned}$$

EXERCICE 52 Isomorphes en tant que $\mathbb{Q}-$ev et non comme corps

Titre : Isomorphes en tant que $\mathbb{Q}-$ev et non comme corps
ID : 516 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 497 | ID : 516
Difficulté : ★★☆☆☆

1. Démontrer que si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ alors $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{Q}$ espace vectoriel pour l'addition naturelle et la loi externe induite par la multiplication naturelle.
2. Donner des exemple de sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ pour lesquels :
   (a) $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{Q}-$ espace vectoriel de dimension finie .
   (b) $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{Q}-$ espace vectoriel de dimension infinie .

   Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ tel que $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{K})$ est finie, on notera $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{K})$. Pour tout $\theta \in \mathbb{C}$, on notera $\mathbb{Q}(\theta)$ le plus petits sous corps de $\mathbb{C}$ contenant $\{\theta\}$. On dit que θ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si $\mathbb{Q}(\theta)$ est de dimension finie. Dans ce cas on dira que $[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}]$ est le degré de l'extension $\mathbb{Q}(\theta)$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{C}$ et $\mathfrak{I}_\theta = \{P \in \mathbb{Q}[X] / P(\theta) = 0\}$. Montrer que $\mathfrak{I}_\theta$ est un idéal de l'anneau $\mathbb{Q}[X]$ et que $\mathfrak{I}_\theta \neq \{0\}$ si et seulement si θ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.
4. Démontrer que si $\theta \in \mathbb{C}$ est algébrique alors il existe un et unseul polynôme unitaire π_θ tel que $\mathfrak{I}_\theta = \pi_\theta \mathbb{Q}[X]$. Démontrer alors que π_θ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et que $\deg(\pi_\theta) = [\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}]$.
5. Démontrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ sont isomorphes en tant que $\mathbb{Q}-$espaces vectoriels mais ne sont pas isomorphes en tant que corps.

Solution

A venir

EXERCICE 53 Un excellent exercice sur l'arithmetique et les polynômes

Titre : Un excellent exercice sur l'arithmetique et les polynômes
ID : 517 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 498 | ID : 517
Difficulté : ★★★☆☆

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

avec $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{Z}$ premiers dans leur ensemble, $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$.

1. On suppose que $\alpha \in \mathbb{Z}$, montrer que α divise a_0.
2. On suppose que $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$, la fraction p/q étant irréductible, démontrer que p divise a_0 et que q divise a_n. Démontrer que pour tout entier m, l'entier $p - mq$ divise $f(m)$. (En particulier $p - q$ divise $f(1)$ et $p + q$ divise $f(-1)$). Enoncer le résultat obtenu lorsque $a_n = 1$.
3. Soit
$$\varphi(Y) = Y^n + a_{n-1} Y^{n-1} + a_n a_{n-2} Y^{n-2} + \cdots + a_n^{n-2} a_1 Y + a_n^{n-1} a_0$$
Montrer que $a_n^{n-1} f(X) = \varphi(Y)$ avec $Y = a_n X$. En déduire le lien entre les racines rationnelles de $f(X)$ et celles de $\varphi(Y)$.
4. Déterminer les racines rationnelles de $f_1(X) = 2X^3 - 12X^2 + 13X - 15$ et de $f_2(X) = 4X^3 - 8X^2 + 15X - 3$.

Solution

1. On a : $a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = 0$ donc
$$\alpha \left(-a_n \alpha^{n-1} - a_{n-1} \alpha^{n-2} - \cdots - a_2 \alpha - a_1 \right) = a_0$$
ce qui montre que α divise a_0.
2. On a :
$$a_n \left(\frac{p}{q} \right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q} \right)^{n-1} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$
donc
$$p \left(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \cdots + a_1 q^{n-1} \right) = -a_0 q^n$$
d'où $p \mid a_0 q^n$. Comme $(p, q) = 1$, on a $p \mid a_0$. De même on a :
$$q \left(a_0 q^{n-1} + a_1 p q^{n-2} + \cdots + a_{n-1} p^{n-1} \right) = -a_n p^n$$
donc $q \mid a_n$. En développant le polynôme $f(X)$ par la formule de Taylor suivant les puissances de $(X - m)$, on obtient :
$$f(X) = f(m) + \frac{f'(m)}{1!}(X - m) + \cdots + \frac{f^{(n)}(m)}{n!}(X - m)^n.$$
Dans ce développement les coefficients $f^{(i)}(m)/i!$ sont des entiers rationnels. En effet, un raisonnement par récurrence montre que
$$f^{(i)}(X) = \sum_{j=i}^{n} j(j-1)\ldots(j+1-i) a_j X^{j-i}.$$
Donc :
$$\frac{f^{(i)}(X)}{i!} = \sum_{j=i}^{n} \frac{j(j-1)\ldots(j+1-i)}{i!} a_j X^{j-i} = \sum_{j=i}^{n} C_j^i a_j X^{j-i}$$
ce qui établit que $f^{(i)}(X)/i!$ est un polynôme à coefficients entiers et donc que $f^{(i)}(m)/i! \in \mathbb{Z}$. Cela étant, substituons $X = p/q$ dans le développement, on obtient
$$0 = f\left(\frac{p}{q}\right) = f(m) + \frac{f'(m)}{1!}\left(\frac{p}{q} - m\right) + \cdots + \frac{f^{(n)}(m)}{n!}\left(\frac{p}{q} - m\right)^n$$
d'où
$$q^n f(m) + q^{n-1} \frac{f'(m)}{1!}(p - mq) + \cdots + \frac{f^{(n)}(m)}{n!}(p - mq)^n = 0.$$

On en déduit que $p-mq$ divise $q^n f(m)$. Or $(p-mq, q^n) = 1$ donc $p-mq$ divise $f(m)$. En particulier pour $m=1$, $p-q$ divise $f(1)$ et pour $m=-1$, $p+q$ divise $f(-1)$. Si $a_n = 1$ et si $p/q \in \mathbb{Q}$ est une racine de $f(X)$ alors $p \mid a_0$ et $q=1$, donc toute racine rationnelle de $f(X)$ est entière. [On peut interpréter ce résultat en disant que $\mathbb{Z}$ est un anneau intégralement clos.]

3. On a :
$$\begin{aligned} a_n^{n-1} f(X) &= a_n^n X^n + a_{n-1} a_n^{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 a_n^{n-1} X + a_0 a_n^{n-1} \\ &= (a_n X)^n + a_{n-1} (a_n X)^{n-1} + \cdots + a_1 a_n^{n-2} (a_n X) + a_0 a_n^{n-1} \\ &= \varphi(a_n X) \end{aligned}$$
où l'on a posé
$$\varphi(Y) = Y^n + a_{n-1} Y^{n-1} + \cdots + a_1 a_n^{n-2} Y + a_0 a_n^{n-1}$$
On a la relation suivante entre les racines de $f(X)$ et celles de $\varphi(X)$:
$$\alpha \text{ est racine de } f \iff a_n\alpha \text{ est racine de } \varphi.$$
Pour déterminer les racines rationnelles de $f(X)$, on a donc avantage à chercher les racines rationnelles de φ (car elles sont entières).

4. (a) Racines rationnelles de $f_1(X) = 2X^3 - 12X^2 + 13X - 15$. On a
$$4f_1(X) = 8X^3 - 48X^2 + 52X - 60 = Y^3 - 12Y^2 + 26Y - 60 = \varphi_1(Y)$$
avec $Y = 2X$. Les racines rationnelles r éventuelles de φ_1 sont des entiers positifs qui divisent 60 , donc $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$. Parmi ces entiers, seuls 2 et 10 vérifient les conditions $r-1$ divise $\varphi_1(1) = -45$ et $r+1$ divise $\varphi_1(-1) = -99$. On a :
$$\begin{cases} \varphi_1(2) \neq 0 \\ \varphi_1(10) = 0, \end{cases}$$
et donc $\varphi_1(Y) = (Y-10)\left(Y^2 - 2Y + 6\right) = 4f_1(X)$ d'où
$$f_1(X) = (X-5)\left(2X^2 - 2X + 3\right)$$
(b) Racines rationnelles de $f_2(X) = 4X^3 - 8X^2 + 15X - 3$. On a
$$2f_2(X) = 8X^3 - 16X^2 + 30X - 6 = Y^3 - 4Y^2 + 15Y - 6 = \varphi_2(Y),$$
avec $Y = 2X$. Les racines rationnelles de φ_2 sont entières, positives et divisent 6 , donc $r = 1, 2, 3, 6$. Comme $r+1$ divise $\varphi_2(-1) = -26$, alors $r = 1$. Or $\varphi_2(1) = 6 \neq 0$ donc φ_2 est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et par suite $f_2(X)$ l'est aussi.

EXERCICE 54 Un peu de théorie de corps

Titre : Un peu de théorie de corps
ID : 518 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 499 | ID : 518
Difficulté : ★★★☆☆

Soit $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible de degré ≥ 3.

1. On suppose que $f(X)$ admet exactement deux racines non réelles $z_1 = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \overline{z}_1$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\beta \notin \mathbb{Q}$.
2. On suppose que $f(X)$ admet une seule racine réelle r. Soit $z = \alpha + i\beta$ avec α, $\beta \in \mathbb{R}$ une autre racine de f. Montrer que $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Solution

On note $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$, contenue dans $\mathbb{C}$.

1. Supposons que $\beta \in \mathbb{Q}$ et soit r une racine réelle de $f(X)$. Soit $\sigma : \mathbb{Q}(z_1) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ le plongement tel que $\sigma(z_1) = r$. Comme $\overline{\mathbb{Q}}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}(z_1)$, on peut prolonger σ à $\overline{\mathbb{Q}}$. Notons $\widehat{\sigma}$ un prolongement de σ, alors $\widehat{\sigma}$ est un $\mathbb{Q}$-automorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}$ et on a :

$$\widehat{\sigma}(z_1 - z_2) = \widehat{\sigma}(z_1) - \widehat{\sigma}(z_2) = \dot{\widehat{\sigma}}(2\beta i) = 2\beta\widehat{\sigma}(i) = \pm 2\beta i,$$

donc $\widehat{\sigma}(z_2) = r \pm 2i\beta = \alpha \pm i\beta$ avec toutes les combinaisons possibles de signes. On en déduit que $\beta = \pm 2\beta$ d'où $\beta = 0$ et $z_1 \in \mathbb{R}$, ce qui est contraire à l'hypothèse, donc $\beta \notin \mathbb{Q}$.

2. Soit σ un automorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}$ tel que $\sigma(z) = r$. Supposons que $\alpha \in \mathbb{Q}$, alors

$$\sigma(z + \overline{z}) = \sigma(z) + \sigma(\overline{z}) = \sigma(2\alpha) = 2\alpha,$$

d'où $\sigma(\overline{z}) = 2\alpha - r$. Or $\sigma(\overline{z})$ est racine de $f(X)$, donc $2\alpha - r = r$, d'où $r = \alpha \in \mathbb{Q}$, ce qui contredit l'irréductibilité de $f(X)$ sur $\mathbb{Q}$. On conclut donc que $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

EXERCICE 55 — Eléménts superflus : étude importante

Titre : Eléménts superflus : étude importante
ID : 523 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 504 | ID : 523
Difficulté : ★★★☆☆

Soit $(G, \star)$ un groupe et $\omega \in G$.

1. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $\forall A \subset G, \langle A \rangle = G \Rightarrow \langle A \backslash \{\omega\} \rangle = G$.
   (ii) $\forall A \subset G, \langle A \cup \{\omega\} \rangle = G \Rightarrow \langle A \rangle = G$.
   (iii) $\forall A \subset G, \langle A \rangle = G \Rightarrow \langle \omega A \rangle = \langle \omega^{-1} A \rangle = G$.
   Si ω satisfait l'une des conditions $(i), (ii), (iii)$ on dit que ω est *superflu*.
2. On note $\mathfrak{T}_G$ l'ensemble des éléments superflus de G. Démontrer que $\mathfrak{T}_G$ est un sous groupe de $(G, \star)$.
3. Determiner $\mathfrak{T}_G$ dans chacun des cas suivants :
   (a) $G = \mathbb{Z}$ muni de l'addition.
   (b) $G = \mathbb{Q}$ muni de l'addition.
   (c) $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ muni de l'addition.

Solution

1. On procédera comme suit : $(i) \Leftrightarrow (ii)$ ensuite $(iii) \Leftrightarrow (ii)$.
   • $(i) \Rightarrow (ii)$ Si $B = A \cup \{\omega\}$ alors si $\langle B \rangle = G$ alors $\langle B \backslash \{\omega\} \rangle = G$, or $B \backslash \{\omega\} \subset A$, donc $\langle A \rangle = G$.
   • $(ii) \Rightarrow (i)$: Soit A une partie de G tel que $\langle A \rangle = G$. On a $A \backslash \{\omega\} \cup \{\omega\} = A$, donc en posant $B = A \backslash \{\omega\}$, on a $\langle B \cup \{\omega\} \rangle = G$, donc $\langle B \rangle = G$.

   • $(i) \Rightarrow (iii)$: Supposons que a est superflu, et soit A une partie de G tel que $\langle A \rangle = G$. On a $a^{-1} \in \langle aA \cup \{a\} \rangle$ et $aA \subset \langle aA \cup \{a\} \rangle$, par suite $a^{-1}aA \subset \langle aA \cup \{a\} \rangle$, donc $A \subset \langle aA \cup \{a\} \rangle$, donc $\langle A \rangle \langle aA \cup \{a\} \rangle$ et comme $\langle A \rangle = G$, o en déduit que $\langle aA \cup \{a\} \rangle = G$ et comme a est supposé superflu, et en vertu de (ii), on a $\langle aA \rangle = G$.
   Si a est superflu alors a^{-1} est superflu car pour toute partie A de G si $\langle A \cup \{a^{-1}\} \rangle = G$ alors comme $a^{-1} \in \langle A \cup \{a\} \rangle$ et $A \subset \langle A \cup \{a\} \rangle$, on a $G = \langle A \cup \{a^{-1}\} \rangle \subset \langle A \cup \{a\} \rangle$, donc $\langle A \cup \{a\} \rangle = G$ et comme a est superflu on a $\langle A \rangle = G$, donc a^{-1} est superflu, donc on a aussi $\langle a^{-1}A \rangle = A$.

• $(iii) \Rightarrow (ii)$ Supposons qu'on a (iii) et soit A une partie de G tel que $\langle A \cup \{a\}\rangle = G$, donc en posant $B = A \cup \{a\}$, on a $\langle B\rangle = G$, donc par (iii), on a $\langle a^{-1}B\rangle = G$, donc $\langle a^{-1}A \cup \{e\}\rangle = G$, or $\langle a^{-1}A \cup \{e\}\rangle = \langle a^{-1}A\rangle$, donc $\langle a^{-1}A\rangle = G$, donc par (iii) toujours on a $\langle a(a^{-1}A)\rangle = G$, donc $\langle A\rangle = G$, donc a est superflu.

2. Démontrons que $\mathfrak{T}_G$ est un sous-groupe de G.
• On a $e \in \mathfrak{T}_G$ car pour tooute partie M de G on a $\langle M\rangle = \langle M\backslash\{e\}\rangle$.
• Si $x, y \in \mathfrak{T}_G$, soit A une de G tel que $\langle A\rangle \cup \{xy\} = G$ on a $\langle A \cup \{xy\}\rangle \subset \langle A \cup \{x, y\}\rangle$, par suite $G = \langle A \cup \{x, y\}\rangle = \langle A \cup \{x\} \cup \{y\}\rangle = \langle A \cup \{x\}\rangle = \langle A\rangle$. Il endécoule que $xy \in \mathfrak{T}_G$.
• Finalement si $\omega \in \mathfrak{T}_G$ alors paur toute partie A tel que $\langle A \cup \{\omega^{-1}\}\rangle = G$ on a aussi $\langle A \cup \{\omega\}\rangle = G$ puisque $\langle A \cup \{\omega^{-1}\}\rangle = \langle A \cup \{\omega\}\rangle$

3. (a) $G = \mathbb{Z}$ muni de l'addition. On va prouver que $\mathfrak{T}_{\mathbb{Z}} = \{0\}$.
(b) $G = \mathbb{Q}$ muni de l'addition. On va prouver que $\mathfrak{T}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$.
(c) $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ muni de l'addition.

EXERCICE 56 Un groupe avec Z

Titre : Un groupe avec Z
ID : 676 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 657 | ID : 676
Difficulté : ★★☆☆☆

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, on pose $x \perp y = x + y + 1$.
(a) Montrer que $(\mathbb{Z}, \perp)$ est un groupe commutatif.
(b) Montrer que les groupes $(\mathbb{Z}, \perp)$ et $(\mathbb{Z}, +)$ sont isomorphes ?
(c) Retrouver l'élément neutre de $(\mathbb{Z}, \perp)$ et le symétrique de 2025 dans $(\mathbb{Z}, \perp)$ en utilisant l'isomorphisme.

2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, on pose $x \star y = x + (-1)^x y$.
(a) Montrer que $(\mathbb{Z}, \star)$ est un groupe.
(b) Les groupes $(\mathbb{Z}, \star)$ et $(\mathbb{Z}, \perp)$ sont-ils somorphes ?

Solution

1. (a) On peut faire une démonstartion directe en démontrant que $\perp$ est associative, commutative, si e est un élément neutre alors $e = e + e + 1$ donc $e = -1$, inversement pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $x \perp (-1) = x - 1 + 1 = x$, donc (-1) est l'élément neutre. Si $x \in \mathbb{Z}$ on a $x \perp y = -1$ si et seulement si $x + y + 1 = -1$ si et seulement si $y = -x - 2$, donc le symétrique de x est $x' = -x - 2$
(b) Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; x \mapsto f(x) = x - 1$, alors f est une bijection de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$ et pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, on a $f(x + y) = x + y - 1$ et $f(x) \perp f(y) = (x - 1) + (y - 1) + 1 = x + y - 1$, donc $f(x + y) = f(x) \perp f(y)$ et f est bien un isomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}, \perp)$.
(c) On a $f(0) = 0 - 1 = -1$ est l'élément neutre de $(\mathbb{Z}, \perp)$. On a $f^{-1}(2025) = 2025 + 1 = 2026$, donc $f(-2026) = -2026 - 1 = -2027$ est le symetrique de 2025.

2. (a) On démontre que $(\mathbb{Z}, \star)$ est un groupe :
• Soit $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$, on a :

$$\begin{aligned}(x \star y) \star z &= (x + (-1)^x.y) \star z \\ &= x + (-1)^x.y + (-1)^{x+(-1)^x.y}.z \\ &= x + (-1)^x.y + (-1)^x.(-1)^y.z \\ &= x + (-1)^x.y + (-1)^{x+y}.z\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} x\star(y\star z) &= x+(-1)^x(y\star z)\\ &= x+(-1)^x(y+(-1)^y.z)\\ &= x+(-1)^x.y+(-1)^x.(-1)^y.z\\ &= x+(-1)^x.y+(-1)^{x+y}.z \end{aligned}$$

Par comparaison on a $(x\star y)\star z = x\star(y\star z)$ pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3$, donc $\star$ est associative.

• Si e est neutre alors $e\star e = e$ donc $e+(-1)^e e = e$ et $(-1)^e e = 0$, donc $e = 0$. Inversement pour tout $x\in\mathbb{Z}$, on a $x\star 0 = x+(-1)^x.0 = x$ et $0\star x = 0+(-1)^0.x = x$, donc 0 est l'élément neutre.
• Si $x\in\mathbb{Z}$ et $y\in\mathbb{Z}$ alors $x\star y = 0 \iff x+(-1)^x.y = 0 \iff (-1)^x.x+y = 0 \iff y = -(-1)^x.x = (-1)^{x+1}.x$. Donc le symétrique de x est $x' = (-1)^{x+1}.x$.

(b) Non car le premier est commutatif et le second non puisque par exemple $1\star 2 = 1-2 = -1$ et $2\star 2 = 2+1 = 3$.

EXERCICE 57 Un groupe de matrices

Titre : Un groupe de matrices
ID : 677 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 658 | ID : 677
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $G = \{xA / x\in\mathbb{R}^*\}$.

1. Démontrer que G est stable par la multiplication des matrices carrées.
2. Démontrer que $(G,\times)$ est un groupe commutatif. Préciser l'élément neutre E de $(G,\times)$ et pour tout $M = xA\in G$ préciser M' le symétrique de M.
3. Démontrer que les groupes $(G,\times)$ et $(\mathbb{R}^*,\times)$ sont isomorphes.

Solution

1. Si $M_1 = x_1A$ et $M_2 = x_2A\in G$ avec $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ on a $M_1\times M_2 = (x_1x_2)A^2$ et comme $A^2 = 2A$, on a $M_1\times M_2 = 2x_1x_2A$, donc $M_1M_2\in G$.
2. L'assiciativité a lieu dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc dans G. Si on suppose que $E = \alpha A$ est l'élément neutre, on a $E^2 = 2\alpha^2A = E = \alpha A$, donc $2\alpha^2 = \alpha$, d'où $\alpha = \frac{1}{2}$. Réciproquement pour tout $M = xA$, on a et $E = \frac{1}{2}A$, on a $ME = EM = M$, donc $E = \frac{1}{2}A$ est l'élément neutre de $(G,\times)$. Si $M = xA$ et $M' = x'A$, on a $MM' = E$ si et seulement si $2xx'A = \frac{1}{2}A$ si et seulement si $2xx' = \frac{1}{2}$ si et seulement si $x' = \frac{1}{4}$, donc le symétrique de $M = xA$ est $M' = \frac{1}{4}xA$.
3. On peut conjecturer un morphisme de la forme $f(x) = cxA$ où c est une constante réelle non nulle. On a alors $f(1) = cA$, or $f(1) = f(1^2) = f(1)^2 = (cA)^2 = 2c^2A$ donc $cA = 2c^2A$ donc $2c = 1$ et $c = \frac{1}{2}$. Réciproquement si on pose $f(x) = \frac{x}{2}A$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$ on a bien pour tout $x,y\in\mathbb{R}^*$, $f(xy) = \frac{xy}{2}A$ et $f(x)\times f(y) = (\frac{x}{2}A)\times(\frac{y}{2}A) = 2\frac{x}{2}\frac{y}{2}A = \frac{xy}{2}A = f(xy)$.

EXERCICE 58 Le produit de deux éléments d'ordre fini n'est pas forcément d'ordre fini

Titre : Le produit de deux éléments d'ordre fini n'est pas forcément d'ordre fini
ID : 678 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 659 | ID : 678
Difficulté : ★★☆☆☆

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on note M_x la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que

$$M_x = \begin{pmatrix} 0 & x \\ \frac{1}{x} & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $M_x M_y$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^*$.
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la matrice M_x est d'ordre fini d dans le groupe $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$, determiner d.
3. Donner un exemple de matrices A et B de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que A et B d'ordres finis et AB n'est pas d'ordre fini.

Solution

1. Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$, on a $M_x M_y = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} & 0 \\ 0 & \frac{x}{y} \end{pmatrix}$
2. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $M_x^2 = I_2$,et comme $M_x \neq I_2$, on a M_x est d'ordre 2.
3. On va construire un exemple en utilisant les matrices précédente, on prend par exemple $A = M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. D'aprés la question 2) on a A et B d'ordre 2 chacune mais $AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $(AB)^k = I_2$ alors $2^k = 0$, donc $k = 0$, il en découle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, (AB)^k \neq I_2$, donc AB n'est pas d'ordre fini.

Chapitre 002 — Algèbre linéaire : Rappels (L2)

EXERCICE 59 Matrice avec que des 1

Titre : Matrice avec que des 1
ID : 12 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 1 | ID : 12
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $J = (a_{i,j})$ avec $\forall i, j \in [\![1, n]\!], a_{i,j} = 1$. On note que si u l'endomorphisme canoniquement associé à J. On note $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de E.

1. Calculer $\dim(\ker(u))$
2. Prouver que $\ker(u) \cap \ker(u - n\,\mathrm{Id}_E) = \{0\}$.
3. Calculer $u(e)$ où $e = \sum_{k=1}^{n} e_k$.
4. Déduire de ce qui précède que l'on a : $\ker(u) \oplus \ker(u - n\,\mathrm{Id}_E) = E$.

Solution

1. On remarque que $\mathrm{rg}\,(J) = 1$ car toutes les colonnes de J sont égales à la colonne $C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Par le théorème du rang, on a $\dim(\ker(u)) = n - \mathrm{rg}\,(u) = n - 1$.
2. Soit $x \in E$. Si $x \in \ker(u) \cap \ker(u - n\,\mathrm{Id}_E)$ alors $u(x) = 0$ et $u(x) = nx$, comme $n \neq 0$, alors de

$nx = 0$, on déduit $x = 0$. Donc $\ker(u) \cap \ker(u - n\,\mathrm{Id}_E) = \{0\}$.

3. On a $u(e) = ne$, car la colonne des coordonnées de e relativement à la base canonique est C ci-dessus et on a $JC = nC$.
4. Tout d'abord les deux espace ont $\{0\}$ pour intersection et $\dim(\ker(u)) = n-1$ et $\dim(\ker(u - n\,\mathrm{Id}_E) \neq 0$. De $n \geq \dim(\ker(u) \oplus \ker(u - n\,\mathrm{Id}_E)) = n - 1 + \dim(\ker(u - n\,\mathrm{Id}_E)) \geq n - 1 + 1 = n$ on déduit que $\ker(u) \oplus \ker(u - n\,\mathrm{Id}_E) = E$.

EXERCICE 60 Suite exacte de sous-espaces vectoriels

Titre : Suite exacte de sous-espaces vectoriels
ID : 16 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 4 | ID : 16
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soient $E_0, E_1, \ldots, E_n$, $n+1$ espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$, de dimensions respectives $d_0, d_1, \ldots, d_n$. On suppose qu'il existe n applications linéaires $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ telles que :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, f_k \in \mathcal{L}(E_k, E_{k+1}).$$

et de plus :

— f_0 est injective ;
— $\forall j \in \{1, \ldots, n-1\}, \mathrm{Im}\, f_{j-1} = \ker(f_j)$;
— f_{n-1} est surjective.

Montrer que

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j d_j = 0$$

Solution

On a le diagramme suivant avec pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathrm{Im}(f_{k-1}) = \ker(f_k) \subset E_k$.

$$E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \ldots E_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} E_k \xrightarrow{f_k} E_{k+1} \ldots E_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} E_n$$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $d_k = \dim(E_k)$ et si $k \neq n$, $r_k = \mathrm{rg}\,(f_k)$ Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Par le théorème du rang on a $d_k = r_k + \dim(\ker(f_k))$, or $\dim(\ker(f_k)) = r_{k-1}$, donc $d_k = r_k + r_{k-1}$.

• Récapitulons :

$$(\star) \quad \forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad d_k = r_k + r_{k-1}$$

On va traiter deux cas selon la parité de n :

• Premier cas : $n = 2N$ est pair : la relation $(\star)$ ci-dessus nous donne :

$$\forall j \in [\![1, N-1]\!], \quad \begin{cases} d_{2j} = r_{2j} + r_{2j-1} \\ d_{2j-1} = r_{2j-1} + r_{2j-2} \end{cases}$$

Il en découle que

$$\forall j \in [\![1, N-1]\!], \quad d_{2j} - d_{2j-1} = r_{2j} - r_{2(j-1)}$$

donc par sommation :

$$\sum_{j=1}^{N-1} d_{2j} - d_{2j-1} = \sum_{j=1}^{N-1} r_{2j} - r_{2(j-1)} = r_{2N-2} - r_0$$

Il en découle que

$$d_0 + \sum_{j=1}^{N} d_{2j} - d_{2j-1} = r_{n-2} - r_0 + d_0 + d_n - d_{n-1}$$

Tenant compte du fait que f_{n-1} est surjective on a $r_{n-1} = d_n$, donc

$$r_{n-2} - r_0 + d_0 + d_n - d_{n-1} = r_{n-2} - r_0 + d_0 + r_{n-1} - d_{n-1}$$

Le théorème du rang donne $d_{n-1} - r_{n-1} = \dim(\ker(f_{n-1}) = r_{n-2}$, donc finalement

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j d_j = r_{n-2} - r_0 + d_0 - r_{n-2} = 0$$

puisque $d_0 = r_0$ venu de f_n injective.

• Deuxième cas : $n = 2N+1$ est impair avec $N \in \mathbb{N}$. La relation $(\star)$ donne :

$$\forall j \in [\![1, N]\!], \quad \begin{cases} d_{2j} = r_{2j} + r_{2j-1} \\ d_{2j-1} = r_{2j-1} + r_{2j-2} \end{cases}$$

Il en découle que

$$\forall j \in [\![1, N]\!], \quad d_{2j} - d_{2j-1} = r_{2j} - r_{2(j-1)}$$

donc par sommation :

$$\sum_{j=1}^{N} d_{2j} - d_{2j-1} = \sum_{j=1}^{N} r_{2j} - r_{2(j-1)} = r_{2N} - r_0$$

Par suite :

$$d_0 - d_{2N+1} + \sum_{j=1}^{N} d_{2j} - d_{2j-1} = \sum_{j=1}^{N} r_{2j} - r_{2(j-1)} = r_{2N} - r_0 + d_0 - d_{2N+1}$$

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j d_j = r_{n-1} - r_0 + d_0 - d_n$$

Tenant compte de $d_n = r_{n-1}$(car f_{n-1} est surjective)et $d_0 = r_0$ (car f_0 est injective), on a $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j d_j = 0$

EXERCICE 61 Exemple de calcul d'inverse d'une matrice

Titre : Exemple de calcul d'inverse d'une matrice
ID : 20 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 7 | ID : 20
Difficulté :

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que A est inversible
2. Calculer A^{-1} par au moins deux méthodes.

Solution

1. Le déterminant de A est $\det(A) = -1$, en effet :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

(on a utlisé les operations élémentaires $L_k \leftarrow L_k + L_3$ pour $k \in \{1,2\}$), donc en développant suivant la première ligne, on a : $\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$

2. On utilisera la méthode de la comatrice, puis celle de systéme linéaire.

• **Première méthode : Comatrice** On rappelle la formule $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\mathrm{Com}(A)$ et que $\mathrm{Com}(A) = ((-1)^{i+j} \det(A_{i,j}))_{1\leq i,j\leq 3}$ où $A_{i,j} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ obtenue après suppression de la ligne i et la colonne j de A. Tout calcul fait on obtient : $\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, on a donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• **Deuxième méthode : Résolution du système** $AX = Y$ On va trasformer la relation linéaire $AX = Y$ en un relation de la forme $BY = X$ alors $B = A^{-1}$. our $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned} AX = Y &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = y_1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = y_2 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = y_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -y_3 + 3y_1 + y_2 + 5y_3 - y_3 - y_1 = x_1 \\ -2y_3 - y_2 - 3y_3 - 3y_1 = x_2 \\ y_1 + y_3 = x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -y_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 = x_1 \\ -3y_1 - y_2 - 5y_3 = x_2 \\ y_1 + y_3 = x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Il en découle que $\forall X, Y \in \mathbb{R}^3, AX = Y \Leftrightarrow BY = X$ où $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

EXERCICE 62 Dimension et somme directe

Titre : Dimension et somme directe
ID : 21 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 8 | ID : 21
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n avec $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que pour tous sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E, on a $\dim(F_1) = \dim(F_2)$ si et seulement si il existe un sous-espace vecoriel F de E tel que $F_1 \oplus F = F_2 \oplus F = E$. (on exprime cà en disant F_1 et F_2 possédent un supplémentaire commun.)

Solution

Un sens est immédiat. Pour l'autre on raisonne par récurrence sur $p = n - \dim(F_1)$ (appelée codimension de F_1). Si $p = 0$ alors $F_1 = F_2 = E$ alors $F = \{0\}$ convient. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que la propriété est vraie pour p. Soient F_1 et F_2 deux sous-espace vectoriels de E de codimension commune $p+1$. On a $F_1 \cup F_2 \neq E$ car sinon d'après l'exercice ##, on aurait $F_1 = E$ ou $F_2 = E$, ce qui n'est pas le cas. Soit donc un vecteur $a \in E \backslash (F_1 \cup F_2)$. Alors les sommes $F_k' = F_k + \mathbb{K}a$ sont directes pour tout $k \in \{1,2\}$, et on voit alors que les sous-espaces vectoriels F_1' et F_2' sont tous les deux de codimension p. Par hypothèse de récurrence, ils admettent un supplémentair commun F'. En posant $F = \mathbb{K}a \oplus F'$, on a F est un supplémentaire commun de F_1 et F_2, ce qui termine la démonstration par récurrence.

EXERCICE 63 Changement de base

Titre : Changement de base
ID : 25 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 12 | ID : 25
Difficulté :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ est $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$. On note $\mathscr{E}' = (e_1', e_2', e_3')$ avec $e_1' = 2e_1 + 3e_2 + e_3, e_2' = 3e_1 + 4e_2 + e_3, e_3' = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

1. Démontrer que $\mathscr{E}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice A' de f rlativement à $\mathscr{E}'$.

Solution

1. On a $\det_{\mathscr{E}}(\mathscr{E}') = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -1$, donc $\det_{\mathscr{E}}(\mathscr{E}') \neq 0$, par suite $\mathscr{E}'$ est aussi une base de $\mathbb{R}^3$
2. La matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$ est $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Les formules concernant la matrice d'une endomorphisme par changement de base donnent : $A' = P^{-1}AP$.
   • Calcul de P^{-1} : On va utiliser la formule $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}{}^t\mathrm{Com}(P)$. Un calcul simple nous donne : $\mathrm{Com}(P) = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, comme $\det(P) = -1$, on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.
   • On a $P^{-1}A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 8 & -6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $P^-AP = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 8 & -6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. En résumé

$$A' = \mathrm{mat}'_{\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 64 Transformation d'une somme en une somme directe

Titre : Transformation d'une somme en une somme directe
ID : 26 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 13 | ID : 26
Difficulté : ★★★☆☆

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E tel que $F_1 + \cdots + F_n = E$. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels $G_1, \ldots, G_n$ de E tel que $G_1 \subset F_1, \ldots, G_n \subset F_n$ et $\bigoplus_{k=1}^{n} G_k = E$

Solution

Si $n = 1$, le résultat est trivial, si $n \geq 2$, on raisonne par récurrence.
• Pour $n = 2$, on considère F_1, F_2 des sev de E tel que $F_1 + F_2 = E$. Prenons $G_1 = F_1$ et G_2 tel que $(F_1 \cap F_2) \oplus G_2 = F_2$ (c'est-à-dire que G_2 est un supplémentaire de $F_1 \cap F_2$ dans F_2. On a $G_1 \subset F_1$ et $G_2 \subset F_2$, si $x \in E$ alors x s'écrit $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$. Or x_2 s'écrit $x_2 = x_3 + x_4$ avec $x_3 \in F_1 \cap F_2$ et $x_4 \in G_2$, donc pour $y_1 = x_1 + x_3$ et $y_2 = x_4$, on a $x = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in F_1 = G_1$ et $y_2 \in G_2$. Si $x \in G_1 \cap G_2$ alors $x \in F_1$ et $x \in G_2$, comme $G_2 \subset F_2$, on a $x \in F_1 \cap F_2$ et $x \in G_2$, donc $x = 0$. Il découle de tout ce qui précéde que $G_1 \subset F_1$ et $G_2 \subset F_2$ et $G_1 \oplus G_2 = E$.
• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et la propriété est vraie pour pour tout espace vectoriel E et toute famille $(F_1, \ldots, F_n)$ de sev de E. Soit E un espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_{n+1}$ des sev de E tel que $\sum_{k=1}^{n+1} F_k = E$. Posons $F = \sum_{k=1}^{n} F_k$. Par hypothèse de récurrence, il existe $G_1, \ldots, G_n$ des sev de F tel que $\forall k \in [\![1, n]\!], G_k \subset F_k$ et $\bigoplus_{k=1}^{n} G_k = F$. Soit G_{n+1} un supplémentaire de $F \cap F_{n+1}$ dans F_{n+1} alors $F + G_{n+1} = E$ et $F \cap G_{n+1} = \{0\}$, en effet, si $x \in E$, alors $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in F_{n+}$, or $b = c + d$ avec $c \in F \cap F_{n+1}$ et $d \in G_{n+1}$, en posant $u = a + c$ et $v = d$ on a$x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G_{n+1}$. Par ailleurs si $x \in F \cap G_{n+1}$ alors $x \in F$ et comme $G_{n+1} \subset F_{n+1}$ on a $x \in F \cap F_{n+1}$ et comme $x \in G_{n+1}$ et G_{n+1} et $F \cap F_{n+1}$ sont supplémentaires dans F_{n+1}, on a $x = 0$. On a finalement $\bigoplus_{k=1}^{n+1} G_k = E$. Ceci termine la démostration par récurrence et la preuve du résultat désiré.

EXERCICE 65 Inverse d'une matrice par blocs

Titre : Inverse d'une matrice par blocs
ID : 33 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 20 | ID : 33
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soiet $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On considère $(A, B) \in \mathbf{GL}_p(\mathbb{K}) \times \mathbf{GL}_q(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et la matrice définie par blocs : $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que M est inversible.
2. Calculer M^{-1} en fonction de A, B et C

Solution

1. Puisque M est triangulaire supérieure par blocs, on a $\det(M) = \det(A)\det(B)$ et comme A et B sont inversibles, on a $\det(A) \neq 0$ et $\det(B) \neq 0$, donc $\det(M) \neq 0$ et M est inversible.
2. M^{-1} est de la forme : $M^{-1} = \begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ avec $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), Y \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $Z \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, comme $MM^{-1} = I_{p+q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{pmatrix} AX & AZ + CY \\ 0 & BY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix},$$

ce qui offre :

$$\begin{cases} AX = I_p \\ BY = I_q \\ AZ + CY = 0 \end{cases}$$

donc, $X = A^{-1}, Y = B^{-1}, Z = -A^{-1}CB^{-1}$ et finalement :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

Remarque : L'ensemble des matrices par blocs de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & c \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), b \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K}), c \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K} =$, ce qui va lide le chois de la forme de l'inverse choie ci-dessus.

EXERCICE 66 Un bon exercice non classique sur les endomorphismes

Titre : Un bon exercice non classique sur les endomorphismes
ID : 39 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 26 | ID : 39
Difficulté : ★★☆☆☆

On considère un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension finie et quatre endomorphismes u, v, f, g de E qui commutent deux à deux, et vérifient la relation :

$$(\star) \quad u \circ f + v \circ g = \mathrm{Id}_E$$

1. Montrer que $\ker(f) \cap \ker(g) = \{0\}$ et $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
2. Montrer que $\ker(f \circ g) = \ker(f) \oplus \ker(g)$ et $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)$.
3. On suppose dans cette question qu'on a de plus $f \circ g = 0$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \ker(g) = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Im}(g), \ker(f) = \mathrm{Im}(g), \ker(g) = \mathrm{Im}(f)$.

Solution

1. Soit $x \in E$, si $x \in \ker(f) \cap \ker(g)$ alors $f(x) = g(x) = 0$, d'après $(\star)$, on a $x = \mathrm{Id}_E(x) = u(f(x)) + v(g(x)) = 0$, donc $x = 0$ et finalement $\ker(f) \cap \ker(g) = \{0\}$.
   • Soit $x \in E$, alors d'après $(\star)$, on a $x = f(u(x)) + g(v(x))$ (rappelons que les endomorphismes commutennt deux à deux), donc $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 = f(u(x)) \in \mathrm{Im}(f)$ et $x_2 = g(v(x)) \in \mathrm{Im}(g)$, donc $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
2. Tout d'abord on a $\ker(f) \subset< \ker(g \circ f)$ et $\ker(g) \subset \ker(f \circ g)$, et comme $f \circ g = g \circ f$, on a $\ker(f) + \ker(g) \subset \ker(f \circ g)$. Réciproquement si $x \in \ker(f) + \ker(g)$, il existe $(x_1, x_2) \in \ker(f) \times \ker(g)$ tel que $x = x_1 + x_2$, donc $(f \circ g)(x) = g(f(x_1)) + f(g(x_2)) = 0$, donc $x \in \ker(f \circ g)$ et cela prouve que $\ker(f) + \ker(g) = \ker(f \circ g)$ et d'après la question 1), on a $\ker(f) \cap \ker(g) = \{0\}$ donc finalement $\ker(f) \oplus \ker(g) = \ker(f \circ g)$.
   • On a $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$, donc :

   $$(1) \quad \mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g).$$

   D'aprés la question 1), on a $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$, donc $n = \dim(E) = \mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g))$. Il en découle que :

   $$(\star\star) \quad \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)) = \mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) - n$$

   Par ailleurs comme $\ker(f \circ g) = \ker(f) \oplus \ker(g)$, on a $\dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) = \dim(\ker(f \circ g)$, donc par le théorème du rang, on a $n - \mathrm{rg}\,(f) + n - \mathrm{rg}\,(g) = n - \mathrm{rg}\,(f \circ g)$, donc :

   $$(\star\star)' \quad \mathrm{rg}\,(f \circ g) = \mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) - n$$

les relations $(\star\star)$ et $(\star\star)'$ donnent :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Im}(g))=\dim(f\circ g)$$

et comme on a l'inclusion (1) ci-dessus, on a

$$\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Im}(g)=\mathrm{Im}(f\circ g)$$

3. Comme $f\circ g=0$, d'après la dernière relation de la question 2), on a : $\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Im}(g)=\{0\}$, donc compte tenu de $\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)=E$ prouvée dans la question 1), on a $\mathrm{Im}(f)\oplus\mathrm{Im}(g)=E$ et finalement, on a :
$$E=\ker(f)\oplus\ker(g)=\mathrm{Im}(f)\oplus\mathrm{Im}(g)$$
• De $f\circ g=0$, on déduit :
$$(2)\quad \mathrm{Im}(g)\subset\ker(f),$$
et comme $f\circ g=g\circ f$, on a aussi :
$$(2)'\quad \mathrm{Im}(f)\subset\ker(g),$$
donc $\mathrm{rg}\,(f)\leq\dim(\ker(g))$ et $\mathrm{rg}\,(g)\leq\dim(\ker(f))$,or par les sommes dirctes ci-dessus, on a :
$$n=\mathrm{rg}\,(f)+\mathrm{rg}\,(g)=\dim(\ker(f))+\dim(\ker(g))$$
donc
$$[\dim(\ker(f))-rg(g)]+[\dim(\ker(g))-rg(f)]=0$$
Il s'agit d'une somme nulle dont les termes sont positifs ou nuls, donc ils sont nuls et
$$\mathrm{rg}\,(g)=\dim(\ker(f))\text{ et }\mathrm{rg}\,(f)=\dim(\ker(g))$$
et par les inclusions (2) et $(2)'$, on a les égalités :
$$\ker(f)=\mathrm{Im}(g)\text{ et }\ker(g)=\mathrm{Im}(f).$$

EXERCICE 67 Un bon exercice sur les endomorphismes en dimension quelconque

Titre : Un bon exercice sur les endomorphismes en dimension quelconque
Difficulté : ★★★☆☆
ID : 40 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 27 | ID : 40

On considère un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E et quatre endomorphismes u,v,f,g de E qui commutent deux à deux, et vérifient la relation :
$$(\star)\quad u\circ f+v\circ g=\mathrm{Id}_E$$

1. Montrer que $\ker(f)\cap\ker(g)=\{0\}$ et $E=\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$.
2. Montrer que $\ker(f\circ g)=\ker(f)\oplus\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(f\circ g)=\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Im}(g)$.
3. On suppose dans cette question qu'on a de plus $f\circ g=0$. Montrer que $E=\ker(f)\oplus\ker(g)=\mathrm{Im}(f)\oplus\mathrm{Im}(g)$, $\ker(f)=\mathrm{Im}(g)$, $\ker(g)=\mathrm{Im}(f)$.

Solution

1. Soit $x\in E$, si $x\in\ker(f)\cap\ker(g)$ alors $f(x)=g(x)=0$, d'après $(\star)$, on a $x=\mathrm{Id}_E(x)=u(f(x))+v(g(x))=0$, donc $x=0$ et finalement $\ker(f)\cap\ker(g)=\{0\}$.
• Soit $x\in E$, alors d'après $(\star)$, on a $x=f(u(x))+g(v(x))$ (rappelons que les endomorphismes commutennt deux à deux), donc $x=x_1+x_2$ avec $x_1=f(u(x))\in\mathrm{Im}(f)$ et $x_2=g(v(x))\in$

$\text{Im}(g)$, donc $E = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.

2. Tout d'abord on a $\ker(f) \subset< \ker(g \circ f)$ et $\ker(g) \subset \ker(f \circ g)$, et comme $f \circ g = g \circ f$, on a $\ker(f) + \ker(g) \subset \ker(f \circ g)$. Réciproquement si $x \in \ker(f) + \ker(g)$, il existe $(x_1, x_2) \in \ker(f) \times \ker(g)$ tel que $x = x_1 + x_2$, donc $(f \circ g)(x) = g(f(x_1)) + f(g(x_2)) = 0$, donc $x \in \ker(f \circ g)$ et cela prouve que $\ker(f) + \ker(g) = \ker(f \circ g)$ et d'après la question 1), on a $\ker(f) \cap \ker(g) = \{0\}$ donc finalement $\ker(f) \oplus \ker(g) = \ker(f \circ g)$.
• On a $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im}(f)$ et $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$, donc :

$$(1) \quad \text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g).$$

Réciproquement soit $x \in \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)$, donc il existe $a, b \in E$ tel que $x = f(a) = g(b)$. D'après $(\star)$, on a $x = f(u(x)) + g(v(x))$, or $u(x) = u(g(b)) = g(u(b))$, donc $f(u(x)) = f(g(u(b))) = (f \circ g)(u(b))$; de même $v(x) = v(f(a)) = f(v(a))$, donc $g(v(x)) = g(f(v(a))) = f(g(v(a))) = (f \circ g)(v(a))$, par suite $x = (f \circ g)(u(b) + v(a))$ et $x \in \text{Im}(f \circ g)$. Finalement on a $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)$.

3. Comme $f \circ g = 0$ on a $\ker(f \circ g) = \ker(0) = E$ et compte tenu de $\ker(f \circ g) = \ker(f) \oplus \ker(g)$, on a $E = \ker(f) \oplus \ker(g)$. D'après la dernière relation de la question 2), on a : $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$, donc compte tenu de $\text{Im}(f) + \text{Im}(g) = E$ prouvée dans la question 1), on a $\text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g) = E$ et finalement, on a :

$$E = \ker(f) \oplus \ker(g) = \text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g)$$

• Soit $x \in \ker(f)$,d'après $(\star)$ on a $x = f(u(x)) + g(v(x)) = u(f(x)) + g(v(x)) = g(v(x))$, donc $x \in \text{Im}(g)$. Réciproquement soit $x \in \text{Im}(g)$ alors il existe $a \in E$ tel que $x = g(a)$, donc $f(x) = f(g(a)) = (f \circ g)(a) = 0$ car on a supposé que $f \circ g = 0$. Donc $\ker(f) = \text{Im}(g)$ et par symétrie des rôles on a aussi $\ker(g) = \text{Im}(f)$.

EXERCICE 68 Dimension de l'intersection de deux hyperplans différents

Titre : Dimension de l'intersection de deux hyperplans différents
ID : 41 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 28 | ID : 41
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit E un espace vectoreil de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si H et K sont deux hyperplans différents de E alors $\dim(H \cap K) = n - 2$.

Solution

La formule de **Grassmann** on a $\dim(H + K) = \dim(H) + \dim(K) - \dim(H \cap K)$, ce qui donne; $\dim(H \cap K) = (n-1) + (n-1) - n = n - 2$, notons que $\dim(H + K) = n$ puisque $K \neq H$, soit $a \in K \backslash H$,alors $H \oplus \mathbb{K}a = E$ et comme $H \oplus \mathbb{K}a \subset H + K$, on a $H + K = E$.

EXERCICE 69 Bonnes questions sur le rang, inégamltés.

Titre : Bonnes questions sur le rang, inégamltés.
ID : 44 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 31 | ID : 44
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies p et n repsetcivement. On considére deux applications linéaires u et v de E vers F.

1. Démontrer que $\text{rg}\,(u+v) \leq \text{rg}\,(u) + \text{rg}\,(v)$.
2. En déduire que $|\,\text{rg}\,(u) - \text{rg}\,(v)| \leq \text{rg}\,(u+v)$.

3. Vérifier dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \mathbb{R}_1[X]$ et $u(P) = P'$ et $v(P) = P(X+1) - P(X)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

Solution

1. On a $\operatorname{rg}(u+v) = \dim(\operatorname{Im}(u+v)) = \dim((u+v)(E))$. On a $(u+v)(E) \subset u(E) + v(E)$, donc $\operatorname{rg}(u+v) \leq \dim(u(E) + v(E)) \leq \dim(u(E)) + \dim(v(E)) = \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$, ce qui termine la preuve de l'inégalité demandée.
2. D'après la question précédente et en remarquant que $u = u + v + (-v)$, on a $\operatorname{rg}(u) \leq \operatorname{rg}(u+) + \operatorname{rg}(v)$, donc $\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v) \leq \operatorname{rg}(u+v)$, donc de même $\operatorname{rg}(v) - \operatorname{rg}(u) \leq \operatorname{rg}(v+u) = \operatorname{rg}(u+v)$ donc $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u+v)$
3. $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \mathbb{R}_1[X]$ et $u(P) = P'$ et $v(P) = P(X+1) - P(X)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On voit que u et v sont bien définies et que leur matrices relativement aux bases canoniques sont $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a : $\operatorname{rg}(U) = \operatorname{rg}(V) = 2$, $U + V = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, donc $\operatorname{rg}(U+V) = 2$ et $\operatorname{rg}(U) + \operatorname{rg}(V) = 4$. On a bien l'inégalité de la première question. On a $|\operatorname{rg}(U) - \operatorname{rg}(V)| = 0$, d'où la vérité de l'inégalité de la deuxiéme question

EXERCICE 70 Comparaison de sous-espaces vectoriels

Titre : Comparaison de sous-espaces vectoriels
ID : 89 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 75 | ID : 89
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et A, B deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

$$f(A) \subset f(B) \Leftrightarrow A + \ker f \subset B + \ker f$$

Solution

Supposons que $f(A) \subset f(B)$. Soit $x \in A + \ker f$ alors il existe $a \in A$ et $x_1 \in \ker f$ tel que $x = a + x_1$ alors $f(x - x_1) = f(a) \in f(A)$ donc $f(x - x_1) = f(a) \in f(B)$, donc il existe $b \in B$ tel que $f(x - x_1) = f(b)$ donc $f(x - x_1) - f(b) = 0$ donc $f(x - x_1 - b) = 0$ donc $x_2 = x - x_1 - b \in \ker f$ donc $x = b + (x_1 + x_2) = b + x_3$ avec $b \in B$ et $x_3 = x_1 + x_2 \in \ker f$ et finalement $x \in B + \ker f$, donc $A + \ker f \subset B + \ker f$.
Réciproquement, supposons que $A + \ker f \subset B + \ker f$, soit $x \in f(A)$ alors il existe $a \in A$ tel que $x = f(a)$. On a $A \subset A + \ker f$, donc $a \in A + \ker f$ et comme $A + \ker f \subset B + \ker f$, on a $a \in B + \ker f$, donc il existe $b \in B$ et $b' \in \ker f$ tel que $a = b + b'$, donc $x = f(a) = f(b) + f(b') = f(b)$ car $f(b') = 0$, donc $x \in f(B)$ et finalement $f(A) \subset f(B)$.

EXERCICE 71 Exemple de calcul de rang

Titre : Exemple de calcul de rang
ID : 90 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 76 | ID : 90
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $m \in \mathbb{R}$ et on considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & m \end{pmatrix}$. Determiner le rang de A.

Solution

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & m \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/12 & 1/12 \\ 1/3 & 1/12 & m-\frac{1}{9} \end{pmatrix} \quad \left(\operatorname{rg}(C_1,C_2,C_3) = \operatorname{rg}\left(C_1, C_2 - \frac{1}{2}C_1, C_3 - \frac{1}{3}C_1\right)\right)$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/12 & 0 \\ 1/3 & 1/12 & m-\frac{7}{36} \end{pmatrix} \quad (\operatorname{rg}(C_1,C_2,C_3) = \operatorname{rg}(C_1,C_2,C_3-C_2))$$

Si $m = \frac{7}{36}, \operatorname{rg} A = 2$ (on note alors que $C_1 = 6(C_2 - C_3)$) et si $m \neq \frac{7}{36}, \operatorname{rg} A = 3$ et A est inversible.

EXERCICE 72 Calcul du rang

Titre : Calcul du rang
ID : 91 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 77 | ID : 91
Difficulté : ★☆☆☆☆

$Soit A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer $\operatorname{rg}(A)$.

Solution

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$. Notons $C_1, C_2, C_3)$ les colonnes de A, donc :

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(C_1,C_2,C_3) = \operatorname{rg}(C_1, C_2 - C_1, C_3 - C_1) = \operatorname{rg}(A_1).$$

avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix}$$

• 1er cas : si a, b et c sont deux à deux distincts. Par les operations élémentaires sur les colonnes, on a successivement : $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A_2) = \operatorname{rg}(A_3) = \operatorname{rg}(A_4)$ avec

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & b-c \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, si a, b et c sont deux à deux distincts alors $\operatorname{rg} A = 3$.
• 2ème cas : Si $b = c \neq a$ (ou $a = c \neq b$ ou $a = b \neq c$).
A a même rang que $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{pmatrix}$, puis que $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & 0 \end{pmatrix}$.
Donc, si $b = c \neq a$ ou $a = c \neq b$ ou $a = b \neq c, \operatorname{rg} A = 2$.
• 3ème cas : Si $a = b = c$, il est clair dès le départ que A est de rang 1 .

EXERCICE 73 Activités sur $\mathrm{Vect}(A)$ avec A une partie de E.

Titre : Activités sur Vect(A) avec A une partie de E.
ID : 92 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 78 | ID : 92
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soient A et B deux parties d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Comparer $\text{Vect}(A \cap B)$ et $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$.
2. Montrer que : $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

Solution

1. On a $A \cap B \subset A$, donc $\text{Vect}(A) \cap B) \subset \text{Vect}(A)$; de même $\text{Vect}(A \cap B) \subset \text{Vect}(B)$, donc $\text{Vect}(A \cap B) \subset \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$.
   Dans $E = \mathbb{R}^2$, soit $A = \{e_1, e_2\}$ et $B = \{2e_1, e_2\}$ où (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a $A \cap B = \{e_2\}$, donc $\text{Vect}(A \cap B) = \mathbb{R}e_2$, tandis que $\text{Vect}(A) = \text{Vect}(B) = \mathbb{R}^2$, donc $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B) = \mathbb{R}^2$ et l'inclusion prouvée ci-dessus est stricte.
2. On a $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ donc $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(A \cup B)$ et $\text{Vect}(B) \subset \text{Vect}(A \cup B)$ par suite $\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B) \subset \text{Vect}(A \cup B)$. Par ailleurs, on a $A \cup B \subset \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$ car $A \subset \text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$ et $B \subset \text{Vect}(B) \subset \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$ donc $\text{Vect}(A \cup B) \subset \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$, ce qui prouve que $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

EXERCICE 74 Sous-espaces vectoriels et intersection

Titre : Sous-espaces vectoriels et intersection
ID : 93 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 79 | ID : 93
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que : $F \cap G = F + G \Leftrightarrow F = G$.

Solution

Supposons que $F \cap G = F + G$. Soit $x \in F$, alors $x \in F + G$ car $F \subset F + G$ et comme $F + G = F \cap G$, on a $x \in F \cap G$, donc $x \in G$. On a alors $F \subset G$. Par symétrie des rôles, on a $G \subset F$, donc $F = G$.
Réciproquement, si $F = G$ il est clair que $F = F \cap G$ et $F + G = F + F = F$ d'où $F + G = F \cap G$.
Donc : $F \cap G = F + G \Leftrightarrow F = G$.
Autre méthode : Supposons que $F \cap G = F + G$, alors $F \subset F + G = F \cap G$, donc $F \subset F \cap G$ donc $F \subset G$. De même $G \subset F$ donc $F = G$.

EXERCICE 75 Caractérisation d'une homothétie par des familles liées

Titre : Caractérisation d'une homothétie par des familles liées
ID : 94 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 80 | ID : 94
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que les vecteurs x et $f(x)$ sont colinéaires et ce pour tout $x \in E$.

1. Justifier que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x.x$.
2. Montrer que pour tout couple de vecteurs non nuls x et y, on a $\lambda_x = \lambda_y$.
   (indice : on pourra distinguer les cas : (x, y) liée ou (x, y) libre.)
3. Conclure que f est une homothétie vectorielle.

Solution

1. Si $x = 0$ alors $\lambda_0 = 0$ convient puisque $f(0) = 0$ (en fait tout scalaire λ convient).
   Si $x \neq 0$, comme la famille $(x, f(x))$ est liée, il existe $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $(a,b) \neq (0,0)$ et $ax + bf(x) = 0$. Si $b = 0$ alors $ax = 0$ donc $a = 0$ et par suite $b = 0 \Rightarrow a = b = 0$. Don forcément $b \neq 0$ et $f(x) = \lambda_x x$ avec $\lambda_x = -\frac{a}{b}$.
2. $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
   • Si (x,y) est libre on a $f(x+y) = f(x) + f(y)$ or $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y$ donc $\lambda x + yx + \lambda_{x+y}y = \lambda_x x + \lambda_y y$ et par liberté de (x,y), on a $\lambda_x = \lambda_y$ $(= \lambda_{x+y})$.
   • Si (x,y) est liée, comme $x \neq 0$, $\exists \alpha \in \mathbb{K}, y = \alpha x$ donc $\alpha f(x) = f(y)$ donc $\alpha\lambda_x x = \lambda_y y = \alpha\lambda_y y$ et comme $y \neq 0$ on a $\alpha \neq 0$ et par suite $\lambda_y = \lambda_x$.
   Ainsi, on a prouvé que : $\forall (x,y) \in E^2, x \neq 0 \quad$ et $\quad y \neq 0 \Rightarrow \lambda_x = \lambda_y$.
3. - Premier cas : si $E = \{0\}$ alors f est nulle donc c'est l'homothétie vectorielle de rapport 0.
   - Deuxième cas : Si $E \neq \{0\}$, soit alors $a \in E$ tel que $a \neq 0$ et notons $\lambda = \lambda_a$. Pour tout $x \in E$, si $x \neq 0$ alors d'après la question b), on a $\lambda_x = \lambda_a = \lambda$ donc $f(x) = \lambda x$. Si $x = 0$ on a toujours $f(x) = \lambda x$, donc $f = \lambda \operatorname{Id}_E$ est l'homothétie vectorielle de rapport λ.

EXERCICE 76 — Endomorphismes f et g tel que $f \circ g = \mathrm{Id}$

Titre : Endomorphismes f et g tel que $f \circ g = \mathrm{Id}$ — **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 95 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 81 | ID : 95

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}$.

1. Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker f$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.
2. Montrer
$$E = \ker f \oplus \operatorname{Im} g$$
3. Dans quel cas peut-on conclure $g = f^{-1}$?
4. Calculer $(g \circ f) \circ (g \circ f)$ et caractériser $g \circ f$.

Solution

1. Pour tout $x \in E$, si $x \in \ker f$ alors $f(x) = 0$, par suite $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$, donc
$$(\star) \quad \ker f \subset \ker(g \circ f)$$
   Soit $x \in \ker(g \circ f)$ alors $g(f(x)) = 0$ donc $f(g(f(x))) = 0$ or $f \circ g = \mathrm{Id}_E$, donc $f(x) = 0$. Ainsi, on a montré que
$$(\star\star) \quad \ker(g \circ f) \subset \ker f.$$
   $(\star)$ et $(\star\star)$ donnent : $\ker(g \circ f) = \ker f$.
   On a $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$ car pour tout $x \in E$, si $x \in \operatorname{Im}(g \circ f)$ alors $\exists a \in E$ tel que $x = (g \circ f)(a)$ donc $x = g(b)$ avec $b = f(a) \in E$, donc $x \in \operatorname{Im}(g)$. Ainsi on a $\operatorname{Im}(g \circ f) \operatorname{Im}(g)$. Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Im}(g)$, alors $\exists a \in E$ tel que $x = g(a)$; comme $f \circ g = \mathrm{Id}_E$, on a $x = g(f(g(a))) = (g \circ f)(c)$ avec $c = g(a) \in E$, donc $x \in \operatorname{Im}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.
2. Analysons : $x \in E$, on veut écrire $x = a + g(b)$ avec $a \in \ker f$ et $b \in E$, donc on aurait $b = f(x)$. Cela ne pousse alors à faire la synthèse suivante. Soit $x \in E$, posons $b = f(x)$ et $x_1 = g(b) = g(f(x))$ et $x_2 = x - g(b) = x - g(f(x))$. Il est aisé de voir que $x = x_1 + x_2$ et que $x_1 \in \operatorname{Im} g$ et que $f(x_2) = f(x) - f(g(f(x))) = f(x) - f(x) = 0$ (compte tenu de $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.)
   Ainsi $E = \ker f + \operatorname{Im} g$.

Par ailleurs si $x \in \ker f \cap \operatorname{Im} g$ alors il existe $a \in E$ tel que $x = g(a)$ et $f(x) = 0$, donc $f(g(a)) = 0$ donc $a = 0$ puisque $f \circ g = \mathrm{Id}_E$. Donc $x = g(0) = 0$. Ainsi $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} g$.

3. Si f est inversible alors de $f \circ g = \mathrm{Id}_E$, on déduit $f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1}$, donc $g = f^{-1}$. Ainsi $g = f^{-1} \Leftrightarrow f \in \mathbf{GL}(E)$.
4. On a $(g \circ f)^2 = (g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ \mathrm{Id}_E \circ f = g \circ f$. Ainsi $(g \circ f)^2 = g \circ f$, donc $g \circ f$ est un projecteur de E.
Remarque : Si f est inversible on a $g \circ f = f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

EXERCICE 77 Polynôme annulateur et inverse

Titre : Polynôme annulateur et inverse
ID : 96 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 82 | ID : 96
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\,\mathrm{Id} = 0$.

1. Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.
2. Établir que $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\ker(f - 2\,\mathrm{Id})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Solution

1. On a $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}$ où $g = \frac{1}{2}(3\,\mathrm{Id} - f)$ donc f est inversible et $f^{-1} = \frac{1}{2}(3\,\mathrm{Id} - f)$
2. On a $\mathrm{Id} = (f - \mathrm{Id}) - (f - 2\,\mathrm{Id})$ donc pour tout $x \in E$, on a $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 = -f(x) + 2x = -(f - 2\,\mathrm{Id})(x)$ et $x_2 = f(x) - x = (f - \mathrm{Id})(x)$, de sorte que $(f - \mathrm{Id})(x_1) = -(f - \mathrm{Id})(f - 2\,\mathrm{Id})(x) = -(f^2 - 3f + 2\,\mathrm{Id})(x) = 0$ et $(f - 2\,\mathrm{Id})(x_2) = (f - 2\,\mathrm{Id})(f - \mathrm{Id})(x) = (f^2 - 3f + 2\,\mathrm{Id})(x) = 0$ et par suite $x_1 \in \ker(f - \mathrm{Id})$ et $x_2 \in \ker(f - 2\,\mathrm{Id})$ et on a donc $\ker(f - \mathrm{Id}) + \ker(f - 2\,\mathrm{Id}) = E$. Par ailleurs si $x \in \ker(f - \mathrm{Id}) \cap \ker(f - 2\,\mathrm{Id})$ alors $f(x) = x = 2x$ donc $x = 0$. Ceci prouve que $\ker(f - \mathrm{Id}) \oplus \ker(f - 2\,\mathrm{Id}) = E$.

EXERCICE 78 Sous-espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes

Titre : Sous-espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes
ID : 97 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 83 | ID : 97
Difficulté : ★★☆☆☆

n désigne un entier naturel non nul et $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un entier naturel non nul k tel que $A^k = 0$. Le plus petit entier naturel non nul p réalisant $A^p = 0$ s'appelle l'indice de nilpotence de A. On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Démontrer que si A est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $A^n = 0$.
2. La somme de deux matrices nilpotentes est elle toujours nilpotente ?
3. Montrer que si A et B sont deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $AB = BA$ alors $A + B$ et AB sont nilpotentes.
4. $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ est il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
5. Démontrer que si $\mathcal{H}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \operatorname{tr}(M) = 0\} = \ker(\mathrm{tr})$ alors $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{K})) = \mathcal{H}_n(\mathbb{K})$.

Solution

1. A nilpotente d'indice de nilpotence p, alors $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$, donc il existe $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $A^{p-1}X_0 \neq 0$. La famille $(X_0, AX_0, \ldots, A^{p-1}X_0)$ est libre car si $\alpha_0, \ldots \alpha_{p-1}$ sont des

scalaires tel que :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k A^k X_0 = 0$$

alors en multipliant par A^{p-1} il reste $\lambda_0 A^{p-1} X_0 = 0$, donc $\lambda_0 = 0$. Une récurrence permet de prouver que les λ_k sont tous nuls. Cette famille compte p vecteurs donc $p \leq n$ puisque $n = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, posons $n = p + m$ alors $A^n = A^p A^m = 0$.

2. Pour $n = 1$ oui puisque la seule matrice nilpotente est (0). Pour $n = 2$ non car si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a $A^2 = B^2 = 0$ et $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible donc non nilpotente. Si $n > 2$ On prends les matrices par blocs : $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Si p et q sont les indices de nilpotence respectifs de A et B alors si on pose $m = \max(p, q)$, on peut dire que $A^m = B^m = 0$, par suite $(AB)^m = A^m B^m = 0$ et $(A + B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k}$ on discute si $k \geq p$ alors $A^k = 0$ et si $k < p$ alors $p + q - k \geq q$ et $B^{p+q-k} = 0$ donc la somme ci-dessus possède que des termes nuls donc elles est nulle.
4. Non sauf si $n = 0$, d'après la question 1).
5. Posons $I = [\![1, n]\!]^2 \backslash \{(1, 1)\}$ et pour tout $(i, j) \in I$ définissons :

$$F_{ij} = \begin{cases} E_{ij} & \text{si} \quad i \neq j \\ E_{11} + E_{1k} - E_{kk} - E_{k1} & \text{si} \quad i = j = k \end{cases}$$

avec les E_{ij} les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il est aisé de vérifier que la famille $(F_{ij})_{(i,j)\in I}$ est libre et que $F_{ij}^2 = 0$ pour tout $(i, j) \in I$. Il en découle que $\dim(\text{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{K}))) \geq n^2 - 1$. Par ailleurs toute matrice nilpotente est de trace nulle, on va démontrer ça par récurrence. Si $n = 1$ la seule matrice nilpotente est (0) sa trace est nulle. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat vrai pour n Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ nilpotente, si u est l'endomorphisme canoniquement associé à A alors u n'est pas un isomorphisme donc $\ker(u) \neq \{0\}$. Soit $u_1 \in \ker(u)$ et complétons en une base $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_{n+1})$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ alors $\text{mat}_{\mathcal{U}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec L une ligne de taille n et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Une récurrence simple et le produit par blocs permet de voir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $A^n = \begin{pmatrix} 0 & L_k \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$ comme $A^{n+1} = 0$ on a $B^{n+1} = 0$, donc B est nilpotente. Par hypothèse de récurrence $\text{tr}(B) = 0$, or $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ donc $\text{tr}(A) = 0$ donc $\text{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{K})) \subset \mathcal{H}_n(\mathbb{K})$. Tenant compte de tout ce qui précède et du fait que $\mathcal{H}_n(\mathbb{K})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc $\dim(\mathcal{H}_n(\mathbb{K})) = n^2 - 1$ donc $\dim(\text{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{K}))) \leq n^2 - 1$. Finalement on a $\text{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{K})) \subset \mathcal{H}_n(\mathbb{K})$ et ont même dimension ,donc $\text{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{K})) = \mathcal{H}_n(\mathbb{K})$

EXERCICE 79 Dimensions de quelques espaces de matrices

Titre : Dimensions de quelques espaces de matrices
ID : 98 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 84 | ID : 98
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que A n'est ni nulle ni inversible et soit $r = \text{rg}\,(A)$. On pose :

$$\mathscr{E}_1 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / AM = 0\};$$

$$\mathscr{E}_2 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / MA = 0\}$$

et

$$\mathscr{E}_3 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / AM = MA = 0\} = \mathscr{E}_1 \cap \mathscr{E}_2.$$

1. Démontrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $B \neq 0$ et $AB = BA = 0$.
2. Démontrer que $\mathscr{E}_k, k \in \{1,2,3\}$ sont des sous-espace vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Determiner les dimensions de $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$ et $\mathscr{E}_3$

Solution

1. Comme $\text{rg}\,(A) = r$, la matrice A est équivalente à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc il existe $P, Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PJ_rQ$. Posons $B = Q^{-1}K_rP^{-1}$ où $K_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$. Le produit matriciel par blocs permet de voir que $J_rK_r = K_rJ_r = 0$, donc $AB = BA = 0$. Par ailleurs comme $r < n$, on a $B \neq 0$.
2. Les applications $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); M \mapsto AM$ et $g : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); M \mapsto MA$ son linéaires et on voit que $\mathscr{E}_1 = \ker f$ et $\mathscr{E}_2 = \ker g$ et $\mathscr{E}_3 = \ker f \cap \ker g$, donc $\mathscr{E}_k$ pour $k \in \{1,2,3\}$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Si $A = J_r$ et $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ avec $X_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ et $X_4 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$, on voit que $AX = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $\text{rg}\ f = \dim(\text{Im}\, f) = r^2 + r(n-r) = nr$, donc par le théorème du rang $\dim \mathscr{E}_1 = n^2 - nr$. De même puisque $XA = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ X_3 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\text{rg}\ g = r^2 + r(n-r) = nr$ donc $\dim(\mathscr{E}_2) = \dim(\mathscr{E}_1) = n^2 - nr$. On déduit de ce qui précéde que $X \in \mathscr{E}_3 \Leftrightarrow X_1 = 0_{r,r}$ et $X_2 = 0_{r,n-r}$ et $X_3 = 0_{n-r,r}$ si et seulement si X est de la forme $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}$ avec $X_4 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$, ce qui donne $\dim(\mathscr{E}_3) = (n-r)^2$. Ces réultats sont valables pour A quelconque car $A = PJ_rQ$ avec $P, Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$, ce qui montre que pour toute matrice X on a : $AX = 0 \Leftrightarrow PJ_rQX = 0 \Leftrightarrow J_r(QX)$ et $XA = 0 \Leftrightarrow XPJ_r = 0$.

EXERCICE 80 — Endomorphismes f,g tel que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$

Titre : Endomorphismes f,g tel que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$ — **Difficulté :** ★★☆☆☆
ID : 99 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 85 | ID : 99

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$g \circ f \circ g = g \text{ et } f \circ g \circ f = f.$$

1. Montrer que $\text{Im}\, f$ et $\ker g$ sont supplémentaires dans E.

2. Justifier que $f(\text{Im}\, g) = \text{Im}\, f$.

Solution

1. Soit $x \in E$ alors comme $g \circ f \circ g = g$, on a $g(f(g(x))) = g(x)$, donc $g(x - f(g(x))) = 0$, donc $x_1 = x - f(g(x))$ réalise $x_1 \in \ker g$. On a $x = x_1 + x_2$ avec $x_2 = f(g(x))$ donc $x_2 \in \text{Im}\, f$. Ainsi $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \ker g$ et $x_2 \in \text{Im}\, f$, donc $E = \ker g + \text{Im}\, f$. Soit $x \in \ker g \cap \text{Im}\, f$, alors il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$ et $g(x) = 0$, donc $g(f(a)) = 0$ donc $x = f(a) = f(g(f(a))) = 0$. Ainsi $\ker g \cap \text{Im}\, f = \{0\}$, donc $\ker g \oplus \text{Im}\, f = E$.

2. On a $f(\text{Im}\, g) = f(g(E)) \subset f(E) = \text{Im}\, f$, donc $f(\text{Im}\, g) \subset \text{Im}\, f$. Réciproquement, soit $x \in \text{Im}\, f$ alors il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$. La question a) ci-dessus permet , par symétrie des rôles de dire que $E = \ker f \oplus \text{Im}\, g$, donc il existe $(y,z) \in E^2$ tel que $a = y + g(z)$ et $f(y) = 0$, donc $x = f(a) = f(g(z))$ donc $x \in f(\text{Im}\, g)$ et par suite $f(\text{Im}\, g) = \text{Im}\, f$.

EXERCICE 81 Commutant d'un endomorphisme cyclique

Titre : Commutant d'un endomorphisme cyclique
ID : 100 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 86 | ID : 100
Difficulté : ★★☆☆☆

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$ et f un endomorphisme de E tel qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ pour lequel la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E. On note

$$\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{L}(E) / g \circ f = f \circ g\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. On note $\mathbb{K}[f] = \{P(f) / P \in \mathbb{K}[X]\}$. Démontrer que $\mathbb{K}[f] \subset \mathcal{C}(f)$.
3. Soit $g \in \mathcal{C}(f)$. Justifier l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g(x_0) = P(f)(x_0)$. Prouver ensuite que $P(f) = g$. En déduire que
$$\mathcal{C}(f) = \left\{a_0 \mathrm{Id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} \mid a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\right\}$$
4. Déterminer la dimension de $\mathcal{C}(f)$.

Solution

1. On a $\mathcal{C} \neq \emptyset$ car $\theta \in \mathcal{C}$, θ étant l'endomorphisme nul. Si $g, h \in \mathcal{C}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $(g + \lambda h) \circ f = g \circ f + \lambda h \circ f = f \circ g + \lambda f \circ h = f \circ (g + \lambda h)$, donc $g + \lambda h \in \mathcal{C}$.
2. On a $\forall k \in \mathbb{N}, f^k \circ f = f \circ f^k = f^{k+1}$. Il en découle que si $P = \sum_{k=0}^{N} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, alors $P(f) \circ f = \sum_{k=0}^{N} a_k f^k \circ f = \sum_{k=0}^{N} a_k f \circ f^k = f \circ \sum_{k=0}^{N} a_k f^k = f \circ P(f)$ donc $P(f) \in \mathcal{C}(f)$.
3. Comme $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E, il existe $a_0, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$, tel que $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$, donc $g(x_0) = P(f)(x_0)$ où $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.
Montrons que $P(f) = g$ pour cela il suffit de prouver que $P(f)$ et g coincident sur la base $f^k(x_0))_{k \in [\![0, n-1]\!]}$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, alors : comme g et f commutent, il en est de même de g et f^k, donc $g(f^k(x_0)) = f^k(g(x_0))$. Or $g(x_0) = P(f)(x_0)$, donc $g(f^k(x_0)) = f^k \circ P(f))(x_0)$ donc $g(f^k(x_0)) = P(f)(f^k(x_0))$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ de sorte que $P(f)$ et g coincident sur les vecteurs de la base $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)$ donc $g = P(f)$ et $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
Il découle de ce qui précède que $\mathcal{C}(f) \subset \mathbb{K}_{n-1}[f]$ où $\mathbb{K}_{n-1}[f] = \{P(f) / P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]\}$, or $\mathbb{K}[f] \subset \mathcal{C}(f)$ et de plus $\mathbb{K}_{n-1}[f] \subset \mathbb{K}[f]$, donc $\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}_{n-1}[f]$ donc $\mathcal{C}(f) = \{a_0 \mathrm{Id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} / a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\}$
4. On remarque que la famille $(f^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une famille génératrice de $\mathcal{C}(f)$. Montrons qu'elle est libre. Si $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une famille de scalaires tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k = 0$, en appliquant à x_0, on a $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0) = 0$ et par liberté de la famille $(f^k(x_0))_{0 \leq k \leq n-1}$ dans E, on a $\alpha_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, d'où $(f^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de $\mathcal{C}(f)$ et par suite $\dim(\mathcal{C}(f)) = n$.

EXERCICE 82 Hyperplan de matrices stbale par la multiplication

Titre : Hyperplan de matrices stbale par la multiplication
ID : 101 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 87 | ID : 101
Difficulté : ★★★☆☆

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1 stable par la multiplication matricielle, c'est-à-dire :

$$\forall (M,M') \in F^2,\ MM' \in F.$$

On suppose que $I_n \notin F$.

1. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \text{Vect}(I_n)$.
2. (a) Soit p le projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\text{Vect}(I_n)$ parallèlement à F. Montrer que :
$$\forall (M,M') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ p(MM') = p(M)p(M').$$
   (b) Montrer que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que M^2 appartienne à F, on a $M \in F$.
   (c) Soit $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$ pour tout $i,j,k,l \in [\![1,n]\!]$.
   (d) Montrer que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ E_{i,j} \in F$.
   (e) Conclure.

Solution

1. Soit $A \in F \cap \text{Vect}(I_n)$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$. Si $\lambda \neq 0$ alors $\frac{1}{\lambda}A \in F$. Or $\frac{1}{\lambda}A = I_n \notin F$, ce qui est absurde, donc $\lambda = 0$ et $A = 0$. Par ailleurs $\dim(F) + \dim \mathbb{R}I_n = n^2$, donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \mathbb{R}I_n$.
2. (a) Soit $M = A + \lambda I_n$ et $M' = A' + \lambda' I_n$ avec $A, A' \in F$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$; alors $(\star)\quad MM' = AA' + \lambda A' + \lambda' A + \lambda\lambda' I_n$. Comme F est stable par le produit, on a $AA' + \lambda A' + \lambda' A \in F$ donc $(\star)$ ci-dessus est la décomposition de MM' suivant cette somme directe et par suite $p(MM') = \lambda\lambda' I_n = (\lambda I_n)(\lambda' I_n) = p(M)p(M')$.
   (b) Si $M^2 \in F$ alors $p(M^2) = 0$. Or $P(M^2) = (p(M))^2$ d'après le 2)a), donc en écrivant $M = A + \lambda I_n$ avec $A \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, il vient $\lambda^2 I_n = 0$ donc $\lambda = 0$ et finalement $M \in F$.
   (c) On sait que $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$ où $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronnecker.
   (d) Si $i \neq j$ alors $E_{i,j}^2 = 0 \in F$ donc $E_{i,j} \in F$ d'après 2)b). Par ailleurs $E_{i,i} = E_{i,j}E_{j,i}$ pour un $j \neq i$. Or $E_{i,j}E_{j,i} \in F$ car $i \neq j$ et la stabilité de F par le produit, donc $E_{i,i} \in F$. Ainsi $\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ E_{i,j} \in F$ donc $F = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (e) Ce qui précède montre que si $I_n \notin F$ alors $F = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui est absurde, donc $I_n \in F$ et on vient de prouver que : Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par le produit contient $\{I_n\}$.

EXERCICE 83 Utilisation des matrices de rang 1

Titre : Utilisation des matrices de rang 1 **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 102 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 88 | ID : 102

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Démontrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que A non nulle et non inversible, il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $B \neq 0$ et $AB = BA = 0$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ Démontrer que $\text{rg}\,(A) = 1$ si et seulement si :
$$\exists (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\quad \begin{cases} X \neq 0 \\ Y \neq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad A = X{}^tY$$
3. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ tel que $A \neq 0$ et $A^2 = 0$. Démontrer que A est semblable à la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution

1. Soit $r = \text{rg}\,(A)$, donc $0 < r < n$ et il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PJQ$ avec

$$J = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$$

si on pose

$$J' = \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

alors $B = Q^{-1}J'P^{-1}$ convient.

2. Si il existe X et Y tous deux non nuls tels que $A = X^TY$ alors A est non nulle et $\text{rg}\,(A) \leq \text{rg}\,(X) = 1$ donc $\text{rg}\,(A) = 1$.
Réciproquement si $\text{rg}\,(A) = 1$ les colonnes de A se trouvent sur une même droite vectorielle, engendrée par un vecteur non nul que l'on note X. On a donc l'existence de $\lambda_1, ...\lambda_n$ n scalaires non tous nuls tels que en notation colonne : $A = (\lambda_1 X, ..., \lambda_n X) = X(\lambda_1, ...\lambda_n)$ d'où le résultat

3. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A alors $f \circ f = 0$ donc $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$, donc $\text{rg}\,(f) \leq \dim(\ker(f))$ D'après le théorème du rang $\dim(\ker(f)) + \text{rg}\,(f) = 3$, or $\text{rg}\,(f) \neq 0$, la seule possibilité est $\text{rg}\,(f) = 1$ et $\dim(\ker(f)) = 2$ (parités différentes puisque la somme est 3). Soit v_1 un vecteur directeur de $\text{Im}(f)$. Alors $v_1 \in \ker(f)$. On complète en une base (v_1, v_2) de $\ker(f)$. Soit v_3 tel que $f(v_3) = v_1$. La famille $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ est libre car si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ alors en appliquant f, il reste $\alpha_3 f(v_3) = 0$ donc $\alpha_3 v_1 = 0$ et $\alpha_3 = 0$ donc $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. La matrice de f relativement à $\mathcal{V}$ est : $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc A est semblable à J.

EXERCICE 84 Polynôme interpolateur de Lagrange, des études.

Titre : Polynôme interpolateur de Lagrange, des études. **Difficulté :**
ID : 103 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 89 | ID : 103

1. On considère $n+1$ nombres réels deux à deux distincts $a_0, \ldots, a_n$. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme L_k de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $L_k(a_j) = \delta_{k,j}$.
Expliciter le polynôme L_k sous forme factorisée.

2. (a) Montrer que $\mathcal{L} = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Donner les coordonnées de P dans la base $\mathcal{L}$
   (c) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} L_k = 1$.

3. On suppose dans cette question que $a_j = j$ pour tout $j \in [\![0, n]\!]$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$L_k(X) = \frac{(-1)^{n-k}}{n!}\binom{n}{k}\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}(X - j).$$

   (b) Déterminer le polynôme $Q = \sum_{k=1}^{n} kL_k$.
   (c) Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ à la base $\mathcal{L}$ trouvée ci-dessus. Préciser la première ligne de A, la somme des éléments des autres lignes de A et la somme des éléments des colonnes de A.
   (d) Donner A^{-1}

Solution

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(a_j) = \delta_{kj}$ pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, il en découle que P admet au moins n racines distinctes à savoir les a_j pour $j \neq k$, donc $\deg(P) = n$ et forcément $P = \lambda_k \Pi_k$ avec $\Pi_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} (X - a_j)$, et λ_k un scalaire non nul. Comme $P(a_k) = 1$, il vient $\lambda_k = \frac{1}{\Pi_i(a_i)}$ d'où l'expression unique possible de L_k à savoir :

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$$

Réciproquement ce polynôme convient, donc c'est l'unique qui répond au problème posé.

2. (a) Puisque la famille $\mathcal{L} = (L_k)_{0\leq k\leq n}$ possède $n+1$ vecteurs et $\dim(\mathbb{R}_n[X] = n+1$, il suffit de prouver que $\mathcal{L}$ est libre pour qu'elle soit une base.Soit $(\alpha_k)_{0\leq k\leq n}$ une famille de scalaires tel que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k L_k = 0$, alors pour $i \in [\![0,n]\!]$ fixé on a $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k(a_i) = 0$ donc $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \delta_{ki} = 0$ donc $\alpha_i = 0$, par suite $\forall i \in [\![0,n]\!], \alpha_i = 0$ donc la famille $\mathcal{L}$ est libre et par suite c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ si on pose $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k$ alors pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on a $P(a_i) = \lambda_i$ ainsi les coordonnée de P sont $P(a_0), \ldots, P(a_n)$. Donc

$$(\star) \quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \sum P(a_k) L_k$$

   (c) En appliquant $(\star)$ au polynôme constant $P = 1$, on obtient $\sum_{k=0}^{n} L_k = 1$.

3. (a) La formule de la question 1) donnant L_k donne :

$$\begin{aligned} L_k(X) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{X - j}{k - j} \\ &= \frac{1}{\mu_k} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (X - j) \end{aligned}$$

   où $\mu_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (k - j)$, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.
   Si $0 < k < n$, on a :

$$\begin{aligned} \mu_k &= \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (k - j) \\ &= \prod_{\ell=1}^{k} \ell \prod_{\ell=1}^{n-k} (-1)^{n-k} \ell \\ &= (-1)^{n-k} k!(n-k)! \\ &= (-1)^{n-k} \frac{n!}{\binom{n}{k}} \end{aligned}$$

   (b) La valeur k est la valeur du polynôme X au point k. On a donc, d'après ce qui précède : $\sum_{k=1}^{n} k L_k = X$.

   (c) i. Dans la matrice A, la première ligne représente les coordonnées des polynômes L_k sur le vecteur 1. C'est donc la valeur des polynômes L_k en 0, c'est donc $(L_0(0), L_1(0), \ldots, L_n(0)) = (1, 0, \ldots, 0)$.

ii. Les autres lignes représentent les coordonnées des polynômes sur les vecteurs X^k. Or la coordonnée d'un polynôme P sur X^k est $\frac{P^{(k)}}{k!}$(formule de Taylor pour les polynômes). La somme des coefficients de ces lignes est donc $\frac{(L_0+L_1+\cdots+L_n)^{(k)}(0)}{k!}$. Comme $L_0+\cdots+L_n=1$, la somme en question est nulle.

iii. La somme des termes d'une colonne représente la somme des coefficients du polynôme considéré et cette somme s'obtient en évaluant le polynôme en 1. Comme $L_k(1)=0$ pour tout $k\neq 1$ et $L_1(1)=1$, les sommes en question sont $0,1,0,...,0$.

(d) A^{-1} est la matrice de passage de la base $(L_0,\dots,L_n)$ à la base canonique. Ses colonnes sont donc les coordonnées de $1,X,\dots,X^n$ dans $L_0,\dots,L_n$. Or, on a vu que si P est un polynôme alors $P=\sum P(\alpha_k)L_k$, donc :

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1^2&\dots&\dots&1^n\\1&2&2^2&\dots&\dots&2^n\\\vdots&\vdots&\vdots&\dots&\dots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\dots&\dots&\vdots\\1&n&n^2&\dots&\dots&n^n\end{pmatrix}$$

EXERCICE 85 Activités sur le calcul matriciel, puissances, inverse

Titre : Activités sur le calcul matriciel, puissances, inverse
ID : 104 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 90 | ID : 104
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&-1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Solution

1. Le calcul donne : $A^2=\begin{pmatrix}4&0&0&-2\\0&4&0&2\\0&0&4&2\\-2&2&2&4\end{pmatrix}$ et $A^3=\begin{pmatrix}2&6&6&6\\6&2&-6&-6\\6&-6&2&-6\\6&-6&-6&-10\end{pmatrix}$
2. On remarque que $A^3=6A-4I_4$, donc $A(A^2-6I_4)=(A^2-6I_4)=4I_4$, donc A est inversible et $A^{-1}=\frac{1}{4}(A^2-6I_4)$ donc $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$.

EXERCICE 86 En domorphisme u tel que $p\circ u-u\circ p=u$, avec p projecteur

Titre : En domorphisme u tel que $p\circ u-u\circ p=u$, avec p projecteur
ID : 105 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 91 | ID : 105
Difficulté : ★★★☆☆

E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Si f et g sont deux endomorphismes de E on note fg le composé $f \circ g$ et f^2 l'endomorphisme $f \circ f$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un projecteur p de E tel que $u = pu - up$. Démontrer que $u^2 = 0$.
2. On suppose que $u^2 = 0$.
   (a) Justifier que $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$.
   (b) Prouver que si F est un sous-espace vectoriel de E tel que $\text{Im}(u) \subset F \subset \ker(u)$, G un supplémentaire de F dans E et p la projection de E sur F parallèlement à G, alors $pu = u$ et $up = 0$.
3. Déduire de ce qui précède que pour tout endomorphisme u de E, il existe un projecteur p de E tel que $pu - up = u$ si et seulement si $u^2 = 0$.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$. Caractériser par leur images, les projecteurs p vérifiant $u = pu - up$.

Solution

1. On a $u = pu - up$, donc $pu = pu - pup$, donc $pup = 0$. On a $up = pup - up$ donc $up = -up$ et $up = 0$ donc $u = pu$ et par suite $u^2 = pupu = (pup)u = 0$.
2. (a) Comme $u^2 = 0$, on pour tout $x \in \text{Im}\, u$, il existe $a \in E$ tel que $x = u(a)$, donc $u(x) = u^2(a) = 0$. donc $\text{Im}\, u \subset \ker u$.
   (b) Soit F, G des sous-espaces vectoriels de E tel que $\text{Im}\, u \subset F \subset \ker u$ et $F \oplus G = E$. Soit $x \in E$, alors $u(x) \in \text{Im}\, u$ donc $u(x) \in F$ donc $p((u(x)) = u(x)$ donc $pu = u$. On a $p(x) \in F$, donc $p(x) \in \ker u$ donc $u(p(x)) = 0$ donc $up = 0$.
3. On a prouvé le sens direct dans la question 1) et dans la question 2) on a montré que si $u^2 = 0$ il existe p projecteur de E tel que $pu = u$ et $up = 0$,en particulier $pu - up = u$.
4. On a vu dans 3) que si p réalise $\text{Im}\, u \subset \text{Im}\, p \subset \ker u$ alors il réalise $pu - up = u$. Réciproquement si p est un projecteur tel que $up - pu = u$, on a vu dans la question 1) que $pu = u$ et $up = 0$ donc $\text{Im}\, u \subset \text{Im}\, p \subset \ker u$.

EXERCICE 87 Mtarices tel que $AB = A + B$

Titre : Mtarices tel que $AB = A + B$ **Difficulté :**
ID : 106 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 92 | ID : 106

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$AB = A + B$$

Montrer que A et B commutent

Solution

Rappelons que si $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $MN = I_n$ alors M et N sont inversibles et l'une est l'inverse de la'autre. En effet si $MN = I_n$ alors $\det(MN) = 1$ donc $\det(M)\det(N) = 1$ et par suite $\det(M) \neq 0$ et M est inversible. De $MN = I_n$, on déduit $M^{-1}N = M^{-1}$, donc $N = M^{-1}$.
Retour à la question de l'exercice :
$AB = A + B$ donc $(A - I_n)(B - I_n) = A + B - A - B + I_n = I_n$ donc $A - I_n$ et $B - I_n$ sont l'une l'inverse de l'autre donc $(B - I_n)(A - I_n) = I_n$ et par suite $BA = B + A = A + B = AB$ donc $BA = AB$.

EXERCICE 88 Trois méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice

Titre : Trois méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice
ID : 107 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 93 | ID : 107
Difficulté :

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On se propose de calculer A^{-1} par trois méthodes.
Première méthode :

1. Calculer N^n et N^{n-1}.
2. Exprimer A en fonction de N.
3. Montrer que $I_n - N$ est inversible et déterminer son inverse. Conclure.

Deuxième méthode : Soit $f : \mathbb{K}_{n-1}[X] \to \mathbb{K}_{n-1}[X]; P \mapsto f(P) = \frac{P(0)+(X-1)P}{X}$

1. Montrer que f est bien une application.
2. Montrer que f est un isomorphisme du $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
3. Determiner $g = f^{-1}$.
4. Calculer les matrices de f et g relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \cdots, X^{n-1})$ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et conclure.

Troisième méthode : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et soit $\Omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n)$ avec pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on pose $\omega_k = \sum_{j=1}^{k} e_j$.

1. Déterminer les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à Ω et celle de Ω à $\mathcal{B}$.
2. Conclure.

Solution

Première méthode :
1) On remarque que $N = \sum_{k=1}^{n-1} E_{k,k+1}$ donc $N^2 = \sum_{\substack{1\le i\le n-1 \\ 1\le j\le n-1}} E_{i,i+1}E_{j,j+1}$. Comme $E_{i,i+1}E_{j,j+1} = \delta_{i+1,j}E_{i,j+1}$ on récupère la somme des $E_{i,j+1}$ pour $i, j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $j = i+1$. En particulier on doit avoir $i \le n-2$ et $j = i+2$ donc $N^2 = \sum_{i=1}^{n-2} E_{i,i+2}$. De la même façon on a en général $N^p = \sum_{i=1}^{n-p} E_{i,i+p}$ et en particulier, $N^{n-1} = E_{1,n}$ et finalement $N^n = 0$.
2) Il est clair d'après le 1) que $A = \sum_{k=0}^{n-1} N^k$.
3) On a $(I_n - N)A = A - NA$ or $NA = \sum_{k=1}^{n} N^k = A - I_n$, donc $(I_n - N)A = A(I_n - N) = I_n$ et finalement, la matrice $I_n - N$ est inversible et $(I_n - N)^{-1} = A$
Deuxième méthode :
1) Pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, on voit que $f(P)$ est une fraction rationnelle de dénominateur X, donc $f(P)$ est un polynôme si et seulement si $X|P(0) + (X-1)P$ or c'est le cas puisque 0 est une racine de $Q = P(0) + (X-1)P(X)$ puisque $Q(0) = P(0) - P(0) = 0$. Par ailleurs le degré de $f(P)$ est $\deg(f(P)) = \deg(P(0) + (X-1)P) - 1 \le n-1$ donc $f(P) \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Donc f est bien une application de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ vers lui même.

2) f est linéaire car pour tout $P_1, P_2 \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned} f(P_1+\lambda P_2) &= \frac{P_1(0)+\lambda P_2(0)+(X-1)P_1(X)+\lambda(X-1)P_2(X)}{X} \\ &= f(P_1)+\lambda f(P_2). \end{aligned}$$

Soit $P \in \ker(f)$ alors $f(P)=0$ donc $P(0)+(X-1)P(X)=0$ donc le polynôme $(X-1)P(X)$ est constant et cela n'a lieu que si $P=0$, donc $\ker(f)=\{0\}$ et comme c'est une endomorphisme en dimension finie, f est un isomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
3) Soit $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $P=f^{-1}(Q)$, alors $f(P)=Q$ donc (1) $Q(X)=\frac{P(0)+(X-1)P(X)}{X}$ donc $P(X)=\frac{XQ(X)-P(0)}{X-1}$. Or, par (1), on a : $Q(1)=P(0)$, donc $P(X)=\frac{XQ(X)-Q(1)}{X-1}$. Ainsi : $\forall Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X], f^{-1}(Q)=\frac{XQ(X)-Q(1)}{X-1}$
4) Recherches des matrices de f et g dans la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$:
• **Matrice de f :**
On a $f(1)=1$ et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a : $f(X^k)=(X-1)X^{k-1}=X^k-X^{k-1}$, donc la matrice de f relativement à la base canonique $(1, X, \ldots, X^{n-1})$ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ 0 & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• **Matrice de g :**

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a : $g(X^k)=\frac{XX^k-1}{X-1}=\frac{X^{k+1}-1}{X-1}=\sum_{j=0}^{k} X^j$. Il en découle que la matrice de g relativement à la base canonique est A
• **Conclusion :** Comme $g=f^{-1}$ on a $A^{-1}=B$ On remarque effectivement que $B=I_n-N$, ce qui coincide avec le résultat de la première méthode ci-dessus.
Troisième méthode :
1) Comme $\omega_k=\sum_{j=1}^{k} e_j$, il est claire que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à Ω est $\mathscr{P}_{\mathcal{B}}^{\Omega}=A$. Par ailleurs, on remarque que $\forall k \in [\![2, n]\!], \omega_k-\omega_{k-1}=e_k$ et que $\omega_1=e_1$, donc la matrice de passage de Ω à $\mathcal{B}$ est $\mathscr{P}_{\Omega}^{\mathcal{B}}=B=I_n-N$.
2) On sait que $\left(\mathscr{P}_{\mathcal{B}}^{\Omega}\right)^{-1}=\mathscr{P}_{\Omega}^{\mathcal{B}}$ donc $A^{-1}=B=I_n-N$.

EXERCICE 89 Condition pour que la somme de projecteurs est un projecteur

Titre : Condition pour que la somme de projecteurs est un projecteur
Difficulté : ★☆☆☆☆
ID : 108 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 94 | ID : 108

E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ et $p_1, \ldots, p_k$ des projecteurs de E. On note $p=\sum_{i=1}^{k} p_i$.

1. Démontrer que pour tout projecteur π de E on a $\mathrm{rg}(\pi)=\mathrm{tr}(\pi)$.
2. On suppose que p est un projecteur. Montrer que $\mathrm{Im}(p)=\bigoplus_{i=1}^{k}\mathrm{Im}(p_i)$.
3. Montrer que p est un projecteur si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,k]\!]^2, p_i \circ pj = \delta_{i,j} p_i.$$

avec pour tout $i, j \in [\![1,k]\!], \delta_{i,j}=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad i=j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$ (le symbole de Kronnecker).

Solution

1. Si $\pi = 0$, le résultat demandé est immédiat : $\text{rg}(\pi) = \text{tr}(\pi) = 0$. Si $\pi = \text{Id}_E$ on a $\text{rg}(\pi) = n = \text{tr}(\pi)$. Si $0 < \text{rg}(\pi) = r < n$, on sait que $\text{Im}(\pi) \oplus \ker(\pi) = E$, soit alors $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E tel que $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base de $\text{Im}(\pi)$ et $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ est une base de $\ker(\pi)$. La matrice de π relativement à $\mathscr{E}$ est : $A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\text{tr}(\pi) = \text{tr}(A) = r$. Or $\text{rg}(A) = r$, donc $\text{rg}(\pi) = \text{rg}(A) = r = \text{tr}(\pi)$.

2. Soit $x \in E$. Si $x \in \text{Im}(p)$ alors $p(x) = x$. Comme $p = \sum_{i=1}^{k} p_i$, on a $x = p(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i(x)$ donc $x \in \sum_{i=1}^{k} \text{Im}(p_i)$. Il en découle que

$$(1) \quad \text{Im}(p) \subset \sum_{i=1}^{k} \text{Im}(p_i).$$

Si on démontre que :

$$(\star) : \quad \dim(\text{Im}(p)) = \dim\left(\sum_{i=1}^{k} \text{Im}(p_i)\right) = \sum_{i=1}^{k} \dim(\text{Im}(p_i)).$$

alors on aura en même temps l'égalité dans (1) et la somme est directe.
D'après la question 1), on a $\text{rg}(\pi) = \text{tr}(\pi)$, et comme la trace est linéaire, on a : $\text{rg}(p) = \text{tr}(p) = \sum_{i=1}^{k} \text{tr}(p_i) = \sum_{i=1}^{k} \text{rg}(p_i)$, ce qui fournit : $(\star)$.

3. Supposons que

$$\forall (i,j) \in [\![1,k]\!]^2, \quad p_i \circ p_j = \delta_{ij}$$

Alors :

$$\begin{aligned} p^2 &= p \circ p = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{k} p_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} p_i \circ p_j \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \delta_{ij} p_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} p_i \\ &= p \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que p est un projecteur. Soit $i, j \in [\![1,k]\!]$.
• Si $i = j$ alors comme p_i est un projecteur on a :

$$p_i \circ p_j = p_i^2 = p_i = \delta_{i,i} p_i = \delta_{i,j} p_i.$$

• Si $i \neq j$, soit $x \in E$, notons $x_i = p_i(x)$, alors $x_i \in \text{Im}(p_i)$ et comme d'après la question 2) on a :

$$(\star\star\star) \quad \text{Im}(p) = \bigoplus_{\ell=1}^{k} \text{Im}(p_\ell)$$

on a en particulier : $\text{Im}(p_i) \subset \text{Im}(p)$, donc $x_i \in \text{Im}(p)$ et par suite

$$(\star\star) \quad p(x_i) = x_i.$$

Comme $p = \sum_{\ell=1}^{k} p_\ell$, on a :

$$(\star\star)' \quad p(x_i) = \sum_{\ell=1}^{k} p_\ell(x_i)$$

L'unicité de la décomposition de $p(x_i)$ suivant la somme direct $(\star\star\star)$ et les relations $(\star\star)$ et $(\star\star)'$ donnent :

$$\forall \ell \in [\![1,k]\!], \ell \neq i \Rightarrow p_\ell(x_i) = 0$$

En particulier $p_j(x_i) = 0$ donc $p_j \circ p_i(x) = 0$, d'où $p_j \circ \mathbb{P}_i = 0$.
Conclusion :

$$\forall (i,j) \in [\![1,k]\!]^2, \quad p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i.$$

EXERCICE 90 Projecteurs de même noayau : Une condition

Titre : Projecteurs de même noayau : Une condition
ID : 109 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 95 | ID : 109
Difficulté : ★★☆☆☆

Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les assertions :
(i) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$. (ii) p et q sont des projecteurs de même noyau.

Solution

• Supposons que (i) est vraie alors $p^2 = (p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ (q \circ p) \circ q = p \circ (q \circ p) = p \circ q = p$.
De même $q^2 = q$ par symétrie des rôles.
Soit $x \in E$; si $p(x) = 0$ alors comme $q = q \circ p$, on a $q(x) = q(p(x)) = q(0) = 0$. Donc $\ker(p) \subset \ker(q)$ et par symétrie on a aussi $\ker(q) \subset \ker(p)$ donc p et q ont même noyau.
• Supposons (ii) alors p et q sont des projecteurs et $\ker(p) = \ker(q)$.
On a en particulier $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$. Soit $x \in E$. Ecrivons $x = y + z$ avec $y \in \ker(p)$ et $z \in \mathrm{Im}(p)$ alors $q(p(x)) = q(p(y)) + q(p(z)) = q(z)$ et $q(x) = q(y) + q(z) = q(z)$ car comme $y \in \ker(p)$ et $\ker(p) = \ker(q)$ on a $q(y) = 0$. Ainsi $q \circ p = q$ et par symétrie des rôles on a aussi $p \circ q = p$.

EXERCICE 91 Inversibilioté de $\mathrm{Id} - f$ avec f nilpotent

Titre : Inversibilioté de $\mathrm{Id} - f$ avec f nilpotent
ID : 110 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 96 | ID : 110
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E nilpotent i.e. tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ pour lequel $f^n = 0$. Montrer que $\mathrm{Id} - f$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.

Solution

Soit $g = \sum_{k=0}^{n-1} f^k$ alors $f \circ g = \sum_{k=0}^{n-1} f^{k+1}$ et comme $f^n = 0$, on a $f \circ g = \sum_{k=1}^{n} f^k = \sum_{k=1}^{n-1} f^k$, donc

$$f \circ g = \sum_{k=0}^{n-1} f^k - \mathrm{Id}_E = g - \mathrm{Id}_E,$$

donc

$$\mathrm{Id}_E = g - g \circ g = g \circ (\mathrm{Id}_E - f).$$

On a aussi de la même façon : $(\mathrm{Id}_E - f) \circ g = \mathrm{Id}_E$. Il en découle que $\mathrm{Id}_E - f$ est inversible et $(\mathrm{Id}_E - f)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f^k$

EXERCICE 92 Centre de L(E)

Titre : Centre de L(E)
ID : 111 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 97 | ID : 111
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de dimension finie ou infinie et u un endomorphisme de E tel que :

$$\forall v \in \mathcal{L}(E),\ u \circ v = v \circ u$$

1. Démontrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$ alors f est une homothétie de E si et seulement si pour tout $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ est liée.
2. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$. On note $F = \mathbb{K}x$ la droite vectorielle engendrée par x, G un supplémentaire de F(donc G est un hyperplan de E), et soit p la projection de E sur F parallèlement à G.
   (a) Prouver que $u(x) = p(u(x))$.
   (b) En déduire que $(x, u(x))$ est liée.
   (c) Enoncer le théorème démontré.

Solution

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et u un endomorphisme de E tel que :

$$\forall v \in \mathcal{L}(E),\ u \circ v = v \circ u$$

1. un sens est banal. L'autre sens Soit $a \in E$ non nul et $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $f(a) = \alpha a$. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$. Comme $(x, f(x))$ liée il existe $\lambda \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$. Si (x, a) est libre alors $x + a \neq 0$, donc il existe $\beta \in \mathbb{K}$ tel que $f(x + a) = \beta(x + a)$ donc $\beta(x + a) = f(x) + f(a) = \lambda x + \alpha x$ donc par liberté de (x, a), on a $\alpha = \lambda = \beta$ donc $\lambda = \alpha$. Si (x, a) est liée, il existe $\gamma \in \mathbb{K}$ tel que $x = \gamma a$, donc $f(x) = \gamma f(a) = \gamma\alpha a = \alpha\gamma a = \alpha x$, donc dans tous les cas $f(x) = \alpha x$, valable aussi pour $x = 0$, donc f est l'homothétie de rapport α.
2. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$. On note $F = \mathbb{K}x$ la droite vectorielle engendrée par x, G un supplémentaire de F(donc G est un hyperplan de E), et soit p la projection de E sur F parallèlement à G.
   (a) On a $p(x) = x$ car $x \in F$ et $F = \mathrm{Im}(p)$, donc $u(x) = (u \circ p)(x)$. Par hypothèse $u \circ p = p \circ u$ donc $u(x) = p(u(x))$.
   (b) Il découle de la question précédente que $u(x) \in F$ et comme F est la droite engendrée par x, on a $(x, u(x))$ est liée.
   (c) On a montré que $(x, u(x))$ est liée pour tout x non nul de E, donc pour tout x de E, donc u est une homothétie. Ainsi on a démontré que si u est un endomorphisme de E qui commute avec toute endomorphisme de E alors u est un projecteur. La réciproque est immédiate donc on a l'équivalence.

EXERCICE 93 Caractérisation de non inversible par nilpotente

Titre : Caractérisation de non inversible par nilpotente
ID : 112 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 98 | ID : 112
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

1. Démontrer que pour tout $r \in [\![0, n-1]\!]$, il existe une matrice carrée $N_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente de rang r.
2. En déduire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a A est non inversible si et seulement si il existe une matrice nilpotente N et une matrice inversible P tel que $A = PN$ si et seulement si il existe une matrice nilpotente M et une matrice inversible Q tel que $A = MQ$

Solution

1. Soit $M_r = (m_{i,j})$ tel que $m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j - i = n - r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. En d'autres termes :

$$M_r = \begin{pmatrix} O_{r,n-r} & I_r \\ O_{n-r,n-r} & O_{r,n-r} \end{pmatrix}$$

où $O_{p,q}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*$. On remarque que $m_{i,j} = 0$ si $i \geq j$ donc la matrice M_r est strictement triangulaire supérieure, donc nilpotente. On remarque que si on note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de M_r alors les colonnes non nulles sont C_k pour $k \in [\![n-r+1, n]\!]$ donc en nombre de $n - (n-r+1) + 1 = r$ et toutes ces colonnes sont des colonnes de la matrice I_n, précisément on a

$$\forall k \in [\![n-r+1, n]\!], C_k = E_{k-n+r}$$

où E_j est la colonne j de I_n, donc elles sont linéairement indépendantes et $\text{rg}\,(M_r) = r$.

2. Si $A = PN$ ou $A = MQ$ avec N, M nilpotentes et P, Q inversibles alors A n'est pas inversible snon N ou M serait inversible puisque $N = P^{-1}A$ et $M = AQ^{-1}$. Réciproquement si A est non inversible de rang r avec $0 \leq r < n$, d'après la question 1), A est équivalente à une matrice nilpotente N_1 donc $A = UN_1V$ avec $U, V \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ donc $A = UV(V^{-1}N_1V) = PN$ et $A = (UN_1U^{-1})UV = MQ$ où $P = Q = UV \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ inversibles et $\begin{cases} N = V^{-1}N_1V \\ M = UN_1U^{-1} \end{cases}$ sont nilpotentes car semblables à une matrice nilpotente, à savoir N_1.

EXERCICE 94 Des relations pour le rang d'un endomorphisme

Titre : Des relations pour le rang d'un endomorphisme
ID : 113 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 99 | ID : 113
Difficulté :

Rang de f^2 :
E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

1. Montrer que $\text{rg}\,\left(f^2\right) = \text{rg}\, f - \dim(\ker f \cap \text{Im}(f))$
2. En déduire que $\dim(\ker(f^2) \leq 2\dim(\ker(f))$.

Solution

1. Introduisons $\tilde{f}$ la restriction de f à $\text{Im}(f)$. $\tilde{f} : \text{Im}(f) \longrightarrow E \; x \mapsto f(x)$ Alors $\text{Im}(\tilde{f}) = f(\text{Im}(f)) = \text{Im}\left(f^2\right)$ et $\ker(\tilde{f}) = \ker f \cap \text{Im}(f)$ Le théorème du rang appliqué à Im f donne : $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Im}(\tilde{f})) + \dim(\ker(\tilde{f}))$ soit : $\text{rg}\,(f) = \text{rg}\,\left(f^2\right) + \dim(\ker f \cap \text{Im}(f))$, ce qui donne bien la formule demandée.
2. Par le théorème du rang. $n - \dim(\ker f) = n - \dim\left(\ker f^2\right) + \dim(\ker f \cap \text{Im}(f))$ et donc $\dim\left(\ker f^2\right) = \dim(\ker f) + \dim(\ker f \cap \text{Im}(f))$ enfin $\dim(\ker f \cap \text{Im}(f)) \leq \dim(\ker f)$ puisque $\ker f \cap \text{Im}(f) \subset \ker f$ donc $\dim\left(\ker f^2\right) \leq 2\dim(\ker f)$

EXERCICE 95 Dimension de l'image d'un sous espace

Titre : Dimension de l'image d'un sous espace
ID : 114 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 100 | ID : 114
Difficulté : ★★☆☆☆

E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et G un sous espace de E Montrer que $\dim(f(G)) = \dim(G) - \dim(\ker f \cap G)$.

Solution

Introduisons g la restriction de f à G. $g : G \longrightarrow E\ x \mapsto g(x) = f(x)$ Alors $\mathrm{Im}(g) = f(G)$ et $\ker(g) = \ker f \cap G$ Le théorème du rang appliqué à Im f donne : $\dim(G) = \dim(\mathrm{Im}(g)) + \dim(\ker(g))$ soit : $\dim(G) = \dim(f(G)) + \dim(\ker f \cap G)$ ce qui est bien la relation demandée.

EXERCICE 96 Une famille libre construite avec l'application $x \mapsto \sin(x)$

Titre : Une famille libre construite avec l'application $x \mapsto \sin(x)$
ID : 115 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 101 | ID : 115
Difficulté : ★☆☆☆☆

Dans l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \sin(x).$$

Démontrer que la famille

$$\mathscr{F} = (f, f \circ f, f \circ f \circ f)$$

est une famille libre de vecteurs de E.

Solution

• • **Première méthode :**
• Si $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ est un polynôme alors, pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, on notera $\mathrm{Tronc}_n(P)$ le polynôme :

$$\mathrm{Tronc}_n(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

• Au voisinage de 0, on a les développements limités :
• $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$
• $\sin(\sin(x)) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) - \frac{1}{6}\mathrm{Tronc}_5\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^3 + \frac{1}{120}\mathrm{Tronc}_5\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^3 + o(x^5)$,
donc : $\sin(\sin(x)) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{1}{2}x^5\right) + \frac{1}{120}x^5 = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5)$
• $\sin(\sin(\sin(x))) = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right) - \frac{1}{6}\mathrm{Tronc}_5\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right)^3 + \frac{1}{120}\mathrm{Tronc}_5\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right)^3 + o(x^5)$,
donc : $\sin(\sin(\sin(x))) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{1}{6}\left(x^3 - x^5\right) + \frac{1}{120}x^5 = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{11}{40}x^5 + o(x^5)$.
• En résumé, au voisinage de 0, on a :

$$\begin{cases} \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\ \sin(\sin(x)) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5) \\ \sin(\sin(\sin(x))) = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{11}{40}x^5 + o(x^5) \end{cases}$$

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha f + \beta(f \circ f) + \gamma(f \circ f \circ f) = 0$. Par unicité du développement limité de sin

au voisinage de 0, à l'ordre 5, on a le système :

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha+2\beta+3\gamma=0 \\ \alpha+12\beta+33\gamma=0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \beta+2\gamma=0 \\ 11\beta+32\gamma=0 \end{cases}$$

et finalement $\alpha=\beta=\gamma=0$, d'où la famille $\mathscr{F}$ est libre.

• • **Deuxième méthode :** On se contente des développements limités à l'ordre 3, ce qui donne le système : $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha+2\beta+3\gamma=0 \end{cases}$, donc $\beta=-2\alpha$ et $\gamma=\alpha$, donc

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad,\alpha(\sin(x)-2\sin(\sin(x))+\sin(\sin(\sin(x)))=0.$$

En particulier pour $x=\frac{\pi}{2}$, il vient

$$\alpha(1-2\sin(1)+\sin(\sin(1)))=0$$

donc

$$\alpha(g(1)-g(\sin(1)))=0$$

où

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},t\mapsto g(t)=t-\sin(t)$$

laquelle est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ puisqu'elle est dérivable et

$$\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\quad g'(t)=1-\cos(t)>0;$$

et comme $\sin(1)<1$, on a $\alpha=0$ et par suite $\alpha=\beta=\gamma=0$.

• • **Troisième méthode :** On pose $t=\arcsin(x)$ pour tout $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, donc t décrit $[-1,1]$. On obtient, pour tout $\forall t\in[-1,1],\quad \alpha t+\beta\sin(t)+\gamma\sin(\sin(t))=0$, donc, tenant compte des développements limités ci-dessus à l'ordre 3, il vient : $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ 2\beta+3\gamma=0 \end{cases}$, donc $\gamma=\alpha$ et $\beta=-2\alpha$ et par suite :

$$(1)\quad \forall t\in[-1,1],\quad \alpha\left(t-2\sin(t)+\sin(\sin(t))=0\right.$$

. En posant $\forall t\in[-1,1],h(t)=t-\sin(t)$, on remarque que (1) ci-dessus s'écrit :

$$(1)'\quad \forall t\in[-1,1],\quad \alpha(h(t)-h(\sin(t)))=0.$$

Or la fonction h est strictement croissante sur $]0,1[$ puisque $\forall t\in]0,1[,h'(t)=1-\cos(t)>0$. Si $t\in]0,1[$, on a $\sin(t)<t$, donc $h(t)-h(\sin(t))>0$ et par suite $\alpha=0$ et vu l'expression de β et γ en fonction de α, on a $\alpha=\beta=\gamma=0$, d'où la liberté de $\mathscr{F}$.

EXERCICE 97 Quekques propriétés concernat l'image et le noyau

Titre : Quekques propriétés concernat l'image et le noyau
ID : 116 **Durée :** —
Difficulté :

Niveau : L2 | N° : 102 | ID : 116

On considère trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ des application linéaires. Démontrer que :

1. $f(\ker(g \circ f)) = \ker(g) \cap \mathrm{Im}(f)$.
2. $g^{-1}(\mathrm{Im}(g \circ f)) = \ker(g) + \mathrm{Im}(f)$.
3. $\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker(g))$.
4. $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$.
5. $\mathrm{Im}(g \circ f) = g(\mathrm{Im}(f))$.
6. $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

Solution

1. Nous allons démontrer deux inclusions :
   • Soit $x \in f(\ker(g \circ f))$ donc il existe $a \in \ker(g \circ f)$ tel que $x = f(a)$. Comme $a \in \ker(g \circ f)$, on a $g(f(a)) = 0$ donc $f(a) \in \ker(g)$, donc $a \in g^{-1}(\ker(g))$. On a donc $g(a) \in g(g^{-1}(\ker(g))$, or $g(g^{-1}(\ker(g)) \subset \ker(g)$, donc $x \in \ker(g)$. Par ailleurs $x = f(a)$, donc $x \in \mathrm{Im}(f)$, d'où $x \in \ker(g) \cap \mathrm{Im}(f)$.
   • Réciproquement, soit $x \in \ker(g) \cap \mathrm{Im}(f)$, alors $g(x) = 0$ et $\exists a \in E, x = f(a)$, donc $(g \circ f)(a) = 0$ et $a \in \ker(g \circ f)$, et comme $x = f(a)$, on a $x \in f(\ker(g \circ f))$. On a donc prouvé l'égalité ensembliste demandée.
2. Nous allons de même démontrer deux inclusions :
   • Soit $x \in g^{-1}(\mathrm{Im}(g \circ f))$, alors $g(x) \in \mathrm{Im}(g \circ f)$, donc il existe $a \in E$ tel que $g(x) = (g \circ f)(a)$. Il en découle que $g(x - f(a)) = 0$ donc $b = x - f(a) \in \ker(g)$, donc $x = b + f(a)$ avec $b \in \ker(g)$ et $f(a) \in \mathrm{Im}(f)$ et par suite $x \in \ker(g) + \mathrm{Im}(f)$.
   • Réciproquement, soit $x \in \ker(g) + \mathrm{Im}(f)$ donc $x = f(a) + b$ avec $a \in E$ et $b \in \ker(g)$, alors $g(x) = g(b) + (g \circ f)(a) = (g \circ f)(a)$ donc $x \in g^{-1}(\mathrm{Im}(g \circ f))$.
3. Nous allons procéder par équivalence logique : Soit $x \in E$, alors $x \in \ker(g \circ f) \Leftrightarrow g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) \in \ker(g) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\ker(g))$. D'où l'égalité ensembliste demandée.
4. Pour tout $x \in E$, on a :
$$\begin{aligned} x \in \ker(f) &\Rightarrow f(x) = 0 \\ &\Rightarrow g(f(x)) = 0 \\ &\Rightarrow (g \circ f)(x) = 0 \\ &\Rightarrow x \in \ker(g \circ f). \end{aligned}$$
   d'où l'inclusion demandée.
5. On a $\mathrm{Im}(g \circ f) = (g \circ f)(E) = g(f(E)) = g(\mathrm{Im}(f))$.
6. On a $\mathrm{Im}(g \circ f) = g(f(E)) \subset g(F)$ car $f(E) \subset F$, donc $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

EXERCICE 98 — Image, noyau, composé de deux applications linéaire

Titre : Image, noyau, composé de deux applications linéaire
ID : 117 **Durée :** —
Difficulté : ★☆☆☆☆
Niveau : L2 | N° : 103 | ID : 117

E, F et G sont trois $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que :

1. $\ker(g \circ f) = \ker(f) \Leftrightarrow \ker(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$
2. $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g) \Leftrightarrow \ker(g) + \mathrm{Im}(f) = F$.

Solution

1. Nous allons démontrer deux implications :
   • Supposons que (H) $\ker(g\circ f)=\ker(f)$. Soit $x\in\ker(g)\cap\mathrm{Im}(f)$ alors $g(x)=0$ et $\exists a\in E, x=f(a)$, donc $(g\circ f)(a)=0$ et par suite $a\in\ker(g\circ f)$, par (H) on a $a\in\ker(f)$, donc $f(a)=0$ donc $x=0$. Ainsi $\ker(g)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0\}$.
   • Réciproquement, supposons que $(H)'$ $\ker(g)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0\}$, soit $x\in\ker(g\circ f)$ donc $g(f(x))=0$ donc $f(x)\in\ker(g)$ et comme $f(x)\in\mathrm{Im}(f)$, on a $f(x)\in\ker(g)\cap\mathrm{Im}(f)$ et par $(H)'$ on a $f(x)=0$, donc $x\in\ker(f)$. Réciproquement si $x\in\ker(f)$ alors $f(x)=0$ donc $g(f(x))=0$ donc $x\in\ker(g\circ f)$ et par suite on a $\ker(g\circ f)=\ker(f)$.
2. Nous allons démontrer deux implications :
   • Supposons que (H) $\mathrm{Im}(g\circ f)=\mathrm{Im}(g)$ alors si $x\in F$ on a $g(x)\in\mathrm{Im}(g)$ et par (H) on a $g(x)\in\mathrm{Im}(g\circ f)$, donc il existe $a\in E$ tel que $g(f(a))=g(x)$, ce qui veut dire $g(x-f(a))=0$, donc $b=x-f(a)\in\ker(g)$ et par suite $x=b+f(a)\in\ker(g)+\mathrm{Im}(f)$, donc $\ker(g)+\mathrm{Im}(f)=F$.
   • Réciproquement, supposons que $(H)'$ $\ker(g)+\mathrm{Im}(f)=F$. On sait que $\mathrm{Im}(g\circ f)=\mathrm{Im}(g)$. Par ailleurs si $x\in\mathrm{Im}(g)$ il existe $c\in F$ tel que $x=g(c)$. Par $(H)'$ il existe $b\in\ker(g)$ et $a\in E$ tel que $c=b+f(a)$, donc $x=g(c)=g(b)+g(f(a))=(g\circ f)(a)$ donc $x\in\mathrm{Im}(g\circ f)$.

EXERCICE 99 — Endomorphisme u tel que $u^3+u=0$

Titre : Endomorphisme u tel que $u^3+u=0$ — **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 118 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 104 | ID : 118

Soit $E=\mathbb{R}^3$ et on note θ l'endomorphisme nul de E et Id l'application identique de E, ce qui veut dire $\forall x\in E, \theta(x)=0$ et $\mathrm{Id}(x)=x$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on note $u^n=\underbrace{u\circ\cdots\circ u}_{n\text{ fois}}$. Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E tel que $u\neq\theta$ et $u^3+u=\theta$. On se propose de démontrer qu'il existe une base $\mathscr{V}=(v_1,v_2,v_3)$ de E tel que la matrice de u relativement à $\mathscr{V}$ est $A=\mathrm{mat}_{\mathscr{V}}(u)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\ker(u)\oplus\ker(u^2+1)=E$
2. Prouver que u et $u^2+\mathrm{Id}$ ne sont pas inversibles.
3. En déduire l'existence de $v_1,v_2\in E$ tel que $v_1\neq0$ et $v_2\neq0$ et $u(v_1)=0$ et $u^2(v_2)=-v_2$.
4. Démontrer que $\mathrm{Im}(u)\subset\ker(u^2+\mathrm{Id})$ et en déduire que si on pose $v_3=u(v_2)$ alors $u(v_3)=-v_3$.
5. Démontrer que (v_2,v_3) est une famille libre.
6. En déduire que $\mathscr{V}=(v_1,v_2,v_3)$ est une base de E et que $\mathrm{mat}_{\mathscr{V}}(u)=A$ où A est la matrice indiquée ci-dessus.

Solution

1. • Soit $x\in\ker(u)\cap\ker(u^2+\mathrm{Id})$ alors $u(x)=0$ et $u^2(x)=-x$, donc $x=-u(u(x))=0$.
   • Soit $x\in E$, on a $x=(u^2(x)+x)+(-u^2(x))$ Posons $x_1=x+u^2(x)$ et $x_2=-u^2(x)$, alors $u(x_1)=u\circ(u^2+\mathrm{Id})(x)=(u^3+u)(x)=0$ puisque $u^3+u=\theta$. Par ailleurs $(u^2+\mathrm{Id})(x_2)=-(u^2+\mathrm{Id})\circ u^2(x)=-(u^4+u^2)(x)=-[u\circ(u^3+u)](x)=0$ puisque $u^3+u=\theta$, donc $x_1\in\ker u$ et $x_2\in\ker(u^2+\mathrm{Id})$ et $x=x_1+x_2$.
   • Il découle de ce qui précéde que $\ker(u)\oplus\ker(u^2+\mathrm{Id})=E$.
2. • Si on suppose que u est inversible alors de $u^3+u=\theta$, on obtient $u^{-1}\circ(u^3+u)=\theta$, donc $u^2+\mathrm{Id}=\theta$ et par suite $u^2=-\mathrm{Id}$, donc $\det(u^2)=(-1)^3=-1$, ce qui est absurde car $\det(u^2)=(\det(u))^2\geq0$.
   • de même si on suppose que $u^2+\mathrm{Id}$ est inversible alors en composant par son inverse dans

la relation $u^3+u=u\circ(u^2+\mathrm{Id})=\theta$, on obtient $u=\theta$, ce qui est absurde car on a supposé $u\neq\theta$. Il en découle que u et $u^2+\mathrm{Id}$ ne sont pas inversibles.

3. Il déécoule de la question précédente que $\ker(u)\neq\{0\}$ et $\ker(u^2+\mathrm{Id})\neq\{0\}$, donc $\exists v_1,v_2\in E\backslash\{0\}$, $\begin{cases} v_1\in\ker u \\ v_2\in\ker(u^2+\mathrm{Id}) \end{cases}$, donc $u(v_1)\neq 0$ et $u^2(v_2)\neq -v_2$.

4. Comme $u^3+u=\theta$, on a $(u^2+\mathrm{Id})\circ u=\theta$, donc pour tout $x\in\mathrm{Im}(u)$, il existe $a\in E$ tel que $x=u(a)$ de sorte que $(u^2+\mathrm{Id})(x)=(u^2+\mathrm{Id})\circ u(a)=0$, donc $x\in\ker(u^2+\mathrm{Id})$.
• Déduction, comme $v_3=u(v_2)$, on a $v_3\in\mathrm{Im}(u)$, donc par la question précédente $v_3\in\ker(u^2+\mathrm{Id})$, donc $u^2(v_3)=-v_3$.

5. Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tel que $\alpha v_2+\beta v_3=0$, alors $\alpha v_2+\beta u(v_2)=0$ et en appliquant u, on a $\alpha u(v_2)+\beta u^2(v_2)=0$ et comme $u^2(v_2)=-v_2$, il vient $\alpha u(v_2)-\beta v_2=0$, donc on a $\begin{cases} \alpha v_2+\beta u(v_2)=0 \quad (1) \\ \alpha u(v_2)-\beta v_2=0 \quad (2) \end{cases}$ en effectuant $\alpha\times(1)-\beta\times(2)$, il vient $(\alpha^2+\beta^2)v_2=0$, donc $\alpha^2+\beta^2=0$ et finalement $\alpha=\beta=0$. D'où la liberté de (v_2,v_3).

6. On a d'après la première question $\ker(u)\oplus\ker(u^2+\mathrm{Id})=E$ et comme (v_1) et (v_2,v_3) sont deux familles libres respectives de $\ker(u)$ et $\ker(u^2+\mathrm{d})$, il en découle que $\mathscr{V}=(v_1,v_2,v_3)$ est une famille libre de E, et puisque $\dim(E)=3$, la famille $\mathscr{V}$ est une base de E. Comme $u(v_1)=0$ et $u(v_2)=-v_2$ et $u(v_3)=-v_3$, on a :$A=\mathrm{mat}_{\mathscr{V}}(u)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 100 Union de sous-espaces vectoriels

Titre : Union de sous-espaces vectoriels
ID : 119 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 105 | ID : 119
Difficulté : ★★★☆☆

Soit $\mathbb{K}$ un corps infini et E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Démontrer que pour toute entier naturel m tel que $m\geq 2$, si $F_1,\ldots,F_m$ sont des sous-espaces vectriels de E tel que $\bigcup_{k=1}^{m}F_k=E$ alors il existe $i\in[\![1,m]\!]$ tel que $F_i=E$.

Solution

On donnera deux méthodes, la deuxième étant valable seulement si E est de dimension finie.

Première méthode :
Par récurrence sur m.
• Pour $m=2$, si F_1 et F_2 sont deux sev de E tel que $F_1\cup F_2=E$, si on suppose que $F_1\neq E$,il existe $x_0\in E$ tel que $x_0\notin F_1$, forcément $x_0\in F_2$. Soit $x\in E$; si $(\star)$ $x\notin F_2$ alors $x\in F_1$. Comme $E=F_1\cup F_2$, le vecteur $x+x_0$ appartient à F_1 ou F_2. Si $x+x_0\in F_1$, comme $x\in F_1$, on aurait $x_0\in F_1$, chose fausse, donc forcément $x+x_0\in F_2$, et comme $x_0\in F_2$, ce la donne $x\in F_2$, en contradiction avec $(\star)$. Il en découle que $(\star)$ est fausse, donc $x\in F_2$. Donc $E=F_2$.
• Soit $m\in\mathbb{N}$ tel que $m\geq 2$ et $\mathscr{P}(m)$ est vraie et considérons des sev $F_1,\ldots,F_{m+1}$ de E tel que $\bigcup_{k=1}^{m+1}F_k=E$. Posons $F=\bigcup_{k=1}^{m}F_k$. Supposons que $F\neq E$ et $F_{m+1}\neq E$, donc il existe $x,y\in E$ tel que $\begin{cases} (\star\star)\ x\notin F \\ (\star\star)'\ y\notin F_{m+1} \end{cases}$. Forcément $y\in F_j$ pour un certain $j\in[\![1,m]\!]$ et $x\in F_{m+1}$. Pour tout $t\in K$, posons $x_t=y+tx$. Comme $\mathbb{K}$ est in fini, il existe $t,t'\in\mathbb{K}$ tel que $t\neq t'$ et $x_t,x_{t'}\in F_i$ pour un certain $i\in[\![1,m+1]\!]$, donc $y+tx\in F_i$ et $y+t'x\in F_i$, donc $x\in F_i$, donc $i=m+1$ et par suite $y+tx\in F_{m+1}$ et comme $x\in F_{m+1}$, on a forcément $y\in F_{m+1}$, ce qui est en contradiction avec $(\star\star)'$ ci-dessus.
• Il découle de ce qui précède que $F=E$ ou $E=F_{m+1}$. Si $E=F_{m+1}$, c'est terminé, sinon, on a $E=F$

et par hypothèse de récurrence il existe un indice $k \in [\![1, m]\!]$ tel que $F_k = E$, ce qui termine la preuve.

Deuxième méthode(Valable si E est de dimension finie seulement)
Si E est nul, le problème est trivial. On va supposer que E est de dimension finie non nulle.
Notons $n = \dim(E)$ et soit $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et pour tout $t \in \mathbb{K}$, posons $x_t = \sum_{k=1}^{n} t^{k-1} e_k$.
Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, notons

$$\mathbb{K}_i = \{t \in \mathbb{K} / x_t \in F_i\}$$

Comme $\mathbb{K}$ est infini, il existe $j \in [\![1, m]\!]$ tel que $\mathbb{K}_j$ est infini , par suite il existe des scalaires deux à deux distincts $t_1, \dots, t_n$ tel que $x_{t_k} \in F_j$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Or

$$\det_{\mathscr{E}}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = V(t_1, \dots, t_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (t_j - t_i)$$

C'est un determinant de Vandermonde.
Il en découle la famille $(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$ est libre, donc $\dim(F_j) \ge n$; or $\dim(F_j) \le n$ car $F_j \subset E$, donc $F_j = E$.

EXERCICE 101 Bases d'un sous-espace de dimension finie de $\mathbb{K}[X]$.

Titre : Bases d'un sous-espace de dimension finie de $\mathbb{K}[X]$.
ID : 120 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 106 | ID : 120
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\dim(E) = n$. Démontrer qu'il existe deux bases $\mathscr{P} = (P_1, \dots, P_n)$ et $\mathscr{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$ de E tel que :

1. Les polynômes $Q_1, \dots, Q_n$ ont des degrés deux à deux distincts.
2. Les polynômes $P_1, \dots, P_n$ ont le même degré.

Solution

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \ge 2$, on note $\mathscr{P}(n)$ la propriété : Pour tout sous-espace vectoriel E de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\dim(E) = n$, on a E admet une base $(Q_1, \dots, Q_n)$ tel que $\deg(Q_1) < \cdots < \deg(Q_n)$. On va raisonner par récurrence pour démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \ge 2 \Rightarrow \mathscr{P}(n)$.
   • Si $n = 2$, soit (P_1, P_2) une base de E. Quitte à permuter P_1 et P_2, on peut toujours se ramener au cas $\deg(P_1) \le \deg(P_2)$. si $\deg(P_1) \ne \deg(P_2)$ alors $Q_1 = P_1$ et $Q_2 = P_2$ convient, sinon on prend P_1 et P_2 unitaires et $Q_1 = P_1 - P_2$ et $Q_2 = P_2$.
   • Soit n un entier naturel tel que $n \ge 2$ et $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de dimension $n+1$ et P_1 un polynôme de E de degré minimal. On complète en une base $(P_1, P_2, \dots, P_{n+1})$ de E. Par hypothèse de récurrence il existe $Q_2, \dots, Q_{n+1} \in E$ tel que $(Q_2, \dots, Q_{n+1})$ est une base de $F = \text{Vect}(P_2, \dots, P_{n+1})$ et $\deg(Q_2) < \cdots < \deg(Q_{n+1})$. La famille $(P_1, Q_2, \dots, Q_{n+1})$ est une base de E et $\deg(P_1) \le \deg(Q_2) < \cdots < \deg(Q_{n+1})$. Si $\deg(P_1) < \deg(Q_2)$ on prend $Q_1 = P_1$ et si $\deg(P_1) = \deg(Q_2)$ on peut imposer P_1 et Q_2 unitaires et soit $Q_1 = P_1 - Q_2$ alors $\deg(Q_1) < \deg(Q_2) < \cdots < \deg(Q_{n+1})$ et $(Q_1, \dots, Q_{n+1})$ est une base de E.
2. On utilise la question précédente : E admet une base $\mathscr{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$ tel que $\deg(Q_1) < \cdots < \deg(Q_n)$. On normalise les polynômes en divisant par leur coefficients dominants respectifs et soit $(P_1, \dots, P_n)$ tel que $P_n = Q_n$ et $P_k = Q_n + Q_k$ poour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ alors $\deg(P_k) = \deg(P_n)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et la famille $\mathscr{P} = (P_1, \dots, P_n)$ est une base de E car sa

matrice relativement à $\mathscr{Q}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et comme $\det(M) = 1$, la famille $\mathscr{P}$ est une base de E.

EXERCICE 102 Sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$ stables par dérivation

Titre : Sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$ stables par dérivation
ID : 121 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 107 | ID : 121
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $D : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], P \mapsto P'$. On dit qu'un sous-espace vectoriel Fde $\mathbb{K}[X]$ est stable par D si et seulement si $D(F) \subset F$. Démontrer que les seuls sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$ stables par D sont $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution

Il est claire que $\{0\}$ et $\mathbb{K}[X]$ sont stables par D. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ stable par D tel que $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$. Soit $I = \{\deg(P)/P \in F\}$, alors I est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Si I n'est pas majorée alors pour tout entier naturel n il existe au moins $m \in \mathbb{I}$ tel que $m > n$. Puisque $m \in I$, il exite un polynôme P tel que $P \in F$ et $deg(P) = m$. La famille $(P^{(m-k)})_{0\leq k\leq m}$ est une famille echelonnée de polynômes donc une base de $\mathbb{K}_m[X]$, par stabuilité on a alors $\mathbb{K}_n[X] \subset F$, donc $F = \mathbb{K}[X]$, chose fausse, donc I est majorée, si on noté $m = \max(I)$ on a prouvé ci-dessus que $\mathbb{K}_m[X] \subset F$, par définition de m on a aussi $F \subset \mathbb{K}_m[X]$, donc $F = \mathbb{K}_m[X]$.

EXERCICE 103 Matrices de taille 2 et similitude

Titre : Matrices de taille 2 et similitude
ID : 122 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 108 | ID : 122
Difficulté : ★★★☆☆

1. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que , pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \operatorname{Id}_E$ (Cela veut dire que u est une homothétie vectorielle.)
2. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ un matrice non scalaire(c'est-à-dire $\forall \lambda \in \mathbb{K}, A \neq \lambda I_2$). Démontrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ 1 & \tau \end{pmatrix}$, où $\tau = \operatorname{tr}(A)$ et $\delta = \det(A)$.
   (b) Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier rapidment que A_1 et A_2 sont semblables puis donner une matrice $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $A_2 = P^{-1}A_1P$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $(n \geq 2)$ tel que $\operatorname{tr}(A) = 0$. démontrer que A est semblable à une matrice A' dont tous les termes diagonaux sont nuls.
4. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall v \in \mathcal{L}(E), \quad u \circ v = v \circ u$$

Démontrer que u est une homothétie vectorielle.

Solution

1. Si $E=\{0\}$, le seule endomorphisme de E est l'endomorphisme nul θ, on a $\theta = 0\,\mathrm{Id}_E$. Sinon pour tout $x \in E^*$ la famille $(x, u(x))$ est liée et $x \neq 0$, donc il existe λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$. Si $x, y \in E^*$ deux cas sont possibles :
• Premier cas : (x, y) est libre. On a $u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = u(x) + u(y)$, donc $\lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y$ et par liberté on a $\lambda_x = \lambda_y = \lambda x + y$.
• Si (x, y) est liée, il existe $\beta \in \mathbb{K}^*$ tel que $y = \beta x$, donc $u(y) = \beta u(x)$ ce qui donne $\lambda_y y = \beta\lambda_x x$ donc, compte tenu de $y = \beta x$, on a $\lambda_y \beta x = \beta\lambda_x x$ et comme $\beta \neq 0$ et $x \neq 0$, on a $\lambda_x = \lambda_y$.
• Il découle de ce qui précéde qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E^*$ et comme c'est vrai pour $x = 0$, c'est vria pour tout $x \in E$, donc $u = \lambda\,\mathrm{Id}_E$.

2. (a) L'endomorphisme u canoniquement associé à A, n'est pas une homothétie, donc par contraposée du résultat de la question 1), il existe au moins un vecteur $e \in E$ tel que la famille $(e, u(e))$ est libre dans E. Notons $\mathscr{E} = (e_1, e_2)$ avec $e_1 = e$ et $e_2 = u(e)$, alors la matrice relativement à $\mathscr{E}$ de u est de la forme $A' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$, ce qui donne $\mathrm{tr}(A') = \mathrm{tr}(A) = \beta$ et $\det(A') = \det(A) = -\alpha$, donc $A' = \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ 1 & -\delta \end{pmatrix}$ où $\tau = \mathrm{tr}(A)$ et $\delta = \det(A)$.

   (b) Les matrices A_1 et A_2 ne sont pas scalaires donc d'aprés la question précédente et compte tenu de $\mathrm{tr}(A_1) = \mathrm{tr}(A_2) = 3$ et $\det(A_1) = \det(A_2) = -2$, les deux matrices sont sembables à la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, et par transitivité de la similitude des matrices carrées on a A_1 et A_2 sont sembalables. On va chercher la matrice P tel que $A_2 = P^{-1}A_1P$.
   • Pour tout $k \in \{1, 2\}$, notons u_k l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A_k. Notons $\mathscr{E} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{K}^2$. On a donc :

$$\forall k \in \{1, 2\}, \quad A_k = \mathrm{mat}_{\mathscr{E}}(u_k).$$

   Soit $\mathscr{V} = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = e_1$ et $v_2 = u_1(e_1) = e_1 + 2e_2$, alors $\det_{\mathscr{E}}(\mathscr{V}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, donc $\mathscr{V}$ est une base de $\mathbb{K}^2$. De la même manière si $\mathscr{W} = (w_1, w_2)$ avec $w_1 = e_1$ et $w_2 = u_2(e_1) = 3e_1 + e_2$, on a $\det_{\mathscr{E}}(\mathscr{W}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, donc $\mathscr{W}$ est aussi une base de $\mathbb{K}^2$. Les matrices de passages de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{V}$ d'une part et de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{W}$ d'autre part sont : $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, en vertu de ce qu'on a fait dans la question 2)a), on a $M = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ 1 & \tau \end{pmatrix}$ où $\tau = \mathrm{tr}(A_1) = \mathrm{tr}(A_2)$ et $\delta = \det(A_1) = \det(A_2)$ vérifie $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $M = \mathrm{mat}_{\mathscr{V}}(u_1) = \mathrm{mat}_{\mathscr{W}}(u_2)$, par suite on a :

$$M = P_1^{-1}A_1P_1 = P_2^{-1}A_2P_2,$$

   ce qui fournit :

$$A_2 = P_2P_1^{-1}A_1P_1P_2^{-1} = P^{-1}A_1P$$

   où $P = P_1P_2^{-1}$, le clacul donne

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   A titre de vérification, on a $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et le calcul donne :

$$P^{-1}A_1P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_2$$

3. Cette question n'est pas évidente et peut constituer à elle seule en un exercice. Si la matrice A est scalaire, le résultat demandé est immédiat cat si $A = \lambda I_n$, alors $\text{tr}(A) = n\lambda$ alors $n\lambda = 0$ donc $\lambda = 0$ et $A = 0$ donc A elle même est à diagonale nulle. Si A n'est pas scalaire on va raisonner par récurrence sur la taille n de A. Si $n = 2$, et on note u l'endomorphisme canoniquement associé à A, d'après la question 2)a), la matrice A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ puisque $0 = \text{tr}(A)$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et pour toute matrice A de taille n de trace nulle A est semblable à une matrice à diagonale nulle. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Si u est une homothétie on a déjà traité ce cas. Si u n'est pas une homothétie, il existe $V_1, V_2 \in \mathbb{K}^n$ tel que (V_1, V_2) est libre et $V_2 = u(V_1)$. Puisque $n \geq 2$ on a $n+1 \geq 3$ et on peut compléter (V_1, V_2) en une base $\mathscr{V} = (V_1, V_1, \ldots, V_{n+1})$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ et on voit que la matrice M qui représente u dans $\mathscr{V}$ est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & M_1 \end{pmatrix}$ avec $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $L = (\ell_2 \ldots \ell_{n+1}) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $M_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\text{tr}(M) = 0 + \text{tr}(M_1)$, et comme par hypothèse $\text{tr}(M) = 0$, on q $\text{tr}(M_1) = 0$. Comme la taille de M_1 est n, l'hypothèse de récurrence permet de dire que M_1 est semblable à une matrice M_1' à diagnale nulle. Donc il existe $Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $M_1 = QM_1'Q^{-1}$. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ alors $P \in \mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$. Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & L \\ Q^{-1}C & Q^{-1}M_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & LQ \\ Q^{-1}C & Q^{-1}M_1Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L' \\ C' & M_1' \end{pmatrix} = M' \end{aligned}$$

On sait que M_1' est à daigonale nulle donc il en est de même de M' et on a $M' = P^{-1}MP$, donc M et M' sont sembalbles, ce qui termine la démonstration.

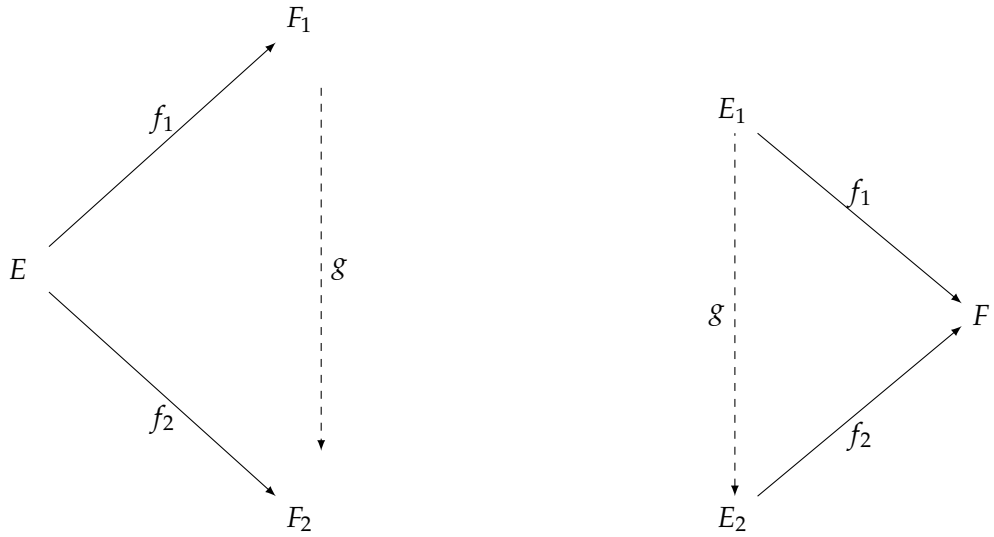
4. On va démontrer que pour tout vecteur x de E la famille $(x, u(x))$ est liée et on utilisera la question 1) pour conclure. Si $x = 0$, c'est clair, sinon, soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$ et soit F un supplémentaire de la droite vectorielle $\mathbb{K}x$ dans E et v la projection de E sur $\mathbb{K}x$ parallélement à F. On a $u \circ v = v \circ u$, donc $v(u(x)) = u(v(x)) = u(x)$, donc $u(x) \in \text{Im}(v) = \mathbb{K}x$, donc $(x, u(x))$ est liée. Par la question 1), u est une homothétie vectorielle c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \,\text{Id}_E$.

EXERCICE 104 — Factorisation des applications linéaires

Titre : Factorisation des applications linéaires
ID : 123 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 109 | ID : 123
Difficulté : ★★★☆☆

1. Soient E, F_1, F_2 des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et on considère $f_1 \in \mathcal{L}(E, F_1)$, $f_2 \in \mathcal{L}(E, F_2)$ des applications linéaires. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (1) $\ker f_1 \subset \ker f_2$
   (2) $\exists g \in \mathcal{L}(F_1, F_2), \quad f_2 = g \circ f_1$

2. On considère des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels E_1, E_2, F et des applications linéaires $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (1) $\mathrm{Im}(f_1) \subset \mathrm{Im}(f_2)$.
   (2) $\exists g \in \mathcal{L}(E_1, E_2) \quad f_1 = f_2 \circ g$.



3. Soient E, F des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels.
   (a) On considère des applications linéaires $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer que pour toute application linéaires $g \in \mathcal{L}(E, F)$, les assertions suivantes sont équivalentes :
      (1) $\ker(f_1) \cap \ker(f_2) \subset \ker(g)$.
      (2) $\exists a, b \in \mathcal{L}(F), g = a \circ f_1 + b \circ f_2$.
   (b) On considère des applications linéaires $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer que pour toute application linéaire $g \in \mathcal{L}(E, F)$, les assertions suivantes sont équivalentes :
      (1) $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f_1) + \mathrm{Im}(f_2)$.
      (2) $\exists a, b \in \mathcal{L}(E), g = f_1 \circ a + f_2 \circ b$.

Solution

1. On va prouvr deux implications :
   • $(2) \Rightarrow (1)$, supposnsons qu'il existe $g \in \mathcal{L}(F_1, F_2)$ tel que $f_2 = g \circ f_1$ pour tout $x \in \ker(f_1)$, on a $f_1(x) = 0$, donc $f_2(x) = g(f_1(x)) = g(0) = 0$, donc $x \in \ker(f_2)$, donc $\ker(f_1) \subset \ker(f_2)$.
   • $(1) \Rightarrow (2)$, supposons que $\ker(f_1) \subset \ker(f_2)$. Soit $x \in F_1$. SI $x \in \mathrm{Im}(f_1)$ alors il existe $a \in F_1$ tel que $f_1(a) = x$, on va poser $g(x) = f_2(a)$, c'est pourvu de sens car si $a_1, a_2 \in E$ tel que $f(a_1) = f(a_2) = x$ alors $f(a_1 - a_2) = 0$, donc $a_1 - a_2 \in \ker(f_1)$ et comme $\ker(f_1) \subset \ker(f_2)$, on a $a_1 - a_2 \in \ker(f_2)$, donc $f_2(a_1) = f_2(a_2)$. Finalement si F_1' est un supplémentaire de $\mathrm{Im}(f_1)$ dans F_1, on pose pour tout $x \in F_1'$, $g(x) = 0$. Ainsi $F_1 = F_1 \oplus \mathrm{Im}(f_1)$ et g est définie comme suit pour tout $x \in F_1$ tel que $x = a + a'$ avec $a \in \mathrm{Im}(f_1)$ et $a' \in F_1'$, on pose $g(x) = f_2(a)$, alors $g \in \mathcal{L}(F_1, F_2)$ et on a bien $f_2 = g \circ f_1$.
2. On va démontrer deux implications :
   • $(2) \Rightarrow (1)$, supposons qu'ilexiste $g \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ tel que $f_1 = f_2 \circ g$, alors $\mathrm{Im}(f_1) = f_1(E_1) = f_2(g(E_1)) \subset f_2(E_2) = \mathrm{Im}(f_2)$.
   • $(1) \Rightarrow (2)$, supposons que $\mathrm{Im}(f_1) \subset \mathrm{Im}(f_2)$, Soit $\tilde{E_2}$ un supplémentaire de $\ker(f_2)$ dans E_2, on sait alors que f_2 induit un isomorphisme $\tilde{f_2} : \tilde{E_2} \to \mathrm{Im}(f_2); x \mapsto f_2(x)$, si $x \in E_1$ alors $f_1(x) \in \mathrm{Im}(f_1)$, donc $x \in \mathrm{Im}(f_2)$, donc il existe un et un seul $a \in \tilde{E_2}$ tel que $f_2(a) = x$, on pose alors $a = g(x)$, on démontre que $g : E_1 \to E_2, x \mapsto a_x$ est un endomorpphisme et on voit clairment que $f_1 = f_2 \circ g$.
3. (a) On va traiter deux implications :
   • Le premier sens est aisé, si $\exists a, b \in \mathcal{L}(F)$ tel que $g = a \circ f_1 + b \circ f_2$ alors pour tout

$x \in \ker(f_1) \cap \ker(f_2)$, on a $g(x) = a(f_1(x)) + b(f_2(x)) = 0$. Il en découle que $\ker(f_1) \cap \ker(f_2) \subset \ker(g)$

• Réciproquement si $\ker(f_1) \cap \ker(f_2) \subset \ker(g)$, considérons l'application :

$$f : E \to F^2; x \mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

On a $\ker(f) = \ker(f_1) \cap \ker(f_2)$, donc $\ker(f) \subset \ker(g)$. D'après le résultat de la question 1) il existe une application linéaire $h \in \mathcal{L}(F^2, F)$ tel que $h \circ f = g$. Pour tout $x \in F$, posons $a(x) = h(x, 0)$ et $b(x) = h(0, x)$. Alors pour tout $x \in E$, on a : $g(x) = h(f(x)) = h(f_1(x), f_2(x)) = h(f_1(x), 0) + h(0, f_2(x))$, donc $g(x) = a(f_1(x)) + b(f_2(x)) = ((a \circ f_1) + (b \circ f_2))(x)$ On a donc prouvé l'existence de $a, b \in \mathcal{L}(F)$ tel que $g = a \circ f_1 + b \circ f_2$.

(b) On va démontrer deux implications :

• Supposons qu'il existe $a, b \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g = f_1 \circ a + f_2 \circ b$. Si $x \in \mathrm{Im}(g)$ alors il existe $x' \in E$ tel que $x = g(a)$, donc $x = f_1(a(x')) + f_2(b(x'))$ et alors $x \in \mathrm{Im}(f_1) + \mathrm{Im}(f_2)$, donc $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f_1) + \mathrm{Im}(f_2)$

• Réciproquement si $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f_1) + \mathrm{Im}(f_2)$, alors en posant $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$ pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}(f_1) + \mathrm{Im}(f_2)$, donc $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}\, f$, donc il existe $h : E \to E^2$ tel que $w = f \circ h$. En posant $h(x) = (a(x), b(x))$, on a $g(x) = f(h(x)) = f(a(x), b(x)) = f_1(a(x)) + f_2(b(x))$, donc $g = f_1 \circ a + f_2 \circ b$.

EXERCICE 105 Determinant de Vandermonde et applications

Titre : Determinant de Vandermonde et applications
ID : 124 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 110 | ID : 124
Difficulté : ★★★☆☆

1. Pour tout $a = (a_0, \ldots, a_{n-1})$, on note :

$$V(a) = V(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & \ldots & a_0^{n-1} \\ 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \ldots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Démontrer que $V(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \prod_{0 \le i < j \le n-1} (a_j - a_i)$.

2. APPLICATION : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \ge 2$ et $F_1, \ldots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E tel que $m \ge 2$ et $\bigcup_{k=1}^{m} F_k = E$. Démontrer qu'il existe $j \in [\![1, m]\!]$ tel que $F_j = E$.
Indication : On pourra considérer une base $\mathscr{E} = (e_0, \ldots, e_{n-1})$ de E et l'application

$$f : \mathbb{K} \to E; t \mapsto f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k e_k.$$

3. Prouver que le résultat du 2) reste vrai si on ne suppose plus E de dimension finie.

Solution

1. Classqiuement, on dispose d'une démonstration par récurrence.

• **Démarrage :** Pour $n = 2$, on a $V(a_0, a_1) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 - a_0 = \prod_{0 \le i < j \le 1} (a_j - a_i)$.

• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \ge 2$ et la formule est vrrai pour tout $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. Soit $a = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Si les a_k ne sont pas deux à deux distincts alors $V(a) = 0$ car la matrice associée possède deux colonnes égales qui corresondent à celle de i et j tel que $i \neq j$

et $a_i = a_j$. Si les a_k sont deux à deux distincts alors on considère la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{K}, f(x) = V(a_0, \ldots, a_{n-1}, x)$ et on voit tout de suite que f est une fonction polynômile puisque si on developpe suivant la dernière ligne on obtient $f(x) = V(a_0, \ldots, a_{n-1})x^n + Q(x)$ avec Q un pollynôme de degré strictement inférieur à n, donc le degre du polynôme P associé à f est n et son coefficient dominant est $\text{cd}(P) = V(a_0, \ldots, a_{n-1})$. Par ailleurs pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a facilement $f(a_k) = 0$ car la colonne k et la colonne n dans ce déterminent sont égales, donc $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sont des racines de P et comme elles sont en nombre n et sont distinctes, forcément $P(X) = V(a_0, \ldots, a_{n-1}) \prod_{k=0}^{n-1} (X - a_k)$. En particulier, en vertu de l'hypothèse de récurrence, on a :

$$V(a_0, \ldots, a_n) = P(a_n) = \prod_{0<i<j\leq n-1} (a_j - a_i) \prod_{k=0}^{n-1} (a_n - a_k)$$

Il en découle que

$$V(a_0, \ldots, a_n) = P(a_n) = \prod_{0<i<j\leq n} (a_j - a_i)$$

ce qui termine la démonstration par récurrence.

2. Soit $\mathscr{E} = (e_0, \ldots, e_{n-1})$ une base de E et considérons l'application $f : \mathbb{K} \to E; t \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} t^k e_k$, autrement dit pour tout $t \in \mathbb{K}$, le vectur $f(t)$ est celui dont la colonne des coordonnées relativement à la base $\mathscr{E}$ est $X_t = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^{n-1} \end{pmatrix}$. Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, posons $X_i = \{t \in \mathbb{R} / f(t) \in F_i\}$ alors $\bigcup_{i=1}^{m} X_i = \mathbb{K}$ car si t est un nombre réel, le vecteur $f(t)$ appartient à E, et comme $E = \bigcup_{k=1}^{m} F_k$, il existe $k \in [\![1, m]\!]$ tel que $f(t) \in F_k$, donc $t \in X_k$. Si les X_k étaient tous finis, on aurait leur union finie, ce qui n'est pas le cas car $\mathbb{K}$ est infini. Ainsi il existe $j \in [\![1, m]\!]$ tel que X_j est infini, en particulier, il existe des réels $t_0, \ldots, t_{n-1}$ deux à deux distincts tel que $\forall k \in [\![0, n-1]\!], t_k \in X_j$. Il en découle que la famille $\mathscr{E}' = (f(t_0), \ldots, f(t_{n-1}))$ est une famille de n vecteurs de F_j. Remarquons que :

$$\det_{\mathscr{E}}(\mathscr{E}') = V(t_0, \ldots, t_{n-1}) = \prod_{0\leq p<q\leq n-1} (t_q - t_p),$$

donc non nul donc la famille $\mathscr{E}'$ est libre et comme elle a n vecteurs on $\dim(F_j) \geq n = \dim(E)$, donc $\dim(F_j) = \dim(E)$ et $F_j = E$.

3. Par récurrence sur m.
   • Démarrage : $m = 2$, soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tel que $F_1 \cup F_2 = E$. Si $F_1 \neq E$ et $F_2 \neq E$, il existe au moins deux vecteurs x_1, x_2 de E tel que $x_1 \in F_1$ et $x_1 \notin F_2$ et $x_2 \in F_2$ et $x_2 \notin F_1$. Soit $x = x_1 + x_2$, comme $F_1 \cup F_2 = E$ on a $x \in F_1$ ou $x \in F_2$. Si $x \in F_1$, comme $x_1 \in F_1$ on a $x - x_1 \in F_1$, donc $x_2 \in F_1$, c'est faux. De même si $x \in F_2$, on aboutit à une contradiction, donc $F_1 = E$ ou $F_2 = E$.
   • Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq 2$ et pour toute famille $(F_k)_{1\leq k\leq m}$ de sous-espaces vectoriels de E, si $\cup_{k=1}^{m} F_k = E$ alors $\exists j \in [\![1, m]\!], F_j = E$. Soit alors $F_1, \ldots, F_{m+1}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E tel que $\cup_{k=1}^{m+1} F_k = E$. Posons $F = \cup_{k=1}^{m} F_k$. Si $F = E$, l'hypothèse de réurrence permet de dire qu'il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $F_k = E$. Si $F_{m+1} = E$, c'est aussi terminé, si $F \neq E$ et $F_{m+1} \neq E$, il existe $x, y \in E$ tel que $x \notin F$ et $y \notin F_{m+1}$. Il en découle que $x \in F_{m+1}$ et il existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $y \in F_j$. Pour tout entier naturel i on a $w_i = ix + y \in E$, donc par la principe de tiroirs il existe $p \in \{1, \ldots, m+1\}$ et deux entiers naturels s, t tel que $\begin{cases} w_s = sx + y \in F_p \\ w_t = tx + y \in F_p \end{cases}$, par suite $w_s - w_t = (s-t)x \in F_p$, donc comme $s \neq t$, on a $y \in F_p$, donc forcément $p = m + 1$ et on a par suite $sx + y \in F_{m+1}$ et comme $x \in F_{m+1}$, on a $y \in F_{m+1}$, chose fausse. Donc l'hypothèse $F \neq E$ et $F_{m+1} \neq E$ est à rejeter donc il existe $j \in \{1, \ldots, m+1\}$ tel que $F_j = E$, ce qui termine la démonstration par récurrence.

EXERCICE 106 Etudes des hyperplans et formes linéaires

Titre : Etudes des hyperplans et formes linéaires
ID : 125 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 111 | ID : 125
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel. On appelle hyperplan de E, un sous-espace vectoriel H de E de codimension 1, c'est-à-dire tel qu'il existe $a \in E$ tel que $a \neq 0$ et $H \oplus \mathbb{K}a = E$. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E vers $\mathbb{K}$. On note $E^\star = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, appelé le dual algébrique de E.

1. Soit H un hyperplan de E. Démontrer que :
$$\forall b \in E, \quad H \oplus \mathbb{K}b = E \Leftrightarrow b \notin H.$$
2. Soit H un hyperplan de E. Démontrer que pour tout sous-espace vectoriel H' de E on a :
$$H \subset H' \Rightarrow H' = H \quad \text{ou} \quad H' = E.$$
3. Soit H un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que H est un hyperplan de E si et seulement si il existe une forme linéaire non nulle φ sur E tel que $H = \ker \phi$.
4. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Démontrer que si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles de E alors :
$$\ker \varphi = \ker \psi \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K}^*, \quad \psi = \alpha\varphi$$

Solution

1. Soit $b \in E$.
   • Supposns que $b \notin H$. Comme H est un hyperplan de E, il existe $a \in E$ tel que $a \neq 0$ et $H \oplus \mathbb{K}a = E$ donc b s'écrit de façon unique $b = \lambda a + h$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $h \in H$. Si $\lambda = 0$ on aurait $b = h$ et b serait un vecteur de H, ce qui n'est pas le cas donc $\lambda \neq 0$ et par suite $a = \frac{1}{\lambda}(b - h)$. Si $x \in E$, il existe un unique $h_1 \in H$ et $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ tel que $x = h_1 + \lambda_1 a = h_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda}(b - h) = \left(h_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda}h\right) + \frac{\lambda_1}{\lambda}b = h_2 + \lambda_2 b$ avec $h_2 = h_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda}h \in H$ et $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda} \in \mathbb{K}$, donc $E = H + \mathbb{K}b$, par ailleurs si $x \in H \cap \mathbb{K}b$, il existe $h_3 \in H$ et $\lambda_3 \in \mathbb{K}$ tel que $x = h_3 = \lambda_3 b$. Si $\lambda_3 \neq 0$ on aurait $b = \frac{1}{\lambda_2}h$ et b serait dans H, ce qui n'est pas le cas, donc $\lambda_3 = 0$ et $x = 0$ donc $\mathbb{K}b \cap H = \{0\}$ et finalement $H \oplus \mathbb{K}b = E$.
   • Réciproquement si $E = H \oplus \mathbb{K}b$ alors si $b \in H$, on aurait $E \subset H$, mais H est u hyperplan donc $H \neq E$ car il exite $a \in E$ tel que $a \neq 0$ et $H \oplus \mathbb{K}a = E$, en particulier $a \notin H$ car sinon on aurait $a = 0$, donc $b \notin H$
2. Supposons que $H \subset H'$. Il existe $a \in E$ tel que $a \neq 0$ et $H \oplus \mathbb{K}a = E$. Si $a \in H'$ alors $E \subset H'$ donc $H' = E$. Si $a \notin H'$ alors $H' \neq E$. Si $H' \neq H$, il existe $b \in H'$ tel que $b \notin H$. D'après la question 1), on a $H \oplus \mathbb{K}b = E$, et comme $b \in H'$ et $H \subset H'$ on a $E \subset H'$, chose fausse, donc $H = H'$.
3. On va démontrer deux implications :
   • Si H est un hyperplan de E, il existe $a \in E$ tel que $a \neq 0$ et $H \oplus \mathbb{K}a = E$. Pour tout $x \in E$ il existe un et unseule $(\lambda_x, h_x) \in \mathbb{K} \times H$ tel que $x = \lambda_x a + h_x$. Notons $\varphi(x) = \lambda_x$ alors φ est bien une pplication de E vers $\mathbb{K}$. On va démontrer que φ est linéaire : Soit $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a $x = \varphi(x)a + h_x$ et $y = \varphi(y)a + h_y$ avec $h_x, h_y \in H$ donc $x + \alpha y = (\varphi(x) + \lambda\varphi(y)) + (h_x + \lambda h_y)$. Par unicité on a $\varphi(x + \alpha y) = \varphi(x) + \alpha\varphi(y)$. Donc φ est linéaire ; c'est donc une forme linéaire, elle est non nulle car $\varphi(a) = 1$. Soit $x \in E$ alors $x \in \ker(\varphi)$ si et seuleùe,y si $x = h_x$ avec $h_x \in H$, si et seulement si $x \in H$, donc $\ker(\varphi) = H$.
   • Réciproquement si φ est une forme linéaire non nulle et $H = \ker(\varphi)$ alors comme φ est non nulle on a $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{K}$ don φ est surjective, donc il existe $a \in E$ tel que $\varphi(a) = 1$. Forcément $a \neq 0$ et on va prouver que $H \oplus \mathbb{K}a = E$. Soit $x \in E$, alors $\varphi(x) = \varphi(\varphi(x).a)$ donc $\varphi(x - \varphi(x).a) = 0$ et par conséquent $x - \varphi(x).a \in \ker(\varphi) = H$,donc $h = x - \varphi(x).a \in\in H$, donc $x = \varphi(x).a + h \in \mathbb{K}a + H$. Ainsi $\mathbb{K}a + H = E$. Par ailleurs si $x \in H \cap \mathbb{K}a$, il existe $\beta \in \mathbb{K}$

et $h \in H$ tel que $x = h = \beta a$, si $\beta \neq 0$ on aurait $a = \frac{1}{\beta} h \in H$, ce qui n'est pas le cas donc $\beta = 0$ et $x = 0$ donc $H \cap \mathbb{K}a = \{0\}$ et finalement $E = H \oplus \mathbb{K}a$, donc H est un hyperplan.

4. Soient ϕ et ψ deux formes linéaires non nulles tel que $\ker(\phi) = \ker(\psi) = H$. Alors d'après la question précédente H est un hyperplan donc il existe $a \in E$ tel que $a \neq 0$ et $E = H \oplus \mathbb{K}a$. Soit $x \in E$ tel que $x = \lambda a + h$ avec $(\lambda, h) \in \mathbb{K} \times H$, donc $\phi(x) = \lambda\phi(a)$ et $\psi(x) = \lambda\psi(a)$ et comme $\phi(a) \neq 0$, on a $\psi(x) = \frac{\psi(a)}{\phi(a)}\phi(x)$ donc $\psi = k\phi$ où $k = \frac{\psi(a)}{\phi(a)} \in \mathbb{K}^*$. Réciproquement s'il existe $k \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = k\phi$; il est aisé de voir que $\ker(\phi) = \ker(\psi)$.

EXERCICE 107 Comatrice, étude de son rang selon les cas

Titre : Comatrice, étude de son rang selon les cas
ID : 126 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 112 | ID : 126
Difficulté : ★★★☆☆

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on rappelle que la comatrice de A est $A' = (a'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ tel que pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $a'_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ et $\Delta_{i,j} = \det(A_{i,j})$, avec $A_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue après suppression de la ligne i et la colonne j de A. On note $A' = \mathrm{Com}(A)$, la comatrice de A et $\widetilde{A} = {}^t(\mathrm{Com}(A))$, appelée matrice complémentaire de A.

1. Prouver que :
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \widetilde{A}A = A\widetilde{A} = \det(A) I_n.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on note $r = \mathrm{rg}\,(A)$. Démontrer que :
$$\mathrm{rg}\,(\widetilde{A}) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{Com}(A)) = \begin{cases} n & \text{si} \quad r = n \\ 1 & \text{si} \quad r = n-1 \\ 0 & \text{si} \quad r < n-1 \end{cases}$$

Solution

1. Soit $i, j \in [\![1, n]\!]^2$ alors $[\widetilde{A}A]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{k,j}\Delta_{k,i} = \det(A'')$ où A'' est la matrice qui a les mêmes colonnes que A sauf la colonne i qui est remplacée par la colonne j. Il en découle que si $i = j$ alors $A'' = A$ et si $i \neq j$ alors A'' n'est pas inversible car les colonnes i et j sont égales, donc $[\widetilde{A}A]_{i,j} = \begin{cases} \det(A) & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$ et alors $\widetilde{A}A = \det(A) I_n$. On fait la même preuve pour $A\widetilde{A} = \det(A) I_n$.

2. Si $r = n$ la question 1) montre que A est inversible d'inverse $\frac{1}{\det(A)}\widetilde{A}$, donc $\mathrm{rg}\,(\widetilde{A}) = n$. Si $\mathrm{rg}\,(A) \leq n-2$ tous les mineurs extraits de A sont nuls car ce sont des déterminants de matrices de taille $n-1$ extariates de A, donc $\widetilde{A} = 0$. Finalement si $\mathrm{rg}\,(A) = n-1$ alors A possède $n-1$ colonnes indépendantes et celle qui reste en est une combinaison linéaire. Puisque le rang ne dépend pas d'une éventuelle permutation des colonnes, on peut supposer que $C_1, \ldots, C_{n-1}$ sont linéairement indépendantes et que $C_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k C_k$. Tous les mineurs de la forme $\delta_{i,j}$ avec $1 \leq j \leq n-1$ sont nuls car ils ont une dernière colonne qui est cobinaison linéaire des autres donc $\mathrm{rg}\,(\widetilde{A}) \leq 1$, or au moins un mineur de la forme $\Delta_{i,n}$ est non nul car les colonnes $C_1, \ldots, C_{n-1}$ étant indépendantes la matrice qu'elles forment est de rang $n-1$ donc elle posséde $n-1$ lignes indépendantes lesquelles sont associées à un mineur non nul, donc $\mathrm{rg}\,(\widetilde{A}) = 1$.

EXERCICE 108 Expression des matrices de trace nulle

Titre : Expression des matrices de trace nulle
ID : 127 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 113 | ID : 127
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les termes diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts. On considère l'application :

$$\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); X \mapsto \phi(X) = \Delta X - X\Delta$$

Pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $[X, Y] = XY - YX$, appelé crochet de Lie. Ainsi $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \Phi(X) = [\Delta, X]$.

1. Vérifier que Φ est linéaire et déterminer $\ker \Phi$ et $\text{Im}\, \Phi$.
2. Démontrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \text{tr}([A, B]) = 0$.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\text{tr}(M) = 0$.
   (a) Démontrer que M est semblable à une matrice M' dont les termes diagonaux sont nuls.
   (b) En déduire qu'il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = [A, B]$.

Solution

1. Le linéarité de Φ, pour toutes matrices $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned} \Phi(M_1 + \lambda M_2) &= \Delta(M_1 + \lambda M_2) - (M_1 + \lambda M_2)\Delta \\ &= (\Delta M_1 - M_1\Delta) + \lambda(\Delta M_2 - M_2\Delta) \\ &= \Phi(M_1) + \lambda\Phi(M_2) \end{aligned}$$

• Noyau de Φ : Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

$$M \in \ker(\Phi) \iff \Phi(M) = 0 \iff \Delta M - M\Delta = 0.$$

Si on note $\Phi(M) = M' = (m'_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$, alors pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a $m'_{i,j} = [\Delta M - M\Delta]_{i,j} = (\lambda_i - \lambda_j)m_{i,j}$. Il en découle que si $i \Leftrightarrow j$ alors $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ et par suite on a $m'_{i,j} = 0 \iff m_{i,j} = 0$. Par ailleurs pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $(\lambda_i - \lambda_i)m_{i,i}$ indépendamment de la valeur du coefficient $m_{i,i}$. Il en découle que $\ker(\Phi)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, des matrices diagonales. En particulier on a $\dim(\ker(\Phi)) = n$.
• Image de Φ : Le théorème du rang permet de déduire que $\text{rg}\,(f) = n^2 - n$. Or pour toute matrice M on a $\forall i \in [\![1, n]\!], [f(M)]_{i,i} = 0$, donc le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}$ des matrices à diagonale nulle et inclus dans $\text{Im}(f)$ et comme $\dim(\mathcal{H}) = n^2 - n = \text{rg}\,(f)$, on a $\text{Im}(f) = \mathcal{H}$.

2. On a $\text{tr}([A, B]) = \text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$.

3. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\text{tr}(A) = 0$. Deux cas sont possibles :
Premier cas : $\exists \alpha \in \mathbb{K}, A = \alpha I_n$, dans ce cas $\text{tr}(A) = n\alpha = 0$, donc $\alpha = 0$ et $A = 0$, donc $A \sim 0$ et les coefficients diagonaux de 0 sont nuls.
Deuxième cas, A n'est pas scalaire : On va prouver qu'il existe un vecteur $V \in \mathbb{K}^n$ tel que la famille (V, AV) est libre. Si on note $E_1, \ldots, E_n$ les vecteurs de la base canonique soit il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que (E_i, AE_i) est libre, donc $V = E_i$ convient. Soit (E_i, AE_i) est liée pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, dans ce cas on va prouver que $V = \sum_{k=1}^{n} E_k$ réalise (V, AV) est libre, sinon il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AV = \lambda V$, donc $\sum_{k=1}^{n} AE_k = \sum \lambda E_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k E_k$, donc $\alpha_k = \lambda$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Il en découle que $A = \lambda I_n$, en contradiction avec l'hypothèse concernant le deuxième cas.
• On a donc un vecteur V tel que (V, AV) est libre. On va raisonner par récurrence sur n. Pour $n = 2$, on a $\mathcal{V} = (V, AV)$ est une base de $\mathbb{K}^2$, si on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A , on a $A' = \text{mat}_{\mathcal{V}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 1 & \mu' \end{pmatrix}$ avec $\mu, \mu' \in \mathbb{K}$, comme

$\mathrm{tr}(A) = 0 = \mu'$, on a $A' = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à A et est à coefficients diagonaux nuls.

• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $\mathscr{P}(n)$ est vraie où $\mathscr{P}$ est la propriété à démontrer. Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$, notons f l'endomorphisme canoniquement associé à A et soit $V \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que (V, AV) libre et complétons en une base $\mathscr{V} = (V_1, V_2, \ldots, V_{n+1})$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ tel que $V_1 = V$ et $V_2 = AV$. La matrice de f relativement à $\mathscr{V}$ est $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A_2 \end{pmatrix}$ avec $A_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{tr}(A) = 0$, donc $\mathrm{tr}(A_2) = 0$ Par hypothèse de récurrence il existe $Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A_2' = Q^{-1}A_2Q$ est à coefficients diagonaux nuls. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$. On a $P \in \mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$, et on a $P^{-1}A_1P = \begin{pmatrix} 0 & LQ \\ Q^{-1}C & Q^{-1}A_2Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & LQ \\ Q^{-1}C & A_2' \end{pmatrix} = A'$, comme $A \sim A_1$, on a $A \sim A'$ et A' à coefficients diagonaux nuls.

(b) Si $\mathrm{tr}(M) = 0$ alors $M \sim M'$ avec $[M']_{i,i} = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Il en découle que $M' \in \mathrm{Im}(\Phi)$, donc il existe $M_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $M' = \Delta M_1 - M_1\Delta$, donc il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = P[\Delta, M_1]P^{-1}$. On vérifie aisément que $M = [P\Delta P^{-1}, PM_1P^{-1}]$, donc $M = [A, B]$ avec $A = P\Delta P^{-1}$ et $B = PM_1P^{-1}$.

EXERCICE 109 Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible

Titre : Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible
Difficulté : ★★★☆☆
ID : 128 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 114 | ID : 128

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\psi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, X \mapsto \Psi_A(X) = \mathrm{tr}(AX)$. Démontrer que l'application :
$$\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^\star ; A \mapsto \Phi(A) = \Psi_A$$
est un isomorphisme.
2. Soit $r \in [\![0, n]\!]$ tel que $r \neq 0$, et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$. Démontrer que $\mathrm{tr}(J_rM) = \mathrm{tr}(A)$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Vérifier que la matrice
$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
est inversible et que $\mathrm{tr}(K) = 0$.
4. Démontrer que tout hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice A tel que $A \in \mathcal{H} \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$.

Solution

1. Tout d'abord, Φ est une application linéaire car pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a ψ_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et de plus Φ est linéaire car si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\psi_{A+\lambda B}(M) = \mathrm{tr}((A + \lambda B)M) = \mathrm{tr}(AM) + \lambda\,\mathrm{tr}(BM) = \psi_A + \lambda\psi_B)(M)$, donc $\psi_{A+\lambda B} = \psi_A + \lambda\psi_B$, c'est-à-dire $\Phi(A + \lambda B) = \Phi(A) + \lambda\Phi(B)$. Ensuite Φ est injective car si $A \in \ker(\Phi)$ alors $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{tr}(AM) = 0$, en particulier si $i, j \in [\![1, n]\!]$ et $M = E_{j,i}$ on a

$\text{tr}(AE_{j,i} = 0$, or pour tout $k, \ell \in [\![1,n]\!]$, on a $[AE_{j,i}]_{k,\ell} = \sum_{u=1}^{n} a_{k,u}[E_{j,i}]_{u,\ell} = \sum_{u=1}^{n} a_{k,u}\delta_{j,u}\delta_{i,\ell} = a_{k,j}\delta_{i,\ell}$.

Il en découle que $\text{tr}(AE_{j,i}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\delta_{i,k} = a_{i,j}$, donc $\forall i,j \in [\![1,n]\!], a_{i,j} = 0$, donc $A = 0$ donc Φ est une application linéaire injective et comme $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \dim((\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^\star) = n^2$, on déduit que Φ est un isomorphisme.

2. On a $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, donc

$$J_r M = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il en découle immédiatement que $\text{tr}(J_r M) = \text{tr}(A)$.

3. On remarque si on note $E_1, \dots, E_n$ les colonnes de la matrice I_n alors la matrice K est celle dont les colonnes sont dans l'ordre : $E_{\sigma(1)}, \dots, E_{\sigma(n)}$ où $\sigma = (12\dots(n-1)n)$ est le $n-$cycle défini par $\sigma(k) = k+1$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, avec la convention $n+1 = 1$. Il en découle que $\text{rg}\,(K) = \text{rg}\,(I_n)$ car une permutation des colonnes n'influes pas sur le rang ; donc $\text{rg}\,(K) = n$ et finalement K est inversible. Comme les coefficients de la diagonale principale de K sont tous nuls, on a $\text{tr}(K) = 0$.

4. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc il existe au moins une forme linéaire non nulle f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\ker(f) = \mathcal{H}$. D'après la question 1), comme Φ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vers $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$, il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $f = \Phi(A)$, donc $\forall X \in \mathcal{M}_n(K), f(X) = \text{tr}(AX)$. On veut donc trouver une matrice M inversible tel que $\text{tr}(AM) = 0$. Comme f est non nulle on a $A \neq 0$ et par suite $r = \text{rg}\,(A) > 0$. Il en découle qu'il existe $(P,Q) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $A = PJ_rQ$. Il en découle que

$$\text{tr}(AM) = \text{tr}(PJ_rQM) = \text{tr}(PJ_rQMPP^{-1})$$

Par similitude, il vient :

$$\text{tr}(AM) = \text{tr}(J_r\tilde{M}), \text{ avec } \tilde{M} = QMP$$

Si on prend $\tilde{M} = K$ où K est la matrice de la question 3), on voit bien que $\tilde{M}$ est inversible de trace nulle, avec, d'après la question 2), la relation $\text{tr}(J_r\tilde{M}) = \text{tr}(M_1)$ où on a écrit $\tilde{M} = K = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$, avec $\text{rg}\,(M_1) = r$, donc

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r+1}(\mathbb{K}) \text{ si } r < n.$$

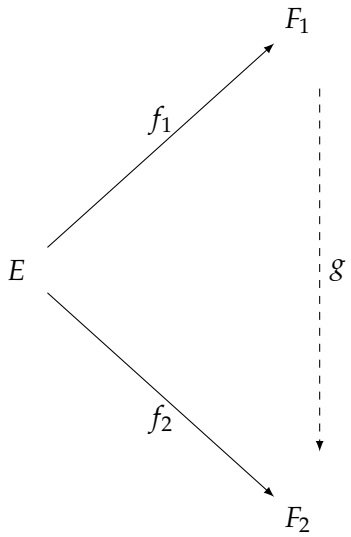
Le cas $r = n$ on trouve $M_1 = K$ donc, dans tous les cas, on a $\text{tr}(M_1) = 0$ et alors $\text{tr}(AM) = 0$ pour $M = Q^{-1}KP^{-1}$. On voit bien que M est inversible et $f(M) = 0$, donc $M \in \mathcal{H} \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$

EXERCICE 110 Factorisation d'endomorphisme

Titre : Factorisation d'endomorphisme
ID : 129 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 115 | ID : 129
Difficulté : ★☆☆☆☆

1. Soient E, F_1, F_2 des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et on considère $f_1 \in \mathcal{L}(E,F_1)$, $f_2 \in \mathcal{L}(E,F_2)$ des applications

linéaires.



Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\ker f_1 \subset \ker f_2$

(2) $\exists g \in \mathcal{L}(F_1, F_2), \quad f_2 = g \circ f_1$

2. Soient E, F des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et on considère des applications linéaires $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer que pour toute application linéaires $g \in \mathcal{L}(E, F)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\ker(f_1) \cap \ker(f_2) \subset \ker(g)$.

(2) $\exists a, b \in \mathcal{L}(F), g = a \circ f_1 + b \circ f_2$.

Solution

1. On va prouver deux implications :
   • $(2) \Rightarrow (1)$, supposons qu'il existe $g \in \mathcal{L}(F_1, F_2)$ tel que $f_2 = g \circ f_1$ pour tout $x \in \ker(f_1)$, on a $f_1(x) = 0$, donc $f_2(x) = g(f_1(x)) = g(0) = 0$, donc $x \in \ker(f_2)$, donc $\ker(f_1) \subset \ker(f_2)$.
   • $(1) \Rightarrow (2)$, supposons que $\ker(f_1) \subset \ker(f_2)$. Soit $x \in F_1$. SI $x \in \mathrm{Im}(f_1)$ alors il existe $a \in F_1$ tel que $f_1(a) = x$, on va poser $g(x) = f_2(a)$, c'est pourvu de sens car si $a_1, a_2 \in E$ tel que $f(a_1) = f(a_2) = x$ alors $f(a_1 - a_2) = 0$, donc $a_1 - a_2 \in \ker(f_1)$ et comme $\ker(f_1) \subset \ker(f_2)$, on a $a_1 - a_2 \in \ker(f_2)$, donc $f_2(a_1) = f_2(a_2)$. Finalement si F_1' est un supplémentaire de $\mathrm{Im}(f_1)$ dans F_1, on pose pour tout $x \in F_1'$, $g(x) = 0$. Ainsi $F_1 = F_1 \oplus \mathrm{Im}(f_1)$ et g est définie comme suit pour tout $x \in F_1$ tel que $x = a + a'$ avec $a \in \mathrm{Im}(f_1)$ et $a' \in F_1'$, on pose $g(x) = f_2(a)$, alors $g \in \mathcal{L}(F_1, F_2)$ et on a bien $f_2 = g \circ f_1$.

2. On va traiter deux implications :
   • Le premier sens est aisé, si $\exists a, b \in \mathcal{L}(F)$ tel que $g = a \circ f_1 + b \circ f_2$ alors pour tout $x \in \ker(f_1) \cap \ker(f_2)$, on a $g(x) = a(f_1(x)) + b(f_2(x)) = 0$. Il en découle que $\ker(f_1) \cap \ker(f_2) \subset \ker(g)$
   • Réciproquement si $\ker(f_1) \cap \ker(f_2) \subset \ker(g)$, considérons l'application :

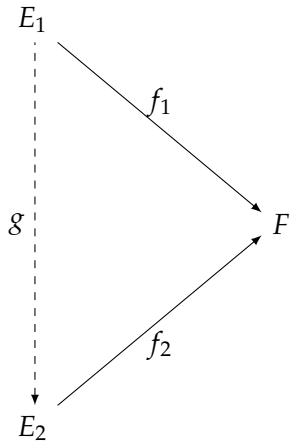
$$f : E \to F^2; x \mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

   On a $\ker(f) = \ker(f_1) \cap \ker(f_2)$, donc $\ker(f) \subset \ker(g)$. D'après le résultat de la question 1) il existe une application linéaire $h \in \mathcal{L}(F^2, F)$ tel que $h \circ f = g$. Pour tout $x \in F$, posons $a(x) = h(x, 0)$ et $b(x) = h(0, x)$. Alors pour tout $x \in E$, on a : $g(x) = h(f(x)) = h(f_1(x), f_2(x)) = h(f_1(x), 0) + h(0, f_2(x))$, donc $g(x) = a(f_1(x)) + b(f_2(x)) = ((a \circ f_1) + (b \circ f_2))(x)$ On a donc prouvé l'existence de $a, b \in \mathcal{L}(F)$ tel que $g = a \circ f_1 + b \circ f_2$.

EXERCICE 111 Factorisation d'applications linéaires

Titre : Factorisation d'applications linéaires
ID : 130 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 116 | ID : 130
Difficulté : ★★★☆☆

1. On considère des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels E_1, E_2, F et des applications linéaires $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :



   (1) $\mathrm{Im}(f_1) \subset \mathrm{Im}(f_2)$.
   (2) $\exists g \in \mathcal{L}(E_1, E_2) \quad f_1 = f_2 \circ g$.

2. E, F sont des espaces vectoriels et on considère des applications linéaires $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer que pour toute application linéaire $g \in \mathcal{L}(E, F)$, les assertions suivantes sont équivalentes :
   (1) $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f_1) + \mathrm{Im}(f_2)$.
   (2) $\exists a, b \in \mathcal{L}(E), g = f_1 \circ a + f_2 \circ b$.

Solution

1. On va démontrer deux implications :
   • (2) $\Rightarrow$ (1), supposons qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ tel que $f_1 = f_2 \circ g$, alors $\mathrm{Im}(f_1) = f_1(E_1) = f_2(g(E_1)) \subset f_2(E_2) = \mathrm{Im}(f_2)$.
   • (1) $\Rightarrow$ (2), supposons que $\mathrm{Im}(f_1) \subset \mathrm{Im}(f_2)$, Soit $\tilde{E_2}$ un supplémentaire de $\ker(f_2)$ dans E_2, on sait alors que f_2 induit un isomorphisme $\tilde{f_2} : \tilde{E_2} \to \mathrm{Im}(f_2); x \mapsto f_2(x)$, si $x \in E_1$ alors $f_1(x) \in \mathrm{Im}(f_1)$, donc $x \in \mathrm{Im}(f_2)$, donc il existe un et un seul $a \in \tilde{E_2}$ tel que $f_2(a) = x$, on pose alors $a = g(x)$, on démontre que $g : E_1 \to E_2, x \mapsto a_x$ est un endomorphisme et on voit clairement que $f_1 = f_2 \circ g$

2. On va démontrer deux implications :
   • Supposons qu'il existe $a, b \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g = f_1 \circ a + f_2 \circ b$. Si $x \in \mathrm{Im}(g)$ alors il existe $x' \in E$ tel que $x = g(a)$, donc $x = f_1(a(x')) + f_2(b(x'))$ et alors $x \in \mathrm{Im}(f_1) + \mathrm{Im}(f_2)$, donc $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f_1) + \mathrm{Im}(f_2)$
   • Réciproquement si $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f_1) + \mathrm{Im}(f_2)$, alors en posant $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$ pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}(f_1) + \mathrm{Im}(f_2)$, donc $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}\, f$, donc il existe $h : E \to E^2$ tel que $w = f \circ h$. En posant $h(x) = (a(x), b(x))$, on a $g(x) = f(h(x)) = f(a(x), b(x)) = f_1(a(x)) + f_2(b(x))$, donc $g = f_1 \circ a + f_2 \circ b$.

EXERCICE 112 Matrices non inversibles et son semblables

Titre : Matrices non inversibles et son semblables
ID : 472 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 455 | ID : 472
Difficulté : ★☆☆☆☆

Donner un exemple de matrices non sembalables non inversible et non nulles dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Solution

On prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En effet on a $A^2 = 0$ et $B^2 = B$, donc A est nilpotente et B n'est pas nilpotente. Donc A et B ne sont pas semblables car si deux matrices M et M' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, $M' = PMP^{-1}$ avec $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $M'^k = PM^kP^{-1}$, donc M est nilpotente si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$, or $M^p = 0 \Leftrightarrow M'^p = 0$, donc M est nilpotente si et seulement si M' nilpotente.

• Une autre méthode plus rapide est d'observer que $\text{tr}(A) = 0$ et $\text{tr}(B) = 1$, donc $\text{tr}(A) \neq \text{tr}(B)$, donc A et B ne sont pas smblables.

EXERCICE 113 Une consition pour avoir $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = n$

Titre : Une consition pour avoir $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = n$ **Difficulté :** ★☆☆☆☆

ID : 475 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 458 | ID : 475

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vecoriel et on considère deux endomorphismes f et g de E. Démontrer que si $f + g$ est inversible et $f \circ g = 0$ alors $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = n$

Solution

Comme $f \circ g = 0$ alors $\text{Im}(g) \subset \ker(f)$, donc $\text{rg}(g) \leq \dim(\ker(f)$ par le théorème du rang on a donc $\text{rg}(g) \leq n - \text{rg}(f)$, donc $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq n$. On a $f + g$ est inversible donc $(\star)$ $\text{rg}(f + g) = n$ or $\text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ (car $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$ et $\dim(\text{Im}(f) + \text{Im}(g)) \leq \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g))$, donc finalement $(\star\star)$ $n \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ et de $(\star)$ et $(\star\star)$ on déduit que $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = n$.

EXERCICE 114 Endomorphismes dont le noyau contient un sous-espace donné

Titre : Endomorphismes dont le noyau contient un sous-espace donné **Difficulté :** ★☆☆☆☆

ID : 476 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 459 | ID : 476

E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et U un sous-espace vectoriel de E. Soit

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{L}(E)/U \subset \ker(u)\}.$$

1. Prouver que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Si E est de dimension finie n, calculer la dimension de $\mathcal{A}$ en fonction de n et $p = \dim(U)$.

Solution

1. Si on note θ l'endomorphisme nul de E on a $\theta \in \mathcal{A}$ car $\ker(\theta) = E$ donc $U \subset \ker(\theta)$. Soit $u, v \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, si $x \in U$ alors $(u + \lambda v)(x) = u(x) + \lambda v(x) = 0$, donc $x \in \ker(u + \lambda v)$, par suite $\mathbb{U} \subset \ker(u + \lambda v)$ donc $u + \lambda v \in \mathcal{A}$.
2. Si $U = \{0\}$, il est clair que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$, donc $\dim(\mathcal{A}) = n^2$. Si $U \neq \{0\}$ soit $p = \dim(U)$. Si $p = n$ alors $U = E$ donc $\mathcal{A} = \{0\}$ et $\dim(\mathcal{A}) = 0$. Si $0 < p < n$, alors E admet une base $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ avec $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de U, c'est justifié par la théoréme de la base incomplète et que U admet une base qui n'est pas une base de E. un endomorphisme u

de E est dans $\mathcal{A}$ si et seulement si sa matrice relativement à $\mathscr{E}$ est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} O_{p,p} & M_1 \\ O_{n-p,p} & M_2 \end{pmatrix}$$

avec :

$$M_2 \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \text{ et } M_1 \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K}).$$

L'isopmorphisme naturel

$$\Phi_{\mathscr{E}} : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), f \mapsto \mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(f),$$

induit un idomorphisme de $\mathcal{A}$ vers l'espace des matrices M de la forme ci-dessus, qui est lui même isomorphe à $\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ par l'isomorphisme $(M_1, M_2) \mapsto M$, donc :

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{A}) &= \dim(\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})) + \dim(\mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})) \\ &= (n-p)p + (n-p)^2 \\ &= (n-p)(n-p+p) \\ &= n(n-p), \end{aligned}$$

formule valable aussi pour les cas particuliers $p = n$, puis $p = 0$, donc dans tous les cas on a $\dim(\mathcal{A}) = n(n-p)$.

EXERCICE 115 Une représentation des matrices non scalires de taille 2

Titre : Une représentation des matrices non scalires de taille 2 — **Difficulté :** ★★☆☆☆
ID : 479 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 462 | ID : 479

Soit A une matrice carrée de taille 2. Démontrer que si A est non sclaire alors $A \simeq \begin{pmatrix} 0 & -d \\ 1 & t \end{pmatrix}$ avec $t = \mathrm{tr}(A)$ et $d = \det(A)$

Solution

On démontre qu'il existe un vecteur V de $\mathbb{K}^2$ tel que la famille (V, AV) est libre et on travaille dans cette base.

EXERCICE 116 Endomorphismes normaux

Titre : Endomorphismes normaux — **Difficulté :** ★★☆☆☆
ID : 480 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 463 | ID : 480

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. On suppose $u^* \circ u = u \circ u^*$.

1. Montrer que les endomorphismes u et u^* ont les mêmes sous-espaces propres.
2. Montrer que les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

Solution

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $F = E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$. Puisque u et u^* commutent, l'espace F est stable par u^*. Considérons alors les endomorphismes v et w restrictions de u et u^* à l'espace F.

Puisque
$$\forall x, y \in E, (u(x) \mid y) = (x \mid u^*(y))$$
on a en particulier
$$\forall x, y \in F, (v(x) \mid y) = (x \mid w(y))$$
et donc $w = v^*$. Or $v = \lambda . \mathrm{Id}_F$ donc $w^* = (\lambda \cdot \mathrm{Id}_F)^* = \lambda . \mathrm{Id}_F$. Ainsi, $E_\lambda(u) \subset E_\lambda(u^*)$. Un raisonnement symétrique donne l'autre inclusion ce qui assure l'égalité.

2. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux valeurs propres distinctes de u.
Soient $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u) = E_\mu(u^*)$. D'une part,
$$(u(x) \mid y) = \lambda(x \mid y).$$
D'autre part ;
$$(u(x) \mid y) = (x \mid u^*(y)) = \mu(x \mid y).$$
Puisque $\lambda \neq \mu$, on obtient $(x \mid y) = 0$. Les espaces $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont donc orthogonaux.

EXERCICE 117 Dimension de l'espace des application linéaire s'annulant sur un sev de E

Titre : Dimension de l'espace des application linéaire s'annulant sur un sev de E
Difficulté : ★★☆☆☆
ID : 491 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 473 | ID : 491

On consifère deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels E et F de dimensions finie et soit W un sous-espace vectoriel de E. On note $\mathscr{L}_W(E,F) = \{f \in \mathscr{L}(E,F) / \forall x \in W, f(x) = 0\}$.

1. Démontrer que $\mathscr{L}_W(E,F)$ est un espace vectoriel.
2. Trouver la dimension de $\mathscr{L}_W(E,F)$.

Solution

1. Si $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$ s'annulent sur W, il en est de même de $\lambda f + \mu g \ldots$
2. Soit V un supplémentaire de W dans E. L'application
$$\Phi : A \to \mathscr{L}(V,F)$$
qui à $f \in A$ associe sa restriction au départ de V est un isomorphisme car une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions linéaires sur deux espaces supplémentaires. On en déduit
$$\dim A = \dim \mathscr{L}(V,F) = (\dim E - \dim W) \times \dim F.$$

EXERCICE 118 Une matrice en cascade inversible

Titre : Une matrice en cascade inversible
Difficulté : ★★☆☆☆
ID : 493 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 475 | ID : 493

Soient $n \in \mathbb{N}^*, A = (\mathrm{Min}(i,j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ \vdots & 2 & \ldots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est inversible et

calculer A^{-1}.

Solution

Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A. On a :

$$\begin{cases} C_1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n \\ C_2 = e_1 + 2e_2 + \ldots + 2e_n \\ \quad \vdots \\ C_{n-1} = e_1 + 2e_2 + \ldots + (n-1)e_{n-1} + (n-1)e_n \\ C_n = e_1 + 2e_2 + \ldots + (n-1)e_{n-1} + ne_n \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} e_1 + e_2 + \ldots + e_n = C_1 \\ e_2 + \ldots + e_n = C_2 - C_1 \\ \vdots \\ e_{n-1} + e_n = C_{n-1} - C_{n-2} \\ e_n = C_n - C_{n-1} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} e_1 = C_1 - (C_2 - C_1) = 2C_1 - C_2 \\ e_2 = (C_2 - C_1) - (C_3 - C_2) = -C_1 + 2C_2 - C_3 \\ \vdots \\ e_{n-1} = (C_{n-1} - C_{n-2}) - (C_n - C_{n-1}) \\ e_n = -C_{n-1} + C_n. \end{cases}$$

Ceci montre que A est inversible et que :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut contrôler le résultat, par exemple pour $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 119 — Un exercice qui manipule endomorphisme et sous-espace vectoriel

Titre : Un exercice qui manipule endomorphisme et sous-espace vectoriel

Difficulté : ★☆☆☆☆

ID : 495 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 477 | ID : 495

Soit E un espace vectoriel quelconque, f un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Démontrer que si F est de dimension finie et $F \subset f(F)$ alors $f(F) = F$.
2. On suppose dans cette question que f est injective et $F \subset f(F)$. A-t-on $f(F) = F$? Justifier votre réponse.

Solution

1. F est de dimension finie et $F \subset f(F)$. Soit $f_1 : F \to f(F); x \mapsto f(x)$ l'application linéaire de F vers $f(F)$, induite par f. D'après le théorème du rang, on a $\dim(F) = \text{rg}\,(f_1) + \dim(\ker(f_1))$. On a $\text{rg}\,(f_1) = \dim(f_1(F)) = \dim(f(F)$, donc $\dim(F) = \dim(f(F)) + \dim(\ker(f_1))$ et par suite $\dim(F) \geq \dim(f(F))$ et comme $F \subset f(F)$, on a $\dim(F) \leq \dim(f(F))$, donc on a $\dim(F) = \dim(f(F))$ et finalement $f(F) = F$.
2. Non, voici un contre-exemple : On prend $E = \mathbb{R}(X)$, on considère $f : E \to E; U \mapsto f(U) = \frac{U}{X}$ et soit $F = X\mathbb{R}[X]$, alors f est bien un endomorphisme de E car si $U, V \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(U + \lambda V) = \frac{U+\lambda V}{X} = \frac{U}{X} + \lambda\frac{V}{X} = f(U) + \lambda f(V)$. On f est in jectif car si $U \in E$ et $f(U) = 0$ alors $\frac{U}{X} = 0$, par intégrité de $\mathbb{R}(X)$, on a $U = 0$. On a même f est bijectif et pour tout $U \in E$, on a $f^{-1}(U) = XU$. On $f(F) = \frac{1}{X}(X\mathbb{R}[X]) = \mathbb{R}[X]$. On voit bien que $F \subset f(F)$ mais l'inclusion est stricte, c'est-à-dire $f(F) \neq F$ puisque par exemple $X + 1 \in f(F)$ mais $X + 1 \notin F$.

EXERCICE 120 — Si $\det(A + M) = \det(A) + \det(M)$ pour tout M alors $A = 0$

Titre : Si $\det(A + M) = \det(A) + \det(M)$ pour tout M alors $A = 0$ — **Difficulté :** ★★★☆☆
ID : 508 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 490 | ID : 508

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$(\star) \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A + M) = \det(A) + \det(M).$$

Démontrer que $A = 0$.

Solution

On a $\det(A + A) = 2\det(A)$ et comme $\det(2A) = 2^n \det(A)$, on a $(2^n - 2)\det(A) = 0$, or $2^n - 2 \neq 0$ car $n \geq 2$. Il en découle que $\det(A) = 0$, donc la matrice A n'est pas inversible donc $r = \text{rg}\,(A)$ réalise $r < n$. La matrice A peut alors s'écrire $A = PJ_rQ$ où $P, Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $B = PK_rQ$ avec $K_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$, alors $A + B = P(J_r + K_r)Q$ et comme $J_r + K_r = I_n$, on a $A + B = PQ$, donc $A + B$ est inversible par suite $0 \neq \det(A + B) = \det(A) + \det(B)$, donc $\det(B) \neq 0$ et B est inversible, donc $n - r = n$ et finalement $r = 0$, donc $A = 0$.

EXERCICE 121 — Operateur difference finie sur les polynômes

Titre : Operateur difference finie sur les polynômes — **Difficulté :** ★★★☆☆
ID : 509 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 491 | ID : 509

Soient : $n \in \mathbb{N}^*$, et Δ (dérivée discrète), l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Delta(P) = P(X + 1) - P(X).$$

a. Montrer que Δ permet de définir un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, que l'on notera Δ_n.
b. Montrer que : $\Delta^n \neq 0$ et $\Delta_n^{n+1} = 0$ (c'est-à-dire Δ_n est nilpotent d'indice de nilpotence $n + 1$).
c. En déduire qu'il existe des constantes $a_0, \ldots, a_{n+1}$ (que l'on déterminera) telles que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^{n+1} a_k P(X + k) = 0.$$

On pourra faire intervenir l'endomorphisme T de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], T(P) = P(X + 1)$.

Solution

a. Puisque la linéarité de Δ est immédiate, il suffit de démontrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X].$$

Or c'est immédiat, car : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Delta(P) \in \mathbb{R}[X]$, et : $\deg(\Delta(P)) \leq \deg(P(X+1) - P(X)) \leq n$. Donc on peut définir Δ_n, endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Delta_n(P) = \Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

b. On peut remarquer par ailleurs, que : $\forall P \in \mathbb{R}[X], (P \neq 0) \Rightarrow (\deg(\Delta(P)) < \deg(P))$. En effet, si on note : $P = a_k \cdot X^k + \ldots + a_0$, avec : $k \geq 0, a_k \neq 0$, alors :

$$\Delta(P) = a_k(X+1)^k + \ldots + a_0 - \left[a_k X^k + \ldots + a_0\right] = k \cdot a_k \cdot X^{k-1} + \ldots,$$

polynôme de degré strictement inférieur à k. Autrement dit :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \Delta_n(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X],$$

donc, par récurrence :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \Delta_n^k(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-k}[X],$$

soit, pour : $k = n$: $\Delta_n^n(\mathbb{R}_n \mid X]) \subset \mathbb{R}_0 \mid X]$. Et comme tout polynôme constant a une image nulle par Δ, on en déduit que : $\Delta_n^{n+1}(\mathbb{R}_n[X]) = \{0\}$. Autrement dit : $\Delta_n^{n+1} = 0$.
c. Notons alors T l'endomorphisme défini sur $\mathbb{R}[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}[X], T(P) = P(X+1)$, et T_n l'endomorphisme induit par T dans $\mathbb{R}_n[X]$. Alors : $\Delta_n = T_n - \mathrm{Id}_{R_n[X]}$, qu'on notera : $T_n - \mathrm{Id}_n$. Puis : $(T_n - \mathrm{Id}_n)^{n+1} = \Delta_n^{n+1} = 0$, et comme T_n et Id_n commutent, on a : $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} \cdot (-1)^{n+1-k} \cdot T^k = 0$, ce qui se traduit par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} \cdot (-1)^{n+1-k} \cdot T^k(P) = 0$, ou encore immédiatement : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^{n+1} a_k \cdot P(X+k) = 0$, avec : $\forall 0 \leq k \leq n+1, a_k = (-1)^{n+1-k} \cdot \binom{n}{k}$, puisque : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \forall 0 \leq k \leq n+1, T^k(P) = P(X+k)$.

EXERCICE 122 — Endomorphismes f, g, h tel que $fg = h, gh = f, hf = g$

Titre : Endomorphismes f, g, h tel que $fg = h, gh = f, hf = g$ — **Difficulté :** ★★☆☆☆
ID : 510 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 492 | ID : 510

Soient f, g et h trois endomorphismes d'un K-espace vectoriel E, tels que : $f \circ g = h$ et $g \circ h = f$ et $h \circ f = g$.

1. Montrer que f, g et h ont même image et même noyau.
2. Montrer que : $f^5 = f$.
3. En déduire que : $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)$.

Solution

1. Les relations proposées donnent dans l'ordre : $\mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(h)$, et donc l'égalité des trois images. En effet : $\forall y \in \mathrm{Im}(h), \exists x \in \mathrm{E}, y = h(x) = fog(x) = f(g(x))$, et : $y \in \mathrm{Im}(f)$, de même pour les autres relations. Puis : $\ker(h) \supset \ker(g) \supset \ker(f) \supset \ker(h)$, et à nouveau l'égalité des trois noyaux. En effet, on a de même : $\forall x \in \mathrm{E}, (g(x) = 0) \Rightarrow (f(g(x)) = 0) \Rightarrow (h(x) = 0)$.
2. On a : $f^2 = (\text{ goh }) \text{ of} = gog = g^2 = (hof)og = hoh = h^2$. Puis : $f^5 = g^2 \text{ oh of} = go(\text{ goh })o($

hof) gofog = goh = f.

3. On constate que : $\forall x \in \mathrm{E}$, si : $x = y + z$, avec : $y \in \mathrm{Im}(f), z \in \ker(f)$, alors : $\exists a \in \mathrm{E}, y = f(a)$. Puis : $f^4(y) = f^4(x) - f^4(z) = f^4(x) = f^5(a) = f(a) = y$, et : $z = x - y = x - f^4(x)$. On vérifie alors que le seul couple (y, z) ainsi trouvé convient, car : - $y = f^4(x) \in \mathrm{Im}(f)$, - $f(z) = f\left(x - f^4(x)\right) = f(x) - f^5(x) = 0, z \in \ker(f)$), - $y + z = x$. Bref, les deux espaces sont bien supplémentaires dans E.

EXERCICE 123 Une technique pour calculer les puissances d'une matrice

Titre : Une technique pour calculer les puissances d'une matrice
ID : 511 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 493 | ID : 511
Difficulté :

Dans $\mathcal{CM}_n(\mathbb{R})$ on définit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. A l'aide de l'endomorphisme canoniquement associé à A, calculer A^k, pour tout entier : $k \in \mathbb{N}$.
2. En déduire M^k, pour tout entier : $k \in \mathbb{N}$.

Solution

1. En notant u l'endomorphisme canoniquement associé à A, et $(e_1 \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors : $u(e_1) = e_2, \ldots, u(e_{n-1}) = e_n$, et : $u(e_n) = e_1$. Par récurrence, on en déduit que :

$$\begin{cases} \forall k \in [\![1, n-1]\!], \forall i \in [\![1, n-k]\!], u^k(e_i) = e_{i+k} \\ \text{et} \\ \forall [\![n-k+1, n]\!], u^k(e_i) = e_{i+k-n} \end{cases}$$

En particulier : $u^n = \mathrm{Id}_{R^n}$. Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec $r \equiv k[n]$, où $1 \leq r \leq n-1$, on a : $A^k = A^r$.

2. On obtient alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*, M^k = (A + I_n)^k$, et comme les deux matrices commutent, la formule du binôme s'applique. Soit :

$$M^k = (A + I_n)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot A^i,$$

que l'on peut réduire, si : $k > n$. En particulier :

$$M^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot A^i = \begin{pmatrix} 2.\binom{n}{0} & \binom{n}{n-1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \binom{n}{1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ \binom{n}{n-1} & \cdots & \binom{n}{1} & 2 \cdot \binom{n}{0} \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 124 Exercice élémentaire sur les espaces vectoriels

Titre : Exercice élémentaire sur les espaces vectoriels
ID : 519 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 500 | ID : 519
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 2z = 0\}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, donner une base $\mathscr{B}_F$ de F.
2. Soit $G = \text{Vect}\{(0,1,1)\}$ le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{(0,1,1)\}$ Determiner $F \cap G$, en déduire que $E = F \oplus G$.

Solution

1. L'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, X = (x,y,z) \mapsto f(X) = x - y - 2z$ est linéiare car si $X = (x,y,z)$ et $X' = (x',y',z')$ sont deux vecteurs de E et λ un scalaire réel, on a $f(X + \lambda X') = f(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') = (x + \lambda x') - (y + \lambda y') - 2(z + \lambda z') = (x - y - 2z) + \lambda(x' - y' - 2z') = \varphi(X) + \lambda\varphi(X')$. On remarque que $F = \ker(\varphi)$, donc F est un osu-espace vectoriel de E.
   • Une base de E. Un vecteur $X = (x,y,z)$ est dans F si et seulement si $x = y + 2z$, si et seulement si $\exists y, z \in \mathbb{R}, X = (y + 2z, y, z) = y(1,1,0) + z(2,0,1)$. Il en découle que la famille $\mathscr{B}_F((1,1,0),(2,0,1)$ est une famille génératrice de F, or elle est libre d'après les calculs qui précéde qu'on fait à l'envers, donc $\mathscr{B}_F$ est une base de F.
2. Soit $X = (x,y,z) \in F \cap G$ alors $X \in F$ et $X \in G$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X = \lambda(0,1,1)$ et $x - y - 2z = 0$, donc $-\lambda - 2\lambda = 0$, donc $3\lambda = 0$ et $\lambda = 0$ et finalement $X = (0,0,0)$, d'où $F \cap G = \{0\}$ et comme on a en plus $\dim(F) = 2$ et $\dim(G) = 1$, on a $\dim(F) + \dim(G) = 3 = \dim(E)$, donc $E = F \oplus G$.

EXERCICE 125 Un excellent exercice de révision d'algèbre linéaire

Titre : Un excellent exercice de révision d'algèbre linéaire
ID : 520 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 501 | ID : 520
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère l'endomorphisme f de E tel que :

$$f(e_1) = f(e_3) = e_3, f(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3.$$

1. Écrire la matrice A de f relativement à la base $\mathscr{B}$.
2. (a) Determiner $\ker(f)$.
   (b) Determiner une base $\mathscr{B}_0$ de $\ker(f)$.
   (c) Compléter $\mathscr{B}_0$ en une base de E.
3. Determiner $\text{Im}(f)$ et en donner une base $\mathscr{B}_1$.
4. On considère $\mathscr{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ avec :

$$e_1' = e_1 - e_3, e_2' = e_1 - e_2, e_3' = -e_1 + e_2 + e_3$$

   (a) Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E.
   (b) Écrire la matrice P de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
5. Exprimer e_1, e_2, e_3 en fonction de e_1', e_2', e_3'. En déduire P^{-1}, l'inverse de P.
6. Écrire la matrice A' de f dans $\mathscr{B}'$
7. Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution

1. On a $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (a) Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in E$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, alors :

$$x \in \ker(f) \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

donc

$$x \in \ker(f) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

donc $\ker(f) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_3)$.

(b) Une base de $\ker(f)$ comme on l'a vu est $\mathscr{B}_0(e_1 - e_3)$.

(c) On complète par des vecteurs de la base canonique, par exemple, La famille $(e_1 - e_3, e_2, e_3)$ est libre car sont determinant est

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

donc il s'agit d'une base obtenue après avoir complété $\mathscr{B}_0$.

3. Détermination de $\mathrm{Im}(f)$.

• On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \\ &= \mathrm{Vect}(e_3, -e_1 + e_2 + e_3, e_3) \\ &= \mathrm{Vect}(e_3, -e_1 + e_2 + e_3). \end{aligned}$$

Par ailleurs la famille $\mathscr{B}_1 = (e_3, -e_1 + e_2 + e_3)$ est libre car si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\alpha e_3 + \beta(-e_1 + e_2 + e_3) = 0$ alors $-\beta e_1 + \beta e_2 + (\alpha + \beta)e_3 = 0$, par liberté de (e_1, e_2, e_3), on déduit $-\beta = \beta = \alpha + \beta = 0$, donc $\alpha = \beta = 0$. Il en découle que $\mathscr{B}_1 = (e_3, -e_1 + e_2 + e_3)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

4. On donne $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ avec $e'_1 = e_1 - e_3, e'_2 = e_1 - e_2, e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.

(a) On a :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Par l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$, on obtient :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

(on a développé suivant la dernière ligne).

Comme $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$, on peut dire que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

5. On a $\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_3 \\ e'_2 = e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$, donc $\begin{cases} e_3 = e_1 - e'_1 \\ e_2 = e_1 - e'_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_1 - e'_1 + e_1 - e'_2 \end{cases}$, donc $\begin{cases} e_1 = e'_1 + e'_2 + e'_3 \\ e_2 = e'_1 + e'_3 \\ e_3 = e'_2 + e'_3 \end{cases}$.

   Il en découle que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. D'après le cours la matrice de f relativement à $\mathscr{B}'$ est :

$$A' = \text{mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1}AP,$$

   donc :

$$\begin{aligned} A' &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7. Comme $A' = P^{-1}AP$, on a $A = PA'P^{-1}$. On démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = PA'^nP^{-1}.$$

   • Démarrage : Pour $n = 1$, on a bien la propriété car $A = PA'P^{-1}$.
   • Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = PA'^nP^{-1}$, alors $A^{n+1} = A^nA = (PA'^nP^{-1})(PA'P^{-1}) = PA'^nA'P^{-1} = PA'^{n+1}P^{-1}$. En conclusion on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = PA'^nP^{-1}$$

   • La matrice A' est une matrice diagonale, il est donc aisé de calculer ses puissances car il suffit d'élever les coefficients diagonaux de A' à la même puissance, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $A'^n = A'$. D'où :

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

   En résumé on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = A$.
   Remarque : Si on avait remarqué que $A^2 = A$, il serait aisé de voir que $A^n = A$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En fait la matrice A est une matrice de projecteur.

EXERCICE 126 Une inspiration des matrices de transvections

Titre : Une inspiration des matrices de transvections
ID : 521 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 502 | ID : 521
Difficulté : ★★☆☆☆

1. Soit a, b, c, d sont dans $\mathbb{K}$ avec $a \neq 0$. Montrer que :
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$
2. Plus généralement, si A et D sont des matrices carrées sur $\mathbb{K}$ d'ordre p et q telles que A soit inversible, trouver les matrices B_1, C_1, D_1 telles que
$$\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ C_1 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & B_1 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$
3. On garde les notations de la question précédente.
   (a) Quel est l'inverse de la matrice $\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ C_1 & I_q \end{bmatrix}$?
   (b) Si D_1 est inversible, quel est l'inverse de $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$?

Solution

1. Calcul direct.
2. La relation est équivalente à :
$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C_1A & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & B_1 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$
   c'est-àdire :
$$\begin{bmatrix} A & AB_1 \\ C_1A & C_1AB_1 + D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$
   donc à : $\begin{cases} AB_1 = B \\ C_1A = C \\ C_1AB_1 + D_1 = D \end{cases}$, donc à : $\begin{cases} B_1 = A^{-1}B \\ C_1 = CA^{-1} \\ D_1 = D - CA^{-1}B \end{cases}$
3.

EXERCICE 127 Operations sur les sous-espaces vectoriels

Titre : Operations sur les sous-espaces vectoriels
ID : 522 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 503 | ID : 522
Difficulté : ★★☆☆☆

Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(A \cap C) + (B \cap C) \subset (A + B) \cap C$. Donner un exemple dans $\mathbb{R}^2$ pour lequel l'inclusion est stricte.
2. Montrer que, si $A + B = A + C$, $A \cap B = A \cap C$ et $B \subset C$, alors $B = C$.

Solution

1. Soit $x \in (A \cap C) + (B \cap C)$. Alors $x = a + b$ avec $a \in A \cap C$ et $b \in B \cap C$. Puisque $a \in C$ et $b \in C$ et C est un sev, $a + b \in C$. Donc x appartient à $A + B$ et à C. Dans $\mathbb{R}^2$, Si l'on prend

$A = \text{vect}\{e_1\}$, $B = \text{vect}\{e_2\}$ et $C = \text{vect}\{e_1 + e_2\}$, où $\{e_1, e_2\}$ est la base canonique, alors

$$(A \cap C) + (B \cap C) = \{0\} \cap \{0\} = \{0\} \quad \text{et} \quad (A + B) \cap C = \mathbb{R}^2 \cap C = C.$$

2. Puisque $B \subset C$, il suffit de montrer que $C \subset B$. Soit donc $x \in C$. Puisque $0_E \in A$, $x = 0_E + x \in A + C$. Puisque $A + C = A + B$, on peut écrire $x = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Maintenant, $a = x - b$, où $x \in C$ et $x \in B \subset C$, et puisque C est un sev, $a \in C$. Donc $a \in A \cap C = B \cap C$. Donc $a \in B$. Finalement, $x = a + b$ avec $a \in B$ et $b \in B$. Puisque B est un sev, $x \in B$.

EXERCICE 128 Determinant se ramenant à un vandermonde

Titre : Determinant se ramenant à un vandermonde
ID : 675 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 656 | ID : 675
Difficulté : ★★☆☆☆

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des nombres complexes. Calculer pour $k = 1, \ldots, n-1$

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Solution

Considérons le polynôme

$$P(X) = (X - a_1)(X - a_2)\ldots(X - a_n)$$

Celui-ci se développe sous la forme

$$P(X) = X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \alpha_0$$

avec $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ et en particulier $\alpha_k = (-1)^{n-k}\sigma_{n-k}$ où les $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ désignent les expressions symétriques élémentaires en $a_1, \ldots, a_n$. En procédant à l'opération $C_n \leftarrow C_n + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j C_{j+1} + \sum_{j=n}^{n-1} \alpha_j C_j$, les coefficients de la dernière colonne de la matrice sont transformés en

$$P(a_i) - \alpha_k a_i^k = -\alpha_k a_i^k \text{ car } P(a_i) = 0.$$

Ainsi,

$$D_k = (-1)^{n+1-k}\sigma_{n-k} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^{n-1} & a_1^k \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^{n-1} & a_2^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^{n-1} & a_n^k \end{vmatrix}.$$

En permutant de façon circulaire les $n - k$ dernières colonnes, on obtient

$$D_k = \sigma_{n-k} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^k & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^k & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^k & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Sachant calculer un déterminant de Vandermonde, on obtient

$$D_k = \sigma_{n-k} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

EXERCICE 129 Exemple de réduction de matrices

Titre : Exemple de réduction de matrices
ID : 32 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 1 | ID : 32
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soient dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. les matrices A et B sont elles diagonalisables ? trigonalisables ?
2. Calculer B^{-1} en utilisant le polynôme caractéristique de B.

Solution

1) A est triangulaire inférieure donc elle est trigonalisable. Les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1,2,3\}$. Comme A admet trois veleurs propres deux à deux distinctes elle est diagonalisable.

• On a $\chi_B = \begin{vmatrix} X-2 & 2 & -1 \\ -3 & X+3 & -1 \\ 1 & -2 & X \end{vmatrix}$. Par l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, il vient : $\chi_B = \begin{vmatrix} X-1 & 2 & -1 \\ X-1 & X+3 & -1 \\ X-1 & -2 & X \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & X+3 & -1 \\ 1 & -2 & X \end{vmatrix}$. Par les operations élémentaires $L_k \leftarrow L_k - L_1$ pour $k \in \{2,3\}$, ilo vient : $\chi_A = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & -4 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)(X+1)^2$ (développement suivant la ligne 2). Il en découle que $\mathrm{Sp}(B) = \{1,-1\}$. L'ordre de multiplicité de -1 est égal à 2, et on a par ailleurs $B + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}\,(B+I_3) = 2$ et en conséquence $\dim(E_{-1}(A)) = 1$, donc B n'est pas diagonalisable.

Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_B(B) = 0$, et comme $\chi_B(X) = (X-1)(X^2+2X+1) = X^3 + X^2 - X - 1$, il vient $B^3 + B^2 - B - I_3 = 0$, donc $I_3 = B(B^2 + B - I_3)$ et finalement $B^{-1} = B^2 + B - I_3$, donc

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 130 Condition pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable

Titre : Condition pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable
ID : 34 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 1 | ID : 34
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A quelle condition sur le triplet (a,b,c) l'endomorphisme u est il diagonalisable ?

Solution

On a $\chi_u = \chi_M = (X-1)^2(X+1)$, donc $\mathrm{Sp}(M) = \{-1,1\}$ avec 1 de multiplicité 2, donc u est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1(u)) = 2$ si et seulement si $\mathrm{rg}\,(M - I_3) = 1$, or $M - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}\,(M - I_3) = 1$ si et seulement si $a = 0$. Ainsi u est diagonalisable si et seulement si $a = 0$.

EXERCICE 131 Utilisation du rang pour réduire une matrice

Titre : Utilisation du rang pour réduire une matrice
ID : 36 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 1 | ID : 36
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ considérée dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Quel est le rang de A ?
2. En déduire une valeur propre de A et calculer la dimension du sous-espace propre qui lui est assicié.
3. On note $0, \lambda, \mu$ les valeurs propres complexes de A comptées avec leur ordres de multiplicités. Justifier leur existence et calculer $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(A^2)$ en fonction de λ et μ.
4. Déduire de ce qui précéde que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner son polynôme minimal ainsi que son polynôme caractéristique.
5. Retrouver le resultat en calculant directement le polynôme caractéristique de A.

Solution

1. Les colonnes 1 et 3 de A sont égales et la colonne 1 et la colonne 2 sont linéairement indépendantes donc $\mathrm{rg}\,(A) = 2$.
2. Il en découle que A n'est pas inversible donc 0 est une valeur propre et comme $\mathrm{rg}\,(A) = 2$, on a $\dim(E_0(A)) = 3 - \mathrm{rg}\,(A) = 1$.
3. On sait que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et comme la multiplicité de la valeur propre 0 et égale à 1, il reste deux valeurs prpres complexes λ et μ. On a alors dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice A est semblable à une matrice T de la forme $T = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{tr}(A) = \lambda + \mu$ et comme A^2 est semblable à T^2, on a $\mathrm{tr}(A^2) = \lambda^2 + \mu^2$.
4. Comme $\mathrm{tr}(A) = 1$ et les termes diagonaux de A^2 sont $1, 3$ et 1, on a $\mathrm{tr}(A^2) = 5$ donc au final on a $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda^2 + \mu^2 = 5 \end{cases}$, donc $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda\mu = -2 \end{cases}$, et finalement $\lambda = 2$ et $\mu = -1$. Il en découle que $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 0, 2\}$ donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\chi_A = \pi_A = X(X+1)(X-2)$.
5. On a $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -1 & X-1 & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}$. Par l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, puis une factorisation, il vient : $\chi_A = X \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & X-1 & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}$. Par l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$, on

obtient : $\chi_A = X\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & X-1 & -1 \\ X & -1 & X \end{vmatrix}$. Finalement en développant suivant la première ligne on obtient

$$\chi_A = -X(2 - X(X-1)) = X(X^2 - X - 2) = X(X+1)(X-2),$$

ce qui confirme le résultat obtenu dans les questions avant.

EXERCICE 132 Un exemple de diagonalisation d'une matrice carrée

Titre : Un exemple de diagonalisation d'une matrice carrée
ID : 131 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 1 | ID : 131
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A.
2. Démontrer que A admet deux valeurs propres λ et μ tel que $\lambda < \mu$.
3. Déterminer $\dim(E_\lambda(A))$ et $\dim(E_\mu(A))$.
4. En déduire que A est semblable à la matrice D avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

Solution

1. On a :
$$\chi_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & -1 \\ -1 & X-1 & -1 \\ 2 & 0 & X+1 \end{vmatrix}$$
On développe suivant la deuxième colonne, il vient :
$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X & 0 & X \\ -1 & X-1 & -1 \\ 2 & 0 & X+1 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)\begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ 2 & X+1 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)((X-2)(X+1)+2) \\ &= X(X-1)^2 \end{aligned}$$
2. Il découle de la question précédente que les valeur propres de A sont $\lambda = 0$ et $\mu = 1$ à savoir les racines du polynôme caractéristique χ_A de A.
3. On remarque que $\operatorname{rg}(A) = 2$, donc $\dim(E_0(A)) = 1$. Par ailleurs $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ qui est de rang 1 donc $\dim(E_1(A)) = 2$.
4. comme la somme $E_0(A) + E_1(A)$ est directe et la somme des dimensions de ses termes est 3, on a $\mathbb{R}^3 = E_0(A) \oplus E_1(A)$, donc si (V_1) est une base de $E_0(A)$ et (V_2, V_3) est une base de $E_1(A)$, et u l'endomorphisme canoniquement associé à A, on a $u(V_1) = 0$ et $u(V_2) = V_2$ et $u(V_3) = V_3$ de sorte que la matrice de u relativement à $\mathcal{V} = (V_1, V_2, V_3)$ est $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc A et D son semblables.

EXERCICE 133 Exemples de diagonalisation

Titre : Exemples de diagonalisation
ID : 723 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 1 | ID : 723
Difficulté : ★☆☆☆☆

1) Diagonaliser la matrice A suivante de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Justifier que M est diagonalisable. Quelles sont les dimensions respectives des sous-espaces propre ? Est ce M est inversible ? Si oui est ce que M^{-1} est diagonalisable ?

Solution

1) On calcule le polynôme caractéristique de A, on a $\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & -1 \\ -1 & X-2 & -1 \\ -1 & -1 & X-2 \end{vmatrix}$. L'opération $C_1 1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ donne $\chi_A = (X-4)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ 1 & -1 & X-2 \end{vmatrix}$. Les opérations $L_k \leftarrow L_k - L_1$ donnent $\chi_A = (X-4)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix}$. Il s'agit d'un determinant triangulaire donc $\chi_A = (X-1)^2(X-4)$. Il en découle que $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 4\}$

EXERCICE 134 Des endomorphismes de polynômes

Titre : Des endomorphismes de polynômes
ID : 42 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 2 | ID : 42
Difficulté : ★★☆☆☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à n et $B_n = (1, X, \ldots, X^n)$ sa base canonique. On considère les applications :

$$f : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_3[X], P \mapsto f(P) = P'$$

et

$$g : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_4[X], P \mapsto g(P) = XP$$

1. Montrer que f et g sont des applications linéaires.
2. Donner les matrices $\mathrm{mat}_{B_4,B_3}(f)$ et $\mathrm{mat}_{B_3,B_4}(g)$.
3. Donner la matrice de $g \circ f$ relativement à la base B_4.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer suivant les valeurs de λ la dimension

$$d_\lambda = \dim(g \circ f - \lambda \,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_4[X]}).$$

Solution

1. Tout d'abord f et g sont bien définies car on sait bien que si $P \in \mathbb{R}_4[X]$ alors $P' \in \mathbb{R}_3[X]$, de même que si $P \in \mathbb{R}_3[X]$ alors $XP \in \mathbb{R}_4[X]$.
   • Si $P, Q \in \mathbb{R}_4[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q' = f(P) + \lambda f(Q)$.

• Si $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $g(P+\lambda Q) = X(P+\lambda Q) = XP + \lambda XQ = g(P) + \lambda g(Q)$, donc f et g sont des applications linéaires respectivement de $\mathbb{R}_4[X]$ vers $\mathbb{R}_3[X]$ pour f et de $\mathbb{R}_3[X]$ vers $\mathbb{R}_4[X]$ pour g.

2. On a
$$f(1) = 0, f(X) = 1, f(X^2) = 2X, f(X^3) = 3X^2, \text{ et } f(X^4) = 4X^3,$$
$$\text{donc } \underset{B_4,B_3}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = M_1.$$
• On a
$$g(1) = X, g(X) = X^2, g(X^2) = X^3, g(X^3) = X^4,$$
$$\text{donc } \underset{B_3,B_4}{\text{mat}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_2$$

3. On a $M = \underset{B_4}{\text{mat}}(g \circ f) = M_2 \times M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

4. L'endomorphisme $g \circ f - \lambda \,\text{Id}_{\mathbb{R}_4[X]}$ est non inversible et seulement si λ n'est pas valeur propre de M, et comme M est une matrice diagonale avec les coefficients diagonaux deux à deux distincts, on a $d_\lambda = 4$ si $\lambda \notin \{0,1,2,3,4\}$ et $d_\lambda = 1$ si $\lambda \in \{0,1,2,3,4\}$ sinon car M est diagonale avec cinq valeurs propres distinctes deux à deux, les sous-espace propres sont des droites vectorielles.

EXERCICE 135 Questions de similitude sur trois matrices carrées de taille 3

Titre : Questions de similitude sur trois matrices carrées de taille 3 **Difficulté :**
ID : 133 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 2 | ID : 133

On considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices :
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
1) Démontrer que A, B et C ont le même polynôme caractéristique, la même trace et le même déterminant.
2) A, B et C ont-elles le même rang ?
3) A et B sont-elles semblables ?
4) A et C sont-elles semblables ?

Solution

1) On a $\chi_A = \chi_B = \chi_C = X^2(X-1)$, $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = \text{tr}(C) = 1$ et $\det(A) = \det(B) = \det(C) = 0$
2) On a $\text{rg}\,(A) = \text{rg}\,(C) = 2$ et $\text{rg}\,(B) = 1$ donc $\text{rg}\,(A) \neq \text{rg}\,(B)$ et $\text{rg}\,(A) = \text{rg}\,(C)$.
3) Comme A et B n'ont pas le même rang, elles ne sont pas semblables.
4) Notons u et w les endomorphismes canoniquement associés à A et C respectivement. On voit que $\text{Sp}(u) = \text{Sp}(w) = \{0,1\}$ et que $V_1 = e_1$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre 0 et $V_2 = 2e_1 + e_2 + e_3$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1. Par ailleurs si on pose $V_3 = e_2$, on voit que $\mathcal{V} = (V_1, V_2, V_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que : $u(V_1) = 0, u(V_2) = V_2, u(V_3) = V_1$

de sorte que : $\text{mat}_{\mathscr{W}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$, donc u et w sont représentés par la même matrice (C) dans les bases respectives $\mathscr{V}$ et $\mathscr{E}$(la base canonique) donc A et C sont semblables.

EXERCICE 136 Un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

Titre : Un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ **Difficulté :** ★★★☆☆
ID : 134 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 2 | ID : 134

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soit f l'application de E vers E tel que

$$\forall P \in E, \quad f(P) = X(P(X) - P(X-1)).$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E.
2. Former la matrice A de f relativement à la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de E.
3. Determiner $\ker f, \text{Im}\, f, \text{Sp}\, f$.
4. Montrer que f est diagonalisable et préciser les dimensions respectives des sous-espaces propres.

Solution

1. La linéarité est immédiate. Le point important à vérifier est que $f(P) \in E$, chose vraie car $P(X)$ et $P(X-1)$ ayant le même degré et le même coefficient dominant, on a $\deg(P(X) - P(X-1)) \leq n-1$, donc $\deg(f(P)) \leq n$.
2. On a $f(1) = 0$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a : $f(X^j) = X(X^j - (X-1)^j) = X(X^j - \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k}(-1)^{j-k}X^k)$ donc $f(X^j) = X(-\sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k}(-1)^{j-k}X^k) = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k}(-1)^{j-k-1}X^{k+1}$. Par le changement d'indice $\ell = k+1$, il vient $f(X^j) = \sum_{\ell=1}^{j} \binom{j}{\ell-1}(-1)^{j-\ell}X^\ell$. donc la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ est
$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & \star \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & j & \\ & & & & \ddots \\ (0) & & & & n \end{pmatrix}$$
3. • Puisque A est triangulaire supérieure avec tous les termes diagonaux non nuls sauf le premier, le noyau de f est la droite vectorielle engendré par 1, donc $\ker f = \mathbb{R}$.
• D'après le théorème du rang on a $\text{rg}\,(f) = \dim(E) - \dim(\ker f) = (n+1) - 1 = n$.
• On a $\text{Im}(f) \subset X\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par définition de f et comme $\dim(\text{Im}(f)) = n = \dim(X\mathbb{R}_{n-1}[X])$, on a l'égalité $\text{Im}(f) = X\mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{Vect}(X^k)_{1\leq k\leq n}$.
• Comme la matrice de f dans la base canonique est triangulaire supérieure, le spectre de f est l'ensemble des termes diagonaux de A à savoir $\text{Sp}(f) = \{0, 1, \dots, n\}$
4. Comme les valeurs propres de f son distinctes deux à deux et en nombre de n, on peut dire que f est diagonalisable et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles de E.

EXERCICE 137 Matrice avec des zeros sauf la première ligne et la première colonne

Titre : Matrice avec des zeros sauf la première ligne et la première colonne

Difficulté :

ID : 27 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 3 | ID : 27

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 3$. Pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ avec $a_2 \neq 0$, on associe la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le rang de A_n ? Qu'en déduit-on pour le polynôme caractéristique χ_n de A_n ?
2. Caclculer χ_2, χ_3.
3. On pose $b_n = \sum_{k=2}^{n} a_k^2$. Montrer par récurrence que $\chi_n = X^{n-2}(X^2 - a_1 X - b_n)$.
4. Si $b_n = 0$, la matrice A_n est-elle diagonalisable ?
5. On suppose que $b_n \neq 0$. A quelle condition A_n est elle diagonalisable ?

Solution

1. On a $\text{rg}\,(A_n) = 2$ car, si on note (C_k) la famille de colonnes de A_n, on a $C_1 \neq 0$ et $C_2 \neq 0$ car $a_2 \neq 0$ et la famille (C_1, C_2) est libre car sinon on auarait $C_1 = \alpha C_2$, pour un certain $\alpha \in \mathbb{C}$, en particulier, on aurait $\alpha_2 = 0$, chose fausse.
   On déduit donc que 0 est une valeur propre de A_n d'ordre de multiplicité au moins $n-2$, donc le polynôme caracatéristique est de la forme $\chi_n = X^{n-2}(X^2 + uX + v)$ avec $u, v \in \mathbb{C}$.
2. Si $n = 2$, on a $A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\chi_2 = X^2 - a_1 X - a_2^2$.
   Si $n = 3$, on a : $A_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc :

$$\begin{aligned} \chi_3 &= \begin{vmatrix} X - a_1 & -a_2 & -a_3 \\ -a_2 & X & 0 \\ -a_3 & 0 & X \end{vmatrix} \\ &= (X - a_1)X^2 + a_2(-a_2 X) - a_3 a_3 X \\ &= X(X^2 - a_1 X - a_2^2 - a_3^2) \end{aligned}$$

3. La propriété est vraie pour $n = 3$, d'après la question précédente.
   Soit $n \geq 3$ tel que la propriété est vraie pour n et toute famille $(a_k) \in \mathbb{C}^n$. Soit alors $(a_k) \in \mathbb{C}^{n+1}$.
   Calculons la polynôme caractéristique χ_{n+1} de A_{n+1}. On a

$$\chi_{n+1}(X) = \begin{vmatrix} X - a_1 & -a_2 & \ldots & -a_n & -a_{n+1} \\ -a_2 & X & 0 & \ldots & 0 \\ -a_3 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_{n+1} & 0 & \ldots & 0 & X \end{vmatrix}$$

   En développant suivant la dernière colonne, il vient :

$$\chi_{n+1}(X) = X.\chi_n(X) + (-1)^{n+1} a_{n+1} \Delta_n(X)$$

où

$$\Delta_n(X) = \begin{vmatrix} -a_2 & X & 0 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & X \\ -a_{n+1} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n a_{n+1} \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & X \end{vmatrix} = (-1)^n a_{n+1} X^{n-1}$$

Donc $\chi_{n+1}(X) = X.\chi_n(X) - a_{n+1}^2 X^{n-1}$. Par hypothèse de récurrence on a :

$$\chi_n = X^{n-2}(X^2 - a_1 X - b_n),$$

donc :

$$\begin{aligned} \chi_{n+1}(X) &= X.X^{n-2}(X^2 - a_1 X - b_n) - a_{n+1}^2 X^{n-1} \\ &= X^{n-1}(X^2 - a_1 X - b_n - a_{n+1}^2) \\ &= X^{n-1}(X^2 - a_1 X - b_{n+1}), \end{aligned}$$

qui exprime la vérité de la propriété pour $n+1$ ce qui achève la démonstration par récurrence du résultat proposé.

4. Si $b_n = 0$ alors $\chi_n = X^{n-1}(X - a_1)$, donc la multiplicité de la valeur propre 0 vérifie $m_0(A_n) > \dim(E_0(A_n))$, car le rang de A_n est $\text{rg}\,(A_n) = 2$ (d'après la question 1)), donc par le théorème du rang $\dim(E_0(A_n)) = n - 2$. Ainsi si $b_n = 0$, la matrice A_n n'est pas diagonalisable.
5. Si $b_n \neq 0$ alors 0 n'est pas racine du polynôme $X^2 - a_1 X - b_n$, donc 0 est une racine de χ_n d'ordre de multiplicité $n-2$ qui vaut la dimension du sous-espace propre $E_0(A_n)$. Pour que la matrice A_n soit non diagonalisable il faut que le trinôme $X^2 - a_1 X - b_n$ admette une racine double, donc que son discriminent $\Delta = a_1^2 + 4b_n$ soit nul. Inversement si $a_1^2 + 4b_n = 0$ alors la seule valeur propre non nulle de χ_n est $\frac{a_1}{2}$ qui est de multiplicité 2, il en découle que la matrice A_n est non diagonalisable si et seulement si $\text{rg}\,(A_n - \frac{a_1}{2} I_n) = n - 1$. On a :

$$A_n - \frac{a_1}{2} I_n = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{2} & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ a_2 & -\frac{a_1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & -\frac{a_1}{2} \end{pmatrix}$$

Comme $a_1 \neq 0$ car sinon de $a_1^2 + 4b_n$ on auarait $b_n = 0$, chose fausse, donc la matrice est effectivement de rang 1 car ses colonnes $C_2, \dots, C_n$ sont linéairement indépendantes car si $\lambda_2, \dots \lambda_n \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{k=2}^{n} \lambda_k C_k = 0$ alors pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, on a $\lambda_k \frac{a_1}{2} = 0$, donc $\lambda_k = 0$.
Conclusion : Si $b_n \neq 0$, la matrice A_n est diagonalisable si et seulement si on a la condition $a_1^2 + 4b_n \neq 0$

EXERCICE 138 Diagonalisation d'une matrice tridiagonale

Titre : Diagonalisation d'une matrice tridiagonale
ID : 132 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 3 | ID : 132
Difficulté : ★★★☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle valeur propre de M tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \neq 0$ et $MX = \lambda X$. Le vecteur X est alors appelé vecteur propre de M associé à la valeur

propre λ.
On suppose que $n \geq 2$ et on considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Soit V un vecteur propre de A de composantes $(v_k)_{1\leq k\leq n}$ relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Démontrer que si on pose $v_0 = v_{n+1} = 0$ alors :
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad v_{k+1} - (2-\lambda)v_k + v_{k-1} = 0$$
2. Montrer que 0 et 4 ne sont pas des valeurs propres de A.
3. Soit $\lambda \in]0, 4[$ une valeur propre de A et soit $\rho e^{i\theta}$ une solution complexe de l'équation $t^2 - (2-\lambda)t + 1 = 0$. Démontrer que nécessairement $\sin((n+1)\theta) = 0$.
4. On conserve les notations de la question 3). Montrer que $\rho = 1$ et que A admet n valeurs propres $\lambda_k, k \in [\![1, n]\!]$, distinctes dans $]0, 4[$ qu'on explicitera en fonction de k.

Solution

1. La relation $Av = \lambda v$ se traduit en un un système linéaire :
$$\begin{cases} -v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1} = \lambda v_i, 2 \leq i \leq n-1 \\ 2v_1 - v_2 = \lambda v_1 \\ -v_{n-1} + 2v_n = \lambda v_n \end{cases}$$
avec la convention $v_0 = v_{n+1} = 0$. On voit que l'on a bien le résultat demandé.
2. Supposons que 0 est une valeur propre de A. On a donc la relation récurrente :
$$v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} = 0$$
dont l'équation caractéristique est :
$$t^2 - 2t + 1 = 0$$
donc 1 est une racine double donc la forme générale de v_i est :
$$v_i = \alpha + \beta i$$
avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et comme $v_0 = v_{n+1} = 0$ on a manifestement $\alpha = \beta = 0$ et le vecteur v est nul , ce qui est absurde.
On a un même raisonnement pour le cas de 4.
3. Si $\lambda \in]0, 4[$, le discriminant de l'équation caractéristique associée à la relation récurrente, à savoir :
$$t^2 + (\lambda - 2)t + 1 = 0$$
est
$$\Delta = (\lambda-2)^2 - 4 = \lambda(\lambda - 4)$$
par suite $\Delta < 0$. Les racines de l'équation caractéristique sont donc des nombres complexes non réels conjugués. Si on note une d'elle $r = \rho e^{i\theta}$, l'autre est $\overline{r} = \rho e^{-i\theta}$, donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que :
$$v_k = \alpha \mathcal{R}e(r^k) + \beta \mathcal{I}m(r^k) = (\alpha \cos(k\theta) + \beta \sin(k\theta))\rho^k$$
Comme $v_0 = 0$, on a $\alpha = 0$ et comme $v_{n+1} = 0$, on a $\beta \sin((n+1)\theta)\rho^{n+1} = 0$ et comme $v \neq 0$, on a forcément $\sin((n+1)\theta) = 0$.

4. On a $r_1 r_2 = 1$ et $r_1 + r_2 = 2 - \lambda$ (relation entre les racines et les coefficients d'un trinôme). La première relation donne $\rho = 1$ et la seconde donne $\lambda = 2(1 - \cos(\theta))$. En supposant que λ est valeur propre on a $\sin((n+1)\theta) = 0$ d'après la question 3), donc θ est de la forme :

$$\theta = \frac{k\pi}{n+1}, k \in \mathbb{Z}$$

Réciproquement, pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note : $\lambda_k = 2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, on a λ_k est une valeur propre de A et un vecteur propre associé est celui de coordonnées v_j tel que :

$$v_j = \beta \sin\left(\ell \frac{k\pi}{n+1}\right), \ell \in [\![1, n]\!]$$

avec $\beta \in \mathbb{R}^*$. Ces valeurs propres sont distinctes deux à deux , donc ce sont exactement les seules valeurs propres de A, puisque si $V_1, \ldots, V_n$ sont des vecteurs propres qui leur sont associés, il est aisé de prouver que la famille $(V_1, \ldots, V_n)$ est libre. Comme les valeurs propres en questions sont dans $]0, 4[$, on a bien répondu à la question posée .

EXERCICE 139 Matrice nilpotente et diagonalisation

Titre : Matrice nilpotente et diagonalisation
ID : 35 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 4 | ID : 35
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée nilpotente non nulle.

1. Montrer que $I_n - M$ n'est pas diagonalisable.
2. Généralement, montrer que si B est une matrice diagonalisable ayant une unique valeur propre alors $B + M$ n'est pas diagonalisable.
3. Donner un exemple de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A \neq 0$ nilpotente et B diagonalisable et $A + B$ aussi diagonalisable.

Solution

1. Comme M est nilpotentente, elle est trigonalisable et admet 0 comme unique valeur propre, donc il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = PTP^{-1}$ avec

$$T = \begin{pmatrix} 0 & & (\star) \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

par suite $I_n - M = PT'P^{-1}$ avec

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

donc si $I_n - M$ est diagonalisable on aurait $I_n - M = I_n$, donc $M = 0$, chose fausse, donc $I_n - M$ n'est pas diagonalisable.

2. Généralement si $B + M$ est diagonalisable, comme elle posséde une unique valeur propre elle serait scalaire et comme B est scalaire, la matrice M serait sclaire et comme elle est nilpotente elle serait nulle, chose fausse.
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donc $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalisable car elle posséde deux valeurs propres distinctes.

EXERCICE 140 Matrice compagnon

Titre : Matrice compagnon
ID : 705 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 4 | ID : 705
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On lui associe la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, appelée matrice compagnon de P.

1. Prouver que la famille $(e_1, Ce_1, \ldots, C^{n-1}e_1)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.
2. Montrer que P est le polynôme minimal de C.
3. Quel est le polynôme caractéristique de C ?

Solution

1. En utilisant une récurrence immédiate, on a $\forall k \in [\![1, n-1]\!], C^{k-1}e_1 = e_k$, donc $(e_1, Ce_1, \ldots, C^{n-1}e_1) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est donc précisément la base canonique de $\mathbb{K}^n$, donc elle c'est une base de $\mathbb{K}^n$.
2. Montrons que $P = \mu_C$ le polynôme minimal de C.
   • Absence de polynôme annulateur de degré $< n$: Soit $Q = \sum_{i=0}^{d} q_i X^i \in K[X]$ un polynôme non nul de degré $d < n$ (ce qui implique $q_\alpha \neq 0$). $Q(C)e_1 = \sum_{i=0}^{d} q_i C^i e_1 = \sum_{i=0}^{d} q_i e_{i+1}$. La sous-famille $(e_1, \ldots, e_{d+1})$ étant libre en tant que partie de la base canonique, et le coefficient q_d étant non nul, on a $Q(C)e_1 \neq 0$, par suite, $Q(C) \neq 0$, ainsi, aucun polynôme non nul de degré $< n$ ne peut annuler C, d'où $\deg(\mu_c) \geqslant n$.
   • P est annulateur, en effet, $P(C)e_1 = C^n e_1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k C^k e_1 = Ce_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_{k+1} = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k e_{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_{k+1} = 0$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}, P(C)e_k = P(C)C^{k-1}e_1 = C^{k-1}P(C)e_1 = 0$. $P(C)$ s'annule sur tous les éléments d'une base, donc $P(C) = 0$.
   • Conclusion : P est annulateur unitaire de degré n et $\deg(\mu_c) \geqslant n$. Par unicité du polynôme minimal unitaire, $\mu_c = P$.
3. Comme $\deg(P) = n$ et $P = \mu_C$, on a immédiatement le polynôme caractéristique $\chi_C = P$.

EXERCICE 141 Commutant d'une matrice diagonale

Titre : Commutant d'une matrice diagonale
ID : 17 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 5 | ID : 17
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / AM = MA\}$ dit le commutant de A.

1. Montrer que $\mathscr{C}_A$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $\mathbb{K}[A] \subset \mathscr{C}_A$.
2. Soit $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux λ_i sont deux à deux distincts.
   (a) Chercher $\mathscr{C}_A$.
   (b) Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); M \mapsto MA - AM$. Montrer que $\operatorname{Im}(\Phi)$ est l'ensemble des matrices à diagonale nulle.

Solution

1. Montrer que $\mathscr{C}_A$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, en effet :
   • $I_n \in \mathscr{C}_A$ car $I_n \times A = A \times In\ (= A)$.
   • Si $M_1, M_2 \in \mathscr{C}_A$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $M_1 + \lambda M_2 \in \mathscr{C}$ et $M_1 \times M_2 \in \mathscr{C}_A$ car : $A(M_1 + \lambda M_2) = AM_1 + \lambda AM_2 = M_1A + \lambda M_2A = (M_1 + \lambda M_2)A$. et $A \times (M_1 \times M_2) = (A \times M_1) \times M_2 = (M_1 \times A) \times M_2 = M_1 \times (A \times M_2) = M_1 \times (M_2 \times A) = (M_1 \times M_2) \times A$
   • Si $M \in \mathbb{K}[A]$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $M = P(A)$. On sait que $A \times P(A) = P(A) \times A = Q(A)$ où $Q(X) = XP(X)$, donc $M \in \mathscr{C}_A$. Ainsi $\mathbb{K}[A] \subset \mathscr{C}_A$, c'est même une sous-algèbre de $\mathscr{C}_A$.

   (a) $A = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec les λ_i sont deux à deux distincts. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $M \in \mathscr{C}_A$ si et seulement si pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $[AM]_{i,j} = [MA]_{i,j}$, c'est-à-dire :

$$(\star) \quad \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} m_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} a_{k,j}.$$

   • Si $i = j$ la relation $(\star)$ s'écrit :

$$(\star)' \quad \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} m_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} a_{k,i}$$

   donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i m_{i,i} = m_{i,i} \lambda_i,$$

   chose vraie donc cela n'apporte aucun rneseignement.
   • Si $i \neq j$ alors $(\star)$ devient : $\lambda_i m_{i,j} = m_{i,j} \lambda_j$, donc $(\lambda_i - \lambda_j) m_{i,j} = 0$, d'où

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow m_{i,j} = 0$$

   ce qui veut dire que M est diagonale. Réciproquement si M est une matrice diagonale tel que $M = \text{diag}(m_1, \ldots, m_n)$ alors $AM = MA = \text{diag}(\lambda_1 m_1, \ldots, \lambda_n m_n)$. Il en découle que $\mathscr{C}_A$ est l'epace des matrices diagonales (de dimension n).

   (b) $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); M \mapsto MA - AM$. Notons $\mathscr{F}$ l'espace des matrices à diagonale nulle, alors $\mathscr{F}$ est un sous-espace vetoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est plus exactement $\text{Vect}(E_{i,j}, (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j)$, donc $\dim(\mathscr{F}) = n^2 - n$. Il est aisé de voir que $\text{Im}(\Phi) \subset \mathscr{F}$, or par le théoréme du rang, on a $rg(\Phi) = n^2 - \dim(\ker(\Phi))$, or $\ker(\Phi) = \mathscr{C}_A$, donc $\text{rg}\,(\Phi) = n^2 - n$ et par suite $\text{Im}(\Phi) = \mathscr{F}$.

EXERCICE 142 La matrice avec des 1 aux bords et des zéros ailleurs

Titre : La matrice avec des 1 aux bords et des zéros ailleurs
Difficulté : ★☆☆☆☆
ID : 135 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 121 | ID : 135

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que A admet au plus trois valeurs propres complexes distinctes dont au moins une est nulle.
2. Donner les expressions explicites des valeurs propres de A et prouver qu'elles sont réelles.
3. A quelle condition sur n les valeurs propres de A sont entières ?

Solution

1. On remarque que $\text{rg}\,(A) = 2$ donc $0 \in \text{Sp}(A)$ avec une multiplicité au moins égale à $n-2$. Donc A admet au plus deux autres valeurs propres complexes non nulles λ et μ.
2. En considérant A comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, son polynôme caractéristique est scindé de la forme $\chi_A = X^{n-2}(X-\lambda)(X-\mu)$ et on a aussi $\chi_{A^2} = X^{n-2}(X-\lambda^2)(X-\mu^2)$, donc $\begin{cases} \lambda+\mu = \text{tr}(A) \\ \lambda^2+\mu^2 = \text{tr}(A^2) \end{cases}$ comme $\text{tr}(A) = 2$ et $\text{tr}(A^2) = 4n-4$ on trouve $\begin{cases} \lambda = 1-\sqrt{2n-3} \\ \mu = 1+\sqrt{2n-3} \end{cases}$
3. Pour que les valeurs propres soient entières il faut et il suffit que $2n-3$ soit un carré parfait donc l'existence de $m \in \mathbb{Z}$ tel que $2n-3 = m^2$. Forcément le m est impair, donc l'existence de k tel que $2n-3 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$ donc $n = 2(k^2+2k+1)$ avec $k \geq 1$ pour conserver $n \geq 3$.

EXERCICE 143 Matrice diagonalisable sans trop de calcul

Titre : Matrice diagonalisable sans trop de calcul
ID : 136 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 122 | ID : 136
Difficulté :

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour quelles valeurs de a la matrice A est elle diagonalisable.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Prouver sans trop de calculs que B est diagonalisable.

Solution

1. On a $\chi_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & 2 \\ -1 & X-a & 1 \\ -1 & -1 & X+1 \end{vmatrix}$. Par l'operation élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$, on a $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 2 \\ 0 & X-a & 1 \\ X & -1 & X+1 \end{vmatrix}$. Par l'operation $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on a : $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 2 \\ 0 & X-a & 1 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix}$. Donc $\chi_A(X) = X(X-1)(X-a)$
   Si $a \neq 0$ et $a \neq 1$ la matrice A est diagonalisable car elle a trois valeurs propres deux à deux distinctes.
   Si $a = 0$ alors 0 est une valeur propre de A de multiplicité 2. Or dans ce cas on a $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, en particulier $\text{rg}\,(A) = 2$, donc le sous-espace propre $E_0(A) = \ker A$ est de dimension 1, donc A n'est pas diagonalisable.
   Si $a = 1$ alors 1 est valeur propre de multiplicité 2 et on a $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ donc $\text{rg}\,(A - I_3) = 2$ et de la même façon A n'est pas diagonalisable.
2. la matrice B est de rang 1, donc 0 est une valeur propre de multiplicité 3 donc le polynôme caractéristique χ_B est scindé et par suite si λ est la valeur propre restant on a $\text{tr}(A) = 6 = \lambda$.

Finalement χ_B est scindé et B admet deux valeurs propres 0 et 6 dont les ordres de multiplicité respectifs valent les dimensions respectives des sous-espaces propres donc B est diagonalisable.

EXERCICE 144 Polynôme caracteristique de l'inverse d'une matrice inversible

Titre : Polynôme caracteristique de l'inverse d'une matrice inversible
ID : 137 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 123 | ID : 137
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $M \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$. Exprimer le polynôme caractéristique de M^{-1} en fonction de χ_M.

Solution

Soit $x \in \mathbb{K}^*$ alors

$$\begin{aligned}\chi_{M^{-1}}(x) &= \det(xI_x - M^{-1}) \\ &= \det(M^{-1}(xM - I_n)) = \det(M^{-1})\det\left(x\left(M - \frac{1}{x}I_n\right)\right) \\ &= (\det(M))^{-1}x^n(-1)^n\chi_M\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

Remarquons que $\chi_M(0) = (-1)^n\det(M) \neq 0$, donc finalement :

$$\forall x \in \mathbb{K}^*, \chi_{M^{-1}}(x) = \frac{1}{\chi_M(0)}x^n\chi_M\left(\frac{1}{x}\right)$$

EXERCICE 145 Polynôme minimal d'une matrice de rang 1

Titre : Polynôme minimal d'une matrice de rang 1
ID : 138 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 124 | ID : 138
Difficulté : ★★☆☆☆

n est un entier naturel tel que $n \geq 2$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathrm{rg}\,(A) = 1$. Démontrer que le polynôme minimal de A est $\mu_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X$.
2. Determiner le polynôme minimal de $B = \begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix}$

Solution

1. Comme A est de rang 1, si $C_1, \ldots, C_n$ sont les colonnes de A et $F = \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_n)$, on a F est une droite vectorielle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $V = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de F alors il existe $W = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!], C_i = a_iV$. De plus $W \neq 0$ car sinon A serait nulle.

On a alors : $A = \begin{pmatrix} b_1a_1 & \dots & b_1a_j & \dots & b_1a_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_ia_1 & \dots & b_ia_j & \dots & b_ia_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_na_1 & \dots & b_na_j & \dots & b_na_n \end{pmatrix}$ donc $A = (b_ia_j)_{1\leq i,j\leq n} = V\,{}^tW$. Il en découle que $A^2 = V\,{}^tWV\,{}^tW$. Remarquons que ${}^tWV = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k = \operatorname{tr}(A)$, donc $A^2 = ({}^tWV)V\,{}^tW = \operatorname{tr}(A)A$, donc le polynôme $P = X^2 - \operatorname{tr}(A)X$ est un polynôme annulateur de A. Il en découle que le polynôme minimal μ_A de A réalise $\mu_A \in \{X, X - \operatorname{tr}(A), P\}$. Si $\mu_A = X$ on aurait $A = 0$ et si $\mu_A = X - \operatorname{tr}(A)$ on aurait $A = \operatorname{tr}(A)I_n$ et serait scalaire de rang 1, chose impossible car sa taille n réalise $n \geq 2$ donc si elle est scalaire elle serait soit nulle soit inversible donc de rang strictement supérieur à 1. Donc $\mu_A = P = X^2 - \operatorname{tr}(A)X$.

2. On remarque que $J_n = B + I_n$ où J_n est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1. Comme $\operatorname{rg}(J_n) = 1$ et $\operatorname{tr}(J_n) = n$, on a d'après la question 1) : $X^2 - nX$ est le polynôme minimal de J_n, donc un polynôme annulateur de J_n, donc $(B + I_n)^2 - n(B + I_n) = 0$ donc $B^2 - (n-2)B - (n-1)I_n = 0$ et par suite le polynôme $Q = X^2 - (n-2)X - (n-1)$ est un polynôme annulateur de B donc son polynôme minimal est soit de degré 1 soit c'est Q. Comme B n'est pas scalaire le premier cas est écarté, donc $\mu_B = Q = X^2 - (n-2)X - (n-1)$.

EXERCICE 146 L'endomorphisme $\Phi(f) = f + \operatorname{tr}(f)\,\mathrm{Id}$.

Titre : L'endomorphisme $\Phi(f) = f + \operatorname{tr}(f)\,\mathrm{Id}$. **Difficulté :** ★★★☆☆
ID : 139 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 125 | ID : 139

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n avec $n \geq 1$ et soit Φ l'endomorphisme de de $\mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $\Phi(f) = f + \operatorname{tr}(f)\,\mathrm{Id}_E$.

1. Determiner les éléments propres de Φ et donner le polynôme caractéristique χ_Φ de Φ.
2. Calculer $\operatorname{tr}(\Phi)$ et $\det(\Phi)$.
3. Montrer que Φ est inversible et determiner son inverse.

Solution

1. Soit λ une valeur propre de Φ, alors il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \neq \theta$ et $\Phi(f) = \lambda f$, donc $f + \operatorname{tr}(f)\,\mathrm{Id}_E = \lambda f$ et par suite $\operatorname{tr}(f) + n\operatorname{tr}(f) = \lambda\operatorname{tr}(f)$ donc $(n+1-\lambda)\operatorname{tr}(f) = 0$. Si $\operatorname{tr}(f) = 0$ alors $\lambda = n+1$ et si $\operatorname{tr}(f) = 0$, alors $\Phi(f) = f$ et f est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre 1, et comme $\Phi(\mathrm{Id}_E) = (n+1)\,\mathrm{Id}_E$, on en déduit que les valeurs propres de Φ sont $n+1$ et 1 et le sous-espace propres associé à 1 est l'hyperplan des matrices de trace nulle, donc 1 est une valeur propre d'ordre de multiplicité $n^2 - 1$ alors que $n+1$ est valeur propre d'ordre de multiplicité 1 et par suite le polynôme caractéristique de Φ est $\chi_\Phi = (X-1)^{n^2-1}(X-n-1)$.
2. Comme χ_Φ est scindé $\operatorname{tr}(\Phi)$ est la somme des valeurs propres donc $\operatorname{tr}(\Phi) = n^2 - 1 + n + 1 = n^2 + n$. De même $\det(\Phi)$ est leur produit, donc $\det(\Phi) = n+1$.
3. Comme $\det(\Phi) \neq 0$ Φ est inversible. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $g = \Phi^{-1}(f)$ donc $f = \Phi(g)$ donc $g + \operatorname{tr}(g)\,\mathrm{Id}_E = f$ donc $\operatorname{tr}(g)(1+n) = \operatorname{tr}(f)$ donc $\operatorname{tr}(g) = \frac{\operatorname{tr}(f)}{n+1}$ et par suite $g = f - \operatorname{tr}(g)\,\mathrm{Id}_E = f - \frac{\operatorname{tr}(f)}{n+1}\,\mathrm{Id}_E$ d'où : $\forall f \in \mathcal{L}(E), \quad \Phi^{-1}(f) = f - \frac{\operatorname{tr}(f)}{n+1}\,\mathrm{Id}_E$.

EXERCICE 147 Caractérisation de l'inversibilité de $P(u)$ avec le polynôme minimal

Titre : Caractérisation de l'inversibilité de $P(u)$ avec le polynôme minimal
Difficulté : ★★☆☆☆
ID : 140 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 126 | ID : 140

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ et μ_u le polynôme minimal de u. Démontrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on a $P(u)$ est inversible si et seulement si $P \wedge \mu_u = 1$

Solution

Si $P \wedge \mu_u = 1$, d'après le lemme de Bezout, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tel que $UP + V\mu_u = 1$, donc $U(u) \circ P(u) + V(u) \circ \mu_u(u) = \mathrm{Id}_E$ et comme $\mu_u(u) = \theta$ (θ c'est l'endomorphisme nul), on a $P(u) \circ U(u) = U(u) \circ P(u) = \mathrm{Id}_E$, donc $P(u)$ est inversible et $P(u)^{-1} = U(u)$.
Réciproquement, supposons que $P(u)$ est inversible. Soit D un diviseur commun de P et μ_u alors il existe $P_1, \mu_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\begin{cases} P = P_1 D \\ \mu_u = \mu_1 D \end{cases}$. On a $P_1\mu_u = P_1 D\mu_1 = P\mu_1$ donc $P(u) \circ \mu_1(u) = P_1(u) \circ \mu_u(u) = 0$ et $P(u)$ est inversible on a $\mu_1(u) = 0$ donc $\mu | \mu_1$, or $\mu_1 | \mu$ donc D est constant non nul donc $P \wedge \mu_u = 1$ puisque seule les constantes non nulles sont leurs diviseurs communs.
Conclusion : $P(u) \in \mathbf{GL}(E) \Leftrightarrow P \wedge \mu_u = 1$.

EXERCICE 148 Preuve d'une propriété par trois méthodes

Titre : Preuve d'une propriété par trois méthodes
Difficulté : ★☆☆☆☆
ID : 141 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 127 | ID : 141

On se propose de démontrer que :
$(\star) \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists U, V \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}), \quad A = U + V$
par trois méthodes :

1. **Méthode 1 :**
   (a) Démontrer que $(\star)$ est vrai si $A = 0$ ou A inversible.
   (b) On suppose que $A = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ où I_r est la matrice unité de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ et 0_{n-r} la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$. Démontrer que A vérifie $(\star)$.
   (c) Démontrer que si $\mathrm{rg}\,(A) = r$ avec $0 < r < n$ alors A vérifie $(\star)$.
2. **Méthode 2 :** Démontrer qu'il existe au moins un réel λ tel que $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$. Conclure.
3. **Méthode 3 :** Nécessite le chapitre sur les espaces vectoriels normés.
   (a) Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); t \mapsto \det(I_n - tA)$ est continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer $f(0)$.
   (c) En déduire qu'il existe un voisinage V non vide de 0 tel que $f(V) \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.
   (d) Conclure.

Solution

1. **Méthode 1 :**
   (a) Si $A = 0$ alors $A = (I_n) + (-I_n)$. Si $A = I_n$ alors $A = 2I_n + (-I_n)$.
   (b) Si $A = J_r$ alors $A = U' + V'$ où $U' = 2I_n$ est inversible et $V' = -\begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & 2I_{n-r} \end{pmatrix}$ est inversible car diagonale par blocs inversibles.
   (c) Si $\mathrm{rg}\,(A) = r$ avec $0 < r < n$ alors A est équivalente à J_r, donc $A = PJ_rQ$avec P et Q inversibles, et comme $J_r = U' + V'$ avec U' et V' inversibles on a $A = PJ_rQ = (PU'Q) + (PV'Q) = U + V$ avec $U = PU'Q$ et $V = PV'Q$ inversibles.

2. **Méthode 2 :** Pour tout $t \in \mathbb{K}$, $f(t) = \det(A - tI_n)$ est polynômiale en t car $f(t) = (-1)^n \chi_A(t)$ et χ_A polynôme de degré n, donc f admet au plus n racines et comme $\mathbb{K}$ est infini, il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $f(\lambda) \neq 0$, donc $V = A - \lambda_0 I_n$ est inversible. En posant $U = \lambda_0 I_n$, on a $A = U + V$ et $U, V \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$.
3. **Méthode 3 :**
   (a) On sait que det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $t \mapsto I_n - tA$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car $t \mapsto tA$ est linéaire) donc $f : t \mapsto \det(I_n - tA)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) $f(0) = I_n$
   (c) $I_n \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ et celui-ci est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc un voisinage ouvert de I_n. Par continuité, il existe un voisinage ouvert I de 0 dans $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset GL_n(\mathbb{R})$. Comme I est un ouvert non vide il existe $\lambda \in I$ tel que $\lambda \neq 0$ donc $f(\lambda) = I_n - \lambda A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ donc $V = A - \frac{1}{\lambda} I_n \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$.
   (d) En posant $U = \frac{1}{\lambda} I_n$ on a $U, V \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ et $A = U + V$.

EXERCICE 149 Polynôme minimal et somme directe et stabilité

Titre : Polynôme minimal et somme directe et stabilité
ID : 142 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 128 | ID : 142
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie , $u \in \mathcal{L}(E)$ et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, c'est-à-dire $F \oplus G = E$. Démontrer que si F et G sont stables par u et $v \in \mathcal{L}(F)$ et $w \in \mathcal{L}(G)$ les endomorphismes induits par u à F et G respectivement alors on a :

$$\mu_u = \mu_v \vee \mu_w$$

Solution

Soit $x \in E$ on écrit $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$ donc en notant $Q = \mu_v \vee \mu_w$, on a $Q(u)(x) = Q(u)(y) + Q(u)(z)$. Or $Q(u)(y) = Q(v)(y)$ et comme $\mu_v | Q$, il existe un polynôme $Q_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = Q_1 \mu_v$ donc $Q(v) = Q_1(v) \circ \mu_v(v) = \theta_F$ où θ_F est l'endomorphisme nul d F, en particulier $Q(u)(y) = 0$. De la même façon, on a $Q(u)(z) = 0$ donc $Q(u)(x) = 0$ pour tout $x \in E$, donc $Q(u) = \theta$ (où θ est l'endomorphisme nul de E.), donc :

$$(\star) \quad \mu_u | (\mu_v \vee \mu_w).$$

Réciproquement, on sait que $\begin{cases} \mu_v | \mu_u \\ \mu_w | \mu_u \end{cases}$, donc :

$$(\star)' : \quad (\mu_v \vee \mu_w) | \mu_u.$$

Par $(\star)$ et $(\star)'$, il vient :

$$\mu_u = \mu_v \vee \mu_w$$

EXERCICE 150 Sous-espaces vectoriels stables par dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

Titre : Sous-espaces vectoriels stables par dérivation dans $\mathbb{K}[X]$
ID : 143 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 129 | ID : 143
Difficulté : ★☆☆☆☆

1. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ tel que :
$$(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \exists P \in \mathbb{K}[X], \quad \begin{cases} P \in F \\ \deg(P) = n \end{cases}.$$
Prouver que $F = \mathbb{K}[X]$.
2. Soit $u : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], P \mapsto P'$. Démontrer que les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ stables par u sont : $\{0\}$, $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution

1. Supposons la condition $(\star)$ vérifiée, alors il existe une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de F tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n$. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q \in \mathbb{K}_n[X]$. La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille libre de polynômes de $K_n[X]$ (libre car degrés deux à deux distincts) donc c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ car elle compte $n+1$ vecteurs. Comme $Q \in \mathbb{K}_n[X]$, il existe une famille de scalaires $(\alpha_k)_{0\leq k\leq n}$ tel que $Q = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$, donc $Q \in F$, donc $\mathbb{K}[X] \subset F$ et par suite $F = \mathbb{K}[X]$.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ stable par u.
• Premier cas : F de dimension finie. Si $F = \{0\}$ alors F est stable. Sinon l'ensemble $I = \{\deg(P)/P \in F\{0\}\}$ est une partie non vide finie de $\mathbb{N}$ donc elle admet un plus grand élément n, en particulier, il existe $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\deg(P) = n$ et $P \in F$. Comme F est stable par u on a :
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P_k = u^{n_k}(P) \in F$$
Par ailleurs $\deg(P_k) = n - (n_k) = k$, donc $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille de polynômes de F tel que $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, donc $\mathbb{K}_n[X] \subset F$. Par ailleurs $F \subset \mathbb{K}_n[X]$ car si $P \in F$, par définition de n, on a $P = 0$ ou $P \neq 0$ et $\deg(P) \leq n$. Il découle de tout que $F = K_n[X]$.
• Si F n'est pas de dimension finie, soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe $Q \in F$ tel que $m = \deg(Q) \geq n$ (dimension infinie). Soit $P_n = Q^{(m-n)}$ alors $\deg(P_n) = m - (n - m) = n$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in F$ de degré n et par le 1) on a $F = \mathbb{K}[X]$.
Conclusion : les sous-espaces $u-$stables de $\mathbb{K}[X]$ sont : $\{0\}$, les $\mathbb{K}_n[X], n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{K}[X]$.

EXERCICE 151 Valeurs propres et racines p èmes de l'unité

Titre : Valeurs propres et racines p èmes de l'unité
ID : 144 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 130 | ID : 144
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^p = I_n$ et ω une racine $p$ème de l'unité dans $\mathbb{C}$ telle que $\omega^{-1} \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{p-1} \omega^k A^k = 0.$$

Solution

On a $I_n^p - (\omega A)^p = 0$ donc :
$$(\star) \quad (I_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} \omega^k A^k = 0.$$
Comme $\omega^{-1} \notin \mathrm{Sp}(A)$, on a $A - \frac{1}{\omega} I_n$ est inversible, don $I_n - \omega A$ est inversible, donc en multipliant les membres de $(\star)$ par $(I_n - A)^{-1}$, on obtient la formule désirée :
$$\sum_{k=0}^{p-1} \omega^k A^k = 0.$$

EXERCICE 152 Valeur propre de $u \circ v$ et $v \circ u$

Titre : Valeur propre de $u \circ v$ et $v \circ u$ — **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 145 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 131 | ID : 145

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \in \mathrm{Sp}(u \circ v) \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$$

Solution

Supposons que $\lambda \in \mathrm{Sp}(u \circ v)$.
• Si $\lambda = 0$ alors $u \circ v$ est non inversible donc au moins un des endomorphismes u ou v est non inversible. Si u n'est pas inversible alors il existe $x \in E$ tel que $x \neq 0$ et $u(x) = 0$, donc $(v \circ u)(x) = 0$ donc $0 \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$. Si u est inversible, forcément v n'est pas inversible donc il existe $y \in E$ tel que $y \neq 0$ et $v(y) = 0$. Posons $x = u^{-1}(y)$ alors $x \neq 0$ et $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(y) = 0$, donc x est un vecteur propre associé à 0 et $0 \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$.
• Si $\lambda \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $x \neq 0$ et $u(v(x)) = \lambda x$, donc $(v \circ u)(v(x)) = \lambda v(x)$. Or $v(x) \neq 0$ car sinon on aurait $v(x) = 0$ donc $u(v(x)) = \lambda x = 0$ et comme $\lambda \neq 0$, on aurait $x = 0$, ce qui est faux. Donc $y = v(x) \neq 0$ et $(v \circ u)(y) = \lambda y$, donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$.

EXERCICE 153 Vecteurs propres et comatrice

Titre : Vecteurs propres et comatrice — **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 146 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 132 | ID : 146

On rappelle et on ne demande pas de le démontrer que :

$$(\star) \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M\,{}^t(\mathrm{Com}(A)) = \det(M) I_n.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = {}^t(\mathrm{Com}(A))$. Montrer que tout vecteur propre de A est un vecteur propre de B.

Solution

Si $\mathrm{rg}\,(A) = n - 1$, alors Soit $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de A, donc $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$.
• Si $\lambda \neq 0$, on peut écrire $B\alpha X = BAX = \det(A) I_n X = \det(A) X$, ce qu donne $BX = \frac{\det(A)}{\lambda} X$.
• Si $\lambda = 0$, alors $A \notin \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, donc on peut considérer deux cas :
- Soit $\mathrm{rg}\,(A) = n - 1$, donc $\dim(\ker(A) = 1$. Comme $X \in \ker(A)$ et $X \neq 0$, on a $\ker(A) = \mathbb{K}X$. On a $AB = BA = \det(A) I_n = 0$ donc $\mathrm{Im}(B) \subset \ker(A) = \mathbb{K}X$, donc $BX \in \mathbb{K}X$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $BX = \alpha X$ et X est un vecteur propre de B.
- Soit $\mathrm{rg}\,(A) < 1$ donc $B = 0$ et tout vecteur propre de A est vecteur propre de B.

EXERCICE 154 Noyaux itérés

Titre : Noyaux itérés — **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 147 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 133 | ID : 147

Dans tout ce qui suit, n est un nombre entier naturel, E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et u est un endomorphisme de E.

1. Démontrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, si $(n_0, \dots, n_m)$ est une famille d'entiers naturels tel que $n_0 < \cdots < n_m$ alors $m \leq n_m$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que :
   • si $\ker(u^p) = \ker(u^{p+1})$ alors $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq p \Rightarrow \ker(u^k) = \ker(u^p)$.
   • si $\ker(u^p) \neq \ker(u^{p+1})$ alors $p < n$.
3. Démontrer que $u^n = u^{n+1}$ et que $E = \ker(u^n) \oplus \mathrm{Im}(u^n)$.

Solution

1. Par récurrence :
   • Pour $m = 1$, on a $n_0 < n_1$, donc $n_1 \geq n_0 + 1 \geq 1$.
   • Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété en question est vraie. Soit $n_0, \dots, n_{m+1}$ tel que $n_0 < \cdots < n_{m+1}$ alors $\begin{cases} n_0 < \cdots < n_m \\ n_m < n_{m+1} \end{cases}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient : $\begin{cases} m \leq n_m \\ n_m < n_{m+1} \end{cases}$ donc $m < n_{m+1}$ et finalement $m + 1 \leq n_{m+1}$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(u^p) = \ker(u^{p+1})$ et soit $k \geq p$. Si $k = p$ alors $\ker(u^k) = \ker(u^p)$.
   Pour $k \geq p + 1$ on va démontrer par récurrence que $\ker(u^k) = \ker(u^p)$.
   • Si $k = p + 1$ c'est vrai par les données de l'énoncé.
   • Soit $k \geq p + 1$ tel que $\ker(u^k) = \ker(u^p)$. Soit $x \in \ker(u^{k+1})$ alors $u(x) \in \ker(u^k)$ donc $u(x) \in \ker(u^p)$ donc $x \in \ker(u^{p+1})$ et comme $\ker(u^p) = \ker(u^{p+1})$ on a $x \in \ker u^p$, ce qui achève la démonstration par récurrence.
   - Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(u^p) \neq \ker(u^{p+1})$ alors pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$j \leq p \Rightarrow \ker(u^j) \neq \ker(u^{j+1}).$$

EXERCICE 155 Rang d'une matrice annulée par un polynôme

Titre : Rang d'une matrice annulée par un polynôme
ID : 148 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 134 | ID : 148
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice tel que $A^3 + A^2 + A = 0$. Démontrer que $\mathrm{rg}\,(A)$ est un entier naturel pair.

Solution

En considérant que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le polynôme $P = X^3 + X^2 + X = X(X - j)(X - \bar{j})$ est un polynôme annulateur de A, donc A diagonalisable et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{1, j, \bar{j}\}$. il en découle que le polynôme caractéristique de A est de la forme :

$$\chi_A = X^m (X - j)^p (X - \bar{j})^p$$

avec $(m, p) \in \mathbb{N}^2$ et $m + 2p = n$. (remarquons que les éventuelles racines j et $\bar{j}$ ont la même multiplicité car le polynôme P est à coefficients réels.) Puisque A est diagonalisable on a :

$$\dim(E_0(A)) = m = n - 2p$$

et par le théorème du rang, on a

$$\mathrm{rg}\,(A) = n - \dim(E_0(A)) = n - (n - 2p) = 2p$$

donc le rang de A est pair.

EXERCICE 156 Matrices de rang 1 et application

Titre : Matrices de rang 1 et application
ID : 149 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 135 | ID : 149
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit n un entier tel que $n \geq 2$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice carrée dont tous les coefficients valent 1. On note I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer J^2 et en déduire que J est diagonalisable.
2. En remarquant que le rang de J est égal à 1, montrer que le polynôme caractéristique de J est scindé et que J possède exactement deux valeurs propres.
3. Donner le polynôme caractéristique de J
4. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $K = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$. Exprimer J en fonction de K, I, a et b. En déduire que K est diagonalisable et préciser le polynôme caractéristique χ_K de K.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Démontrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

Solution

1. Le calcul donne $J^2 = nJ$, donc la polynôme $P = X(X-n)$ est un polynôme annulateur de J. Comme P est scindé à racines simples, on a J est diagonalisable.
2. Comme $\mathrm{rg}\,(J) = 1$ (colonne non nulle qui se répète n fois), on a 0 est une valeur propre de J et $\dim(E_0(J)) = n-1$, donc le polynôme caractéristique de J est de la forme $\chi_J = X^{n-1}(X-c)$ avec $c \in \mathbb{R}$ et comme $\mathrm{tr}(J) = n$ et χ_A est scindé, on a $c = n$, en particulier $\mathrm{Sp}(J) = \{0, n\}$.
3. La question précédente montre que : $\chi_J = X^{n-1}(X-n)$.
4. On a $K = bJ + (a-b)I$, donc $bJ = K + (b-a)I$ Comme
$$(bJ)^2 = b^2J^2 = b^2nJ = nb(bJ)$$
on a
$$(K + (b-a)I)^2 = nb(K + (b-a)I)$$
donc
$$(K + (b-a)I)(K + (b-a-nb)I) = 0$$
donc le polynôme
$$Q = (X - (a-b))(X - (a-b+nb))$$
est un polynôme annulateur de K.
• Si $b \neq 0$ alors Q est scindé à racines simples, donc K est diagonalisable.
• Si $b = 0$ alors $K = aI_n$ est même diagonale.
5. Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A et soit $F = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n)$. Comme $\mathrm{rg}\,(A) = 1$ on a $\dim(F) = 1$, donc il existe $V \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ tel que $V \neq 0$ et $F = \mathbb{K}V$. Puisque $C_k \in F$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, il existe $(\alpha_k, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $C_k = \alpha_k V$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Posons :
$$V = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad W = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$
alors $W \neq 0$ car sinon A serait nulle et on a :
$$V\,{}^tW = A \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(A) = {}^tWV$$

donc $A^2 = (V{}^t\!W)(V{}^t\!W) = V({}^t\!WV){}^t\!W = V\,\mathrm{tr}(A){}^t\!W = \mathrm{tr}(A)V{}^t\!W = \mathrm{tr}(A)A$ et par suite en posant $\gamma = \mathrm{tr}(A)$, le polynôme $P = X^2 - \gamma X$ est un polynôme annulateur de A.
• Si $\gamma \neq 0$ alors $P = X(X-\gamma)$ est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.
• Si $\gamma = 0$ alors $A^2 = 0$ et comme $\mathrm{rg}\,(A) = 1$ on peut dire que 0 est une valeur propre et $\dim(E_0(A)) = n-1$, donc la multiplicité de 0 dans χ_A est au moins $n-1$, donc χ_A est de la forme :

$$\chi_A = X^{n-1}(X-\lambda)$$

et $\mathrm{tr}(A) = \lambda$ donc $\lambda = 0$ et $\chi_A = X^n$ donc $m(0) = n > \dim(E_0(A))$ donc A n'est pas diagonalisable.
On a prouvé les deux implications :

$$\begin{cases} \mathrm{tr}(A) \neq 0 \Rightarrow A \text{ diagonalisable} \\ \mathrm{tr}(A) = 0 \Rightarrow A \text{ non diagonalisable} \end{cases}$$

Ainsi on a démontré que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

EXERCICE 157 Un exemple de trigonalisation d'une matrice

Titre : Un exemple de trigonalisation d'une matrice
ID : 150 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 136 | ID : 150
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calculer le polynôme caractéristique de A.
b) Trigonaliser la matrice A.

Solution

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

a)Le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 1 \\ -2 & X-1 & 2 \\ -3 & 1 & X+2 \end{vmatrix}$$

Par l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$, on obtient :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ 0 & X-1 & 2 \\ X-1 & 1 & X+2 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & X-1 & 2 \\ 1 & 1 & X+2 \end{vmatrix}$$

Finalement par l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et le developpement suivant la première colonne, on a :

$$\chi_A = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & X-1 & 2 \\ 0 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X+1)$$

c) Déterminons les sous-espaces propres associés à 1 et -1 : On note $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

• Pour 1, on a $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, donc pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a

$$AX = X \Leftrightarrow (A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 3x - y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x(e_1 + e_3)$$

• Pour la valeurs propre -1, on a : $A + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned} AX = -X &\Leftrightarrow (A + I_3)X = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = y + z \\ x + y = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 2x \end{pmatrix} = x(e_1 + e_2 + 2e_3) \end{aligned}$$

Il en découle que :

$$E_1(A) = \mathbb{K}V_1, E_{-1}(A) = \mathbb{K}V_2$$

avec

$$\begin{cases} V_1 = e_1 + e_3 \\ V_2 = e_1 + e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

Soit $\mathscr{C} = (V_1, V_2, V_3)$ avec $V_3 = e_1$
On a $AV_3 = Ae_1 = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3 = -V_1 + 2V_2 + V_3$, donc la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A relativement à la base $\mathscr{C}$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{C}$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour determiner P^{-1} on remarque que :

$$\begin{cases} e_1 + e_3 = V_1 \\ e_1 + e_2 + 2e_3 = V_2 \\ e_1 = V_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_3 = e_1 \\ -2V_1 + V_2 + V_3 = e_2 \\ V_1 - V_2 = e_3 \end{cases}$$

donc :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et on a :

$$A = PTP^{-1}$$

EXERCICE 158 Un bon problème sur les matrices de taille 2 et 3

Titre : Un bon problème sur les matrices de taille 2 et 3 **Difficulté :**
ID : 151 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 137 | ID : 151

1. E est un espace vectoriel de dimension n avec $n \neq 0$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.
   (a) Démontrer que pour toutes matrices M_1, M_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ si M_1 et M_2 sont semblables, il en est de même de $M_1 + \lambda I_n$ et $M_2 + \lambda I_n$.
   (b) Soit u un endomorphisme de E. Démontrer que u est une homothétie si et seulement si pour tout vecteur x de E, la famille $(x, u(x))$ est liée. En déduire que si E est de dimension 2 et u est un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie alors il existe au moins un vecteur x tel que la famille $(x, u(x))$ est une base de E.
   (c) Démontrer que pour toute matrice carrée A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on a A est scalaire ou bien A est semblable à la matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ 1 & \tau \end{pmatrix}$ où $\delta = \det(A)$ et $\tau = \operatorname{tr}(A)$.
   (d) Démontrer que si $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sont deux matrices non scalaires alors A et B sont semblables si et seulement si $\det(A) = \det(B)$ et $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E. Justifier que le polynôme caractéristique de E est de la forme
$$\chi_u = (X - \lambda)Q(X) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{K} \quad \text{et} \quad Q \in \mathbb{K}[X].$$
   (a) Démontrer que si $Q(\lambda) \neq 0$ alors il existe une base b de E tel que la matrice de u relativement à b est de la forme : $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}$ où $M' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
   (b) Démontrer que si $Q(\lambda) = Q'(\lambda) = 0$ alors $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ est nilpotent.
   (c) Démontrer que si $Q(\lambda) = 0$ et $Q'(\lambda) \neq 0$, alors on se ramène au cas du a) ci-dessus.
3. Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, on considère les matrices J et K suivantes :
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice p avec $p \in \{2, 3\}$. Démontrer que si $p = 3$, alors A est semblable à J et si $p = 2$, alors A est semblable à K.
4. En déduire que si A et B sont deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ tel que $\chi_A = \chi_B$ et $\mu_A = \mu_B$ alors A et B sont semblables.
5. En utilisant tout ce qui précède, démontrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_3(K)$ tel que $\chi_A = \chi_B$ et $\mu_A = \mu_B$ alors A et B sont semblables.

Solution

1. (a) Si M_1 et M_2 sont semblables, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $M_2 = PM_1P^{-1}$, donc $M_2 + \lambda I_n = P(M_1 + \lambda I_n)P^{-1}$ et $M_1 + \lambda I_n$ et $M_2 + \lambda I_n$ sont semblables.
   (b) Si u est une homothétie alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \operatorname{Id}_E$, donc pour tout $x \in E$,on a $u(x) = \lambda x$ et la famille $(x, u(x))$ est liée. Réciproquement, si pour tout vecteur x de E, la famille $(x, u(x))$ est liée, si $E = \{0\}$, on a $u = \theta = 0 \operatorname{Id}_E$ est une homothétie. Si $E \neq \{0\}$, soir $a \in E$ tel que $a \neq 0$, comme $(a, u(a))$ est liée et $a \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(a) = \lambda a$. Soit $x \in E$. Si la famille (a, x) est libre, alors $x + a \neq 0$, donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \alpha x$ et $u(x + a) = \beta(x + a)$, donc $u(x) + u(a) = \beta(x + a)$, donc $\alpha x + \lambda a = \beta x + \beta a$, et par liberté on a $\lambda = \alpha = \beta$, donc $u(x) = \lambda x$. Si la famille (x, a) est liée, comme $a \neq 0$, il

existe $\gamma \in \mathbb{K}$ tel que $x = \gamma a$, donc $u(x) = \gamma u(a) = \gamma\lambda a = \lambda(\gamma a) = \lambda x$. Ainsi :

$$\forall x \in E, u(x) = \lambda x$$

donc $u = \lambda \operatorname{Id}_E$ est une homothétie. L'équivalence demandée est prouvée et par négation des assertions équivalentes, on a : si E est de dimension 2 et u est un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie alors il existe au moins un vecteur x tel que la famille $(x, u(x))$ est une base de E (car en dimension 2 une famille à deux éléments est libre si et seulement si c'est une base.)

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, Si A n'est pas scalaire, l'endomorphisme u canoniquement associé à A n'est pas une homothétie, donc par la question précédente, il existe au moins un vecteur e de E tel que la famille $c = (e, u(e))$ est une base de $E = \mathbb{K}^2$, alors $\operatorname{mat}_c(u) = A' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et A et A' sont donc semblables. On a $\operatorname{tr}(A') = \beta = \tau$ et $\det(A') = -\alpha = \delta$, donc $A' = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ 1 & \tau \end{pmatrix}$ où $\delta = \det(A)$ et $\tau = \operatorname{tr}(A)$.

(d) si $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sont deux matrices non scalaires alors A et B sont semblables respectivement à à

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ 1 & \tau \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B' = \begin{pmatrix} 0 & -d \\ 1 & t \end{pmatrix}$$

avec $\tau = \operatorname{tr}(A), t = \operatorname{tr}(B), \delta = \det(A), d = \det(B)$ Si A et B sont semblables, on sait que $t = \tau$ et $d = \delta$. Réciproquement si $t = \tau$ et $d = \delta$ alors $A' = B'$ et par suite A et B sont semblables.

Conclusion : Si A et B sont deux matrices non scalaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, alors : $A \simeq B$ si et seulement si $\det(A) = \det(B)$ et $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors χ_u est scindé donc de la forme $\chi_u = (X - \lambda)(X - \alpha)(X - \beta)$, donc $\chi_u = (X - \lambda)Q(X)$ avec $Q(X) = (X - \alpha)(X - \beta)$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \chi_u(t)$ est polynomiale de degré 3, et comme de plus χ_u est unitaire, on a $\lim\limits_{t \to -\infty} \chi_u(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \chi_u(t) = +\infty$, donc par continuité des polynômes et le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_u(\lambda) = 0$, donc λ est une valeur propre de u et le polynôme caractéristique est de la forme $\chi_u(X) = (X - \lambda)Q(X)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$..

(a) Si $Q(\lambda) \neq 0$ alors $(X - \lambda) \wedge Q = 1$. Par le lemme de décomposition des noyaux, on a :

$$\ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \oplus \ker(Q(u)) = E$$

Comme λ est une valeur propre de u, de multiplicité 1, le sous-espace propre $\ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$ est de dimension 1, donc $\dim(\ker(Q(u)) = 2$. Les sous-espaces vectoriels $\ker(u)$ et $\ker(Q(u))$ sont stables par u, donc la matrice de u relativement à une base $b = (w_1, w_2, w_3)$, adaptée à la somme directe $(\star)$ est

$$\operatorname{mat}_b(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}$$

où

$$M' = \operatorname{mat}_{(w_2, w_3)}(u_2)$$

u_2 étant l'endomorphisme de $\ker(Q(u))$ induit par u, en particulier $M' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

(b) Si $Q(\lambda) = Q'(\lambda) = 0$ alors λ est une valeur propre de u d'ordre de multiplicité 2, et comme Q est unitaire, on a

$$Q(X) = (X - \lambda)^2,$$

donc

$$\chi_u(X) = (X - \lambda)^3.$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_u(u) = \theta$, c'est-à-dire $(u - \lambda \operatorname{Id}_E)^3 = \theta$, donc l'endomorphisme $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ est nilpotent.

(c) Si $Q(\lambda)=0$ et $Q'(\lambda)\neq 0$, alors λ est une racine simple de Q, et comme $\deg(Q)=2$, Q admet une autre racine λ' et on a alors :

$$\chi_u(X)=(X-\lambda')(X-\lambda)^2$$

donc

$$\chi_u(X)=(X-\lambda')Q_1(X)$$

avec $Q_1(\lambda')\neq 0$, donc on est dans les conditions du cas du a) ci-dessus.

3. On a donné :

$$J=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad K=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Soit $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente et notons u l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Si l'indice de nilpotence de A est $p=3$ alors $u^2\neq\theta$, il existe $e\in\mathbb{K}^3$, tel que $u^2(e)\neq 0$. La famille $c=(e,u(e),u^2(e))$ est libre car si $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{K}$ tel que $\sum_{k=0}^{2}\lambda_k u^k(e)=0$ alors $u^2\left(\sum_{k=0}^{2}\lambda_k u^k(e)\right)=0$, donc $\alpha_0u^2(e)=0$, donc $\alpha_0=0$, on a donc $\alpha_1u(e)+\alpha_2u^2(e)=0$ et en composant par u on obtient $\alpha_1=0$, puis $\alpha_2=0$. Il en découle que c est une base de $\mathbb{K}^3$. La matrice de u relativement à la base c est $\mathrm{mat}_c(u)=J$, donc $A\simeq J$.
Si l'indice de nilpotence de A est $p=2$, il existe un vecteur $e\in E$ tel que $u(e)\neq 0$, comme dans le cas ci-dessus, la famille $(e,u(e))$ est libre. Comme $u^2=\theta$, on a $\mathrm{Im}(u)\subset\ker(u)$ et par le théorème du rang on a $\mathrm{rg}\,(u)+\dim(\ker(u))=3$, or $\mathrm{Im}(u)$ est non nul car u non nul sinon son indice de nilpotence serait 1. Ainsi $n_1=\dim(\mathrm{Im}(u))$ et $n_2=\dim(\ker(u))$ sont deux entiers non nuls de somme 3 et $n_1\leq n_2$. La seul possibilité est $n_1=1$ et $n_2=2$, donc $\dim(\ker(u)=2$. Comme $w_2=u(e)\in\ker(u)$, il existe $w_3\in\ker(u)$ tel que la famille (w_2,w_3) est une base de $\ker(u)$. Soit $b=(w_1,w_2,w_3)$ avec $w_1=e,w_2=u(e)$ et w_3 comme défini ci-dessus, alors la famille b est libre car si $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{K}$ tel que $\sum_{k=1}^{3}\alpha_k w_k=0$, en appliquant u, il vient : $al_1u(e)=0$ donc $\alpha_1=0$ et comme (w_2,w_3) est libre on a $\alpha_2=\alpha_3=0$. Par ailleurs on a clairement $\mathrm{mat}_b(u)=K$, donc $A\simeq K$.

4. On sait que deux matrices A et B nilpotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ ont le même polynôme caractéristique, à savoir : $\chi_A=\chi_B=X^3$. La présente question se ramène donc à prouver que si deux matrices nilpotentes A et B ont le même polynôme minimal alors elles sont semblables. Soient donc A et B deux matrices nilpotentes ayant le même polynôme minimal $\pi=X^p$, donc A et B ont le même indice de nilpotence, à savoir p, le degré de π.
• Si $p=0$ alors $A=B=0$.
• Si $p=1$ alors d'après la question précédente A et B sont semblables à K, donc elles sont semblables entre elles.
• Si $p=2$ alors d'après la question précédente A et B sont semblables à J, donc elles sont semblables entre elles.

5. Un sens est connu, à savoir si A et B sont semblables alors elles ont le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal. On va donc prouver la réciproque. Supposons que A et B ont le même polynôme caractéristique $\chi=\chi_A=\chi_B$ et le même polynôme minimal $\pi=\pi_A=\pi_B$.
• Premier cas χ est de la forme $\chi=(X-\lambda)^3$. Dans ce cas les matrices $N=A-\lambda I_3$ et $N'=B-\lambda I_3$ sont nilpotentes et ont le même indice de nilpotence à savoir $p=\deg(\pi)$, donc N et N' sont semblables en vertu de la question précédente. Donc A et B sont semblables en vertu de la première question de ce problème.
• Deuxième cas : χ est de la forme $\chi=(X-\lambda)Q(X)$ avec $Q(\lambda)\neq 0$. D'après la question 2)a) on a A et B sont semblables à des matrices respectives de la forme :

$$A'=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&M_1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad B'=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&M_2\end{pmatrix}$$

avec M_1 et M_2 deux matrices carrées de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Comme $\chi_A = \chi_B$ on a $\chi_{M_1} = \chi_{M_2}$. Si M_1 et M_2 sont scalaires forcément elles sont égales à αI_2 où α est la racine double de $\chi_{M_1} = \chi_{M_2}$. Donc A et B sont égales à la matrice $\text{diag}(\lambda, \alpha, \alpha)$. Si une des matrices n'est pas scalaire l'autre aussi ne l'est pas car sinon on n'aurait pas les même polynômes caractéristiques, et comme $\chi_{M_1} = \chi_{M_2}$, les matrices M_1 et M_2 ont même trace et même déterminant donc elles sont semblables. Si $M_2 = QM_1Q^{-1}$ avec $Q \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{K})$, il est aisé de vérifier que $B = PAP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

Finalement, A et B sont semblables.
• La question 2) montre que tous les cas se ramènent aux cas étudiés ci-dessus, ce qui achève la preuve.

EXERCICE 159 Un bon problème sur les matrices de petite taille

Titre : Un bon problème sur les matrices de petite taille
ID : 152 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 138 | ID : 152
Difficulté : ★☆☆☆☆

On se propose de démontrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a A et ${}^tA$ sont semblables. On admet que ce résultat est vrai pour toute matrice nilpotente.

1. Démontrer que le résultat est vrai s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A - \lambda I_n$ est nilpotente.
2. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Démontrer que u est une homothétie si et seulement si pour tout vecteur x de E, la famille $(x, u(x))$ est liée. En déduire que si E est de dimension 2 et u est un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie alors il existe au moins un vecteur x tel que la famille $(x, u(x))$ est une base de E.
3. Démontrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on a soit A est scalaire soit A est semblable à la matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ 1 & \tau \end{pmatrix}$ où $\delta = \det(A)$ et $\tau = \text{tr}(A)$.
4. En déduire que la propriété à démontrer est vraie si $n = 2$.
5. Démontrer que si $A_1, \dots, A_s$ sont des matrices carrées tel que $A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{K})$ pour tout $k \in [\![1, s]\!]$ avec $n_k \in \mathbb{N}^*$ et si $B_1, \dots, B_s$ sont des matrices carrées tel que $b_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{K})$ et A_k et B_k sont sembalbles alors les matrices diagonales par blocs : $U = \text{diag}(A_1, \dots, A_s)$ et $V = \text{diag}(B_1, \dots, B_s)$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $n = \sum_{k=1}^{s} n_k$.
6. Démontrer par récurrence que la propriété ci-dessus est vrai dans le cas où A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que le polynôme caractéristique de A est de la forme $\chi_A = P_1(X)P_2(X)$ où P_1 et P_2 sont deux polynômes non constants et premiers entre eux.
7. Démontrer le résultat admis pour les matrices nilpotentes dans le cas où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'indice de nilpotence n.

Solution

1. Si $N = A - \lambda I_n$ est nilpotente on a admis que N et ${}^tN$ sont semblables, donc il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que ${}^tN = PNP^{-1}$ donc ${}^tA = {}^tN + \lambda I_n = P(N + I_n)P^{-1} = PAP^{-1}$ et A et ${}^tA$ sont donc semblables.
2. Si u est une homothétie alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \,\text{Id}_E$, donc pour tout $x \in E$,on a $u(x) = \lambda x$ et la famille $(x, u(x))$ est liée. Réciproquement, si pour tout vecteur x de E, la famille $(x, u(x))$ est liée, si $E = \{0\}$, on a $u = \theta = 0\,\text{Id}_E$ est une homothétie. Si $E \neq \{0\}$, soir $a \in E$ tel que $a \neq 0$, comme $(a, u(a))$ est liée et $a \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(a) = \lambda a$. Soit $x \in E$. Si la famille (a, x) est libre, alors $x + a \neq 0$, donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \alpha x$ et $u(x + a) = \beta(x + a)$, donc $u(x) + u(a) = \beta(x + a)$, donc $\alpha x + \lambda a = \beta x + \beta a$, et par liberté on a

$\lambda = \alpha = \beta$, donc $u(x) = \lambda x$. Si la famille (x, a) est liée, comme $a \neq 0$, il existe $\gamma \in \mathbb{K}$ tel que $x = \gamma a$, donc $u(x) = \gamma u(a) = \gamma\lambda a = \lambda(\gamma a) = \lambda x$. Ainsi :

$$\forall x \in E, u(x) = \lambda x$$

donc $u = \lambda \operatorname{Id}_E$ est une homothétie. L'équivalence demandée est prouvée et par négation des assertions équivalentes, on a : si E est de dimension 2 et u est un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie alors il existe au moins un vecteur x tel que la famille $(x, u(x))$ est une base de E (car en dimension 2 une famille à deux éléments est libre si et seulement si c'est une base.)

3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, Si A n'est pas scalaire, l'endomorphisme u canoniquement associé à A n'est pas une homothétie, donc par la question précédente, il existe au moins un vecteur e de E tel que la famille $c = (e, u(e))$ est une base de $E = \mathbb{K}^2$, alors $\operatorname{mat}_c(u) = A' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et A et A' sont donc semblables. On a $\operatorname{tr}(A') = \beta = \tau$ et $\det(A') = -\alpha = \delta$, donc $A' = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ 1 & \tau \end{pmatrix}$ où $\delta = \det(A)$ et $\tau = \operatorname{tr}(A)$.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Soit A est scalaire, donc $A = \alpha I_2$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$, donc ${}^tA = \alpha I_2 = A$ donc A et ${}^tA$ sont semblables. Soit A n'est pas scalaire donc ${}^tA$, aussi, n'est pas scalaire, et comme $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}({}^tA) = \tau$ et $\det(A) = \det({}^tA) = \delta$, on a d'après la question précédente A et ${}^tA$ sont semblables à $B = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ 1 & \tau \end{pmatrix}$, donc elles sont semblables entre elles.

5. Pour tout $k \in [\![1, s]\!]$, comme A_k et B_k sont semblables, il existe $P_k \in \mathbf{GL}_{n_k}(\mathbb{K})$, tel que :

$$B_k = P_k A_k P_k^{-1}$$

Soit :

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & P_s \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}), n = \sum_{k=1}^{s} n_k$$

alors on a

$$V = PUP^{-1}$$

où

$$U = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_s) \quad \text{et} \quad V = \operatorname{diag}(B_1, \ldots, B_s)$$

donc U et V sont semblables.

6. - On a vu que la propriété est vraie pour $n = 2$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leq k \leq n-1$, on a toute matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ est semblable à sa transposée.
Soit A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
• Premier cas : Si le polynôme minimal de A est de la forme $\pi_A = P_1(X)P_2(X)$ où P_1 et P_2 sont deux polynômes non constants et premiers entre eux. Puisque $\pi_u(A) = 0$ d'une part et le lemme des noyaux, d'autre part, on a :

$$\mathbb{K}^n = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u))$$

où u est l'endomorphisme canoniquement associé à A. Comme $\deg(P_j) < \deg(\pi_A)$, pour tout $j \in \{1, 2\}$, donc les sous-espaces $E_j = \ker(P_j(u))$ sont non nuls et stables par u, donc dans une base adaptée à la somme directe ci-dessus, la matrice de u est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

avec $M_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $M_2 \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ avec $p < n$ et $q < n$. L'hypothèse de récurrence permet de dire que ${}^tM_j \simeq M_j$ pour tout $j \in \{1, 2\}$, donc en vertu de la question précédente et le fait

que ${}^tM = \begin{pmatrix} {}^tM_1 & 0 \\ 0 & {}^tM_2 \end{pmatrix}$, on a $M \simeq {}^tM$ et comme M est semblables à A,on a $A = PMP^{-1}$ avec $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$, donc ${}^tA = {}^tP^{-1}{}^tM{}^tP = ({}^tP)^{-1}{}^tM{}^tP$ donc A et ${}^tA$ sont semblables.
• Deuxième cas : Sinon alors π_u est de la forme $\pi_A = (X-\lambda)^m$, et dans ce cas on a admis que A est semblable à ${}^tA$.

7. Si A est nilpotente d'indice de nilpotence n et u l'endomorphisme canoniquement associé à A, comme $u^{n-1} \neq \theta$, il existe un vecteur $e \in \mathbb{K}^n$ tel que $u^{n-1}(e) \neq 0$. La famille $b = (u^k(e))_{0\leq k\leq n-1}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et la matrice de u relativement à b est :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de u relativement à la base $b' = (u^{n-k+1}(e))_{0\leq k\leq n-1}$ est $\mathrm{mat}_{b'}(u) = {}^tN$ donc A et N sont semblables et N et ${}^tN$ sont semblables donc A et ${}^tA$ sont semblables.

Remarque : Ce résultat est vrai pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et le seul cas non traité est celui où A est nilpotente d'indice de nilpotence p tel que $1 < p < n$

EXERCICE 160 Similitude de deux matrices digonalisables

Titre : Similitude de deux matrices digonalisables
ID : 153 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 139 | ID : 153
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si A et B sont deux matrices carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables alors A et B sont semblables si et seulement si elles ont même polynôme caractéristique, c'est-à-dire si et seulement si $\chi_A = \chi_B$.

Solution

Si $A \sim B$ alors $\chi_A = \chi_B$ est connu puisque c'est un résultat du cours.

Réciproquement, soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables telles que $\chi_A = \chi_B$ et notons u et v les endomorphismes respectifs canoniquement associés. Il en découle que u et v sont diagonalsables et que u et v ont le même polynôme caractéristique :

$$\chi_u = \chi_v = \prod_{k=1}^{s}(X-\lambda_k)^{m_k}$$

où $s \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1, s]\!]$, m_k est la multiplicité de la valeur propre λ_k dans le polynôme caractéristique commun de u et v, en particulier u et v ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités donc les sous espaces propres respectifs associés à une même valeur propre donné λ sont de même dimension car u et v étant diagonalisables, la dimension d'un sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée. Puisque u et v sont diagonalisables, on a :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{s} E_{\lambda_k}(u) = \bigoplus_{k=1}^{s} E_{\lambda_k}(v)$$

Considérons des famille $\mathscr{B}_1, ..., \mathscr{B}_s$ de $E_{\lambda_1}(u), \ldots, E_{\lambda_s}(u)$et $\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_s$ de bases respectives de $E_{\lambda_1}(v)$, $\ldots, E_{\lambda_s}(v)$ et soit la base obtenue par concaténation des $\mathscr{B}_k$ et $\mathscr{C}$ celle obtenue par concaténation des

$\mathscr{C}_k$. Il est clair que :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(v) = \Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & (O) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (O) & & \lambda_s I_{m_s} \end{pmatrix}$$

où I_m désigne la matrice carrée unité de taille m pour tout entier naturel non nul m. Il en découle que A et B sont semblables à Δ donc que A et B sont semblables.

EXERCICE 161 Representation d'un type de matrices

Titre : Representation d'un type de matrices
ID : 154 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 140 | ID : 154
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice tel que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$ et A non nilpotente. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est semblable à une matrice de la forme $B = \mathrm{diag}(O_p, M_1, \ldots, M_q)$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, O_p la matrice nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et pour tout $j \in [\![1, q]\!]$, $M_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$, avec $(\alpha_j, \beta_j) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha_j^2 + \beta_j^2 > 0$ et les couples (α_j, β_j) sont deux à deux distincts.

(ii) Le polynôme minimal de A est de la forme : $\pi_A = XP_1 \ldots P_q$, avec pour tout $k \in [\![1, q]\!]$, on a P_k est un trinôme irréductible et unitaire de $\mathbb{R}[X]$ et les P_k sont deux à deux distincts.

Solution

• Supposons que (i) est vraie alors 0 est une valeur propre de A et de plus, si on pose $B = \mathrm{diag}(M_1, \ldots, M_q)$ et $Q = \chi_B$ le polynôme caractéristique de B, le polynôme $P = XQ(X)$ est un polynôme annulateur de A puisque P annule O_p et B en même temps. Comme B est inversible 0 est une racine simple de P, donc 0 est une racine simple de π_A, le polynôme minimal de A.
• Réciproquement, supposons que (ii) est vraie, donc le polynôme minimal de A est de la forme $\mu_A = XQ(X)$ avec $Q(0) \neq 0$. Par lemme de décomposition des noyaux, si u est l'endomorphisme canoniquement associé à A et en posant $n = p + q$ et $E = \mathbb{R}^n$, on a $E = \ker(u) \overset{q}{\underset{k=1}{\oplus}} \ker P_k(u)$. Les sous-espaces $\ker(u)$ et $\ker(P_k(u))$ sont stables par u. Si on note v et w_k les endomorphismes induits par u sur $\ker(u)$ $\ker(P_k(u))$ on peut dire que v est nul et w_k est un isomorphisme sans valeur propre, donc $\dim(\ker(Q(u)))$ est paire. Il est classique (et on donne pas les détails ici) que $\ker(P_k(u))$ est une somme directe de plans stables, ce qui fournira, compte tenu des hypothèses, la forme proposée pour la matrice de u dans une base adaptées.

EXERCICE 162 Centre de $\mathbf{GL}(E)$ en dimension quelconque

Titre : Centre de $\mathbf{GL}(E)$ en dimension quelconque
ID : 155 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 141 | ID : 155
Difficulté : ★☆☆☆☆

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel quelconque.

1. Soit u un endomorphisme de E. Démontrer que u est une homothétie si et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.
2. Soit u un endomorphisme de E tel que :

$$\forall v \in \mathbf{GL}(E), v \circ u = u \circ v$$

On se propose de prouver que u est une homothétie. Pour cela on considére un vecteur x non nul de E et on va prouver que la famille $(x, u(x))$ est liée. Soit H un sous-espace supplémentaire de la droite vectorielle $\mathbb{K}x$, donc $\mathbb{K}x \oplus H = E$ et v l'endomorphisme de E tel que $v(x) = x$ et pour tout $h \in H$, $v(h) = -h$.

(a) Soit $y \in E$ un vecteur tel que $y = \alpha x + h$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et $h \in H$. Exprimer $v(y)$ en fonction de α, x et h.

(b) Determiner $\ker(v - \mathrm{Id}_E)$.

(c) Prouver que $v \in \mathbf{GL}(E)$.

(d) En déduire que $\mathbb{K}x$ est stable par u.

(e) Conclure.

Solution

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel quelconque.

1. Si u est une homothétie de rapport λ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ laors pour tout $x \in E$, on a $u(x) = \lambda x$, donc la famille $(x, u(x))$ est liée. Réciproquement supposons que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Si $E = \{0\}$, il n'y a rien à prouver. Si $E \neq \{0\}$, soit x_0 un vecteur de E tel que $x_0 \neq 0$. la famille $(x_0, u(x_0)$ est liée et $x_0 \neq 0$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $u(x_0) = \alpha x_0$. Soit $x \in E$ un vecteur quelconque. Si (x_0, x) est libre posons $y = x + x_0$, comme $(y, u(y))$ est liée et $y \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(y) = \lambda y$ donc $\lambda x_0 + \lambda x = u(y) = u(x_0) + u(x)$. Comme $x \neq 0$ et $(x, u(x))$ est liée, il existe $\beta \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \beta x$, donc $\lambda x_0 + \lambda x = \alpha x_0 + \beta x$ et par liberté de (x, x_0) on a $\alpha = \lambda$ et $\beta = \lambda$, donc $u(x) = \alpha x$. Si la famille (x, x_0) est liée, il existe $\gamma \in \mathbb{K}$ tel que $x = \gamma x_0$, donc $u(x) = \gamma u(x_0) = \lambda(\gamma x_0) = \alpha x$. Ainsi on a prouvé que :

$$\forall x \in E, u(x) = \alpha x$$

donc $u = \alpha \,\mathrm{Id}_E$ est l'homothétie de rapport α.

2. Soit u un endomorphisme de E tel que :

$$\forall v \in \mathbf{GL}(E), v \circ u = u \circ v$$

On se propose de prouver que u est une homothétie. Pour cela on considére un vecteur x non nul de E et on va prouver que la famille $(x, u(x))$ est liée. Soit H un sous-espace supplémentaire de la droite vectorielle $\mathbb{K}x$, donc $\mathbb{K}x \oplus H = E$ et v l'endomorphisme de E tel que $v(x) = x$ et pour tout $h \in H$, $v(h) = -h$.

(a) Soit $y \in E$ un vecteur tel que $y = \alpha x + h$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et $h \in H$. Par linéarité on a $v(y) = \alpha v(x) + v(h)$ et comme $v(x) = x$ et $v(h) = -h$, on a $v(y) = \alpha x - h$.

(b) Soit $y \in E$ tel que $y = \alpha x + h$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $h \in H$, alors :

$$\begin{aligned} y \in \ker(v - \mathrm{Id}_E) &\Leftrightarrow v(y) = y \\ &\Leftrightarrow \alpha x - h = \alpha x + h \\ &\Leftrightarrow h = -h \\ &\Leftrightarrow h = 0 \\ &\Leftrightarrow y \in \mathbb{K}x \end{aligned}$$

Donc $\ker(v - \mathrm{Id}) = \mathbb{K}x$.

(c) Soit $y \in E$ tel que $y = \alpha x + h$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et $h \in H$, on a $v(y) = \alpha x - h$, donc $v(v(y)) = \alpha x + h = y$, donc $v \circ v = \mathrm{Id}_E$ et en particulier $v \in \mathbf{GL}(E)$ et $v^{-1} = v$: v est une symétrie vectorielle.

(d) Comme u et v commutent, il en est de même de $v - \mathrm{Id}_E$ et u, donc $\ker(v - \mathrm{Id}_E)$ est stable par u. Compte tenu de $\ker(v - \mathrm{Id}_E) = \mathbb{K}x$, on a $\mathbb{K}x$ est stable par u.

(e) On a prouvé ci-dessus que pour tout vecteur non nul x de E, la droite $\mathbb{K}x$ est stable par u ; comme $x \in \mathbb{K}x$, on a en particulier $u(x) \in \mathbb{K}x$, donc la famille $(x, u(x))$ est liée, chose vraie aussi pour $x = 0$, donc $(x, u(x)$ est liée pour tout $x \in E$, et compte tenu de la question 1), l'endomorphisme u est une homothétie de E.

EXERCICE 163 Matrices diagonales semblables

Titre : Matrices diagonales semblables
ID : 156 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 142 | ID : 156
Difficulté :

On considère deux matrices diagonales :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_n \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Δ et D et sont semblables.

(ii) Il existe une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ tel que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mu_k = \lambda_{\sigma(k)}$$

Solution

Soit :

$$\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \quad \text{et} \quad D = \text{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$$

deux matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons qu'il existe une permutation $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ tel que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mu_k = \lambda_{\sigma(k)}$$

Montrons que Δ et D sont semblables.
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à Δ, donc si $b = (e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a $\text{mat}_b(u) = \Delta$, donc

$$\forall k \in [\![1, n]\!], u(e_k) = \lambda_k e_k,$$

donc

$$(\star) \quad \forall k \in [\![1, n]\!], \quad u(e_{\sigma(k)}) = \lambda_{\sigma(k)} e_{\sigma(k)}$$

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, posons : $v_k = e_{\sigma(k)}$. Alors, $c = (v_1, \ldots, v_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et compte tenu de $(\star)$ on a

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad u(v_k) = \mu_k v_k,$$

donc $\text{mat}_c(u) = D$, et les matrices Δ et D sont semblables car elle représentent le même endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$, dans des bases respectives de $\mathbb{K}^n$. Réciproquement, supposons que

$$\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

et

$$D = \text{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$$

sont semblables, On va démontrer qu'il existe une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ tel que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \mu_k = \lambda_{\sigma(k)}$$

Pour cela, commençon par remarquer qu'il existe un endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ et deux bases

$$b = (e_1, \ldots, e_n) \quad \text{et} \quad c = (v_1, \ldots, v_n)$$

de $\mathbb{K}^n$ tel que

$$\text{mat}_b(u) = \Delta \quad \text{et} \quad \text{mat}_c(u) = D.$$

L'endomorphisme u est diagonalisable, posons

$$\mathrm{Sp}(u) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\},$$

Si $s \geq 2$, les α_k étant deux à deux distincts.
Pour tout $j \in [\![1, s]\!]$, posons

$$I_j = \{k \in [\![1, n]\!] / \lambda_k = \alpha_j\},$$

et

$$J_j = \{k \in [\![1, n]\!] / \mu_k = \alpha_j\}.$$

Alors $(I_j)_{j\in[\![1,s]\!]}$ et $(J_j)_{j\in[\![1,s]\!]}$ sont des partitions de $[\![1, n]\!]$, de plus, pour tout $j \in [\![1, s]\!]$, on a :

$$\mathrm{card}(I_j) = \mathrm{card}(J_j) = m_j,$$

où m_j est la multiplicité de la valeur propre α_j de u. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe donc

$$\sigma_j : J_j \to I_j$$

une bijection de J_j vers I_j(en fait il y'a exactement $(m_j)!$ de telles bijections).
Soit

$$\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$$

définie par

$$\forall k \in J_j, \sigma(k) = \sigma_j(k)$$

σ est une permutation de $[\![1, n]\!]$, et on va démontrer que,pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\mu_k = \lambda_{\sigma(k)}$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ il existe un unique $j \in [\![1, s]\!]$ tel que $k \in J_j$. Notons $\ell = \sigma(k)$,donc $\ell \in I_j$ et $\sigma_j(k) = \ell$. Par définition de I_j et J_j, on a : $\alpha_j = \lambda_\ell$ et $\alpha_j = \mu_k$, donc $\mu_k = \lambda_\ell$ et comme $\sigma(k) = \ell$, on a $\mu_k = \lambda_{\sigma(k)}$.

EXERCICE 164 — Matrice de rang 1 : diverses caractérisations

Titre : Matrice de rang 1 : diverses caractérisations
ID : 157 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 143 | ID : 157
Difficulté :

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ designe $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathrm{rg}\,(A) = 1$.
   (a) Démontrer qu'il existe $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $X \neq 0$ et $Y \neq 0$ et $A = X\,{}^tY$.
   (b) Démontrer que $\mathrm{tr}(A) = {}^tYX = {}^tXY$.
   (c) Prouver que le polynbôme minimal de A est $\pi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathrm{rg}\,(A) = 1$.
   (a) Montrer que si $\mathrm{tr}(A) = 0$ alors A est semblable à la matrice :

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (b) Montrer que si $\tau = \mathrm{tr}(A) \neq 0$ alors A est semblable à D_τ avec :

$$D_\tau = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ (0) & & & \tau \end{pmatrix}$$

Pour tout $x = (x_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$M(x) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x_n \end{pmatrix}$$

Soit $a = (a_k)_{1\leq k\leq n}$ et $b = (b_k)_{1\leq k\leq n}$ deux éléments $\mathbb{K}^n\backslash\{(0,\dots,0)\}$. Démontrer que les matrices $M(a)$ et $M(b)$ sont semblables si et seulement si $a_n = b_n$.

Solution

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\text{rg}\,(A) = 1$.
   (a) Notons $X_1,\dots,X_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ les colonnes de A, la famille $\mathcal{F} = (X_1,\dots,X_n)$ est de rang 1, car $\text{rg}\,(\mathcal{F}) = \text{rg}\,(A)$, donc $\dim(\text{Vect}(\mathcal{F})) = 1$. Soit alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ un vecteur directeur de $\text{Vect}(X_1,\dots,X_n)$, donc $X \neq 0$ et pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, il existe $y_j \in \mathbb{K}$ tel que $X_j = y_jX$. Notons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors $X\,{}^tY = (x_jy_i)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ est la matrice dont les colonnes sont $y_1X,\dots,y_nX$, c'est-à-dire $X_1,\dots,X_n$, et par suite : $X\,{}^tY = A$.
   (b) Le terme général de A avec le notations ci-dessus est $a_{ij} = x_jy_i$, donc $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = {}^tXY = {}^tYX$.
   (c) On a $A^2 = X\,{}^tYX\,{}^tY = X({}^tYX)\,{}^tY = X\,\text{tr}(A)\,{}^tY = \text{tr}(A)X\,{}^tY = \text{tr}(A)A$, donc $A^2 - \text{tr}(A)A = 0$, et par suite, le polynôme $P = X^2 - \text{tr}(A)X$ annule A. Il en découle que $\pi_A | P = X(X-\tau)$ où $\tau = \text{tr}(A)$, donc forcément $\pi_A \in \{X, X-\tau, P\}$.
   • Si $\pi_A = X$, comme $\pi_A(A) = 0$, on aurait $A = 0$, chose fausse.
   • Si $\pi_A = X - \tau$, on aurait $A = \tau I_n$, donc A est une matrice scalaire, laquelle elle est soit nulle soit inversible, ce qui n'est pas la cas pour A, puisque $0 < \text{rg}\,(A) = 1 < n$.
   • Il en découle que le polynôme minimal de A est $\pi_A = X^2 - \text{tr}(A)X$.
2. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\text{rg}\,(A) = 1$.
   (a) Si $\text{tr}(A) = 0$, alors $\pi_A = X^2$, donc $A^2 = 0$. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A, alors $\text{rg}\,(u) = 1$, donc $\text{Im}(u)$ est une droite vectorielle ; soit alors V_1 un vecteur directeur de $\text{Im}(u)$ et soit $V_n \in \mathbb{K}^n$ tel que $u(V_n) = V_1$. On a $u(V_1) = u^2(V_n) = 0$, donc $V_1 \in \ker(u)$. Le théorème du rang donne : $\dim(\ker(u)) = n-1$, donc si $n \geq 3$, il existe des vecteurs $V_2,\dots,V_{n-1}$ tel que la famille $(V_1,\dots,V_{n-1})$ est une base de $\ker(u)$. Soit $\mathcal{C} = (V_1,\dots,V_{n-1},V_n)$. La famille $\mathcal{C}$ est libre car s'il existe $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_kV_k = 0$, alors en appliquant u, il vient $a_nu(V_n) = 0 = a_nV_1$, donc $a_n = 0$, par suite $\sum_{k=1}^{n-1} a_kV_k = 0$ et $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$, par liberté de $(V_1,\dots,V_{n-1}$, par suite $a_1 = \dots = a_n = 0$ et $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Comme $u(V_k) = 0$, pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$ et $u(V_n) = V_1$, on a :

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(u) = K = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   donc K et A sont semblables
   (b) Si $\tau = \text{tr}(A) \neq 0$ alors, comme $\pi_A = X(X-\tau)$, si u est l'endomorphisme canoniquement associé à A, on a aussi $\pi_u = X(X-\tau)$, donc $u \circ (u - \tau\,\text{Id}_E) = \theta$. Si on suppose que $u - \tau\,\text{Id}$ est injectif, il serait inversible et ou aurait en composant avec son inverse : $u = \theta$, ce qui n'est pas le cas, donc $u - \tau\,\text{Id}_E$ est non injectif, donc il existe un vecteur V_n non nul de $\mathbb{K}^n$ tel que $u(V_n) = \tau V_n$. Comme $\dim(\ker(u)) = n-1$, il existe une base $(V_1,\dots,V_n)$

de $\ker(u)$, et la famille $\mathcal{C} = (V_1, \dots, V_n)$ est libre car sinon, on aurait $V_n \in \ker(u)$, ce qui n'est âs le cas. Donc, $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et comme $u(V_k) = 0, \forall k \in [\![1, n-1]\!]$ et $u(V_n) = \tau V_n$, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(u) = D_\tau = \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & \ddots & \\ & 0 & \\ (0) & & \tau \end{pmatrix}$$

donc D et A sont semblables.

On remarque que $\mathrm{tr}(M(x)) = x_n$, donc si $M(a)$ et $M(b)$ sont sembalbles alors $\mathrm{tr}(M(a)) = \mathrm{tr}(M(b))$ donc $a_n = b_n$. Réciproquement si $a_n = b_n = \tau$ alors deux cas sont possibles :
• Soit $\tau = 0$, donc $M(a)$ et $M(b)$ étant toutes de rang 1, elles sont, en vertu de la question 2)a) semblables à K donc elles sont semblables.
• Soit $\tau \neq 0$ donc ce cas $M(a)$ et $M(b)$ étant toutes de rang 1, elles sont, en vertu de la question 2)b) sembalables à $D_\tau = \mathrm{diag}(0, \dots, 0, \tau)$ donc elles sont semblables.

EXERCICE 165 — Preuve de $\chi_AB = \chi_BA$

Titre : Preuve de $\chi_AB = \chi_BA$ — **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 158 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 144 | ID : 158

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On considère les matrices par blocs :

$$C = \begin{pmatrix} xI_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -B & xI_n \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\det(CD)$ et $\det(DC)$
2. Montrer que : $x^n \chi_{AB} = x^m \chi_{BA}$
3. Montrer que si $m = n$ alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Solution

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On considère les matrices par blocs :

$$C = \begin{pmatrix} xI_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -B & xI_n \end{pmatrix}.$$

1. En effectuant le produit par blocs, on a :

$$CD = \begin{pmatrix} xI_m - AB & xA \\ 0 & xI_n \end{pmatrix}$$

et

$$DC = \begin{pmatrix} xI_m & A \\ 0 & xI_n - AB \end{pmatrix}$$

Il en découle que

$$\det(CD) = x^n \chi_{AB} \quad \text{et} \quad \det(DC) = x^m \chi_{BA}$$

2. Comme

$$\det(CD) = \det(DC) = \det(C)\det(D)$$

on a bien :

$$x^n \chi_{AB} = x^m \chi_{BA}$$

3. Si $m = n$, il vient :

$$x^n \chi_{AB} = x^n \chi_{BA}$$

d'où :

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}$$

EXERCICE 166 Une expression de $\chi_A'(0)$ par la comatrice

Titre : Une expression de $\chi_A'(0)$ par la comatrice
ID : 159 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 145 | ID : 159
Difficulté :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est inversible.

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^*$, on a :

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \frac{(-1)^n}{\det(A)} x^n \chi_A\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. En déduire que le coéfficient du monôme de degré 1 dans $\chi_A(X)$ est

$$a_1 = (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(\operatorname{Com}(A))$$

Solution

1. Soit $x \in \mathbb{K}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\chi_{A^{-1}}(x) &= \det(xI_n - A^-) \\
&= \det(xAA^{-1} - A^{-1}) \\
&= \det(A^{-1}) \det(xA - I_n) \\
&= (\det(A))^{-1} \det\left((-x)\left(\frac{1}{x} I_n - A\right)\right) \\
&= \frac{(-1)^n x^n}{\det(A)} \left(\frac{1}{x} I_n - A\right) \\
&= \frac{(-1)^n x^n}{\det(A)} \chi_A\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

2. On sait que :

$$\chi_A(X) = X^n - \operatorname{tr}(A) X^{n-1} + \cdots + a_1 X + (-1)^n \det(A)$$

Donc

$$\chi_A\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{X^n} - \operatorname{tr}(A) \frac{1}{X^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{1}{X} + (-1)^n \det(A)$$

On déduit de la question 1) que :

$$\begin{aligned}
\chi_{A^{-1}}(X) &= \frac{(-1)^n X^n}{\det(A)} \chi_A\left(\frac{1}{X}\right) \\
&= X^n + a_1 \frac{(-1)^n}{\det(A)} X^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{\operatorname{tr}(A)}{\det(A)} X + \frac{(-1)^n}{\det(A)}
\end{aligned}$$

Or :

$$\chi_{A^{-1}}(X) = X^n - \operatorname{tr}(A^{-1}) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A^{-1})$$

Il en résulte par identification des coefficients que :

$$a_1 \frac{(-1)^n}{\det(A)} = \operatorname{tr}(A^{-1}),$$

donc $a_1 = (-1)^{n-1}\operatorname{tr}(A^{-1})\det(A)$. Or $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}{}^t\operatorname{Com}(A)$, donc $\operatorname{tr}(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{tr}(\operatorname{Com}(A))$, ce qui fournit en fin de compte : $a_1 = (-1)^{n-1}\operatorname{tr}(\operatorname{Com}(A))$.

EXERCICE 167 Matrice non diagonalisable et sans valeur propre réelle

Titre : Matrice non diagonalisable et sans valeur propre réelle
ID : 160 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 146 | ID : 160
Difficulté : ★☆☆☆☆

On se propose de donner un exemple d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que A n'a aucune valeur propre réelle et A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Vérifier que si une telle matrice existe forcément n est pair.
2. Démontrer que si $n = 2$, une telle matrice n'existe pas.
3. Donner un exemple d'une telle matrice :
   (a) Si $n = 4$.
   (b) Généralement si $n = 2m$ avec $m \geq 2$.

Solution

1. Si n est impair le polynôme caractéristique χ_A de A admet au moins une racine réelle car $\lim_{t\to-\infty}\chi_A(t) = -\infty$ et $\lim_{t\to+\infty}\chi_A(t) = +\infty$, donc le théorème des valeurs intermédiaires et la continuité de $t \mapsto \chi_A(t)$ permettent de dire qu'il existe au moins $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_A(\lambda) = 0$.
2. Si $n = 2$, Le polynôme caractéristique χ_A de A est $\chi_A(X) = X^2 - \tau X + \delta$ où $\tau = \operatorname{tr}(A)$ et $\delta = \det(A)$ est un polynôme à coefficients réels, de degré 2, et sans aucune racine réelle, donc χ_A admet deux racines complexes non réelles conjuguées λ et $\overline{\lambda}$. En particulier $\lambda \neq \overline{\lambda}$ et par suite A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
3. (a) Si $n = 4$, on prends $A = \begin{pmatrix} J & J \\ 0 & J \end{pmatrix}$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il est aisé de voir que $\operatorname{Sp}(A) = \{i, -i\}$, donc si A est diagonalisable le polynôme minimal de A serait $\pi = X^2 + 1$, chose non vraie car $A^2 = \begin{pmatrix} J^2 & 2J^2 \\ 0 & J^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_2 & -2I_2 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}$ donc $A^2 \neq -I_4$. Par ailleurs il est clair que A n'a aucune valeur propre réelle.
   (b) Si $n = 4$, déjà fait. Si $n = 2m, m \geq 3$ on prends $A = \operatorname{diag}(M, J, \ldots, J)$ avec $M = \begin{pmatrix} J & J \\ 0 & J \end{pmatrix}$; alors A n'est pas diagonalisable sinon M le serait. Il est clair que $\operatorname{Sp}(A) = \{i, -i\}$.

EXERCICE 168 Réduction des matrices par blocs

Titre : Réduction des matrices par blocs
ID : 161 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 147 | ID : 161
Difficulté : ★☆☆☆☆

On considère deux nombres réel a et b tel que $a^2 \neq b^2$ et la matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. n est un entier naturel tel que $n \geq 2$, on considère la matrice $A = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ dont les blocs $A_{i,j}$ pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$

sont tous égaux à B, c'est-à-dire que

$$A = \begin{pmatrix} B & \dots & B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B & \dots & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & \dots & a & b \\ b & a & \dots & b & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & b & \dots & a & b \\ b & a & \dots & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de A.
2. Démontrer que $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ et préciser la dimension du sous-espace propre $E_0(A)$.
3. Démontrer que A est diagonalisable.

Solution

1. Si on note $C_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \vdots \\ a \\ b \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} b \\ a \\ \vdots \\ b \\ a \end{pmatrix}$ alors les colonne de A sont $(C_k)_{1\leq k\leq 2n}$ avec $C_k = \begin{cases} C_1 & \text{si } k \text{ impair} \\ C_2 & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$; la famille (C_1, C_2) est libre car si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda C_1 + \mu C_2 = 0$, posons $\alpha = \lambda$ et $\beta = -\mu$, alors $\alpha C_1 = \beta C_2$ donc $\alpha a = \beta b$ et $\alpha b = \beta a$, donc
$$(\alpha^2 + \beta^2)(a^2 - b^2) = [(\alpha a)^2 - (\beta b)^2] + [(\beta a)^2 - (\alpha b)^2]$$
et comme $a^2 \neq b^2$, on a $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, donc $\alpha = \beta = 0$ donc $\lambda = \mu = 0$. Il découle de tout que $\mathrm{rg}\,(A) = 2$.
2. On a $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{rg}\,(A) = 2 < 2n$, donc A n'est pas inversible. En confondant $\ker(A)$ et $\ker(u)$ où u est l'endomorphisme canoniquement associé à A, on a :
$$\dim(E_0(A)) = \dim \ker(A) = 2n - \mathrm{rg}\,(A) = 2n - 2.$$
3. Notons $\mathscr{E} = (e_k)_{1\leq k\leq 2n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$ et considérons les vecteurs V et W tel que
$$V = \sum_{k=1}^{2n} e_k \quad \text{et} \quad W = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} e_k,$$
c'est-à-dire :
$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad W = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
alors $AV = n(a+b)V$ et $AW = n(a-b)W$ dons V et W sont deux vecteurs propres de A associés aux valeurs propres respectives $\lambda = n(a+b)$ et $\mu = n(a-b)$. Remarquons que $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$, deux cas sont possibles :
• Si $\lambda \neq \mu$ alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \lambda, \mu\}$ et $\dim E_0(A) + \dim E_\lambda(A) + \dim E_\mu(A) = 2n - 2 + 1 + 1 = 2n$ donc A est diagonalisable.
• Si $\lambda = \mu$, ce qui veut dire $\lambda = \mu = na$ et $b = 0$ et $a \neq 0$, alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \lambda\}$ et $\dim E_0(A) + \dim E_\lambda(A) = 2n - 2 + 2 = 2n$, donc A est diagonalisable.

EXERCICE 169 — A et B diagonalisable et $A^2 = B^2$ et $A^3 = B^3$

Titre : A et B diagonalisable et $A^2 = B^2$ et $A^3 = B^3$ **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 162 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 148 | ID : 162

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel non nul.

1. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Démontrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme diagonalisable alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $\ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E) = \ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E)^2$.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que A et B sont diagonalisables et $A^2 = B^2$ et $A^3 = B^3$. Démontrer que $A = B$.
3. Est ce que le résultat demeure vrai si on ne suppose plus que A et B sont diagonalisables ?

Solution

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, alors deux cas sont possibles :
   • Soit $\lambda \notin \operatorname{Sp}(u)$, alors $u - \lambda \operatorname{Id}_E \in \mathbf{GL}(E)$, donc aussi $(u - \lambda \operatorname{Id}_E)^2$, donc $(\star)$ $\ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E) = \ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E)^2 = \{0\}$.
   • Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$, comme u est diagonalisable son polynôme minimal π_u est scindé à racines simples et comme λ est une valeur propre de u, alors $(X - \lambda) | \pi_u$, donc $\pi_u = (X - \lambda)Q$ avec $Q(\lambda) \neq 0$ et par suite $(X - \lambda) \wedge Q = 1$. Le lemme des noyaux et $\pi_u(u) = \theta$ permet d'écrire $E = \ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \oplus \ker(Q(u))$. Démontrons que $\ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E)^2 \subset \ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$, pour cela soit $x \in \ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E)^2$, donc $y = u(x) - \lambda x$ réalise $y \in \ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$, or on a $Q(u)(y) = \pi_u(u)(x) = 0$, donc $y \in \ker(Q(u))$, donc $y \in \ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \cap \ker Q(u)$ et par la somme directe $(\star)$, on a $y = 0$, donc $x \in \ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$. Il est simple,par ailleurs, de voir que $\ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \subset \ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E)^2$, donc $\ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E) = \ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E)^2$
2. Notons f et g les endomorphismes canoniquement associés à A et B ; donc f et g sont diagonalisables et $f^j = g^j$ pour tout $j \in \{2, 3\}$. Comme f est diagonalisable on a $E = \mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} E_\lambda(f)$, on va donc prouver que f et g coincident sur chaque $E_\lambda(f)$ et ça donnera $f = g$. Soit alors $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$; deux cas sont possibles :
   • Premier cas : $\lambda = 0$. Comme f et g sont diagonalisables on a $\ker f = \ker f^2$ et $\ker g = \ker g^2$, en vertu de la question 1). Donc $\ker(g) = \ker(g^2) = \ker(f^2) = \ker(f)$ (en effet $f^2 = g^2 \Rightarrow \ker(g^2) = \ker(f^2)$.) Donc $E_0(f) = E_0(g)$ et finalement f et g coincident sur $E_\lambda(f) = \ker f$.
   • Deuxième cas : $\lambda \neq 0$. Soit $x \in E_\lambda(f)$, donc $f(x) = \lambda x$, donc $f^2(x) = g^2(x) = \lambda^2 x$ et $f^3(x) = g^3(x) = \lambda^3(x)$, donc $g^3(x) = \lambda^3 x$ et $g^2(x) = \lambda^2 x$, donc aussi $g^3(x) = g(g^2(x)) = \lambda^2 g(x) = \lambda^3 x$ et comme $\lambda \neq 0$, on a $g(x) = \lambda x = f(x)$ donc f et g coïncident sur $E_\lambda(f)$.
   • Comme f et g coincident sur $E_\lambda(f)$ pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$ et que $E = \mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} E_\lambda(f)$, on a $f = g$. Ainsi $A = B$.
3. Non car si par exemple $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et
$$A = \begin{pmatrix} A' & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} B' & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$
alors $A^2 = A^3 = B^2 = B^3 = 0$ mais $A \neq B$.

EXERCICE 170 Etude d'une matrice carrée dépendant de deux paramètres

Titre : Etude d'une matrice carrée dépendant de deux paramètres **Difficulté :** ★★☆☆☆
ID : 163 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 149 | ID : 163

On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} y & x-y & 0 \\ 0 & x & 0 \\ x-y & -x+y & x \end{pmatrix},$$

et soit

$$\mathscr{A} = \{M(x,y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On note a et b les endomorphismes canoniquement associés à A et B respectivement.

1. Démontrer que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par la multiplication des matrices,c'est-à-dire : $\forall M_1, M_2 \in \mathscr{A}, M_1M_2 \in \mathscr{A}$.
2. Démontrer que a est diagonalisable et préciser ses sous-espaces propres.
3. Démontrer que tout sous-espace vectoriel propre de a est stable par b.
4. En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dont les vecteurs sont des vecteurs propres à la fois pour a et b.
5. Démontrer que toute M appartenant à $\mathscr{A}$ est diagonalisable.

Solution

1. On remarque que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $M(x, y) = xA + yB$, donc $\mathscr{A} = \text{Vect}(A, B)$ et par suite, $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Remarquonq que $A^2 = A$ et $B^2 = B$ et $AB = BA = \mathbf{O}$, donc pour tout $M_1 = x_1A + y_1B$ et $M_2 = x_2A + y_2B$, alors : $M_1M_2 = x_1x_2A + y_1y_2B$, donc $\forall M_1, M_2 \in \mathscr{A}, M_1M_2 \in \mathscr{A}$, donc $\mathscr{A}$ est stable par $\times$.
2. On a $A^2 = A$, donc $a^2 = a$, donc le polynôme $X^2 - X = X(X-1)$ annule a et comme P est scindé à racines simples, on a a est diagonalisable.
3. Si λ est une valeur propre de a alors $E_\lambda(a) = \ker(a - \lambda \,\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$, et comme $AB = BA$ on a a et b commutent, donc $a - \lambda \,\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et b commutent et par suite $E_\lambda(a)$ est stable par b.
4. Un calcul simple donne $\chi_a = X(X-1)^2$, donc $\text{Sp}(a) = \{0, 1\}$. Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors :
   • $X \in E_1(a)$ si et seulement si $\begin{cases} y = x \\ y = y \\ x - y + z = z \end{cases}$ si et seulement si $x = y$ si et seulement si $X = (x, x, z) = xV_1 + zV_2$ avec $V_1 = e_1 + e_2$ et $V_2 = e_3$. Il en découle que $E_1(a) = \mathbb{R}V_1 + \mathbb{R}V_2$.
   • $X \in \ker a$ si et seulement si $y = 0$ et $z = -x$, si et seulement si $X = (x, 0, -x) = x(e_1 - e_3)$, donc $E_0(a) = \mathbb{R}V_3$ avec $V_3 = e_1 - e_3$.
   $\mathscr{B} = (V_1, V_2, V_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ dont les vecteurs sont des vecteurs propres de a. Remarquons que :
   • On a $b(V_1) = 0 = 0.V_1$ et $b(V_2) = 0 = 0.V_2$,
   • On a $b(V_3) = e_1 - e_3 = 1.V_3$,
   Il en découle que les vecteurs de $\mathscr{B}$ sont aussi des vecteurs prpores de b.
5. Soit $M = xA + yB \in \mathscr{A}$. On a $\text{mat}_{\mathscr{B}}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\text{mat}_{\mathscr{B}}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\text{mat}_{\mathscr{B}}(xa + yb) = \Delta = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$, et comme $\text{mat}_{\mathscr{E}}(xa + yb) = xA + yB = M$ où $\mathscr{E}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on peut dire que les matrices M et Δ sont semblables. M est semblable à une matrice diagonale, donc M est diagonalisable.

EXERCICE 171 Endomorphisme induit et polynômes

Titre : Endomorphisme induit et polynômes
ID : 164 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 150 | ID : 164
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie non nulle. $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme de E.

1. Soit F un sous-espace stable par u et v l'endomorphisme induit par u. Démontrer que $\pi_v | \pi_u$.
2. Soit P un polynôme irréductible tel que $P | \chi_u$. Démontrer que $P | \pi_u$

Solution

Si E est un espace vectoriel, on note $\theta_{\mathcal{L}}(E)$ l'endomorphisme nul d'un espace vectoriel E. Il est important de rappeler que si F est un sous-espace vectoriel de E alors $\mathcal{L}_F(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) / u(F) \subset F\}$, ensemble des endomorphismes de E qui stabilisent F est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

1. Si Q est un polynôme alors F est $Q(u)-$ stable et $Q(u)_F = Q(u_F)$, donc si $Q(u) = \theta_{\mathcal{L}(E)}$ alors $Q(u_F) = \theta_{\mathcal{L}(F)}$ donc $\mathscr{I}_u \subset \mathscr{I}_{u_F}$ et en particulier $\pi_{u_F} | \pi_u$.
2. Si P irréductible divise χ_u, alors $\chi_u = P^m Q$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $P \wedge Q = 1$. On sait que $F = \ker(P^m(u))$ est stable par u, donc si on note v l'endomorphisme induit on a $\pi_v | \pi u$. Pour tout $x \in F$, on a $P^m(u)(x) = 0$, donc $P^m(v) = 0$, donc P^m est un polynôme annulateur de v et alors $\pi_v | P^m$, par suite $P | \pi_v$, donc $P | \pi_u$.

EXERCICE 172 Conditions sur un polynôme annulateur pour être diagonalisable

Titre : Conditions sur un polynôme annulateur pour être diagonalisable
ID : 165 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 151 | ID : 165
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que P est scindé et $P(u) = 0$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on a $P(\lambda) = 0$ et $P'(\lambda) \neq 0$. Démontrer que u est diagonalisable.

Solution

Posons $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ alors d'après les hypothèses , pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, on a $(X - \lambda_i) | P$, donc $P_u = \prod_{k=1}^{x} (X - \lambda_k) | P$. De plus et compte tenu de $P'(\lambda) \neq 0$, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on a $P = P_a Q$ avec $Q \wedge P_a = 1$, donc par le lemme des noyaux et le fait que $P(u) = 0$, on a $E = \ker(P_u(u)) \oplus \ker(Q(u))$. Par ailleurs $\ker(Q(u)) = \{0\}$ car si $\ker(Q(u))$ est non nul alors $Q(u)$ n'est pas injectif, et comme P est scindé et $Q | P$, on a aussi Q est scindé, écrivons $Q = \prod_{k=1}^{m} (X - \mu_k)$, donc $Q(u)$ non inversible donne, il existe $j \in [\![1, m]\!]$ tel que $u - \mu_j \mathrm{Id}_E$ est non inversible, donc $\mu_j \in \mathrm{Sp}(u)$, donc il existe $i \in [\![1, s]\!]$ tel que $\mu_j = \lambda_i$, par suite $(X - \lambda_j)$ est un diviseur commun de P_u et Q, ce qui contredit $P_u \wedge Q = 1$, par suite $\ker(Q(u)) = \{0\}$ et $E = \ker(P_u(u)) = \bigoplus_{k=1}^{s} \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$, donc E est somme directe des sous-espaces propres de u, donc u est diagonalisable.
Remarque : Ce théorème est une généralisation du théorème vu en cours : s'il existe P scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$ alors u est diagonalisable.

EXERCICE 173 Valeurs propre d'un composé d'endomorphismes

Titre : Valeurs propre d'un composé d'endomorphismes
ID : 166 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 152 | ID : 166
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n avec $n \geq 1$. et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si λ est valeur propre de $g \circ f$ alors λ est valeur propre de $f \circ g$ (on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$).
2. On suppose dans cette question de $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que si $f \circ g = g \circ f$ alors f et g ont au moins un vecteurs propre commun.

Solution

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de $g \circ f$. Deux cas sont possibles :
   • $\lambda = 0$, donc il existe $x \in E\backslash\{0\}$ tel que $(g \circ f)(x) = 0$, donc $x \in \ker(g \circ f)$, donc $g \circ f$ n'est pas injectif donc $\det(g \circ f) = 0$, donc $\det(g)\det(f) = \det(f)\det(g) = \det(f \circ g)$ donc $\det(f \circ g) = 0$ et $f \circ g$ non inversible et cela veut dire que $0 \in \mathrm{Sp}(f \circ g)$.
   • Si $\lambda \neq 0$, alors il existe $x \in E$ tel que $x \neq 0$ et $(g \circ f)(x) = \lambda x$ donc $f(g(f(x))) = \lambda f(x)$. Si $f(x) = 0$ alors $g(f(x)) = 0 = \lambda x$, et comme $\lambda \neq 0$ alors $x = 0$,donc $y = f(x) \neq 0$ et $(f \circ g)(y) = \lambda y$, donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(f \circ g)$.
2. Comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et E non nul, f est trigonalisable, donc f admet au moins une valeur propre λ. Comme $f \circ g = g \circ f$, on a $(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ g = f \circ g - \lambda g = g \circ f - g = g \circ (f - \lambda \mathrm{Id}_E)$, donc $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par g. Notons $v \in \mathcal{L}(E_\lambda(f))$ l'endomorphisme induit, comme $\mathbb{K} = C$, alors v est trigonalisable donc v admet au moins une valeur propre μ, donc il existe un vecteur $y \in E_\lambda(f)$ tel que $y \neq 0$ et $v(y) = \mu y$, cela veut dire $g(y) = \lambda y$ et comme $y \in E_\lambda(f)$, on $f(y) = \lambda y$, donc y est un vecteur propre commun de f et g.
   On suppose dans cette question de $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que si $f \circ g = g \circ f$ alors f et g ont au moins un vecteurs propre commun.

EXERCICE 174 Doublon, voir 155

Titre : Doublon, voir 155
ID : 167 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 153 | ID : 167
Difficulté : ★☆☆☆☆

Dans tout l'exercice $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soient f et g deux endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$, ayant chacun n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$. Montrer que $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si f et g ont les mêmes vecteurs propres.
2. Supposons maintenant que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que tout sous-espace propre de f est $g-$stable et qu'il existe un vecteur propre commun à $f$et g.

Solution

1. Si $f \circ g = g \circ f$, soit V un vecteur propre de f, donc il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ tel que $f(V) = \lambda V$ et comme f posséde n valeurs propres distinctes, le sous-espace propre $E_\lambda(f)$ est une droite vectorielle, donc $E_\lambda(f) = \mathbb{K}V$, et comme f et g commutent $E_\lambda(V)$ est stable par g donc $g(V) \in E_\lambda(f) = \mathbb{K}V$, donc il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $g(V) = \mu V$, donc V est un vecteur propre de g. Par symétrie des rôles on aussi tout vecteur propre de g est un vecteur propre de f.
2. Comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et E non nul, f est trigonalisable, donc f admet au moins une valeur propre λ. Comme $f \circ g = g \circ f$, on a $(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ g = f \circ g - \lambda g = g \circ f - g = g \circ (f - \lambda \mathrm{Id}_E)$, donc $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par g. Notons $v \in \mathcal{L}(E_\lambda(f))$ l'endomorphisme induit, comme $\mathbb{K} = C$, alors v est trigonalisable donc v admet au moins une valeur propre μ, donc il existe un

vecteur $y \in E_\lambda(f)$ tel que $y \neq 0$ et $v(y) = \mu y$, cela veut dire $g(y) = \lambda y$ et comme $y \in E_\lambda(f)$, on $f(y) = \lambda y$, donc y est un vecteur propre commun de f et g.
On suppose dans cette question de $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que si $f \circ g = g \circ f$ alors f et g ont au moins un vecteurs propre commun.

EXERCICE 175 Polynôme annulateur de la forme QR avec $Q \wedge R = 1$

Titre : Polynôme annulateur de la forme QR avec $Q \wedge R = 1$ — **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 168 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 154 | ID : 168

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie ou non, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = QR$ est un polynôme annulateur de u et $Q \wedge R = 1$. Démontrer que $\mathrm{Im}(Q(u)) = \ker(R(u))$

Solution

2) On applique le lemme des noyaux sur $P = QR$. Puisque P est un polynôme annulateur, on a $E = \ker(Q(u)) \oplus \ker(R(u))$.
On va montrer l'égalité par double inclusion.
- Soit $y \in \mathrm{Im}(Q(u))$, et soit $x \in E$ tel que $y = Q(u)(x)$. Alors, on a

$$R(u)(y) = R(u)(Q(u)(x)) = RQ(u)(x) = 0.$$

Il en découle que : $y \in \ker(R(u))$ et on a $\mathrm{Im}(Q(u)) \subseteq \ker(R(u))$.
- Soit $x \in \ker(R(u))$. Comme Q et R sont premier entre eux, le théorème de Bezout permet de dire que :

$$\exists A, B \in \mathbb{K}[X], AQ + BR = 1.$$

Ainsi, on a

$$x = AQ(u)(x) + BR(u)(x) = AQ(u)(x).$$

On a donc

$$x = AQ(u)(x) = Q(u)(A(u)(x)),$$

et donc

$$x \in \mathrm{Im}(Q(u)).$$

EXERCICE 176 Pratique de la trigonalisation et application

Titre : Pratique de la trigonalisation et application — **Difficulté :** ★★☆☆☆
ID : 169 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 155 | ID : 169

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Pourquoi A est elle trigonalisable ? Est elle diagonalisable ?
3. Trigonaliser la matrice A.
4. En déduire le polynôme minimal de A.
5. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n sous forme de combinaison linéaire de A et I_n.

Solution

1. Le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A = \det(XI_n - A)\begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 4 & X-4 & 0 \\ 2 & -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} X & -1 \\ 4 & X-4 \end{vmatrix}$$

Finalement $\chi_A = (X-2)^3$.

2. D'après la question précédente le polynôme caractéristique de A est scindé, donc A est trigonalisable. On a en particulier $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$ et $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}\,(A - 2I_3) = 1$, par suite, si u est l'endomorphisme canoniquement associé à A, la dimension du sous-espace propre $E_2(u)$ est $\dim(E_2(u)) = 2$. Comme cette dimension est différente de la multiplicité de la valeur propre 2,dans χ_A, la matrice A n'est pas diagonalisable.

3. Le sous espace propre de A, associé à la valeur propre 2 est l'ensemble des vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $(A - 2I_2)X = 0$, ce qui veut dire $-2x + y = 0$, donc $y = 2x$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ z \end{pmatrix} = xV_1 + zV_2$, avec $V_1 = e_1 + 2e_2$ et $V_2 = e_3$, où $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère $V_3 = e_1$ et la famille $\mathscr{V} = (V_1, V_2, V_3)$, on a alors $\det_{\mathscr{E}}(\mathscr{V}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, la famille $\mathscr{V}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Rappelons que u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, on a alors $u(V_3) = u(e_1) = -4e_2 - 2e_3 = -2e_1 - 4e_2 - 2e_3 + 2e_1 = 2V_1 - 2V_2 + 2V_3$, on $\mathrm{mat}_{\mathscr{V}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T$ et par site $A = PTP^{-1}$ avec P la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{V}$, c'est-à-dire

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit que

$$\begin{cases} e_1 &= V_3 \\ e_2 &= \frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2 \\ e_3 &= V_2 \end{cases}$$

Donc

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on a bien trigonalisé la matrice A.

4. Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique, donc de la forme $\pi_A = (X-2)^m$ avec $2 \leq m \leq 3$, on a exclu 1 car A n'est pas diagonalisable donc π_A n'est pas simple. Comme $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $(A - 2I_3)^2 = 0$, on en déduit que $\pi_A = (X-2)^2$.

5. La division euclidienne de X^n par $(X-2)^2$ s'écrit $X^n = Q(X)(X-2)^2 + aX + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, comme $nX^{n-1} = 2(X-2)Q(X) + (X-2)^2Q'(X) + a$, il vient $\begin{cases} 2^n = 2a + b \\ n2^{n-1} = a \end{cases}$, ce qui fournit $\begin{cases} a = n2^{n-1} \\ b = (1-n)2^n \end{cases}$ et alors $A^n = n2^{n-1}A + (1-n)2^nI_3$.

EXERCICE 177 Exercice pratique, deux matrices de taille 4

Titre : Exercice pratique, deux matrices de taille 4 — **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 170 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 156 | ID : 170

On considére les matrices A et B de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que $\chi_A = \chi_B$ (A et B on même polynôme cractéristique). En déduire que $\det(A) = \det(B)$ et $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$
2. Démontrer que $\pi_A = \pi_B$ (A et B ont même polynôme minimal).
3. Montrer que $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(B)$ et le calculer.
4. Démontrer que A et B ne sont pas semblables.

Solution

1. A et B sont triangulaires supérieures donc $\chi_A = \chi_B = (X-1)^4$. On a par le calcul $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) = 4$ et $\det(A) = \det(B) = 1$ (somme et produit des coefficients diagonaux), mais on peut déduire le résultat sans calcul on sait que $\chi_M = X^4 - \mathrm{tr}(M)X^3 + \alpha_M X^2 + \beta_M X + \det(M)$ pour tout $M \in \{A, B\}$.
2. Si on note $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on voit bien que $A = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} N & N \\ 0 & N \end{pmatrix}$ et comme $(N - I_2)^2 = 0$, il est aisé de voir que $A - I_4 \neq 0$ et $(A - I_4)^2 = 0$ et de même $B - I_4 \neq 0$ et $(B - I_4)^2 = 0$, ce qui donne $\pi_A = \pi_B = (X-1)^2$.
3. Comme $\det(A) = \det(B) = 1$, les matrices A et B sont inversibles, donc $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(B) = 4$.
4. On a :
$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
par suite $\mathrm{rg}\,(A - I_4) = 1$ et $\mathrm{rg}\,(B - I_4) = 2$, donc $A - I_4$ et $B - I_4$ ne sont pas semblables, donc A et B ne sont pas semblables.

EXERCICE 178 Etude d'un endomorphisme de matrices(matrices par blocs)

Titre : Etude d'un endomorphisme de matrices(matrices par blocs) — **Difficulté :** ★★☆☆☆
ID : 482 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 464 | ID : 482

Soit $n \geq 2$ un entier et soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit la matrice par blocs :

$$N = \varphi(M) = \begin{pmatrix} M & M^2 \\ 0_n & M \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

1. Si $m \in \mathbb{C}$ et $\varphi(m) = \begin{pmatrix} m & m^2 \\ 0 & m \end{pmatrix}$, la matrice $\varphi(m)$ est-elle diagonalisable ?

2. Dans cette question, on suppose $n = 2$. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et soit $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale si M est diagonalisable ou triangulaire sinon. En utilisant la matrice P, montrer que $N = \varphi(M)$ est diagonalisable si et seulement si $M = 0$.
3. (a) Pour $Q \in \mathbb{C}[X]$, determiner $Q(N)$.
   (b) Montrer que si N est diagonalisable , alors M est diagonalisable.
   (c) Montrer que si N est diagonalisable , alors $M^2 = 0$, et conclure
4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Exprimer le polynôme minimal de $N = \varphi(M)$ en fonction de celui de M.

Solution

1. La seule valeur propre de N est a. Donc si N est diagonalisable, alors $N = aI_2$, ce qui n'est possible que si $a = 0$. La réciproque est claire donc $\varphi(m)$ est diagonalisable si et seulement si $m = 0$.
2. Bien sûr, si $M = 0_n$, alors $N = 0_{2n}$ est diagonalisable ! On suppose donc $M \neq 0$. Soit $\Delta = P^{-1}MP$, où $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda & \star \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \neq 0$. Soi $Q = \begin{pmatrix} P & 0_n \\ 0_n & P \end{pmatrix}$: $Q^{-1}NQ = \begin{pmatrix} \Delta & \Delta^2 \\ 0_n & \Delta \end{pmatrix}$. - Si $\lambda = \mu$, alors $Q^{-1}NQ$ est triangulaire supérieure, avec quatre valeurs propres égales, mais n'est pas diagonale (soit parce que Δ ne l'est pas, soit parce que $\Delta = \lambda I_2$ mais alors $\Delta^2 = \lambda^2 I_2 \neq 0$). Dans ce cas, N n'est donc pas diagonalisable. - Si $\lambda \neq \mu$, alors $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \neq 0$ donc :

$$Q^{-1}NQ = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \mu^2 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

   On suppose par exemple $\lambda \neq 0$. Alrs :

$$Q^{-1}NQ - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu - \lambda & 0 & \mu^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - \lambda \end{pmatrix}$$

   est de rang 3 , donc N n'est pas diagonalisable. (c'est bien sûr la même chose si $\mu \neq 0$ en considérant $Q^{-1}NQ - \mu I_4$).
3. (a) On trouve $N^k = \begin{pmatrix} M^k & kM^{k+1} \\ 0_n & M^k \end{pmatrix}$, puis :

$$\forall Q \in \mathbb{C}[X], Q(N) = \begin{pmatrix} Q(M) & M^2Q'(M) \\ 0_n & Q(M) \end{pmatrix}$$

   (b) Si N est diagonalisable, il existe Q scindé simple tel que $Q(N) = 0_{2n}$. D'après le calcul précédent, ça implique $Q(M) = 0_n$ et donc M est diagonalisable.
   (c) Puisque Q est scindé simple, il existe U, V dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $UQ + VQ' = 1$. En particulier, $V(M)Q'(M) = I_n$ donc $Q'(M)$ est inversible. Or $M^2Q'(M) = 0_n$, donc $M^2 = 0_n$. La matrice M étant diagonalisable et nilpotente, elle est nulle.
4. Soit μ le polynôme minimal de M. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$. On a :

$$Q(N) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Q(M) = 0_n \\ M^2Q'(M) = 0_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu \mid Q \\ \mu \mid X^2Q' \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{C}[X], \begin{cases} Q = \mu P \\ \mu \mid X^2\mu' P \end{cases}$$

Soit $\mu = X^r \prod_{j=1}^{k} (X-\lambda_j)^{\alpha_j}$ où $\begin{cases} r \in \mathbb{N} \\ \lambda_j \in \mathbb{C}^* \\ \alpha_j \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ Alors $\mu' = cR(X)X^\rho \prod_{j=1}^{k} (X-\lambda_j)^{\alpha_j - 1}$ avec $\begin{cases} c \in \mathbb{C}^* \\ \rho = \max(r-1, 0) \end{cases}$ et $\begin{cases} R(0) \neq 0 \\ R(\lambda_j) \neq 0 \end{cases}$ Dans ces conditions :

$$X^2 \mu' P = cR(X)P(X)X^{\rho+1} \prod_{j=1}^{k} (X-\lambda_j)^{\alpha_j - 1}$$

est multiple de μ ssi P l'est de $\prod_{j=1}^{k} (X-\lambda_j)$. Conclusion : le polynôme minimal de N est celui de M où on a augmenté de 1 la multiplicité des racines non nulles.

EXERCICE 179 Activités sur la réduction

Titre : Activités sur la réduction
ID : 484 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 466 | ID : 484
Difficulté : ★★☆☆☆

Considérons la matrice A suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

1. On suppose k réel, la matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$? (sans calculs).
2. (a) Déterminer le rang de A.
   (b) Donner la raison pour laquelle le polynôme caractéristique de A est de la forme $\chi_A = X^2(X-u_1)(X-u_2)$ avec u_1 et u_2 des nombres complexes non nuls vérifiant : $u_1+u_2 = k$ et $u_1^2+u_2^2 = k^2+6$.
   (c) Etudier les éléments propres dans le cas où $u_1 = u_2$.
   (d) En déduire les valeurs de k pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

Solution

1. Puisque A est réelle symétrique elle est diagonalisable.
2. (a) les Colonnes C_1, C_3, C_4 de A sont égales et la famille (C_1, C_2) est libre car sinon, on aurait $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $C_2 = \alpha C_1$, chose impossible car $C_{2,3} = 1$ et $C_{1,3} = 0$. Donc le rang de A est $\text{rg}(A) = 2$.
   (b) Puisque $\text{rg}(A) = 2$ et A de taille 4, on peut dire que 0 est une valeur propre de A d'ordre de multiplicité au moins 2, donc la liste des valeurs propres de A comme matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ est $0, 0, u_1, u_2$ avec $u_1, u_2 \in \mathbb{C}$ et alors $\chi_A = X^2(X-u_1)(X-u_2)$, sous cette forme la matrice A est trigonalisable donc $\text{tr}(A) = u_1+u_2$ et A^2 est trigonalisable de valeurs propres $0, 0, u_1^2, u_2^2$, donc $\text{tr}(A^2) = u_1^2+u_2^2$. Or les coefficients diagonaux de A sont $0, k, 0, 0$ et ceux de A^2 sont : $1, 3+k^2, 1, 1$ donc $\text{tr}(A) = k$ et $\text{tr}(A^2) = k^2+6$, ce qui donne $\begin{cases} u_1+u_2 = k \\ u_1^2+u_2^2 = k^2+6 \end{cases}$.
   • Remarquons qu'on ne peut pas avoir $u_1 = u_2 = 0$ car cela donnerait $k = 0$ et $k^2+6 = 0$, chose impossible. On ne peut pas non plus avoir $u_1 = 0$ et $u_2 \neq 0$ car cela donnerait $u = k$ et $u_2^2 = k^2+6$, chose impossible car on aurait l'égalité de k^2 et k^2+6. Par suite les nombres complexes u_1 et u_2 sont tous les deux non nuls.
   (c) Si $u_1 = u_2 = u$, alors les équations de la question 2)b) deviennent $\begin{cases} 2u = k \\ 2u^2 = k^2+6 \end{cases}$, ce qui donne $u^2 = -3$ donc $u = \pm i\sqrt{3}$. Notons que si $u = i\sqrt{3}$ alors $k = 2i\sqrt{3}$ et si $u = -i\sqrt{3}$

alors $k = -2i\sqrt{3}$.

• Si $u = i\sqrt{3}$ alors $A - uI_4 = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i\sqrt{3} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Il en découle que si $X = {}^t(x, y, z, t \in \mathbb{C}^4$, alors $X \in \ker(A - uI_4)$ si et seulement si $(A - uI_4)X = 0$ si et seulement si $x = z = t$ et $y = i\sqrt{3}x$, donc le sous espace propre $E_u(A)$ est la droite engendrée par le vecteur ${}^t(1, i\sqrt{3}, 1, 1)$ et comme la multiplicité de u est égale à 2 la matrice A n'est pas daigonalisable.

• Si $u = -i\sqrt{3}$ alors $A - uI_4 = \begin{pmatrix} i\sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -i\sqrt{3} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Il en découle que si $X = {}^t(x, y, z, t \in \mathbb{C}^4$, alors $X \in \ker(A - uI_4)$ si et seulement si $(A - uI_4)X = 0$ si et seulement si $x = z = t$ et $y = -i\sqrt{3}x$, donc le sous espace propre $E_u(A)$ est la droite engendrée par le vecteur ${}^t(1, -i\sqrt{3}, 1, 1)$ et comme la multiplicité de u est égale à 2 la matrice A n'est pas diagonalisable.

• Dans tous les cas notons que $E_0(A) = \ker(A)$ est un plan vectoriel, c'est exactement le plan determiné par les équations : $\begin{cases} y = 0 \\ x + z + t = 0 \end{cases}$, donc engendré par les vecteurs ${}^t(1, 0, 0, -1)$ et ${}^t(0, 0, 1, -1)$.

(d) Pour que A soit diagonalisable une condition necessaire est $k \neq \pm 2\sqrt{3}$. Réciproquement si c'est suffisante comme condition car d'aptès la question précédente si $k \neq \pm i\sqrt{3}$ forcément $u_1 \neq u_2$ et les sous-espaces propres $E_0(A), E_{u_1}(A), E_{u_2}(A)$ auront pour dimensions respectives 2, 1 et 1 de somme 4, donc A est diaginalisable. En conclusion A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ si et seulement si $k \neq 2i\sqrt{3}$ et $k \neq -2i\sqrt{3}$.

EXERCICE 180 Réduction d'un endomorphisme de polynômes

Titre : Réduction d'un endomorphisme de polynômes
ID : 485 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 467 | ID : 485
Difficulté : ★★☆☆☆

Montrer que l'application

$$f : P(X) \mapsto (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X)$$

est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}_n[X]$. Former la matrice de f relative à la base canonique de E. En déduire la diagonalisabilité de f ainsi que ses valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

Solution

L'application f est clairement linéaire de $\mathbb{R}[X]$ vers lui-même. De plus, si $\deg P \leq n$, il est aisé d'observé que $\deg f(P) \leq n$. On peut donc conclure que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$,

$$f\left(X^k\right) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$$

ce qui permet de former la représentation matricielle souhaitée. On constate alors que la matrice de f est triangulaire de coefficients diagonaux $0, \ldots, k(k+1), \ldots, n(n+1)$ distincts. Il est alors aisé de calculer le polynôme caractéristique de f est de conclure que f est diagonalisable, de valeurs propres $0, \ldots, k(k+1), \ldots, n(n+1)$ et de sous-espaces propres de dimension 1 .

EXERCICE 181 Etude d'un endomorphisme, somme directe d'un noyau et une image

Titre : Etude d'un endomorphisme, somme directe d'un noyau et une image
Difficulté : ★★☆☆☆
ID : 486 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 468 | ID : 486

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.
(a) Donner un exemple d'endomorphisme f de E dont l'image et le noyau ne sont pas supplémentaires.
(b) On suppose, dans cette question seulement, que f est une endomorphisme de E diagonalisable. Justifier que l'image et le noyau de f sont supplémentaires.
(c) Soit f un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe un entier nature non nul k tel que

$$\operatorname{Im}\left(f^k\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(f^k\right) = E$$

L'endomorphisme f^k est-il nécessairement diagonalisable ?
(d) Le résultat démontré en c) reste-t-il valable si l'espace est de dimension infinie ?

Solution

(a) Un endomorphisme non nul vérifiant $f^2 = 0$ avec $f \neq 0$ convient. C'est le cas d'un endomorphisme représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de f. La matrice de f dans cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et alors les espaces

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\{e_i \mid \lambda_i = 0\} \text{ et } \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{e_i \mid \lambda_i \neq 0\}$$

sont évidemment supplémentaires (puisque associés à des regroupements de vecteurs d'une base).
(c) On vérifie $\operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$. La suite des dimensions des noyaux des f^k est croissante et majorée par n. Elle est donc stationnaire et il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall \ell \geq k, \dim \operatorname{Ker} f^{\ell+1} = \dim \operatorname{Ker} f^{\ell}$$

Par inclusion et égalité des dimensions

$$\forall \ell \geq k, \operatorname{Ker} f^{\ell+1} = \operatorname{Ker} f^{\ell}$$

En particulier $\operatorname{Ker} f^{2k} = \operatorname{Ker} f^k$. On peut alors établir $\operatorname{Im} f^k \cap \operatorname{Ker} f^k = \{0_E\}$ et par la formule du rang on obtient la supplémentarité

$$\operatorname{Im}\left(f^k\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(f^k\right) = E$$

L'endomorphisme f^k n'est pas nécessairement diagonalisable. Pour s'en convaincre il suffit de choisir pour f un automorphisme non diagonalisable.
(d) Le résultat n'est plus vrai en dimension infinie comme le montre l'étude de l'endomorphisme de dérivation dans l'espace des polynômes.

EXERCICE 182 Commutant d'un endomorphisme nilpotent dans deux cas

Titre : Commutant d'un endomorphisme nilpotent dans deux cas
ID : 524 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 505 | ID : 524
Difficulté : ★★★☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$ et E un espace vectoriel de dimension finie de dimension n. On considère un endomorphisme nilpotent u de E d'indice de nilpotence p. On note

$$\mathscr{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E)/u \circ v = v \circ v\},$$

appelé la commutant de u. Donner la dimension $\dim(\mathscr{C}(u))$, dans chacun des cas particuliers suivants :

1. Le cas $p = n$.
2. Le cas $p = n - 1$

Solution

1. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence n, alors $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$, par suite il existe $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. La famille $\mathscr{F}_x = (x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est libre car si $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ tel que $(\star) \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \neq 0$. Si on suppose que $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \neq 0$, posons $m = \min\{k \in [\![0, n-1]\!]/\alpha_k \neq 0\}$. La relation $(\star)$ devient $(\star\star) \sum_{k=m}^{n-1} \alpha_k = 0$. En appliquant l'endomorphisme u^{n-m-1}, il vient $\alpha_m u^{n-1}(x) = 0$, et puisque $u^{n-1}(x) \neq 0$, on a $\alpha_m = 0$, ce qui contredit la définition de m. En conclusion la famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E. Soit $v \in \mathscr{C}(u)$, donc $u \circ v = v \circ u$. Comme $\mathscr{F}_x$ est une base de E, il existe $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ tel que $v(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x)$, donc $v(x) = P(u)(x)$ avec $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $v(u^k(x)) = (v \circ u^k)(x)$ or $v \in \mathscr{C}(u)$ donc $u \in \mathscr{C}(v)$ et comme $\mathscr{C}(v)$ est une algèbre on a $u^k \in \mathscr{C}(v)$ donc $u^k \circ v = v \circ u^k$ et par suite $v(u^k(x)) = u^k(v(x)) = u^k(P(u)(x)) = P(u)(u^k(x))$, donc les endomorphismes v et $P(u)$ coincident sur la base $\mathscr{F}_x$ donc $v = P(u)$ et finalement $v \in \mathbb{K}[u]$. On remarque que la famille des endomorphismes $(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{n-1})$ et libre dans $\mathbb{K}[u]$ et comprend n vecteurs, et comme $\dim(\mathbb{K}[u]) \leq n$, c'est une base de $\mathbb{K}[u]$, donc $\dim(\mathscr{C}(u)) = \dim(\mathbb{K}[u]) = n$.
2. il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-2}(x))$ est libre. On a $u^{n-2}(x) \in \ker(u)$ et si on note $F = \mathrm{Vect}(x, u(x), \ldots, u^{n-3}(x))$ alors $F \cap \ker(u) = \{0\}$ car si y est dans cette intersection alors $y = \sum_{k=0}^{n-3} \lambda_k u^k(x)$, donc en appliquant u, on a $\sum_{k=0}^{n-3} \lambda_k u^{k+1}(x) = \sum_{k=1}^{n-2} \lambda_{k-1} u^k(x)$, donc par liberté $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{n-3} = 0$. Il en découle que $\dim(\ker(u)) + \dim(F) \leq n$, et comme $\dim(F) = n - 2$ on déduit $\dim(\ker(u)) \leq 2$. Comme $u^{n-2}(x) \in \ker(u)$, on a donc $1 \leq \dim(\ker(u)) \leq 2$. On va démontrer que $\dim(\ker(u)) = 2$. Sinon $\dim(\ker(u)) = 1$, donc en posant $d_k = \dim(\ker(u^k))$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $1 = d_1 < \cdots < d_{n-2} < d_{n-1} = n$. On a $u(N_{k+1}) \leq N_k$, donc u induit une application linéaire $f : N_{k+1} \to N_k, x \mapsto f(x) = u(x)$. Le théorème du rang donne $d_{k+1} = \mathrm{rg}\,(f) + \dim(\ker(f))$ or $\ker(f) = \ker(u) \cap N_{k+1} = N_1$, donc $d_{k+1} = d_1 + \mathrm{rg}\,(f) \leq d_k + d_1 = d_k + 1$. Une récurrence immédiate permet de voir que $d_k = k$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, donc $d_{n-2} = n - 2$ donc $n = d_{n-1} \leq d_1 + d_{n-2} = 1 + n - 2 = n - 1$, chose absurde donc $\dim(\ker(u)) = 2$. Il en découle que E admet une base de la forme $(V_0, \ldots, V_{n-1})$ avec $V_k = u^k(x)$ pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$ et $V_{n-1} \in \ker(u)$ de sorte que la matrice de u dans cette base est $M = \begin{pmatrix} M' & C \\ L & 0 \end{pmatrix}$ avec $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

EXERCICE 183 **Un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$**

Titre : Un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ — **Difficulté :** ★★☆☆☆
ID : 525 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 506 | ID : 525

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et soit $u : P \mapsto P(2X)$ défini de E dans E.

1. Vérifier que u est un automorphisme de E.
2. Soit $\mathbb{R}[u]$ la $\mathbb{R}$-algèbre engendrée par la famille $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ (autrement dit $\mathbb{R}[u]$ est l'ensemble des polynômes de l'endomorphism u). Montrer que u^{-1} n'appartient pas à $\mathbb{R}[u]$.
3. Conclusion ?

Solution

1. $u(P(X)) = P(2X)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u(X^n) = 2^n X^n$, donc u transforme la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en la famille $(2^n X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est de façon claire une base de $\mathbb{K}[X]$, donc u est un isomorphisme de E.
2. Si on suppose que $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$, donc $\exists L \in \mathbb{K}[X], L(u) = u^{-1}$. Comme u^{-1} est non nul, le polynôme est non nul. Posons donc $L(X) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k X^k$, avec $\alpha_n \neq 0$, donc $u^{-1} = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k u^k$. En particulier :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u^{-1}(X^n) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k u^k(X^n)$$
donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{X^n}{2^n} = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k 2^{nk} X^n$$
donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k 2^{nk}$$
Par suite, quand $n \to +\infty$, on a : $2^{-n} \sim \alpha_N 2^{nN}$, chose impossible car il s'agit d'une suite non bornée et une autre qui converge vers 0, quand $n \to +\infty$. Ainsi $\alpha_N = 0$
3. On a donné un exemple d'isomorphisme u tel que $\mathbb{K}[u] \cap \mathbf{GL}(E)$ n'est pas stable par l'inverse car $u \in \mathbb{K}[u] \cap \mathbf{GL}(E)$, mais $u^{-1} \notin \mathbb{K}[u]$.

EXERCICE 184 Théorème de Hadamard

Titre : Théorème de Hadamard — **Difficulté :** ★★☆☆☆
ID : 526 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 507 | ID : 526

Théorème de Hadamard - Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver que si
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{1\leq j\leq n, j\neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$$
alors A est inversible.

Solution

On prouve la proposition contraposée. Si A n'est pas inversible, ses colonnes sont linéairement dépendantes ; i.e. il existe un vecteur $Z = {}^t(z_1, \ldots, z_n)$ de $\mathbb{C}^n$, différent de 0_n tel que $AZ = 0_n$. Soit i l'indice tel que : $|z_i| = \max_{1\leq j\leq n} |z_j|$. Dans ces conditions
$$(AZ)[i] = \sum_{1\leq j\leq n} a_{i,j} z_j = 0, \text{ soit } a_{i,i} z_i = -\sum_{1\leq j\leq n, j\neq i} a_{i,j} z_j.$$

Il s'ensuit que :

$$|a_{i,i}|\,|z_i| \leq \sum_{1\leq j\leq n, j\neq i} |a_{i,j}|\,|z_j| \leq |z_i| \sum_{1\leq j\leq n, j\neq i} |a_{i,j}|$$

soit encore en divisant par $|z_i|$ qui est différent de 0 :

$$|a_{i,i}| \leq \sum_{1\leq j\leq n, j\neq i} |a_{i,j}|$$

EXERCICE 185 Isomorphisme dont l'inverse n'est pas polynôme en u

Titre : Isomorphisme dont l'inverse n'est pas polynôme en u
ID : 527 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 508 | ID : 527
Difficulté : ★★★☆☆

Soit $u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P(X+1)$.

1. Démontrer que u est un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
2. Démontrer que $u \notin \mathbb{R}[u]$.

Solution

1. Soit
$$v : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]; P \mapsto v(P) = P(X-1),$$
alors $u \circ v = v \circ u = \mathrm{Id}$, donc u est un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
2. Supposons qu'il existe un polynôme L tel que $u^{-1} = L(u)$ alors L est non constant car sinon on aurait $u^{-1} = \lambda\,\mathrm{Id}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui n'est pas le cas, donc L est de degré au moins 1 et s'écrit
$$L = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k, \text{ avec } N \geq 1 \text{ et } a_N \neq 0.$$
On a alors $u^{-1} = \sum_{k=0}^{N} a_k u^k$, donc $\mathrm{Id} = \sum_{k=0}^{N} a_k u^{k+1}$ et pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, on a alors
$$P(X) = \sum_{k=0}^{N} a_k P(X+k+1),$$
en particulier pour le polynôme
$$P = \prod_{k=0}^{N} (X+k),$$
on a
$$\begin{aligned} 0 &= P(-N) \\ &= \sum_{k=0}^{N} a_k P(-N+k+1) \\ &= a_N P(1) + \sum_{k=0}^{N-1} a_k P(-N+k+1) \end{aligned}$$
Pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$ on a $k-N+1 \in [\![-(N-1), 0]\!]$ par suite $P(-N+k+1) = 0$.
Il en découle que
$$a_N (N+1)! = 0$$
donc que $a_N = 0$, chose absurde, donc $u^{-1} \notin \mathbb{K}[u]$

EXERCICE 186 — Isomorphisme u tel que $u^{-1} \notin \mathbb{K}[u]$: Variante

Titre : Isomorphisme u tel que $u^{-1} \notin \mathbb{K}[u]$: Variante
ID : 528 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 509 | ID : 528
Difficulté : ★★★☆☆

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On note θ l'endomorphisme nul de E , $\mathfrak{I}_u = \{P \in \mathbb{K}[X]/P(u) = \theta\}$ l'idéal annulateur de u et $\mathbb{K}[u] = \{P(u)/P \in \mathbb{K}[X]\}$ l'algèbre des polynômes en u. Démontrer que si $u \in \mathbf{GL}(E)$ alors
$$u^{-1} \in \mathbb{K}[u] \Leftrightarrow \mathfrak{I}_u \neq \{0\}$$
2. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ défini par :
$$u : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]; P \mapsto u(P) = P(X+1).$$
   (a) Prouver que u est un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
   (b) Prouver que $u^{-1} \notin \mathbb{K}[X]$.
3. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et soit $u : P \mapsto P(2X)$ défini de E dans E.
   (a) Vérifier que u est un automorphisme de E.
   (b) Montrer que u^{-1} n'appartient pas à $\mathbb{R}[u]$.

Solution

1. Si $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$, il existe un polynôme $L \in \mathbb{K}[X]$ tel que $u^{-1} = L(u)$. On a alors $L \neq 0$ car sinon u^{-1} serait nul, chose fausse. On a alors $\mathrm{Id}_E = u \circ L(u)$, donc le polynôme $P = XL(X) - 1$ est un polynôme annulateur non nul de u, donc $\mathfrak{I}_u \neq \{0\}$. Inversement si $\mathfrak{I}_u \neq \{0\}$ alors le polynôme π_u existe et comme u est inversible on a $\pi_u(0) \neq 0$, donc $\pi_u = a_0 - XQ(X)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, donc $0 = a_0 \mathrm{Id}_E - u \circ Q(u)$, donc en posant $u' = \frac{1}{a_0}Q(u)$, on a $u \circ u' = u' \circ u = \mathrm{Id}_E$, donc $u^{-1} = u' = \frac{1}{a_0}Q(u)$, donc $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.
2. (a) Soit
$$v : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]; P \mapsto v(P) = P(X-1),$$
   alors $u \circ v = v \circ u = \mathrm{Id}$, donc u est un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
   (b) On va répondre par deux méthodes :
   Première méthode : Supposons qu'il existe un polynôme L tel que $u^{-1} = L(u)$ alors L est non constant car sinon on aurait $u^{-1} = \lambda \mathrm{Id}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui n'est pas le cas, donc L est de degré au moins 1 et s'écrit
$$L = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k, \text{ avec } N \geq 1 \text{ et } a_N \neq 0.$$
   On a alors $u^{-1} = \sum_{k=0}^{N} a_k u^k$, donc $\mathrm{Id} = \sum_{k=0}^{N} a_k u^{k+1}$ et pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, on a alors
$$P(X) = \sum_{k=0}^{N} a_k P(X+k+1),$$
   en particulier pour le polynôme
$$P = \prod_{k=0}^{N} (X+k),$$
   on a

$$\begin{aligned} 0 &= P(-N) \\ &= \sum_{k=0}^{N} a_k P(-N+k+1) \\ &= a_N P(1) + \sum_{k=0}^{N-1} a_k P(-N+k+1) \end{aligned}$$

Pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$ on a $k - N + 1 \in [\![-(N-1), 0]\!]$ par suite $P(-N+k+1) = 0$.
Il en découle que

$$a_N (N+1)! = 0$$

donc que $a_N = 0$, chose absurde, donc $u^{-1} \notin \mathbb{K}[u]$
Deuxième méthode : Supposons que $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$, donc il existe un polynôme $L \in \mathbb{K}[X]$ tel que, $u^{-1} = L(u)$. Forcément L est non constant,car si L était constant $L = c$, on aurait $u^{-1} = c\,\mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]}$ et ce n'est pas le cas car

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], u^{-1}(P) = P(X-1).$$

Posons, donc

$$L = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n X^n, \text{ avec } N \in \mathbb{N}^* \text{ et } \alpha_N \in \mathbb{K}^*.$$

Comme $u^{-1} = L(u)$, on a $\mathrm{Id} = u \circ L(u)$, donc pour tout polynôme P, on a $P = (u \circ L(u))(P)$ On $L(u)(P)(X) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n u^n(P)(X)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a $u^n(P) = P(X+n)$. Il en découle que :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], P(X) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n P(X+n+1)$$

• On va appliquer $(\star)$ aux polynômes de la base canoniques X^k pour $k \in [\![0, 2N]\!]$, qu'on partagera comme suit :

$$[\![0, 2N]\!] = [\![0, N]\!] \cup [\![N, 2N]\!]$$

Pour tout $i \in [\![0, N]\!]$, on a :

$$X^i = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k (X+k+1)^i$$

Pour tout $i \in [\![N, 2N]\!]$, on a :

$$X^i = \sum_{k=N}^{2N} \alpha_k (X+k+1)^i$$

Si on substitue 1 à X il vient :

$$\begin{cases} 1 = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k (k+2)^i \\ 1 = \sum_{k=N}^{2N} \alpha_k (k+2)^i \end{cases}$$

Donc, si on pose

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

on a

$$(\star) \quad Y = AX = BX$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2^0 & 3^0 & \dots & (N+2)^0 \\ 2 & 3 & \dots & (N+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2^N & 3^N & \dots & (N+2)^N \end{pmatrix}, \text{ et, } B = \begin{pmatrix} 2^N & 3^N & \dots & (N+2)^N \\ 2^{N+1} & 3^{N+1} & \dots & (N+2)^{N+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2^{2N} & 3^{2N} & \dots & (N+2)^{2N} \end{pmatrix}$$

On fait la remarque importante suivante que

$$(\star') \quad B = \Delta A, \text{ ou }, \Delta = \begin{pmatrix} 2^N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (N+2)^N \end{pmatrix}$$

donc Δ est une matrice diagonale de taille $N+1$

Les relations $(\star)$ et $(\star)'$ ci-dessus donne

$$(\star\star) \quad (A - \Delta A)X = 0$$

La matrice $A - \Delta A = (I_{N+1} - \Delta)A$ est inversible dans $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ car :

• la matrice $\Delta' = I_{N+1} - \Delta$ est la matrice diagonale :

$$\Delta' \begin{pmatrix} 1-2^N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1-(N+2)^N \end{pmatrix}$$

il en découle que Δ' est inversible.

• Par ailleurs, la matrice A est inversible car $\det(A) = V(2, 3, \dots, N+2)$ est une determinant de Vandermonde de taille $N+1$ pour les $N+1$ valeurs deux à deux distinctes $2, 3, \dots, N+2$, donc $\det(A) \neq 0$ et finalement la matrice $A - \Delta A$ est inversible. Cela dit, la relation $(\star\star)$ ci-dessus donne $X = 0$, chose fausse donc l'hypothèse, $u^{-1} \in \mathbb{K}[X]$ est à rejeter que $u^{-1} \notin \mathbb{K}[u]$

3. (a) $u(P(X)) = P(2X)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u(X^n) = 2^n X^n$, donc u transforme la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en la famille $(2^n X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est de façon claire une base de $\mathbb{K}[X]$, donc u est un isomorphisme de E.

   (b) Si on suppose que $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$, donc $\exists L \in \mathbb{K}[X], L(u) = u^{-1}$. Comme u^{-1} est non nul, le polynôme est non nul. Posons donc $L(X) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k X^k$, avec $\alpha_n \neq 0$, donc $u^{-1} = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k u^k$.

   En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u^{-1}(X^n) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k u^k(X^n)$$

   donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{X^n}{2^n} = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k 2^{nk} X^n$$

   donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k 2^{nk}$$

   Par suite, quand $n \to +\infty$, on a : $2^{-n} \sim \alpha_N 2^{nN}$, chose impossible car il s'agit d'une suite non bornée et une autre qui converge vers 0, quand $n \to +\infty$. Ainsi $\alpha_N = 0$

   (c) On a donné un exemple d'isomorphisme u tel que $\mathbb{K}[u] \cap \mathbf{GL}(E)$ n'est pas stable par l'inverse car $u \in \mathbb{K}[u] \cap \mathbf{GL}(E)$, mais $u^{-1} \notin \mathbb{K}[u]$.

EXERCICE 187 Pratique de la réduction sur des exemples

Titre : Pratique de la réduction sur des exemples
ID : 530 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 511 | ID : 530
Difficulté : ★★☆☆☆

1. Montrer que :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$
est trigonalisable. A est-elle diagonalisable ? Réduire A et déterminer son polynôme minimal.
2. Même question pour :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Solution

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

Calcul du polynôme caractéristique, on observe que $A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. On remarque que la première colonne $C_1 = C_3$, ce qui inspire l'opération élémentaire $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ lor du calcul de χ_A. On a

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} X-3 & -2 & -4 \\ 1 & X-3 & 1 \\ 2 & 1 & X+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-3 & -2 & -(X+1) \\ 1 & X-3 & 0 \\ 2 & 1 & X+1 \end{vmatrix} \\ &= (X+1)\begin{vmatrix} X-3 & -2 & -1 \\ 1 & X-3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Par $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$, il vient :

$$\begin{aligned} \chi_A &= (X+1)\begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 1 & X-3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (X+1)((X-1)(X-3)+1) \\ &= (X+1)(X^2-4X+4) = (X+1)(X-2)^2 \end{aligned}$$

Ainsi :
$$\boxed{\chi_A(X) = (X-2)^2(X+1)}.$$

Les valeurs propres de A sont -1 (valeur propre simple et 2 (double). Come le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$ la matrice A est **trigonalisable**.
- Est ce que A est diagonalisable ? pour répondre on va comparer d_2 la dimension du sous-espace propre $E_2(A)$ et $m_2 = 2$, la multiplicité de la valeur propre 2. Onn utilise pour cela la formule du rang $d_2 = \dim E_2(A) = 3 - \operatorname{rg}(A - 2I_3)$. On a $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.. On remarque que $L_1 + L_3 = (-1,1,-1) = L_2$ donc les lignes ne sont pas toutes indépendantes. Les lignes L_1 et L_2 ne sont pas proportionnelles, car par exemple le determinant extrait $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ donc $\operatorname{rg}(A - 2I_3) = 2$. Ainsi $d_2 \dim E_2(A) = 3 - 2 = 1$ et comme $d_2 < m_2$ la matrice A n'est pas diagonalisable.

- Trigonalisation de A : On commence par determiner les sous-espaces propres :

- Pour $\lambda = -1$, le système $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $AX = -X$ est équivalent à $(A + I_3)X = 0$, or $A + I = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. donc $AX = -X \iff \begin{cases} 4x + 2y + 4z = 0 \\ -x + 4y - z = 0 \\ -2x - y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ -x + 4y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 2z = -y \\ x + z = 4y \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$. Il en découle que $AX = -X \iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = xV_1, x \in \mathbb{R}$, avec $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi $E_{-1}(A) = \text{Vect}\{V_1\}, \qquad V_1 = -e_1 + e_3$.

- Pour la valeur propre 2, $AX = 2X \iff (A - 2I_3)X = 0$, comme $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, on a

$$AX = X \iff \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -2x - y - 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = -4z \\ x - y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z \\ y = -z \end{cases}.$$

Ainsi $AX = 2X \iff X = \begin{pmatrix} -2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = -zV_2$, avec $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Pour trigonaliser, on ne peut pas se contenter des vecteurs propres : ils sont en nombre insuffisant. Il faut compléter la famille de vecteurs propres en une base de $\mathbb{R}^3$ par un vecteur choisi de façon à obtenir une matrice triangulaire. Le choix le plus simple est souvent de prendre un vecteur de la base canonique, à condition qu'il soit linéairement indépendant des vecteurs propres déjà trouvés. On a déjà : $V_1 = (-1, 0, 1)^\top, V_2 = (2, 1, -1)^\top$. Prenons pour troisième vecteur un vecteur de la base canonique. Testons $e_3 = (0, 0, 1)^\top$: la famille $\mathscr{V} = (V_1, V_2, e_3)$ est-elle libre ? Si on note $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a $\det_{\mathscr{E}}(V_1, V_2, e_3) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 0 = -1 \neq 0$. La famille est donc libre. Posons : $V_3 = e_3 = (0, 0, 1)$. Notons $\mathscr{V} = (V_1, V_2, V_3)$ qui est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Si on note u l'endomorpphisme canoniquement associé à A et $T = \text{mat}_{\mathscr{V}}(u)$ la matrice de u relativement à $\mathscr{V}$, on a $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, le coefficient 2 dernier coefficient diagonale s'impose car $\text{Sp}(A) = \{-1, 2\}$ et 2 de multiplicité 2. Reste à exprimer AV_3. Calculons : $AV_3 = Ae_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Exprimons AV_3 dans la base (V_1, V_2, V_3). On cherche α, β tels que $AV_3 = \alpha V_1 + \beta V_2 + 2V_3$.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cela donne le système : $\begin{cases} -\alpha + 2\beta = 4 \\ \beta = -1 \\ \alpha - \beta + 2 = -3 \end{cases}$. Il en découle que $\alpha = -6$ et $\beta = -1$ Donc $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice de passage correspondante est $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, et on a : $A = PTP^{-1}$.

Calculons P^{-1}. On a $\begin{cases} e_1 - e_3 = V_1 \\ 2e_1 + e_2 - e_3 = V_2 \\ e_3 = V_3 \end{cases}$, donc $\begin{cases} V_1 + V_3 = e_1 \\ -2V_1 + V_2 - V_3 = e_2 \\ V_3 = e_3 \end{cases}$, donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Polynôme minimal

Les valeurs propres sont 2 et -1. Le polynôme minimal est un multiple de $(X-2)(X+1)$ et divise $(X-2)^2(X+1)$.
Comme A n'est pas diagonalisable, $(X-2)$ ne suffit pas. Donc : $\boxed{\mu_A(X) = (X-2)^2(X+1)}$.

Même question pour : $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Solution

Polynôme caractéristique

Commençons par calculer $B + I_3$: $B + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On remarque que $C_1 + C_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = C_3$. Donc dans $B + I_3$, on a la relation simple $C_3 = C_1 + C_2$, c'est-à-dire $C_1 + C_2 - C_3 = 0$. Cela signifie notamment que $\det(B + I_3) = 0$, donc -1 est valeur propre de B.
Cette relation entre colonnes de $B + I_3$ va nous inspirer une opération élémentaire sur les colonnes de $XI_3 - B$.

En effet, dans $XI_3 - B$, on a : $C_1 = \begin{pmatrix} X-2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ X+3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ X+2 \end{pmatrix}$. Calculons $C_3 - C_1 - C_2$: $C_3 - C_1 - C_2 = \begin{pmatrix} -2-(X-2)-1 \\ -3-(-5)-(X+3) \\ X+2-1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-X+2-1 \\ -3+5-X-3 \\ X+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(X+1) \\ -(X+1) \\ X+1 \end{pmatrix} = (X+1)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, en effectuant l'opération élémentaire $C_3 \leftarrow C_3 - C_1 - C_2$, la troisième colonne devient $\begin{pmatrix} -(X+1) \\ -(X+1) \\ X+1 \end{pmatrix}$, ce qui simplifie grandement le déterminant.

On obtient : $\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & -(X+1) \\ -5 & X+3 & -(X+1) \\ 1 & 0 & X+1 \end{vmatrix}$. On peut factoriser $(X+1)$ dans la troisième colonne : $\chi_B(X) = (X+1)\begin{vmatrix} X-2 & 1 & -1 \\ -5 & X+3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Développons ce déterminant par rapport à la troisième ligne : $\begin{vmatrix} X-2 & 1 & -1 \\ -5 & X+3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ X+3 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} X-2 & 1 \\ -5 & X+3 \end{vmatrix}$. Calculons : $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ X+3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - (-1)(X+3) = -1 + X + 3 = X + 2$. Et : $\begin{vmatrix} X-2 & 1 \\ -5 & X+3 \end{vmatrix} = (X-2)(X+3) - 1 \cdot (-5) =$

$X^2+X-6+5 = X^2+X-1$. Donc : $\begin{vmatrix} X-2 & 1 & -1 \\ -5 & X+3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (X+2)+(X^2+X-1) = X^2+2X+1 = (X+1)^2$. Ainsi : $\chi_B(X) = (X+1)(X+1)^2 = (X+1)^3$. Donc : $\boxed{\chi_B(X) = (X+1)^3}$.
La seule valeur propre est : $\lambda = -1$ de multiplicité 3. Le polynôme caractéristique est scindé, donc B est **trigonalisable**.
Calculons $E_{-1}(B) = \ker(B+I) : B+I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
On résout : $\begin{cases} 3x-y+2z=0 \\ 5x-2y+3z=0 \\ -x-z=0 \end{cases}$
La troisième donne $x=-z$.
La première : $3(-z)-y+2z=0 \implies -3z-y+2z=0 \implies -z-y=0 \implies y=-z$. Donc : $(x,y,z) = (-z,-z,z) = z(-1,-1,1)$. En choisissant $z=-1$, on obtient : $W_1 = (1,1,-1)$. Ainsi : $E_{-1}(B) = \text{Vect}\{W_1\}, \qquad W_1 = (1,1,-1)$. On vérifie : $BW_1 = -W_1$.
Le sous-espace propre est de dimension 1, alors que la multiplicité de la valeur propre -1 est 3. Donc B n'est pas diagonalisable.
Pour B, la situation est plus délicate que pour A : il n'y a qu'*un seul* vecteur propre disponible, alors qu'il en faudrait trois pour diagonaliser. On ne peut donc pas compléter simplement la famille des vecteurs propres comme précédemment. Il faut utiliser la méthode des **noyaux itérés**.

Trigonalisation par les noyaux itérés

Posons : $N_1 = \ker(B+I_3), \qquad N_2 = \ker\left((B+I_3)^2\right)$. On a $W_1 \in N_1$ et $BW_1 = -W_1$, c'est-à-dire $(B+I_3)W_1 = 0$.
Si l'on choisit $W_2 \in N_2 \setminus N_1$, alors :

— d'une part, (W_1, W_2) est libre ;

— d'autre part, $(B+I_3)W_2 \in N_1$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(B+I_3)^2 W_2 = \alpha W_1$.

Cela donne le début d'une base de trigonalisation. On complète ensuite par un vecteur de la base canonique, ici $W_3 = e_3 = (0,0,1)$.
Calculons $(B+I_3)^2 : (B+I_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On vérifie également que : $(B+I_3)^3 = 0$.
Cherchons $W_2 \in N_2 \setminus N_1$. Prenons par exemple $W_2 = e_1 = (1,0,0)$. Alors : $(B+I_3)W_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$. Donc $W_2 \notin N_1$. De plus : $(B+I_3)^2 W_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2(1,1,-1) = 2W_1$. Ainsi $W_2 \in N_2$, et l'on a bien : $(B+I_3)W_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad (B+I_3)^2 W_2 = 2W_1$. Ainsi, $(B+I_3)W_2 \in N_1$ et il existe $\alpha = 2$ tel que $(B+I_3)^2 W_2 = \alpha W_1$.
Cela donne le début d'une base de trigonalisation : $W_1 = (1,1,-1), \qquad W_2 = (1,0,0)$. On complète par $W_3 = e_3 = (0,0,1)$. Vérifions que (W_1, W_2, W_3) est bien une base de $\mathbb{R}^3$: $\det(W_1, W_2, W_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Développons par rapport à la deuxième ligne : $= -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)) = -1 \neq 0$. Donc (W_1, W_2, W_3) est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

Exprimons BW_3 dans cette base. Calculons : $BW_3 = Be_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Cherchons α, β, γ tels que $BW_3 = \alpha W_1 + \beta W_2 + \gamma W_3$. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cela donne : $\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha = 3 \\ -\alpha + \gamma = -2 \end{cases}$ De la deuxième : $\alpha = 3$. Alors $\beta = 2 - 3 = -1$, et $-\alpha + \gamma = -2$ donne $-3 + \gamma = -2$, donc $\gamma = 1$.
Ainsi : $BW_3 = 3W_1 - W_2 + W_3$.
De plus : $BW_1 = -W_1$, $\quad (B + I_3)^2 W_2 = 2W_1$. Or $(B + I_3)^2 W_2 = (B + I_3)\big((B + I_3)W_2\big)$. Posons $\widetilde{W}_2 = (B + I_3)W_2 = (3, 5, -1)$. Alors : $(B + I_3)\widetilde{W}_2 = 2W_1$. Quitte à remplacer $\widetilde{W}_2$ par $\frac{1}{2}\widetilde{W}_2$, on peut normaliser pour obtenir $(B + I_3)\widetilde{W}_2 = W_1$. Mais on peut aussi garder le coefficient 2 et écrire directement la relation : $(B + I_3)^2 W_2 = 2W_1$.
Dans la base (W_1, W_2, W_3), on a donc : $BW_1 = -W_1$, $\quad BW_2 = -W_2 + (B + I_3)W_2 = -W_2 + \widetilde{W}_2$, et $BW_3 = 3W_1 - W_2 + W_3$. La matrice de l'endomorphisme associé à B dans cette base est donc triangulaire supérieure : $T = \begin{pmatrix} -1 & * & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Plus précisément, comme $(B + I_3)^2 W_2 = 2W_1$, on peut choisir W_2 de sorte que $(B + I_3)W_2 = W_1$, ce qui donne : $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice de passage correspondante est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on a : $B = PTP^{-1}$.
Calcul du polynôme minimal
La valeur propre est -1. Le polynôme minimal divise $(X + 1)^3$. Comme $(B + I_3)^2 \neq 0$, on a : $\boxed{\mu_B(X) = (X + 1)^3}$.

Résumé final

1. Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, on a $\chi_A(X) = (X - 2)^2(X + 1)$, $\quad \mu_A(X) = (X - 2)^2(X + 1)$. A n'est pas diagonalisable, mais elle est trigonalisable. Une forme réduite est $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Les vecteurs propres sont $V_1 = (-1, 0, 1) = -e_1 + e_3 \quad (\lambda = -1)$, $\quad V_2 = (2, 1, -1) = 2e_1 + e_2 - e_3 \quad (\lambda = 2)$, et l'on complète par $V_3 = e_3 = (0, 0, 1)$.
2. Pour la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, on a $\chi_B(X) = (X + 1)^3$, $\quad \mu_B(X) = (X + 1)^3$. B n'est pas diagonalisable, mais elle est trigonalisable. Une forme triangulaire réduite est $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Le vecteur propre est $W_1 = (1, 1, -1)$, et l'on construit le début de la base de trigonalisation à l'aide des noyaux itérés : $W_2 = e_1 = (1, 0, 0)$, $\quad (B + I_3)W_2 \in N_1$, $\quad (B + I_3)^2 W_2 = 2W_1$. On complète par $W_3 = e_3 = (0, 0, 1)$.

EXERCICE 188 **Activité sur les matrices par blocs**

Titre : Activité sur les matrices par blocs
ID : 531 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 512 | ID : 531
Difficulté : ★★☆☆☆

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n}$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ O_n & O_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M.
2. (a) Déterminer le noyau de f.
   (b) Montrer que f est diagonalisable.

Solution

1. La matrice A est trinagulaire par blocsn donc $\chi_A = \chi_{I_0}\chi_{O_n} = (X(X-1))^n$.
2. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ avec $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ O_n & O_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_n \\ O_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow X_1 + X_2 = O_n \Leftrightarrow X_2 = -X_1$, donc
$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ -X \end{pmatrix} / X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \right\}.$$
   (b) Le polynôme caractéristique de f est scindé, de plus on voit facilement que $\text{rg}\,(A) = \text{rg}\,(A - I_{2n}) = n$, donc les dimensions des sous-espaces propres $E_0(f)$ et $E_1(f)$ valent toutes n donc l'endomorphisme f est diagonalisable car les multiplicités respectives de ses valeurs propres valent les dimensions repectives des sous-espaces propres associés.

EXERCICE 189 Calcul de la dimension du commutant dans un cas

Titre : Calcul de la dimension du commutant dans un cas
ID : 532 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 513 | ID : 532
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*, u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^{2n+1}\right)$. On suppose $u^3 = u, \text{tr}(u) = 0$ et $\text{tr}\left(u^2\right) = 2n$. On note
$$C(u) = \left\{ v \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^{2n+1}\right) \mid uv = vu \right\}$$

1. Calculer la dimension $C(u)$.
2. Quels sont les n tels que $C(u) = \mathbb{R}[u]$?

Solution

1. Puisque $u^3 = u$, par annulation d'un polynôme scindé simple, on peut affirmer que u est diagonalisable de valeurs propres possibles $0, 1, -1$. Par les égalités $\text{tr}\,(u) = 0$ et $\text{tr}\left(u^2\right) = 2n$ on peut affirmer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^{2n+1}$ dans laquelle la matrice de u est de la forme
$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Les matrices commutant avec A étant celle de la forme
$$\begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on peut affirmer

$$\dim C(u) = 2n^2 + 1.$$

2. $\Pi_u = X^3 - X$ donc $\dim \mathbb{R}[u] = 3$ et par suite $C(u) = \mathbb{R}[u]$ si, et seulement si, $n = 1$.

EXERCICE 190 — Un bon exercice lien entre f diagonalisable et des puissances de f

Titre : Un bon exercice lien entre f diagonalisable et des puissances de f — **Difficulté :** ★★☆☆☆

ID : 534 — **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 515 | ID : 534

1. Montrer que si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ diagonalisable, alors l'endomorphisme $f^2 = f \circ f$ est aussi diagonalisable.
2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$. On note I_3 ma matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Déterminer la matrice A^2, puis établir que $A^4 = I_3$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.
   (b) Montrer que $\dim(\ker(g - \mathrm{Id})) = 1$ et donner une base (V_1) de $\ker(g - \mathrm{Id})$.
   (c) Determiner $\ker(g + \mathrm{Id})$.
   (d) En déduire que g n'est pas diagonalisable.
3. Résoudre l'équation $A^2X = -X$, d'inconnue X élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et en déduire une base (V_2, V_3) de $\ker(g^2 + \mathrm{Id})$.
4. Montrer que la famille (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Ecrrire la matrice de g^2 dans la base (V_1, V_2, V_3).
6. Est ce que la réciproque du résultat prouvé en 1) est vraie ?

Solution

1. Si f est diagonalisable il existe une base b de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{mat}_b(f) = D$ est une matrice diagonale, donc $D^2 = \mathrm{mat}_b(f^2)$ est aussi diagonale, donc f^2 est diagonalisable.
2. (a) Le calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, ensuite le calcule donne $A^4 = I_3$. Il en découle que $Q = X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de A, donc toutes les valeurs prores de A sont des racines de Q, et comme -1 et 1 sont les seules racines réelles de Q, on a $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$.
   (b) On a $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -8 & 5 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}\,(A - I_3) = 3$ car si on note L_k la ligne k de $A - I_3$, on a $L_3 = L_2 - L_1$ et (L_1, L_2) libre, donc par le théorème du rang $\dim(\ker(g - \mathrm{Id})) = 3 - \mathrm{rg}\,(g - \mathrm{Id}) = 3 - 2 = 1$
3.
4.
5.
6.

EXERCICE 191 Réduction de la matrice somme de deux matrices élémentaires

Titre : Réduction de la matrice somme de deux matrices élémentaires
Difficulté : ★★☆☆☆
ID : 535 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 516 | ID : 535

On considère un entier naturel n tel qu $n \geq 2$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de la base canonique dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i et la colonne j, lequel vaut 1. et soit $U = E_{1,n} + E_{n,1}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique χ_U de U.
2. Démontrer que U est diagonalisable.
3. Calculer le polynôme minimal π_U de U.
4. Soit $x \in \mathbb{K}$ et $M_x = xU + I_n$. Démontrer que M_x est diagonalisable et préciser son spectre, son polynôme caractéristique et son polynôme minimal.

Solution

1. $\chi_U = X^{n-2}(X^2-1)$
2. On a $\text{rg}\,(U) = n-2$, donc $\dim(\ker(u)) = n-2$ où u estl'endomorphisme canoniquement associé à u, cette dimension est égale à la multiplicité de la valeur propre 0, qui est la seule vp multiple de χ_U, donc U est diagonalisable.
3. Le polynôme minimal de U est scindé à racines simples et ales mêmes racines que χ_U, donc $\pi_U = X(X^2-1)$
4. Soit $x \in \mathbb{K}$ et $M_x = xU + I_n$. Come U est diagonalisable $U = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \text{diag}(0,\dots,0,-1,1)$, donc $M_x = P(x\Delta + I_n)P$ et

$$D = \Delta + I_n = \text{diag}(1,\dots,1,1-x,1+x)$$

est diagonale, donc M_x est diagonalisable et

$$\text{Sp}(M_x) = \{1, 1-x, 1+x\}$$

et

$$\begin{cases} \chi_{M_x} = (X-1)^{n-2}(X-1+x)(X-1-x) \\ \pi_{M_x} = (X-1)(X-1+x)(X-1-x) \end{cases}.$$

EXERCICE 192 Bezout avec les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$

Titre : Bezout avec les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$
Difficulté : ★★☆☆☆
ID : 536 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 517 | ID : 536

Soient $n \geq 2$, A et B des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ de déterminants non nuls et premiers entre eux. Montrer qu'il existe U et V dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que

$$UA + VB = \text{I}_n$$

On pourra écrire $\chi_A(X) = XQ_A(X) \pm \det(A)$.

Solution

Solution Puisque les entiers $\det(A)$ et $\det(B)$ sont premiers entre eux, on peut écrire par l'égalité de Bézout

$$u \cdot \det(A) + v \cdot \det(B) = 1 \text{ avec } u, v \in \mathbb{Z}.$$

On écrit $\chi_A(X) = XQ_A(X) + (-1)^n \det(A)$ et de même $\chi_B(X)$ (ces écritures sont possibles car le déterminant est au signe près le coefficient constant d'un polynôme caractéristique). Posons alors

$$U = (-1)^{n-1} u Q_A(A) \quad \text{et} \quad V = (-1)^{n-1} v Q_B(B).$$

Puisque χ_A et χ_B sont à coefficients entiers, on a $U, V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Puisque χ_A et χ_B sont annulateurs, on a

$$Q_A(A)A = (-1)^{n-1} \det(A).\mathrm{I}_n \quad \text{et} \quad Q_B(B)B = (-1)^{n-1} \det(B).\mathrm{I}_n.$$

On observe alors

$$UA + VB = (u \cdot \det(A) + v \cdot \det(B))\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n.$$

Remarquons que prendre

$$U = u\,\mathrm{Com}(A)^\top \text{ et } V = v\,\mathrm{Com}(B)^\top$$

èтait sans doute plus simple...

EXERCICE 193 Polynôme caractéristique d'une matrice par blocs

Titre : Polynôme caractéristique d'une matrice par blocs
ID : 537 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 518 | ID : 537
Difficulté : ★★★☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ la matrice par blocs : $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$. Donner le polynôme caractéristique χ_B de B en foncion du polynôme caractéristique χ_A de A.

Solution

• Avant de faire le calcul explicite du polynôme caractéristiqu de B, on aimerait faire les remarques suivantes :
• On remarque que $\mathrm{rg}\,(B) = \mathrm{rg}\,(A)$, en particulier 0 est une valeur propre de B de multiplicité au moins n, donc $\chi_B(X) = X^n Q(X)$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n.
• Il suffit de determiner Q pour obtenir χ_B. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, il existe $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$. Posons $X' = \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$ alors $BX' = \begin{pmatrix} 2AX \\ 2AX \end{pmatrix} = 2\lambda X'$, donc 2λ est une valeur propre de B.

• Calculons χ_B : On a $\chi_B(x) = \begin{vmatrix} xI_n - A & -A \\ -A & xI_n - A \end{vmatrix}$
Les opérations élémentaires $L_{n+k} \leftarrow L_{n+k} - L_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, donnent :

$$\chi_B(x) = \begin{vmatrix} xI_n - A & -A \\ -xI_n & xI_n \end{vmatrix},$$

ensuite $C_k \leftarrow C_k + C_{n+k}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, donne :

$$\chi_B(x) = \begin{vmatrix} xI_n - 2A & -A \\ 0 & xI_n \end{vmatrix},$$

et finalement $\chi_B(x) = x^n \chi_{2A}(x)$.
Remarquons que

$$\chi_{2A}(x) = \det(xI_n - 2A) = 2^n \det\left(\frac{x}{2} I_n - A\right) = 2^n \chi_A\left(\frac{x}{2}\right),$$

donc avec χ_A directement, on a

$$\chi_B(x) = (2x)^n \chi_A\left(\frac{x}{2}\right).$$

EXERCICE 194 Matrices de rang 1, application

Titre : Matrices de rang 1, application
ID : 538 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 519 | ID : 538
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice telle que $\text{rg}(A) = 1$. On note $\tau = \text{tr}(A)$.
   (a) Démontrer que A est semblable à une matrice de la forme
   $$A' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \tau \end{pmatrix}$$
   (b) En déduire que $A^2 = \tau A$ et determiner le polynôme minimal de A.
   (c) Démontrer alors que A est diagonalisable si et seulement si $\text{tr}(A) \neq 0$.
   (d) Determiner le polynôme caractéristique de A.
   (e) Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Soit $a \in \mathbb{K}^*$ et on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ (On pourra utiliser judicieusement la question 1)b)).

Solution

1. (a) Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à A, comme $\text{rg}(A) = 1$, on a $\dim(\ker(u)) = n - 1$. Soit alors $(V_1, \dots, V_{n-1})$ une base de $\ker(u)$, qu'on complète en une base $\mathscr{E} = (V_1, \dots, V_{n-1}, V_n)$ de $\mathbb{K}^n$. Si on pose $u(V_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k V_k$, la matrice de u relativement à $\mathscr{V}$ est :
   $$A' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix},$$
   donc $\text{tr}(A') = \text{tr}(u) = \text{tr}(A) = \tau$, donc
   $$A' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \tau \end{pmatrix}$$
   (b) On a :
   $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \tau \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \tau a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \tau a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \tau^2 \end{pmatrix},$$
   donc $A^2 = \tau A$.
   • Il découle de $A^2 = \tau A$ que $P(X) = X^2 - \tau X$ est un polynôme annulateur de A, donc $\pi_A | P$, donc $\pi_A \in \{X, X - \tau, P\}$ mais si $\pi \in \{X, X - \tau\}$, la matrice A serait scalaire de rang 1, cela n'a lieu que si $n = 1$ alors que $n \geq 2$. Ainsi $\pi_A = P = X^2 - \tau X$.

(c) Comme $\pi_A = X(X-\tau)$, on a π_A est scindé et π_A est à racine simples si et seulement si $\tau \neq 0$, donc A est diagonalisable si et seulement si π_A est à racines simples si et seulement si $\text{tr}(A) \neq 0$

(d) Si $\text{tr}(A) = 0$, alors 0 est l'unique racine de π_A et π_A est scindé donc A est trigonalisable et 0 est sa seule valeur propre, donc A est nilpotente et alors $\chi_A = X^n$.
• Si $\text{tr}(A) \neq 0$, alors A est diagonalisable donc la multiplicité de sa valeur propre 0 est $\dim(\ker(u)) = n-1$ donc $\chi_A = X^{n-1}(X-\tau)$, cette formule reste vraie aussi pour le cas de $\text{tr}(A) = 0$.

(e) Démontrons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $A^k = \tau^{k-1}A$. Par récurrence :

— Si $k = 1$, c'est clair.

— Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = \tau^{k-1}A$, alors $A^{k+1} = AA^k = A\tau^{k-1}A = \tau^{k-1}A^2 = \tau^{k-1}\tau A = \tau^k A$.
Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = (\text{tr}(A))^{k-1}A$.

2. On remarque que $\text{rg}(M+I_3) = 1$ et comme $\text{tr}(M+I_3) = 3$, on a d'après la question 1), $(M+I_3)^2 = 3(M+I_3)$, donc le polynôme $P(X) = (X-2)(X+1)$ est un polynôme annulateur de M. Il en découle que $M^2 = M + 2I_3$. La division euclidienne de X^k par P donne $X^k = QP + cX + d$, et comme -1 et 2 sont des racines de P, on a $\begin{cases} -a+b = (-1)^k \\ 2a+b = 2^k \end{cases}$, ce qu permet d'obtenir $\begin{cases} a = \frac{2^k-(-1)^k}{3} \\ b = \frac{2^k+2(-1)^k}{3} \end{cases}$, par suite

$$\forall k \in \mathbb{N}, M^k = \frac{2^k-(-1)^k}{3}M + \frac{2^k+2(-1)^k}{3}I_3$$

EXERCICE 195 Une belle méthode pour prouver que deux matrices sont semblables

Titre : Une belle méthode pour prouver que deux matrices sont semblables

Difficulté : ★★☆☆☆

ID : 541 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 522 | ID : 541

On note $E_n = \mathbb{K}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n. On définit l'endormorphisme de E suivant :

$$\phi : \begin{cases} E_n & \longrightarrow & E_n \\ P & \mapsto & P' + P \end{cases}$$

Écrire la matrice de ϕ dans la base canonique de E. En déduire que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

Solution

Dans la base canonique, la matrice de ϕ est A puisque $\phi(1) = 1$ et $\forall k \geq 1, \phi\left(X^k\right) = kX^{k-1} + X^k$. En considérant la base de Taylor, $t = \left(1, X, \frac{X^2}{2!}, \dots, \frac{X^n}{n!}\right)$, la matrice de ϕ dans cette base est B. Les

deux matrices A et B représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, elles sont semblables.

EXERCICE 196 Trace de $(A+B)^p$ avec $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$

Titre : Trace de $(A+B)^p$ avec $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ **Difficulté :** ★★★☆☆
ID : 543 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 524 | ID : 543

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier naturel premier. Démontrer que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \quad \operatorname{tr}((A+B)^p) \equiv \operatorname{tr}(A^p) + \operatorname{tr}(B^p)\ [p]$$

Solution

On a $(A+B)^p = \sum_{I \in \{0,1\}^p} \prod_{\alpha \in I} A_k^{\alpha_k}$ avec $A_k \in \{A, B\}$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \{0,1\}^p$
donc

$$\operatorname{tr}(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \operatorname{tr}(A^k B^{p-k}) = \operatorname{tr}(A^p) + \operatorname{tr}(B^p) + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \operatorname{tr}(A^k B^{p-k})$$

et on sait que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, on a $p | \binom{p}{k}$ puisque

$$k! \binom{p}{k} = p(p-1)\ldots(p-k+1),$$

et comme $k! \wedge p = 1$, on a $p | \binom{p}{k}$.

EXERCICE 197 Un endomorphisme à l'aide de la trace

Titre : Un endomorphisme à l'aide de la trace **Difficulté :** ★★☆☆☆
ID : 545 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 526 | ID : 545

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Si M désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par $\operatorname{Tr}(M)$ la trace de la matrice M, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.
On admet que l'application trace est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit A une matrice non nulle donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application f qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = \operatorname{Tr}(A)M - \operatorname{Tr}(M)A$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que f n'est pas l'endomorphisme nul (on pourra distinguer les cas $\operatorname{Tr}(A) = 0$ et $\operatorname{Tr}(A) \neq 0$).
3. (a) Établir que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $(f \circ f)(M) = \operatorname{Tr}(A) f(M)$.
   (b) Donner les valeurs propres possibles de f.
4. Montrer que 0 est valeur propre de f.
5. Montrer que, si $\operatorname{Tr}(A) = 0$, alors f n'est pas diagonalisable.
6. On suppose dans cette question que la trace de A est non nulle.
   (a) Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker}(\operatorname{Tr})$?
   (b) Conclure que f est diagonalisable.

Solution

1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $f(M)$ est bien un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(M+\lambda M') = \operatorname{tr}(A)(M+\lambda M') + \operatorname{tr}(M+\lambda M')A$, et comme tr est linéaire $f(M) = \operatorname{tr}(A)(M+\lambda M') + \operatorname{tr}(M) + \lambda \operatorname{tr}(M'))A$, donc $f(M+\lambda M') = [\operatorname{tr}(A)M + \operatorname{tr}(M)A] + \lambda[\operatorname{tr}(A)M' + \operatorname{tr}(M')A] = f(M) + \lambda f(M')$.
2. Si $\operatorname{tr}(A) = 0$, on a $f(M) = -\operatorname{tr}(M)A$, donc par exemple $f(E_{1,1}) = -\operatorname{tr}(A) \neq 0$. Si $\operatorname{tr}(A) \neq 0$, pour $M = E_{1,2}$, on a $f(M) = \operatorname{tr}(A)M \neq 0$. Notons l'importance de $n \geq 2$ ici.

EXERCICE 198 Etude d'une matrice vérifiant trois conditions

Titre : Etude d'une matrice vérifiant trois conditions
Difficulté : ★★☆☆☆
ID : 548 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 529 | ID : 548

On cherche a déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ vérifiant :

$$\begin{array}{ll} (i) & (M^2+M+I_4)(M-2I_4)^2 = 0 \\ (ii) & (M^2+M+I_4)(M-2I_4) \neq 0 \\ (iii) & (M-2I_4)^2 \neq 0 \end{array}$$

où I_4 est la matrice unité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

1. Chercher les valeurs propres possibles d'une telle matrice.
2. Y a-i-il des solutions diagonalisables ?
3. Déterminer une solution qui soit triangulaire supérieure.

Solution

1. Puisque le polynôme $P = (X^2+X+1)(X-2)^2$ est un polynôme annulateur de M, les valeurs propres de M sont des racines de P et comme les raines de P sont $2, j$ et $\bar{j}$, on a $\operatorname{Sp}(M) \subset \{2, j, \bar{j}\}$, rappelons que $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Non car si M est une solution diagonalisable et comme $P(M) = 0$, le polynôme annulateur de M serait un diviseur de P scindé à racines simples, donc il serait un diviseur de $Q = (X-2)(X-j)(X-\bar{j}) = (X-2)(X^2+X+1) = L$, on aurait donc $L(M) = 0$, chose non vraie par (ii) ci-dessus.
3. On doit avoir M non diagonalisable donc $\dim E_2(M) = 1$, c'est-à-dire $\operatorname{rg}(M-2I_4) = 3$, on prend donc $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{j} \end{pmatrix}$, on obsreve que $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & \bar{j} \end{pmatrix}$ par suite, compte tenu de $(A-2I_2)^2 = 0$ et $B^2+B+I_2 = 0$, on a :

   (i) $(M^2+M+I_4)(M-2I_4)^2 = \begin{pmatrix} A^2+A+I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (B-2I_2)^2 \end{pmatrix} = 0$

   (ii) $(M^2+M+I_4)(M-2I_4) = \begin{pmatrix} A^2+A+I_2 & 0 \\ 0 & B^2+B+I_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A-2I_2 & 0 \\ 0 & B-2I_2 \end{pmatrix}$ donc $(M^2+M+I_4)(M-2I_4) \neq 0$

   (iii) $(M-2I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (B-2I_2)^2 \end{pmatrix} \neq 0$

EXERCICE 199 Un endomorphisme de matrices

Titre : Un endomorphisme de matrices
ID : 552 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 533 | ID : 552
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{K}); M \mapsto f(M)$, défini comme suit : si $M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ alors $f(M) = \begin{pmatrix} t & z \\ x & y \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$
2. f est il diagonalisable ?
3. Si f est diagonalisable, diagonaliser f.

Solution

1. Aisé.
2. On a $f(E_{1,1}) = E_{2,1}$, $f(E_{2,1}) = E_{2,2}$, $f(E_{2,2} = E_{1,1}$ et $f(E_{1,2}) = E_{1,2}$.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable

EXERCICE 200 Un autre endomorphisme de matrices

Titre : Un autre endomorphisme de matrices
ID : 553 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 534 | ID : 553
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{K}); M \mapsto f(M)$, défini comme suit : si $M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ alors $f(M) = \begin{pmatrix} y & t \\ x & z \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$
2. f est il diagonalisable ?
3. Si f est diagonalisable, diagonaliser f.

Solution

1. Aisé.
2. On a $f(E_{1,1}) = E_{2,1}$, $f(E_{2,1}) = E_{1,1}$, $f(E_{1,2} = E_{2,2}$ et $f(E_{2,2}) = E_{1,2}$.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable

EXERCICE 201 Un autre endomorphisme de matrices

Titre : Un autre endomorphisme de matrices
ID : 554 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 535 | ID : 554
Difficulté : ★★☆☆☆

Identifier les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que A est non inversible et :

$$\text{rg}\,(A - I_n) + \text{rg}\,(A + I_n) = n + 1.$$

Solution

Si u est l'endomorphisme canoniquement associé à A alors $0 \in \text{Sp}(u)$ et $1, -1$ sont des valeurs propres de A car la relation

$$\text{rg}\,(A - I_n) + \text{rg}\,(A + I_n) = n - 1$$

implique $\text{rg}\,(A - I_n) < n$ et $\text{rg}\,(A + I_n) < n$. Il en découle que $\{-1, 0, 1\} \subset \text{Sp}(A)$. La relation $(\star)$

donne, par le théorème du rang :

$$(\star\star) \quad \dim(\ker(u-\mathrm{Id})) + \dim(\ker(u+\mathrm{Id})) = n-1$$

EXERCICE 202 La famille des polynômes de Berrnestein

Titre : La famille des polynômes de Berrnestein
ID : 566 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 547 | ID : 566
Difficulté : ★★★☆☆

On définit les polynômes de Bernestein par

$$B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0,n]\!]$. On se propose de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(B_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

1. On rappelle que si $P = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j X^j$, est un polynôme non nul la valuation de P est $\mathrm{val}(P) = \min\{k \in \mathbb{N} / a_k \neq 0\}$.
   (a) Quelle est la valuation de $B_{n,k}$?
   (b) Démontrer que si $(A_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille de polynômes tel que $\mathrm{val}(A_k) = k$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ alors la famille $(A_k)_{0\leq k\leq n}$ est libre.
   (c) Démontrer que $(B_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ est libre.
2. On considère l'application :

$$f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], P \mapsto f(P) = nXP(X) + X(1-X)P'(X)$$

   (a) Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ et que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par f.
   (b) Démontrer que pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times [\![0,n]\!]$, on a $f(B_{n,k}) = \lambda_{n,k} B_{n,k}$ où $\lambda_{n,k}$ est un scalaire à préciser.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(B_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Solution

$$\begin{aligned}
f(B_{n,k})(X) &= nXB_{n,k}(X) + X(1-X)B'_{n,k}(X) \\
&= nX\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} + X(1-X)\binom{n}{k}\left[kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)X^k(1-X)^{n-k-1}\right] \\
&= nX\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} + \binom{n}{k}\left[kX^k(1-X)^{n-k+1} - (n-k)X^{k+1}(1-X)^{n-k}\right] \\
&= \binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}(nX + k(1-X) - (n-k)X) = kB_{n,k}(X).
\end{aligned}$$

On a donc bien $f(B_{n,k}) = kB_{n,k}$ pour tout k

EXERCICE 203 Une utilisation du théorème de Cayley-Hamilton

Titre : Une utilisation du théorème de Cayley-Hamilton
ID : 671 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 652 | ID : 671
Difficulté : ★★☆☆☆

On considère $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tel que $\det(A) = 1$. Démontrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on a la relation :

$$A^2M - MA^2 = MA^{-2} - M^{-2}A.$$

Solution

On va présenter deux méthodes différentes pour répondre à cette question.

Une première méthode

On sait que le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A = X^2 - \tau X + \delta, \text{ avec } \begin{cases} \tau = \text{tr}(A) \\ \delta = \det(A) \end{cases}$$

donc $\chi_A = X^2 - \tau X + 1$ et par le théorème de Cayley-Hamilton, on a : $A^2 = \tau A - I_2$. Par ailleurs $A(\tau I_2 - A) = I_2$ donne $A^{-1} = \tau I_2 - A$, donc $A^{-2} = \tau^2 I_2 - 2\tau A + A^2$. Il en découle que

$$A^2 + A^{-2} = 2A^2 + \tau^2 I_2 - 2\tau A = 2\tau A - 2I_2 + \tau^2 I_2 - 2\tau A = (\tau^2 - 2)I_2$$

Il en découle que toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ commute avec $A^2 + A^{-2}$, ce qui donne la formule demandée.

Une deuxième méthode

On peut trigonaliser A donc $A \sim T$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec λ, μ les valeurs propres de A, comme $\det(A) = 1$, on a $\mu = \lambda^{-1}$. On étudeie deux cas :

- **Premier cas :** A est diagonalisable alors $A \sim \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$, ce qui permet d'écrire $A = P\Delta P^{-1}$ avec $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$, donc $A^2 = P\Delta^2 P^{-1}$ et $A^{-2} = P\Delta^{-2}P^{-1}$, donc $A^2 + A^{-2} = (\lambda^2 + \lambda^{-2})I_2$ donc elle est scalaire et on a le résultat désiré.
- A n'est pas diagonalisable, on a alors $\lambda = \pm 1$, et $A \sim T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Il en découle que $A = PTp^{-1}$ avec $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$, donc $A^2 + A^{-2} = P(T^2 + T^{-2})P^{-1}$, or $T^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$ et $T^{-2} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & -2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} = 2I_2$, donc $A^2 + A^{-2}$ commute avec toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

EXERCICE 204 Trace réelle d'une matrice de taille 4

Titre : Trace réelle d'une matrice de taille 4
ID : 690 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 671 | ID : 690
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ tel que $\text{tr}(A) \in \mathbb{R}$. Quelles sont les valeurs possibles de $\det(A)$ et $\text{tr}(A)$?

Solution

La matrice A est trigonalisable, notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ la liste des valeurs propres de A et supposons que $\lambda = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k$ est un nombre réel. Une telle matrice peut se construire par le choix d'un réel arbittraire t, des nombres complexes arbittraires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ puis $\lambda_4 = t - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$, on prend toutes les matrices semblables aux matrices traingulaires de coefficients diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ainsi

construits, le determinant est $\delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3(t - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)$

EXERCICE 205 Polynôme min et car

Titre : Polynôme min et car
ID : 707 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 685 | ID : 707
Difficulté : ★☆☆☆☆

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer le polynôme minimal de A.

Solution

1. Polynôme caractéristique

$$X_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-3 & -2 & 2 \\ 1 & X & -1 \\ -1 & 1 & X \end{vmatrix}$$

En développant, on obtient :

$$X_A(X) = (X-3)\left(X^2+1\right) + 2(X-1) + 2(X+1)$$
$$X_A(X) = X^3 - 3X^2 + 5X - 3$$

1 étant racine évidente, le polynôme se factorise sous la forme :

$$\chi_A(x) = (x-1)\left(x^2 - 2x + 3\right)$$

2. Polynôme minimal
Dans $\mathbb{C}$, le discriminant de $X^2 - 2X + 3$ est $\Delta = -8$. Les trois racines de $\chi_A(1, 1+i\sqrt{2}, 1-i\sqrt{2})$ sont donc simples. Puisque X_A n'admet aucune racine multiple, le polynôme minimal $\mu_A(X)$ est nécessairement égal au polynôme caractéristique :

$$\mu_A(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$$

Chapitre 004 — Espaces vectoriels normés (L2)

EXERCICE 206 Séparation par des ouverts

Titre : Séparation par des ouverts
ID : 23 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 10 | ID : 23
Difficulté : ★★☆☆☆

$(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.

1. Démontrer que si $(a,b) \in E^2$ et $a \neq b$, alors il existe U et V ouverts de E tel que $a \in U$ et $b \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.
2. Généralement, démontrer que si A et B sont deux parties non vides telles que $d(A,B) = \inf_{x\in A, y\in B} d(x,y) > 0$. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V de E tel que $\begin{cases} A \subset U \\ B \subset V \end{cases}$.

Solution

1. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}\|b-a\|$ et $U = B(a,\varepsilon)$ et $V = B(b,\varepsilon)$ alors $a \in U$ et $b \in V$ et si $x \in U \cap V$ on aurait $\|x-a\| < \varepsilon$ et $\|x-b\| < \varepsilon$, donc $\|a-b\| \leq \|x-a\| + \|x-b\| < 2\varepsilon = \|b-a\|$, chose absurde. Donc $U \cap V = \emptyset$.
2. Notons
$$d = \inf_{x\in A, y\in B} \|x-y\|$$
et soit
$$\delta = \frac{d}{3}.$$
Soit
$$U = \bigcup_{x\in A} B(x,\delta) \text{ et } V = \bigcup_{x\in B} B(x,\delta).$$
Alors comme U et V sont des réunions de boules ouvertes ce sont des ouverts. Si $x \in U \cap B$ alors
$$\exists (a,b) \in A \times B, x \in B(a,\delta) \text{ et } x \in B(b,\delta),$$
donc
$$\|x-a\| < \delta \text{ et } \|x-b\| < \delta,$$
par suite
$$\|a-b\| \leq \|x-a\| + \|y-b\| < 2\delta = \frac{2d}{3} < d \leq \|a-b\|,$$
par définition de d, chose absurde. Il en découle que $U \cap V = \emptyset$.

EXERCICE 207 Les normes de la droite réelle

Titre : Les normes de la droite réelle
ID : 171 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 157 | ID : 171
Difficulté : ★☆☆☆☆

1. Démontrer que toute norme sur $\mathbb{R}$ est de la forme $N = c|.|$ où c est une constante strictement positive.
2. Démontrer que si E est un espace vecoriel non réduit à $\{0\}$ toute norme N sur E en tant qu'application de E vers $\mathbb{R}_+$ est surjective.

Solution

1. Soit N une norme sur $\mathbb{R}$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $N(x) = N(x.1) = |x|N(1)$. En posant $c = N(1)$, on a $c > 0$ et $N(x) = x|x|$, pour tout $x \in \mathbb{R}$
2. Puisque $E \neq \{0\}$, soit $e \in E$ tel que $e \neq 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ en posant $x = \frac{t}{N(e)}e$, on a $N(x) = t$, par suite N est surjective.

EXERCICE 208 Distance d'un point à une partie lipschitzienne.

Titre : Distance d'un point à une partie lipschitzienne.
ID : 172 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 158 | ID : 172
Difficulté :

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E et $d_A : E \to \mathbb{R}; x \mapsto d_A(x) = d(x, A)$. Démontrer que :

$$\forall x, y \in E, \quad |d_A(x) - d_A(y)| \leq \|x - y\|$$

Solution

Soit $x, y \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $d(y, A)$, il existe $a \in A$ tel que :

$$d(y, A) + \varepsilon > d(y, a)$$

On a alors :$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) < d(x, y)d(y, A) + \varepsilon$
Ainsi : $d(x, A) - d(y, A) < \|x - y\| + \varepsilon$.
Par symétrique on a aussi : $d(y, A) - d(x, A) < \|x - y\| + \varepsilon$
Donc :$|d(x, A) - d(y, A)| < \|x - y\| + \varepsilon$
Par passage à la limite quand ε tends vers 0 à droite, il vient :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$$

EXERCICE 209 Une inégalité pour les normes

Titre : Une inégalité pour les normes
ID : 173 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 159 | ID : 173
Difficulté :

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que pour tout $x, y, z, t \in E$, on a :

$$\|x - y\| + \|z - t\| \leq \|x - z\| + \|y - t\| + \|x - t\| + \|y - z\|$$

Solution

Par application de l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{cases} \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|x - y\| \\ \|x - y\| \leq \|x - t\| + \|t - y\| \\ \|z - t\| \leq \|z - x\| + \|x - t\| \\ \|z - t\| \leq \|z - y\| + \|y - t\| \end{cases}$$

En aditionnant membre à membre les quatre inégalités, on obtient l'inégalité demandée après division par 2.

EXERCICE 210 Norme construite par une famille de scalaires

Titre : Norme construite par une famille de scalaires
ID : 174 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 160 | ID : 174
Difficulté :

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels et $N : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$N(x_1, \ldots, x_n) = a_1 |x_1| + \cdots + a_n |x_n|$$

A quelle condition sur les $a_1, \dots, a_n$, l'application N définit-elle une norme sur $\mathbb{K}^n$?

Solution

Supposons que N est une norme. Si on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $N(e_k) > 0$. Or $N(e_k) = \sum_{j=1}^{n} a_j |\delta_{jk}|$, donc $a_k > 0$. On voit donc qu'une condition nécessaire pour que N soit une norme est :

$$(\star) \quad \forall k \in [\![1, n]\!], a_k > 0$$

Réciproquement, supposons que $(\star)$ est vraie.

- Soit $x = (x_k), y = (y_k) \in \mathbb{K}^n$ alors $N(x+y) = \sum_{k=1}^{n} a_k |x_k + y_k|$. Comme $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $N(x+y) \leq \sum_{k=1}^{n} a_k (|x_k| + |y_k|) \leq \sum_{k=1}^{n} a_k |x_k| + \sum_{k=1}^{n} a_k |y_k| = N(x) + N(y)$.
- Soit $x = (x_k) \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors : $N(\lambda x) = \sum_{k=1}^{n} a_k |\lambda x_k| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda| a_k |x_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} a_k |x_k| = |\lambda| N(x)$.
- Soit $x = (x_k) \in \mathbb{K}^n$. Si $N(x) = 0$ alors $\sum_{k=1}^{n} a_k |x_k| = 0$. Comme les termes de cette somme sont positifs, il vient : $a_k |x_k| = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et comme $a_k > 0$, il vient $x_k = 0$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, donc $x = 0$. Donc N est un norme et on a en conclusion :

$$N \text{ est une norme } \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], a_k > 0$$

EXERCICE 211 Norme construite par une famille de fonctions

Titre : Norme construite par une famille de fonctions
ID : 175 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 161 | ID : 175
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soient $f_1, \dots, f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues.
A quelle condition l'application

$$N : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n\|_\infty$$

définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^n$?

Solution

• Si la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est liée dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des applications continues de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$, alors il existe $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x \neq 0$ et $\sum_{k=1}^{n} x_k f_k = 0$, donc $N(x) = 0$ alors que $x \neq 0$, Donc N n'est pas une norme car elle ne satisfait pas l'axiome de séparation.
• Si la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel E, alors N est une norme car :
- L'inégalité triangulaire est vérifiée facilement.
- L'homogénéité aussi.
- Si $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $N(x) = 0$ alors : $\sup_{t \in [0,1]} |\sum_{k=1}^{n} x_k f_k(t)| = 0$, donc pour tout $t \in [\![0, 1]\!]$, on a : $\sum_{k=1}^{n} x_k f_k(t) = 0$, ce qui veut dire : $\forall t \in [0, 1], \left(\sum_{k=1}^{n} x_k f_k\right)(t) = 0$ donc la fonction $\sum_{k=1}^{n} x_k f_k$ est nulle, et par liberté de lla famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$, on a $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, donc $x = 0$.
Conclusion :
N est une norme si et seulement si la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel E.

EXERCICE 212 Des questions sur les parties bornées

Titre : Des questions sur les parties bornées
ID : 176 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 162 | ID : 176
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer que toute boule fermé ou ouverte de E est bornée.
2. Montrer que si A et B sont deux parties de E bornées alors $A + B$ est bornée.
3. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que F est borné si et seulement si $F = \{0\}$.

Solution

1. Soit $B_f(a, R)$ la boule fermée de centre a et de rayon R. Soit $x \in B_f(a, R)$, alors $\|x\| = \|x - a + a\| \leq \|x - a\| + \|a\| \leq R + \|a\| = M$, donc $B_f(a, R) \subset B_f(0, M)$ donc $B_f(a, R)$ est bornée. La boule ouverte $B(a, R)$ de centre a et de rayon R est une partie de $B_f(a, R)$ donc elle est bornée comme partie d'une partie bornée.
2. Comme A et B sont bornées il existe R_1, R_2 réels positifs tel que $A \subset B_f(0, R_1)$ et $B \subset B(0, R_2)$. Soit $x \in A + B$, donc $x = a + b$ pour $(a, b) \in A \times B$, donc $\|x\| = \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \leq R_1 + R_2 = R$, donc $A + B \subset B_f(0, R)$ donc $A + B$ est bornée.
3. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \neq \{0\}$, donc il existe un vecteur non nul x tel que $x \in F$. On va démontrer que pour tout $R > 0$, F n'est pas inclus dans la boule $B_f(0, R)$. Soit $R > 0$ et $y = (R + 1)\frac{x}{\|x\|}$ alors $\|y\| = R + 1 > R$, ce qui prouve le résultat désiré et le fait que F n'est pas borné.

EXERCICE 213 Des normes équivalentes dans $\mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R})$

Titre : Des normes équivalentes dans $\mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R})$
ID : 177 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 163 | ID : 177
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications réelle de classes C^1 sur $[0, 1]$ et pour tout $f \in E$, on pose :

$$N_1(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt$$

et

$$N_2(f) = \left|\int_0^1 f(t)dt\right| + \int_0^1 |f'(t)|dt$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E
2. Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes

Solution

1. Il est aisé de prouver que N_1 et N_2 sont deux normes.
   Pour la séparation : si $N_1(f) = 0$ alors $|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t = 0$, une somme nulle de termes positifs, ces derniers sont forcément nuls, donc $f(0) = 0$ et $\int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t = 0$, comme f est de classe C^1 sur $[0, 1]$, on a $|f'|$ est positive continue d'intégrale nulle, donc elle est nulle, donc $f' = 0$, par suite f est constante sur $[0, 1]$ et comme $f(0) = 0$, on a $f = 0$.
2. On a :
$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\int_0^x f'(u)\mathrm{d}u + f(0)\right)\mathrm{d}t$$

donc :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^1 \left|\int_0^x f'(u)\mathrm{d}u\right| \mathrm{d}t + |f(0)| \\ &\leq \int_0^1 \left|\int_0^1 |f'(u)|\mathrm{d}u\right| \mathrm{d}t + |f(0)| \\ &= N_1(f)\end{aligned}$$

Il en découle que $N_2(f) \leq 2N_1(f)$.
Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$f(0) = f(x) - \int_0^x f'(u)\mathrm{d}u.$$

Donc :

$$f(0) = \int_0^1 f(0)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \left(\int_0^x f'(u)\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}x$$

Donc :

$$\begin{aligned}|f(0)| &\leq \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_0^1 \left|\int_0^x f'(u)\mathrm{d}u\right| \mathrm{d}x \\ &\leq \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_0^1 \left|\int_0^1 |f'(u)|\mathrm{d}u\right| \mathrm{d}x \\ &= \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_0^1 |f'(u)|\mathrm{d}u \\ &= N_2(f)\end{aligned}$$

Donc $N_1(f) \leq 2N_2(f)$ et finalement :

$$\frac{1}{2}N_1 \leq N_2 \leq 2N_1$$

donc N_1 et N_2 sont équivalentes.
Une deuxième méthode : $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est de classe C^2 sur $[0,1]$, la formule de Taylor-reste intégrale donne $F(1) = F(0) + F'(0) + \int_0^1 (1-t)F''(t)\mathrm{d}t$, donc $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = f(0) + \int_0^1 (1-t)f'(t)\mathrm{d}t$, donc on a les inégalité :

$$\begin{cases} |\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t| \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t \\ |f(0)| \leq |\int_0^1 f(x)\mathrm{d}t| + \int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t \end{cases}$$

EXERCICE 214 Topologie des parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}$ definies par le rang

Titre : Topologie des parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}$ definies par le rang
ID : 178 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 164 | ID : 178
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$\begin{cases} \mathscr{A}_p = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \operatorname{rg}(A) = p\} \\ \mathscr{B}_p = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \operatorname{rg}(A) \leq p\} \end{cases}$$

Les parties $\mathscr{A}_p$ et $\mathscr{B}_p$ sont elles ouvertes ? fermées ?

Solution

On va étudier l'ouverture et la fermeture de chacun des types d'ensembles :

• **Les ensembles $\mathscr{A}_p$:**

- Si $p > n$ alors $\mathscr{A}_p = \emptyset$ est à la fois ouvert et fermé.

- Si $p = n$ alors $\mathscr{A}_n = GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert et n'est pas fermé car par exemple la suite $A_k = \frac{1}{k+1} I_n$ est à valeurs dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ mais elle converge vers 0.

- Si $p \in [\![1, n-1]\!]$ alors $\mathscr{A}_p$ n'est pas fermé car en posant $J_p = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_k = \frac{1}{k+1} J_p$, on a $M_k \in \mathscr{A}_p$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, mais $M_k \to 0$ et $0 \notin \mathscr{A}_p$.

$\mathscr{A}_p$ n'est pas ouvert car par exemple la suite (U_k) des matrices définie par $U_k = J_p + \frac{1}{k+1} I_n$ est à valeurs dans $(\mathscr{A}_p)^c$ mais elle converge vers J_p qui elle appartient à $\mathscr{A}_p$.

• **Les ensembles $\mathscr{B}_p$:**

- Si $p \geq n$ alors $\mathscr{B}_p = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est à la fois ouvert et fermé.

- Si $p = 0$ alors $\mathscr{B}_p = \{0\}$ est un fermé non ouvert.

- Si $p \in [\![1, n-1]\!]$ alors $\mathscr{B}_p$ n'est pas un ouvert car la suite (U_k) ci-dessus est à valeurs dans le complémentaire de $\mathscr{B}_p$ mais elle converge vers J_p élément de $\mathscr{B}_p$.

Cependant, dans ce cas, $\mathscr{B}_p$ est un fermé car une matrice M est dans $\mathscr{B}_p$ si et seulement si toutes matrice d'ordre $p+1$ extraites de M sont de déterminants nuls. Ces matrices sont en nombre de $N = (\binom{n}{p+1})^2$ si on les notes $M_k, k \in [\![1, N]\!]$, et si on considère l'application :

$$\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}; M \mapsto \Phi(M) = (\det(M_k))_{1 \leq k \leq N},$$

on peut dire que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M \in \mathcal{B}_p \Leftrightarrow \Phi(M) = 0_{\mathbb{R}^N}$.

• L'application Φ est continue car :

• Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, l'application $\psi_k : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_p(\mathbb{R}); M \mapsto M_k$ est continue car linéaire et les espaces vectoriels de départ et d'arrivée de ψ_k sont de dimensions finies.

• L'application $\det : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, X \mapsto \det(X)$ est continue.

• On a $\Phi = \sum_{k=1}^{N} \det \circ \psi_k$ est donc continue comme somme finie de composées de fonctions continues.

• On a $\mathcal{B}_p = \Phi^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^N}\})$, et par continuité de Φ, on a $\mathcal{B}_p$ est bien une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque : En fait on peut démontrer que $\mathrm{Adh}(\mathcal{A}_p) = \mathcal{B}_p$, en effet si $M \in \mathcal{B}_p$ alors $r = \mathrm{rg}(M) \leq p$. Si $r = p$ la suite $M_k = M$ est à valeurs dans $\mathcal{A}_p$ et converge vers M. Si $r < p$, la matrice M s'écrit $M = PJ_rQ$ avec $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P, Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Soit $(M_k)_{k \geq 1}$ la suite définie par $M_k = PL_kQ$ avec $L_k = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} I_{p-r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il est claire que $\mathrm{rg}(L_k) = p$ donc $\mathrm{rg}(M_k) = p$ et la suite à valeurs dans $\mathcal{A}_p$, par ailleurs, $\lim_{k \to +\infty} M_k = M$, donc $M \in \mathrm{Adh}(\mathcal{A}_p)$ et ceci démontre que :

$$(\star) \quad \mathcal{B}_p \subset \mathrm{Adh}(\mathcal{A}_p).$$

Comme $\mathcal{A}_p \subset \mathcal{B}_p$, le passage à l'adhérence donne $\mathrm{Adh}(\mathcal{A}_p) \subset \mathrm{Adh}(\mathcal{B}_p)$, et comme $\mathcal{B}_p$ est fermé, on a :

$$(\star)' \quad \mathrm{Adh}(\mathcal{A}_p) \subset \mathcal{B}_p.$$

On finit par conclure que $(\star)$ et $(\star)'$ donnent $\mathrm{Adh}(\mathcal{A}_p) = \mathcal{B}_p$.

EXERCICE 215 Topologie d'un espace de suites

Titre : Topologie d'un espace de suites
ID : 179 **Durée :** —
Difficulté : ★☆☆☆☆
Niveau : L2 | N° : 165 | ID : 179

On note E l'ensemble des suites réelles bornées.
Pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, on pose :

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

1. Montrer que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E.
2. Montrer que chacun des ensembles suivants :

$$\begin{cases} F = \{u \in E / u_0 = 1\} \\ G = \{u \in E / u \text{ converge }\} \\ H = \{u \in E / \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0\} \end{cases}$$

   est un fermé de E.
3. Montrer que

$$K = \{u \in E / \exists n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, u_p = 0\}$$

   n'est pas un fermé de E. Déterminer l'adhérence de K.
4. L'espace E est-il complet ?

Solution

1. Elle est bien dfinie.
   • Si $u, v \in E$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n + v_n| \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$ et par passage au sup, on obtient $\|u + v\|_\infty \leq \|u\| + \|v\|$.
   • Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|\lambda u_n| \leq |\lambda||u_n| \leq |\lambda|\|u\|$. Par ailleurs si $\lambda \neq 0$ et si $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |\lambda u_n| \leq M$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \frac{M}{|\lambda|}$ donc $\|u\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$ et par suite $|\lambda|\|u\| \leq M$ donc $|\lambda|\|u\| = \|\lambda u\|$. Si $\lambda = 0$, l'égalité précédente reste vraie donc finalement :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E, \|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$$

   • Soit $u \in E$ tel que $\|u\| = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n| \leq 0$ don $u_n = 0$ d'où $u = 0$.
2. Fermeture des ensembles proposés.
   • $F = \{u \in E / u_0 = 1\}$. On a $F = \Phi^{-1}(\{1\})$ où $\Phi : E \to \mathbb{R}, u \mapsto \Phi(u) = u_0$. est une forme linéaire et $\forall u \in E, |\Phi(u)| \leq \|u\|_\infty$, donc elle est continue.
   • $G = \{u \in E / u \text{ converge }\}$ Soit (U_n) une suite d'éléments de G convergeant vers $U \in E$. On note $U_{n,p}$ le terme général de la suite U_p et $\ell_n = \lim\limits_{p\to+\infty} U_{n,p}$. La suite (ℓ_n) est bornée car pour $\varepsilon = 1$, on a en vertu de $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = U$:

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, \|U_n - U\| \leq 1$$

   donc

$$\forall n \geq N \|U_n\| \leq \|U\| + 1$$

   et par suite, si n est un entier naturel tel que $n \geq N$ alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, |U_{n,p}| \leq \|U\| + 1$$

   et par passage à la limite quand p tends vers $+\infty$, il vient :

$$\forall n \geq N, \ell_n \leq \|U\| + 1$$

   Soit

$$M = \max(\ell_1, \ldots, \ell_{N-1}, \|U\| + 1)$$

   alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\ell_n| \leq M$$

   et par suite la suite (ℓ_n) est bornée. Par le théorème de Stone Weiestrass, la suite (ℓ_n) admet au moins une valeur d'adhérence ℓ. On va prouver que c'est son unique valeur d'adhérence, en

effet supposons que ℓ' est une autre valeur d'adhérence de (u_n), donc il existe deux applications $\phi, \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \ell_{\phi(n)} = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \ell_{\psi(n)}) = \ell'$$

Les suites $(U_{\phi(n)})$ et $(U_{\psi(n)})$ convergent verss U, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} n \geq N_1 \Rightarrow \|U_{\phi(n)} - U\| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \\ n \geq N_2 \Rightarrow \|U_{\psi(n)} - U\| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Si on note $N = \max(N_1, N_2)$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \begin{cases} \|U_{\phi(n)} - U\| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \\ \|U_{\psi(n)} - U\| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Par suite :

$$\forall n \geq N, \|U_{\phi(n)} - U_{\psi(n)}\| \leq \|U_{\phi(n)} - U\| + \|U_{\psi(n)} - U\| \leq \varepsilon$$

Donc :

$$\forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, |U_{\phi(n),p} - U_{\psi(n),p}| \leq \varepsilon$$

et par passage à la limite quand p tends vers $+\infty$, il vient :

$$\forall n \geq N, |\ell_{\phi(n)} - \ell_{\psi(n)}| \leq \varepsilon$$

et finalement par passage à la limite quand n tends vers $+\infty$, on obtient :

$$|\ell - \ell'| \leq \varepsilon$$

Ceci étant pour tout $\varepsilon \geq 0$, on a alors $\ell = \ell'$.
• Montrons que :

$$H = \{u \in E / \lim_{n\to+\infty} u_n = 0\}$$

est un fermé de E. Soit

$$T : F \to \mathbb{R}; U \mapsto T(U) = \lim_{n\to+\infty} U_n$$

alors T est une application linéaire par linéarité de la limite. Par ailleurs, si on considère $U \in F$ et ε est un réel strictement positif, et si on note $\ell = T(U) = \lim_{n\to+\infty} U_n$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |U_n - \ell| \leq \varepsilon$$

en particulier on a $|U_N - \ell| \leq \varepsilon$ donc $|\ell| \leq |\ell - U_N| + |U_N| \leq \|U\| + \varepsilon$. On a donc prouvé que :

$$\forall U \in F, \forall \varepsilon > 0, |T(U)| \leq \|U\| + \varepsilon$$

donc

$$\forall U \in F, |T(U)| \leq \|U\|$$

Il en découle que T est une application linéaire continue donc $\ker(T) = H = T^{-1}\{0\}$ est un fermé de G et comme G est lui même est un fermé de E, on a H est un fermé de E.

3. $K = \{u \in E / \exists n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, u_p = 0\}$ n'est pas fermé car la suite (U_n) tel que $U_{n,p} = \frac{1}{p+1}$ si $0 \leq p \leq n$ et $U_{n,p} = 0$ si $p > n$ est une suite à valeurs dans K et elle converge vers U tel que $U_p = \frac{1}{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, U_{n,p} - U_p = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq p \leq n \\ -\frac{1}{p+1} & \text{si} \quad p > n \end{cases}$$

donc $\|U_p - U\| = \frac{1}{n+2}$ tends vers 0 quand n tends vers $+\infty$. Cependant il est clair que U n'est pas stationnaire, donc elle n'appartient pas à K.
Adhérence de K : On va prouver que $\text{Adh}(K) = H$ (rappelons que H est le sous-espace vectoriel de E formé par les suite convergentes vers 0.) On a déjà prouvé que H est fermé, et comme $K \subset H$, on a $\text{Adh}(K) \subset H$. Réciproquement, soit $U \in H$ une suite dont le terme général est noté u_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $= \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Considérons la suite $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{p,n} = \begin{cases} u_n & \text{si} \quad n \leq p \\ 0 & \text{si} \quad n > p \end{cases}$$

Démontrons que (U_p) converge vers U dans E, pour cela, remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|U_{p,n} - u_n| = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \leq p \\ |u_n| & \text{si} \quad n > p \end{cases}$, de sorte que

$$|U_p - U| = \sup_{n>p} |u_n - \ell|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n| < \varepsilon.$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq N$, alors, compte tenu de l'implication $n > p \Rightarrow n \geq N$, vraie pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > p \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$$

Il en découle que $\|U_p - U\| = \sup\limits_{n>p} |u_n| \leq \varepsilon$, donc, on a prouvé que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p \geq N \Rightarrow \|U_p - U\| \leq \varepsilon$$

donc

$$\lim_{p\to+\infty} U_p = U$$

On voit que (U_p) est une suite d'éléments de K qui converge vers U. En conclusion on a $\text{Adh}(K) = H$.

4. E est complet, en effet si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E, fixons $p \in \mathbb{N}$. La suite $(U_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ car si ε est un réel strictement positif, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n, m \geq N, \|U_n - U_m\| \leq \varepsilon$$
Donc, en particulier :
$$\forall n, m \geq N, \|U_{n,p} - U_{m,p}\| \leq \varepsilon$$
Comme $\mathbb{R}$ est complet, elle converge ver un réel V_p, c'est-à-dire :
$$\lim_{n\to+\infty} U_{n,p} = V_p$$
Ceci défini une suite V. On a $V \in E$; en effet, soit $p \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n,p} = V_p$, donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq m, |U_{n,p} - V_p| \leq 1$, en particulier, $|U_{m,p} - V_p| \leq 1$ donc $|V_p| \leq 1 + \|U_m\|$. La suite (U_n) étant de Cauchy dans E, elle est donc bornée dans E, donc il existe $M' \geq 0$ tel que $\|U_n\| \leq M'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $|V_p| \leq 1 + M'$ donc, en posant $M = M' + 1$, on a :
$$\forall p \in \mathbb{N}, |V_p| \leq M$$
et par conséquent, la suite V est bornée, donc $V \in E$.
Démontrons que
$$\lim_{n\to+\infty} U_n = V$$

Soit $\varepsilon >$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall m, n \geq N, \|U_n - U_m\| \leq \varepsilon$$

donc :

$$\forall m, n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \|U_{n,p} - U_{m,p}\| \leq \varepsilon$$

Faisons n et faisons tendre m vers $+\infty$, il vient :

$$\forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \|U_{n,p} - V_p\| \leq \varepsilon$$

Donc

$$\forall n \geq N, \sup_{p \in \mathbb{N}} |U_{n,p} - V_p| \leq \varepsilon$$

Soit :

$$\forall n \geq N, \|U_n - V\| \leq \varepsilon$$

On a prouvé donc que :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq N, \|U_n - V\| \leq \varepsilon$$

EXERCICE 216 Normes sur un espace fonctionnel

Titre : Normes sur un espace fonctionnel
ID : 180 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 166 | ID : 180
Difficulté :

On note $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ et $E' = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de E constitué des applications de classe C^1 de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. et soit

$$F = \{f \in E' / f(0) = 0\}$$

Pour tout $f \in E$, on pose :

$$N(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|,$$

et pour tout $f \in E'$, on pose

$$N'(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

1. On rappelle que N est une norme sur E. Est ce que N' est une norme sur E' ?
2. Démontrer que N' est une norme sur F.
3. Les normes N et N' considérées comme normes de F sont elles équivalentes ?

Solution

1. N' n'est pas une norme sur E' car pour f définie par $f(x) = 1$ on a bien $f \in E'$ et $N'(f) = 0$ mais $f \neq 0$.
2. N' est une norme sur F. Le seul point non évident est la séparation. Si $N'(f) = 0$ alors $f' = 0$ donc f constante et comme $f(0) = 0$. f est constante sur $[0,1]$ et $f(0) = 0$, donc $f = 0$.
3. Les normes N et N' ne sont pas équivalentes car si on note f_n l'application définie par $f_n(x) = x^n$ alors la suite (f_n) est bornée dans (F, N) alors qu'elle n'est pas bornée dans (F, N').

EXERCICE 217 Une inégalité pour les normes

Titre : Une inégalité pour les normes
ID : 181 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 167 | ID : 181
Difficulté : ★☆☆☆☆

$(E, \|.\|)$ est un espace vetoriel normé. Soient $x, y, z \in E$ tel que $x + y + z = 0$. Montrer que :

$$\|x - y\| + \|y - z\| + \|z - x\| \geq \frac{3}{2}(\|x\| + \|y\| + \|z\|)$$

Solution

On a $3x = 2x + x = 2x - y - z = (x - y) + (x - z)$, donc

$$3\|x\| \leq \|x - y\| + \|x - z\|$$

et par symétrie des rôles, il vient :

$$3(\|x\| + \|y\| + \|z\|) \leq 2(\|x - y\| + \|y - z\| + \|x - z\|)$$

EXERCICE 218 Exemples de calcul de norme d'une fonction

Titre : Exemples de calcul de norme d'une fonction
ID : 182 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 168 | ID : 182
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ et pour tout $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|; \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \mathrm{d}t; \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)^2| \mathrm{d}t}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application f_n définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. Donner une représentation graphique f_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer $\|f_n\|_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \{1, 2, \infty\}$

Solution

1. tracé du graphe demandé :



2. On a :
   - $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ car, pour tout $x \in [0,1]$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ alors $f_n(x) = nx \leq 1$ et si $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$, $f_n(x) = 1$ et $f_n(1) = 1$.
   - $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2}\left(1 + 1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n}$ (aire du trapèsze).
   - $\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 f_n(t)^2 \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 t^2 \mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{n}}^1 1 \mathrm{d}t = n^2 \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{n}} + 1 - \frac{1}{n} = 1 - \frac{2}{3n}$ donc $\|f_n\|_2 = \sqrt{1 - \frac{2}{3n}}$.

EXERCICE 219 Des normes dans l'espace des suites bornées

Titre : Des normes dans l'espace des suites bornées
ID : 183 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 169 | ID : 183
Difficulté : ★☆☆☆☆

On note $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u \text{ est bornée}\}$ l'espace vectoriel réel des suites réelles bornées. Pour tout $u = (u_n) \in E$, on note :

$$\|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \quad \text{et} \quad N(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|u_n| + |u_{2n}|)$$

1. Montrer que $\|.\|$ et N sont des normes sur E.
2. Montrer qu'elles sont équivalentes.
3. On note θ la suite nulle. Préciser les valeurs de :

$$k_1 = \sup_{\substack{u \in E \\ u \neq \theta}} \frac{\|u\|}{N(u)} \quad \text{et} \quad k_2 = \sup_{\substack{u \in E \\ u \neq \theta}} \frac{N(u)}{\|u\|}$$

Solution

1. Il est aisé de démontrer l'homogénéité et l'inégalité triangulaire pour chacune des deux applications. Pour la séparation pour N si $N(u) = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| + |u_{2n}| = 0$, don $u_n = 0$ et $u = \theta$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leq |u_n| + |u_{2n}|$ donc $|u_n| \leq N(u)$ et par passage au sup, on déduit : $\|u\| \leq N(u)$. Par ailleurs $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} |u_n| \leq \|u\| \\ |u_{2n}| \leq \|u\| \end{cases}$ donc en sommant $|u_n| + |u_{2n}| \leq 2\|u\|$, et

par passage à la borne supérieur, il vient : $N(u) \leq 2\|u\|$.
Conclusion :

$$\forall u \in E, \quad \|u\| \leq N(u) \leq 2\|u\|$$

3. D'après la question précédente , si $u \in E$ et $u \neq \theta$, on a $\frac{\|u\|}{N(u)} \leq 1$, donc $k_1 \leq 1$. Si on considère la suite $u = (u_n)$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{2k} = 0 \\ u_{2k+1} = 1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|u\| = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} |u_n| + |u_{2n}| = 0 & \text{si} \quad n \in 2\mathbb{N} \\ 1 & \text{si} \quad n \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases}$$

donc $\sup_{n\in\mathbb{N}}(|u_n| + |u_{2n}|) = 1$, donc pour cet élément u, on a $1 = \frac{\|u\|}{N(u)} \leq k_1$, par suite, on a : $k_1 = 1$.
En prenant la suite (v_n) définie par $v_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|v\| = 1$ et $N(v) = 2$ donc $2 = \frac{N(v)}{\|v\|} \leq k_2$ donc $k_2 = 2$.

EXERCICE 220 Topologie de $\Gamma_p = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \operatorname{rg}(M) \geq p\}$

Titre : Topologie de $\Gamma_p = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \operatorname{rg}(M) \geq p\}$ **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 184 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 170 | ID : 184

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_p = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \operatorname{rg}(M) \geq p\}$.

1. Étudier si Γ_p est ouvert, fermé.
2. Préciser l'adhérence et l'intérieur de Γ_p.

Solution

1. • Si $p = 0$ on a $\Gamma_0 = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc c'est fermé et ouvert en même temps.
• Si $p = n$ alors $\Gamma_n = \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$: il est ouvert car c'est l'image réciproque de $\mathbb{R}^*$ par det, cette dernière étant continue car polynômiale en les coefficients de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas fermé car en considérant la suite (M_k) définie par $M_k = \operatorname{diag}\left(1, \ldots, 1, \frac{1}{k+1}\right)$ alors $M_k \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, mais converge vers $D = \operatorname{diag}(1, \ldots, 0)$ qui n'est pas inversible.
• Si $0 < p < n$ alors Γ_p n'est pas un fermé car la suite (M_k) définie par $M_k = \operatorname{diag}(\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k))$ avec

$$\forall (j,k) \in [\![1,n]\!] \times \mathbb{N}, \lambda_j(k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 1 \leq j < p \\ \frac{1}{k+1} & \text{si} \quad j = p \\ 0 & \text{si} \quad p < j \end{cases}$$

alors M_k de rang p donc appartient à Γ_p, mais la suite (M_k) converge vers $M = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p-1 \text{ zeros}}, 0, \ldots, 0)$ qui est de rang $p-1$ donc n'appartient pas à Γ_p.
• Si $0 < p < n$ alors Γ_p est un ouvert car, si on pose $I = [\![1,n]\!]$ et si pour tout couple (J,K) de parties de I à $n-p$ éléments on note $\Phi_{J,K}$ l'application :

$$\Phi_{J,K} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); M \mapsto \Phi_{J,K}(M) = \det(M_{J,K})$$

où $M_{J,K}$ est la matrice obtenue en barrant les lignes de numéros les éléments de J et les colonnes de numéros les éléments de K alors $\Phi_{J,K}$ est continue car c'est un polynôme en les coefficients de M. Remarquons qu'une matrice M est de rang supérieur ou égal à p si et seulement si il existe au moins une famille de p colonnes de M qui sont linéairement indépendantes
2. Préciser l'adhérence et l'intérieur de Γ_p.

EXERCICE 221 Une norme non classique de $\mathbb{R}^2$

Titre : Une norme non classique de $\mathbb{R}^2$
ID : 185 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 171 | ID : 185
Difficulté : ★☆☆☆☆

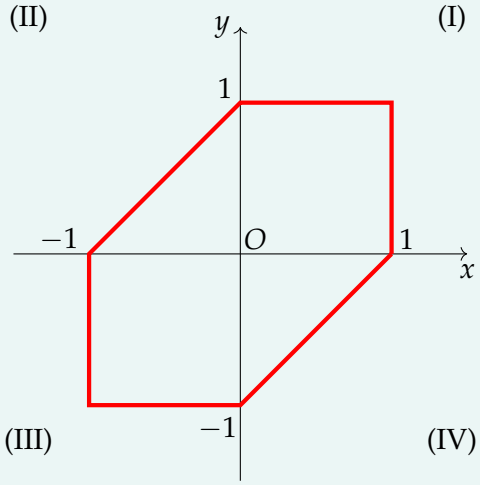
Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $N(x,y) = \max(|x|,|y|,|x-y|)$.

1. Prouver que N est une norme.
2. tracer la sphère unité associée à N.

Solution

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $N(x,y) = \max(|x|,|y|,|x-y|)$.

1. Démontrons que N est une norme :
   • Soit $X = (x,y)$ et $X' = (x',y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, alors :
   $$N(X+X') = N(x+x',y+y') = \max(|x+x'|,|y+y'|,|x+x'-y-y'|)$$
   On a :
   $$\begin{cases} |x+x'| \leq |x| + |x'| \leq N(X) + N(X') \\ |y+y'| \leq |y| + |y'| \leq N(X) + N(X') \\ |x+x'-y-y'||x-y| + |x-y'| \leq N(X) + N(X') \end{cases}$$
   donc $N(X+X') \leq N(X) + N(X')$.
   • Soit $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :
   $$\begin{aligned} N(\lambda X) &= N(\lambda x, \lambda y) \\ &= \max(|\lambda x|,|\lambda y|,|\lambda x - \lambda y|) \\ &= \max(|\lambda||x|,|\lambda||y|,|\lambda||x-y|) \\ &= |\lambda| \max(|x|,|y|,|x-y|) \\ &= |\lambda| N(X). \end{aligned}$$
   • Soit $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors si $N(X) = 0$ alors $\max(|x|,|y|,|x-y| = 0$ et comme les réels $|x|,|y|$ et $|x-y|$ sont positifs, on a $|x| = |y| = |x-y| = 0$, donc $x = y = 0$ donc $X = 0$.
2. Tracé de l'allure de la sphère unité de la norme N :



On obtient le tracé suivant :
Explication : On a
$$N(X) = \max(\|X\|_\infty, |x-y|)$$
et on a $N(X) = \|X\|$ si et seulement si $xy \geq 0$ donc sur les quadrans
$$(\mathrm{I}) : \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathrm{II}) : \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

le tracé correspond à la trace de la sphère unité de la norme $\|.\|_\infty$ sur les deux quarts cités ci-dessus. Sur les deux quarts restant c'est la portion d'équations $|x-y|=0$ qu'on obtient entraçant $x \geq y$ et $x-y=1$ et par symétrie, on complète .

EXERCICE 222 Toute partie d'intérieur non vide est génératrice

Titre : Toute partie d'intérieur non vide est génératrice
ID : 186 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 172 | ID : 186
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer que pour toute partie A, on a :
$$\text{Int}(A) \neq \emptyset \Rightarrow \text{Vect}(A) = E$$
2. En déduire que pour tout sous-espace vectoriel F de E, si $F \neq E$ alors $\text{Int}(F) = \emptyset$.

Solution

1. Comme $\text{Int}(A) \neq \emptyset$, il existe $a \in A$ et $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset A$. Soit $x \in E$.
- Si $x = a$ on a $x \in A$ donc $x \in \text{Vect}(A)$.
- Si $x \neq a$ soit $b = a + \frac{r}{2\|x-a\|}(x-a)$, alors $a \in B(a,r)$ donc $b \in A$. Or en posant $t = \frac{2}{r}\|x-a\|$, on a
$$x = (1-t)a + tb$$
et comme $a \in A$ et $b \in A$, on a bien $x \in \text{Vect}(A)$
2. F est une sous-espace vectoriel de E, donc $\text{Vect}(F) = F$. Si F est d'interieur non vide alors $\text{Vect}(F) = E$ et comme $F \neq E$, on a F est d'intéerieur vide.

EXERCICE 223 Hyperplans, formes linéaires et topologie

Titre : Hyperplans, formes linéaires et topologie
ID : 187 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 173 | ID : 187
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel. On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel H de E tel qu'il existe $a \in E$ tel que $a \neq 0$ et $E = H \oplus \mathbb{K}a$.

1. Soit H un hyperplan de E. Montrer que :
$$\forall b \in E, E = H \oplus \mathbb{K}b \Leftrightarrow b \notin H$$
2. Soit H un hyperplan de E. Démontrer que pour tout sous-espace vectoriel H' de E, on a :
$$H \subset H' \Rightarrow H' = H \quad \text{ou} \quad H' = E$$
3. Montrer que pour tout sous-espace vectoriel H de E on a : H est un hyperplan si et seulement si : il existe une forme linéaire non nulle φ sur E tel que $H = \ker(\varphi)$.
4. Démontrer que si ϕ et ψ sont deux formes linéaires non nules de E alors :
$$\ker(\phi) = \ker(\psi) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K}^*, \psi = \lambda\phi$$
5. On suppose que E est muni d'une norme $\|.\|$.

(a) Montrer que pour tout spus-espace vectoriel F l'adhérence de F, à savoir $\overline{F}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.

(b) En déduire que tout hyperplan de E est soit fermé soit dense.

6. On suppose toujours que E est muni d'une norme $\|.\|$ et soit H un hyperplan de E tel que $H = \ker(\varphi)$ avec φ une forme linéaire non nulle de E. Démontrer que φ est continue si et seulement si H est fermé.

Solution

1. Comme H est un hyperplan de E, on a $E = H \oplus \mathbb{K}a$ avec $a \in E$ et $a \neq 0$. Soit $b \in E$ tel que $b \notin H$. ecrivons $b = h + \lambda a$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Forcément $\lambda \neq 0$ car sion on aurait $b = h$ et b serait dans H. Donc $a = \frac{1}{\lambda}(b - h)$. Pour tout $x \in E$, il existe $h_1 \in H$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $x = h_1 + \alpha a$ donc $x = h_1 + \alpha\frac{1}{\lambda}(b - h)\,() = h_1 - \frac{1}{\lambda}h + \frac{1}{\lambda}b$ donc $x \in H + \mathbb{K}b$. Soit $x \in H \cap \mathbb{K}b$ alors il existe $\beta \in \mathbb{K}$ tel que $x = \beta b$ et $x \in H$, donc $\beta b \in H$ et comme $b \notin H$, on a forcément $\beta = 0$ car sion on aurait $b = \frac{1}{\beta}x$ serait dans H.

2. Si $H \neq H'$, comme $H \subset H'$ il existe $b \in H'$ tel que $b \notin H$. D'après la question précédente, on a $E = H \oplus \mathbb{K}a$ et comme $\begin{cases} H \subset H' \\ \mathbb{K}b \subset H' \end{cases}$, on a $H \oplus \mathbb{K}b \subset H'$ donc $E \subset H'$ donc $H' = E$.

3. Si H est un hyperplan, il existe $a \in E$ tel que $a \neq 0$ et $H \oplus \mathbb{K}a = E$. Pour tout $x \in E$ il existe une unique $\alpha_x \in \mathbb{K}$ et un unique $h_x \in H$ tel que $x = h_x + \alpha_x a$. Posons $\varphi(x) = \alpha_x$, alors φ est une application, et de plus elle est linéaire car si $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\begin{cases} x = h_x + \alpha_x a \\ y = h_y + \alpha_y a \end{cases}$$

et par suite :

$$x + \lambda y = (h_x + \lambda h_y) + (\alpha_x + \lambda\alpha_y)a$$

il en découle qua $\alpha_{x+\lambda y} = \alpha_x + \lambda\alpha_y$, donc que $\varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$.
Soit $x \in E$ alors $x \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow \alpha_x = 0 \Leftrightarrow x = h_x \Leftrightarrow x \in H$, donc $\ker(\varphi) = H$.
Réciproquement, si φ est une forme linéaire non nulle alors $\ker(\varphi) \neq E$. Soit $a \in E$ tel que $\varphi(a) \neq 0$, donc en posant $e = \frac{1}{\varphi(a)}a$ on a$\varphi(e) = 1$. Pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x) = \varphi(\varphi(x).e)$ donc $\varphi(x - \varphi(x).e)) = 0$ donc $h = x - \varphi(x).e \in \ker(\varphi)$ et par suite $x = h + \alpha e$ avec $\alpha = \varphi(x)$ donc $E = H \oplus \mathbb{K}e$ où $H = \ker(\varphi)$ Or $e \notin H$, donc $H \cap \mathbb{K}e = \{0\}$ par suite $E = ker(\varphi) \oplus \mathbb{K}e$ donc avec $e \in E$ et $e \neq 0$ donc $\ker(\varphi)$ est un hyperplan de E.

4. Si $H = \ker(\phi) = \ker(\psi)$ alors H est un hyperplan, donc il existe $a \in E$ tel que $a \neq 0$ et $E = H \oplus \mathbb{K}a$. Si $x \in E$ tel que $x = h + \lambda a$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on a $\psi(x) = \psi(\lambda a) = \lambda\psi(a)$ et $\phi(x) = \lambda\phi(a)$, par suite $\psi(a) = \frac{\psi(a)}{\phi(a)}\phi(a)$ donc $\psi = \lambda\phi$ avec $\lambda = \frac{\psi(a)}{\phi(a)}$. On voit bien que $\lambda \neq 0$ car $\psi(a) \neq 0$.
réciproquement si $\psi = c\phi$ avec $\lambda \neq 0$ alors $\ker(\phi) = \ker(\psi)$ puisque pour tout $x \in E$, on a : $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow \phi(x) = 0$.

5. (a) - D'abord, on a $\overline{F} \neq \emptyset$ car $F \subset \overline{F}$.
- Soit $x, y \in \overline{F}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe $(x_n), (y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$. Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + \lambda y_n) = x + \lambda y$ et comme F est un sous-espace vectoriel et $\forall n \in \mathbb{N}, x_n, y_n \in F$, on a $z_n = x_n + \lambda y_n \in F$, pour tout $n \in N$, donc $(z_n) \in F^{\mathbb{N}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = x + \lambda y$, donc $x + \lambda y \in \overline{F}$.
- Conclusion : $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Soit H un hyperplan de E, alors $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E qui réalise $H \subset \overline{H}$. D'après la question 2), on a $\overline{H} = H$ ou $\overline{H} = E$, ce qui signifie H est fermé ou H est dense dans E.

6. - Si φ est continue, comme $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{K}$, on a $\varphi^{-1}(\{0\}) = \ker(\varphi)$ est un fermé de E.
- Réciproquement, si $H = \ker(\varphi)$ est fermé, montrons que φ est continue.
• Si $E = H$ alors φ est nulle sur E et φ est continue.

• Sinon alors il existe $b \in E$ tel que $\varphi(b) \neq 0$; soit alors $a = \frac{1}{\varphi(b)} b$ alors $\varphi(a) = 1$. Comme H est fermé il en est de même de $H + a$ car la translation t_{-a} est continue sur E et $H + a = t_{-a}^{-1}(H)$. Comme $0 \notin H + a$, il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \cap (H + a) = \emptyset$. On vé démontrer que φ est bornée sur la boule $B(0,r)$, précisément que :

$$\forall x \in B(0,r), |\varphi(x)| \leq 1$$

Sinon il existe $x_0 \in B(0,1)$ tel que $|\varphi(x_0)| > 1$ Soit $y_0 = \frac{1}{\varphi(x_0)} x_0$, alors $\|y_0\| = \frac{1}{|\varphi(x_0)|}\|x_0\| < \|x_0\|$ donc $y_0 \in B(0,r)$. Par ailleurs on a $\varphi(y_0) = 1$ donc $y_0 \in H + a$, ce qui contredit le fait que $B(0,r) \cap (H + a) = \emptyset$, donc φ est bornée sur $B(0,r)$, donc il existe une constante M' tel que

$$\forall x \in E, \|x < r \Rightarrow |\varphi(x)| \leq M$$

Soit alors $x \in S(0,1)$ alors $\frac{r}{2} x \in B(0,r)$ donc $\left\|\varphi\left(\frac{r}{2}x\right)\right\| \leq M'$. En posant $M = \frac{2M'}{r}$ on a :

$$\forall x \in S(0,1), \|\varphi(x)\| \leq M$$

donc φ est bornée sur la sphère unité donc φ et continue.

EXERCICE 224 Sous-espaces vectoriels connexes par arcs

Titre : Sous-espaces vectoriels connexes par arcs
ID : 188 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 174 | ID : 188
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé de dimension n avec $n \geq 2$. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \neq E$ et soit $A = E \backslash F$.

1. Montrer que si $\dim(F) = n - 1$ alors A n'est pas connexe par arcs.
2. Montrer que si $\dim(F) \leq n - 2$, alors A est connexe par arcs.

Solution

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé de dimension n avec $n \geq 2$. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $A = E \backslash F$.

1. Si $\dim(F) = n - 1$ alors F est un hyperplan de E, donc il existe une forme linéaire non nulle φ sur E tel que $F = \ker \varphi$. Comme E est de dimension finie, la forme linéaire φ est continue. On a $\varphi(A) = \mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs dans $\mathbb{R}$, donc A n'est pas connexe par arcs.
2. Soit $a \in E \backslash F$. Notons $H = F \oplus \mathbb{K}a$, donc $\dim(H) = p + 1 \leq n - 1$ et par suite il existe $c \in E$ tel que $c \notin H$. On va démontrer que le segment $[a,c]$ est inclus dans A. Sinon on aurait $[a,c] \cap F \neq \emptyset$ soit $z \in [a,c] \cap F$ alors $z = (1-t)a + tc$ pour $t \in [0,1]$ et $z \in F$, donc $tc = z - (1-t)a$ donc $tc \in H$ car $z \in F$ et $F \subset H$ et $a \in H$. Comme $c \notin H$ on a forcément $t = 0$ donc $z = a$ et par suite $a \in F$, ce qui est faux.
   Soit maintenant b un autre point de A. Deux cas sont possibles : Soit $b \notin H$ et alors $[a,b] \subset A$ (même preuve que pour c).Soit $b \in H$ alors $[a,c]$ et $[b,c]$ sont contenus dans A. Soit $\gamma : [0,1] \to E$ le chemin défini par :

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-2t)a + 2tc & \text{si} \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ (2-2t)c + (1-2t)b & \text{si} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

   alors γ est continu et $\gamma([0,1]) \subset A$ et $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

EXERCICE 225 Distance de I_n à un hyperplan

Titre : Distance de I_n à un hyperplan
ID : 189 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 175 | ID : 189
Difficulté :

Dans cet exercice, n est un entier naturel tel que $n \geq 2$ et on note $\mathcal{N}_n$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}$ et $\mathcal{H}_n$ l'hyperplan des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont de trace nulle. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ et on rappelle que :

$$\forall A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|A\|_\infty = \sup_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|.$$

Pour tout coupe (M_1, M_2) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $d(M_1, M_2) = \|M_1 - M_2\|_\infty$, la distance entre les matrices M_1 et M_2 et on pose :

$$d_\infty = d(I_n, \mathcal{N}_n) = \inf_{A\in\mathcal{N}_n} \|I_n - A\|_\infty = \inf_{A\in\mathcal{N}_n} d(I_n, A).$$

1. Prouver que $\mathcal{N}_n$ et $\mathcal{H}_n$ sont des fermés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{N}_n \subset \mathcal{H}_n$.
2. (a) Soit X une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que :

$$\alpha = \inf(X) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \text{ est un minorant de } X \\ \alpha \in \overline{X} \end{cases}$$

ou $\overline{X}$ est l'adhérence de X. En déduire que si α est un minorant de X alors $\alpha = \inf(X)$ si et seulement si il existe une suite $(x_p)_{p\geq 1}$ à valeurs dans X tel que : $\lim_{p\to+\infty} x_p = \alpha$.

(b) Montrer que si X et Y sont deux parties de $\mathbb{R}$ tel que $X \neq \emptyset$ et $X \subset Y$ et Y est minorée alors X est minorée et $\inf(Y) \leq \inf(X)$.

3. Prouver que $d_\infty \leq 1$.
4. Prouver que pour toute matrice $M \in \mathcal{H}_n$, on a $1 \leq \|I_n - M\|_\infty$ (On pourra poser $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et remarquer, après justification, que

$$\|I_n - M\|_\infty \leq \max_{1\geq i\leq n} |1 - m_{i,i}|$$

et utiliser le fait que $\text{tr}(M) = 0$.)
5. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_p = \frac{1}{p}E_{11} - \frac{1}{p}E_{22}$.
   (a) Calculer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la distance $t_p = d(I_n, M_p) = \|I_n - M_p\|_\infty$.
   (b) Calculer $d(I_n, \mathcal{H})$.
   (c) En déduire que $d_\infty = 1$.

Solution

1. Fermeture de $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{N}_n$:
   • $\mathcal{H}_n$ est fermé car l'application tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. Par ailleurs, $\mathcal{H}_n = \ker(\text{tr}) = \text{tr}^{-1}(\{0\})$ et $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{H}_n$ image réciproque de $\{0\}$ par tr est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   • Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(R)$, on a $A \in \mathcal{N}_n \Leftrightarrow A^n = 0$, en effet si $A^n = 0$, la matrice A est nilpotente, et si A est nilpotente, on sait que son polynôme caractéristique est $\chi_A = X^n$, donc, par le théorème de Cayley-Hamiltoon, on a $A^n = 0$. L'application

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A \mapsto A^n$$

est continue car ses composantes sont polynômiales en les coefficients de la matrice A, donc $\mathcal{N}_n = g^{-1}(\{O\})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car $\{O\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. (a) Si $\alpha = \inf(X)$ alors α est un minorant de X et par définition de la borne inférieure on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X, \quad \alpha \leq a_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$$

Ainsi $a_\varepsilon \in X$ et $x_\varepsilon \in B(\alpha,\varepsilon)$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $B(\alpha,\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$, par suite $\alpha \in \overline{X}$.
• En utilisant la caractérisation séquentielle de l'adhérence, on a le résultat demandé.

(b) $X \subset Y$ et Y minorée, soit α un minorant de Y. Pour tout $x \in X$, on a $x \in Y$, donc $\alpha \leq x$ et par suite :

$$\forall x \in X, \quad \alpha \leq x$$

donc α est un minorant de X.
Si $\beta = \inf(Y)$ alors comme β est un minorant de Y, c'est un minorant de X et comme $\beta' = \inf(X)$ est le plus grand minorant de X on a $\beta' \geq \beta$, donc $\inf(Y) \leq \inf(X)$.

3. Comme $O \in \mathscr{N}_n$, on a :

$$\mathrm{d}_\infty = d(I_n, \mathscr{N}_n) \leq d(I_n, O)$$

Or $d(I_n, O) = \|I_n - O\| = \|I_n\| = 1$, donc $d_\infty \leq 1$.

4. Le terme général de la matrice I_n est $(\delta_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker, donc $\|I_n - M\|_\infty = \sup |m_{i,j} - \delta_{i,j}| \geq \max_{1\leq i\leq n} |m_{i,i} - 1|$. Si on suppose que $\max_{1\leq i\leq n} |m_{i,i} - 1| < 1$, on aurait $\forall i \in [\![1,n]\!], |m_{i,i} - 1| < 1$, donc $\forall i \in [\![1,n]\!], -1 < m_{i,i} - 1 < 1$ donc

$$\forall i \in [\![1,n]\!], m_{i,i} > 0,$$

et par suite $\sum_{i=1}^n m_{i,i} > 0$, ce qui contredit le fait que $\sum_{i=1}^n m_{i,i} = 0$ provenant de $M \in \mathscr{H}_n$ c'est-à-dire $\mathrm{tr}(M) = 0$. Il en découle, qu'il existe au moins $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $|m_{i,i} - 1| \geq 1$, en particulier $\|I_n - M\| \geq 1$.

5. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_p = \frac{1}{p}E_{11} - \frac{1}{p}E_{22}$.

(a) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} t_p &= d(I_n, M_p) = \|I_n - M_p\|_\infty \\ &= \sup\left(1 - \frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p}, 1, \ldots, 1\right) \\ &= 1 + \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

(b) Posons $X = \{\|M - I_n\| / M \in \mathscr{H}_n\}$ alors X est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ et $\inf(X) = d(I_n, \mathscr{H}_n)$. D'après la questions 4), on a 1 est un minorant de X et la suite $(t_p)_{p\geq 1}$ définie par $t_p = \|M_p - I_n\| = 1 + \frac{1}{p}$ est une suite à valeurs dans X qi converge vers 1, donc en vertu de la question 2)a), on a $1 = \inf(X)$ donc $1 = d(I_n, \mathscr{H}_n)$

(c) On a $\mathscr{N}_n \subset \mathscr{H}_n$, donc $d(I_n, \mathscr{N}_n) \geq d(\mathscr{H}_n, I_n) = 1$. Par ailleurs $1 \geq d(I_n, \mathscr{N}_n)$ d'après la question 3), donc $d_\infty = d(I_n, \mathscr{N}_n) = 1$.

EXERCICE 226 Normes subordonnées : généralité et exemple

Titre : Normes subordonnées : généralité et exemple
ID : 190 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 176 | ID : 190
Difficulté : ★★☆☆☆

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère la norme $|||.|||$ définie par

$$|||A||| = \sup_{\substack{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\\ X\neq 0}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$$

1. Démontrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le réel $|||A|||_\infty$ est effectivement bien défini.
2. Démontrer que $A \mapsto |||A|||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Démontrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$|||A||| = \sup_{\|X\|_\infty \leq 1} \|AX\|_\infty = \sup_{\|X\|_\infty = 1} \|AX\|_\infty$$

4. Démontrer que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \|AX\|_\infty \leq |||A|||_\infty \|X\|_\infty$$

En déduire que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad |||AB||| \leq |||A||| \, |||B|||$$

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tel que $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On se propose dans cette question de démontrer que :

$$|||A||| = \sup_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$$

Pour cela on pose, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|, \quad \text{et} \quad \alpha = \sup_{1 \leq i \leq n} \alpha_i.$$

On veut donc prouver que $\alpha = |||A|||_\infty$.

(a) Justifier qu'il existe au moins un indice $k \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$\alpha = \alpha_k = \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}|.$$

(b) Démontrer que si $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = AX = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$, alors :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad |y_j| \leq \alpha_j \|X\|_\infty$$

En déduire que : $\|AX\|_\infty \leq \alpha \|X\|_\infty$ et que $|||A||| \leq \alpha$.

(c) Soit $X_0 = (\xi_j)_{1 \leq j \leq n}$ avec, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on aie :

$$\xi_j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_{k,j} = 0 \\ \frac{|a_{k,j}|}{a_{k,j}} & \text{si} \quad a_{k,j} \neq 0 \end{cases}$$

Démontrer que $\|X_0\|_\infty = 1$. Que vaut $\|AX_0\|_\infty$?

(d) Conclure.

Solution

1. Soit $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = AX$, et posons $Y = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, donc pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $|y_j| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_i$, par suite $|y_j| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}||x_i| \leq \|A\|_\infty \|X\|_\infty$ où $\|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$.
Il en découle que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash \{0\}$, on a $\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \|A\|_\infty$, donc la partie $I = \left\{ \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} / X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash \{0\} \right\}$ est majorée non vide donc admet une borne supérieure, d'où l'existence de $|||A|||$.

2. Démontrons qu'il s'agit d'une norme :
• Inégalité triangulaire : Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \neq 0$, on a $\|(A+B)X\|_\infty = \|AX + BX\|_\infty \leq \|AX\|_\infty + \|BX\|_\infty$, par suite $\frac{\|(A+B)X\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} + \frac{\|BX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq |||A||| + |||B|||$, et par par passage à la borne supérieure, il vient $|||A + B||| \leq |||A||| + |||B|||$.
• Homogénéité : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \neq 0$, on a $\frac{\|\lambda AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} = |\lambda| \frac{\|AX\|_\infty}{\|X|_\infty}$, donc par passage à la borne supérieure si $\lambda \neq 0$, on a $|||\lambda A||| =$

$\sup_{X\in\mathcal{M}_{n,1}(X)\setminus\{0\}} \frac{\|\lambda AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} = |\lambda| \sup_{X\in\mathcal{M}_{n,1}(X)\setminus\{0\}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X|_\infty} = |\lambda|\,|||A|||$, relation valable aussi si $\lambda = 0$.

• Séparation : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $|||A||| = 0$, donc pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \neq 0$, on a $AX = 0$. En particulier si $j \in [\![1,n]\!]$ et $X = E_j$ est le j ème vecteur de la base canonique, on a $AE_j = C_j = 0$ où C_j est la colonne j de A, donc toutes les colonnes de A sont nulles et par suite $A = 0$.

• Conclusion : $|||.|||$ est une norme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Notons :

$$\Gamma_1 = \left\{ \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} / X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\} \right\},$$
$$\Gamma_2 = \{\|AX\|_\infty / \|X\|_\infty \leq 1\},$$

et

$$\Gamma_3 = \{\|AX\|_\infty / \|X\|_\infty = 1\}.$$

• On a $\Gamma_1 = \Gamma_3$ car il est évident que $\Gamma_3 \subset \Gamma_1$, par ailleurs si $t \in \Gamma_1$, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \neq 0$ et $t = \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$. Si on pose $X' = \frac{X}{\|X\|_\infty}$ on a $\|X'\|_\infty = 1$ et $t = \|AX'\|$, donc $t \in \Gamma_3$.

• Il est clair que $\Gamma_3 \subset \Gamma_2$, donc $\Gamma_1 = \Gamma_3 \subset \Gamma_2$.

• Il découle de ce qui précède que $\sup(\Gamma_3) = \sup(\Gamma_1) \leq \sup(\Gamma_2)$.

• Soit $t \in \Gamma_2$, donc il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|X\|_\infty \leq 1$ et $t = \|AX\|_\infty$. Soit $t' = \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$ alors $t' \in \Gamma_1$ et comme $\|X\|_\infty \leq 1$, on a $t' \geq t$, par suite $\sup(\Gamma_1) \geq t$ et ceci pour tout $t \in \Gamma_2$, donc $\sup(\Gamma_2) \leq \sup(\Gamma_1)$ et finalement on a $\sup(\Gamma_1) = \sup(\Gamma_2) = \sup(\Gamma_3)$. Il en découle que :

$$|||A||| = \sup_{\substack{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\\ X\neq 0}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \sup_{\|X\|_\infty\leq 1} \|AX\|_\infty = \sup_{\|X\|_\infty=1} \|AX\|_\infty.$$

4. On a pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, on a $|||A||| \leq \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$, donc $\|AX\|_\infty \leq |||A|||\,\|X\|_\infty$, valable aussi pour $X = 0$, ainsi, on a :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \|AX\|_\infty \leq |||A|||\,\|X\|_\infty.$$

• Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\|(AB)X\|_\infty = \|A(BX)\|_\infty \leq |||A|||\,\|BX\|_\infty \leq |||A|||\,|||B|||\,\|X\|_\infty$, en particulier, pour tout $X \neq 0$, on a $\frac{\|(AB)X\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq |||A|||\,|||B|||$, et par passage à la borne supérieure, il vient : $|||AB||| \leq |||A|||\,|||B|||$.

5. (a) Puisque les α_i sont en nombre fini, il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $\lambda = \alpha_k = \max_{1\leq i\leq n}(\alpha_i)$

   (b) On a $|y_j| = \sum_{i=1}^n a_{i,j}x_i| \leq \|X\|_\infty \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| = \alpha_j\|X\|_\infty$. Il en découle par passage à la borne supérieure que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\|_\infty \leq \alpha\|X\|_\infty$
   On déduit ensuite que : $|||A||| = \sup_{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \alpha$.

   (c) Il est clair que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a $|\xi_j| = 1$, par suite $\|X_0\|_\infty = 1$. On note $AX_0 = X_0'$ avec $X_0' = (\xi_j')_{1\leq j\leq n}$ et par suite pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a $\xi_j' = \sum_{i=1}^n a_{i,j}\xi_i$. Si pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on note $I_j = \{i \in [[1,n]] / a_{i,j} \neq 0\}$ on voit facilement que $\xi_j' = \sum_{i\in I_j} |a_{i,j}|$, et comme $|a_{i,j}| = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]\setminus I_j$, on a carèment $\xi_j' = \sum_{i=1}^n |\xi_{i,j}| = \alpha_j$, par suite

$$\|AX_0\|_\infty = \sup_{1\leq j\leq n} \alpha_j = \alpha_k = \alpha$$

(d) On a prouvé dans la question b) que $|||A||| \leq \alpha$, et dans la question c) qu'il existe $X_0 \in E$ tel que $\|X_0\| = 1$ et $\|AX_0\| = \alpha$, par suite $|||A||| = \alpha$ et on résume :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad |||A||| = \sup_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

EXERCICE 227 Exemples de normes de polynômes

Titre : Exemples de normes de polynômes
ID : 191 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 177 | ID : 191
Difficulté : ★☆☆☆☆

On considère $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in E$, on pose : $\|P\| = \max_{0\leq k\leq n} |a_k|$. On considère l'application linéaire

$$\varphi : E \to E, P \mapsto \varphi(P) = P(X+1)$$

1. Etdier la continuité de φ de $(E, \|.\|)$ vers lui même.
2. Etudier la continuité de ψ de $(E, \|.\|)$ vers lui même où

$$\psi : E \to E, P \mapsto \psi(P) = AP$$

où $A \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme donné.

3. Reprendre les questions précédentes si on considère le norme :

$$\|P\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-|t|}|P(t)|$$

.

Solution

1. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \frac{X^n}{\sqrt{n}}$ alors $\|P_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Par ailleurs, $\varphi(P_n) = \frac{(X+1)}{\sqrt{n}}$, donc $\|\varphi(P_n)\| = \frac{1}{\sqrt{n}}\|(X+1)^n\|$ et comme $(X+1)^n = 1 + nX + \ldots X^n$, on a $\|(X+1)^n\| \geq n$, donc $\|\varphi(P_n)\| \geq \sqrt{n}$ et par suite $\lim_{n\to+\infty} \|\varphi(P_n)\| = +\infty$, donc φ est discontinue.

2. Si $A = X^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ alors pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a : $\|AP\| = \|P\|$. Si $A = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ alors pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a : $\|AP\| \leq \sum_{k=0}^{N} \|a_k X^k P\| = \sum_{k=0}^{N} |a_k|\|P\| \leq M\|P\|$ où $M = \sum_{k=0}^{N} |a_k|$. Donc φ est continue.

3. Soit P un polynôme, alors

$$\|\varphi(P)\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-|t|}|P(t+1)|$$

Or :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{-|t|}|P(t+1)| = h(t)e^{-|t+1|}|P(t+1)|$$

avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = e^{|t+1|-|t|}$$

La fonction h est bornée sur $\mathbb{R}$ car :
• si $t > 0$, $h(t) = e$
• si $t < -1$ alors $h(t) = \frac{1}{e}$
• si $-1 \leq t \leq 0$ alors $h(t) = e^{2t+1} = ee^{2t} \leq e$. Finalement

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq h(t) \leq e$$

Il en découle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{-|t|}|P(t+1)| \leq e.e^{-|t+1|}|P(t+1)|$$

Donc

$$\|\varphi(P)\| \leq e \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-|t+1|}|P(t+1)| = e\|P\|.$$

car si on pose $\tau = t+1$, on a

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-|t+1|}|P(t+1)| = \sup_{\tau\in\mathbb{R}} e^{-|\tau|}|P(\tau)|$$

Finalment :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \|\phi(P)\| \leq e\|P\|$$

Donc φ est continue.

• Si A est constant, par exemple $A = c$ avec $c \in \mathbb{R}$ alors $\psi(P) = cP$ est mansifestement continue. Si par contre A n'est pas constant on va démontrer que ψ est discontinue, en effet, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = X^n$ alors $\|P_n\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-|t|}|t|^n$ et comme l'application $t \mapsto e^{-|t|}|t|^n$ est pair on a en conséquence : $\|P_n\| = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} e^{-t}t^n$. La fonction $h : t \mapsto h(t) = t^n e^{-t}$ est dérivable et $h'(t) = (n-t)t^{n-1}e^{-t}$ de sorte que h' s'annule au point n et $h' < 0$ sur $]n, +\infty[$ et $h' > 0$ sur $]0, n[$ et comme $h(0) = 0$, le maximum de h sur $\mathbb{R}^+$ est $h(n) = n^n e^{-n}$, par suite $\|P_n\| = n^n e^{-n}$. D'un autre côté, on a $\|\psi(P_n)\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} g(t)$ avec $g(t) = e^{-t}|t^n A(t)|$, en particulier, on a $\|\psi(P_n)\| \geq g(n) = e^{-n}n^n|A(n)|$. Il en découle que $\frac{\|\psi(P_n)\|}{\|P_n\|} \geq |A(n)|$ et comme A est un polynôme non constant, on a $\lim_{n\to+\infty} |A(n)| = +\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\|\psi(P_n)\|}{\|P_n\|} = +\infty$, ce qui justifie la discontinuité de ψ.

EXERCICE 228 — Normes de polynômes associées à un compact

Titre : Normes de polynômes associées à un compact
ID : 192 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 178 | ID : 192
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit K une partie infinie bornée de $\mathbb{R}$. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on pose

$$\|P\|_K = \sup_{t\in K} |P(t)|.$$

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et Φ_A l'application linéaire définie par :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad \Phi_A(P) = AP$$

1. Montrer que $\|.\|_K$ est une norme sur $\mathbb{K}[X]$.
2. Étudier la continuité de Φ_A de $(\mathbb{K}[X], \|.\|_K)$ vers lui même dans chacun des cas suivants :
   (a) K est une partie compacte infinie de $\mathbb{K}$.
   (b) K est une partie bornée infinie de $\mathbb{K}$.
3. Étudier la continuité de Φ_A de $(\mathbb{K}[X], \|.\|)$ vers $(\mathbb{K}[X], \|.\|)$ lorsque $\mathbb{K}[X]$ est muni de la norme $\|P\| = \sum_{k=0}^{N} |a_k|$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$.
4. On suppose dans cette question que $K = [0,1]$ et $A(X) = X^m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Étudier la continuité de Φ_A de $(\mathbb{K}[X], \|.\|)$ vers $(\mathbb{K}[X], \|.\|_K)$ où $\|.\|_\infty$ est celle définie : $\|P\| = \max_{0\leq k\leq N} |a_k|$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$.

Solution

1. Tout d'abord, la quantité $\|P\|_K$ existe car P étant polynomiale, l'application $t \mapsto P(t)$ est continue donc bornée sur $\text{Adh}(K)$ parce que ce dernier est un compact car fermé borné(borné car K est borné, donc $\exists M > 0, K \subset [-M, M]$, donc $\text{Adh}(K) \subset [-M, M]$). Il reste à démontrer que $P \mapsto \|P\|_K$ est une norme de $\mathbb{K}[X]$
   • Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ alors pour tout $t \in K$, on a $|(P+Q)(t)| = |P(t)+Q(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq \|P\|_K + \|Q\|_K$, donc $\sup_{t\in K} |(P+Q)(t)| \leq \|P\|_K + \|Q\|_K$, c'est-à-dire que : $\|P+Q\|_K \leq \|P\|_K + \|Q\|_K$.
   • Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ alors $\|\lambda P\|_K = |\lambda|\|P\|_K$ est vraie pour $\lambda = 0$. Si $\lambda \neq 0$, on sait que $\sup_{|\lambda|A} = |\lambda| \sup(A)$ pour toute partie non vide majorée A de $\mathbb{R}$, ce qui donne, en particulier : $\|\lambda P\|_K = |\lambda|\|P\|_K$.
   • Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\|P\| = 0$, alors $\forall t \in K, P(t) = 0$, en particulier le polynôme P admet une infinité de racines puisque K est infinie, donc $P = 0$.
2. Remarquons avant tout que l'application Φ_A est une application linéaire de $\mathbb{K}[X]$ vers lui même On peut donc utiliser les diverses caractérisation de la continuité de telles applications
   (a) Si K est une partie compacte infinie de $\mathbb{K}$ alors l'application $t \mapsto A(t)$ est bornée sur le compact $\mathbb{K}$, par suite, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ et tout $t \in K$, on a $|A(t)P(t)| \leq |A(t)||P(t)| \leq \|A\|_K\|P\|_K$, donc $\|\Phi_A(P)\|_K \leq \alpha\|P\|_K$ où $\alpha = \|A\|_K$ et Φ_A est continue sur $\mathbb{K}[X]$.
   (b) Si on suppose seulement K infinie bornée, on a $\overline{K}$ l'adhérence de K est compacte et par suite pour tout $t \in K$, on a $|A(t)| \leq \sup_{t\in\overline{K}} |A(t)| = \|A\|_{\overline{K}}$ et pour tout $t \in K$, on a : $|A(t)P(t)| \leq \|A\|_{\overline{K}}\|P\|_K$, par suite $\|\Phi_A(P)\|_K \leq \beta\|P\|_K$ où $\beta = \|A\|_{\overline{K}}$, ce qui justifie la continuité de Φ_A.
3. Si $A = 0$ alors $\Phi_A(P) = 0$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, donc Φ_A est continue. Sinon, soit $m = \deg(A)$ et notons $A(X) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k X^k$. Si $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ alors $\Phi_A(P) = AP = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k Q_k$ avec $Q_k = X^k P$. On voit bien que $\|Q_k\| = \|P\|$, donc en notant $\alpha = \max_{0\leq k\leq m} |\alpha_k|$, on a $\|\Phi_A(P)\| \leq \sum_{k=0}^{m} |\alpha_k|\|Q_k\| \leq (m+1)\alpha\|P\|$. On a donc prouvé l'existence de la constante $c = (m+1)\alpha > 0$ tel que
$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad \|\Phi_A(P)\| \leq c\|P\|$$
   donc Φ_A est une application linéaire continue de $(\mathbb{K}[X], \|.\|)$ vers lui même.
4. Soit (P_n) la suite de polynômes définie par $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \|P_n\|_\infty = 1$ et on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $t \in [0,1]$ l'application $t \mapsto f(t) = t^m P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} t^{k+m}$ est croissante positive sur $[0,1]$ de sorte que $\|P_n\|_K = f(1) = n+m+1$. Il en découle que $\frac{\|\Phi_A(P_n)\|}{\|P_n\|_\infty} \geq n+m+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et par suite l'application linéaire Φ_A n'est pas continue de $(\mathbb{K}[X], \|.\|)$ vers $(\mathbb{K}[X], \|.\|_K)$

EXERCICE 229 Construction de normes sur un espace vectoriel

Titre : Construction de normes sur un espace vectoriel
ID : 193 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 179 | ID : 193
Difficulté : ★★☆☆☆

On considère un entier naturel m tel que $m \geq 2$, E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $(N_k)_{1\leq k\leq m}$ une famille de normes de E. Pour tout $a = (a_k)_{1\leq k\leq m} \in (\mathbb{R}_+^*)^m$ et tout vecteur $x \in E$, on pose $\|x\|_a = \sum_{k=1}^{m} a_k N_k(x)$.

1. Démontrer que $\|.\|_a$ est une norme sur E, pour tout $a \in (\mathbb{R}_+^*)^m$.

2. Démontrer que les normes $\|.\|_a$ sont deux à deux équivalentes quand a décrit $(\mathbb{R}_+^*)^m$.

Solution

1. Si N_1 et N_2 sont deux normes sur E alors $N_1 + N_2$ est une norme sur E. Si N est une norme sur E et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, alors αN est une norme sur E. Une récurrence simple permet de conclure.
2. Si on pose $u = (u_k)$ avec $u_k = 1$ pour tout $k \in [\![1, m]\!]$ alors pour tout $a = (a_k)$ on a $\alpha\|.\|_u \leq \|.\|_a \leq \beta\|.\|_u$ où $\alpha = \min(a_k)$ et $\beta = \max(a_k)$ donc $\|.\|_a$ est équivalente à $\|.\|_u$, pour tout $a \in (\mathbb{R}_+^*)^m$, et par transitivité $\|.\|_a$ est équivalente à $\|.\|_b$, pour tout $a, b \in (\mathbb{R}_+^*)^m$

EXERCICE 230 Activités sur le diamètre d'une partie bornée

Titre : Activités sur le diamètre d'une partie bornée
ID : 194 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 180 | ID : 194
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et A et B deux parties non vides bornée de E. On définit la distance de A à B comme suit $d(A, B) = \inf\{\|a - b\| / (a, b) \in A \times B\}$ et le diamétre d'une partie bornée non vide X de E par $\delta(X) = \sup\{\|x - y\| / x, y \in X\}$.

1. Montrer que $A \cup B$ est non vide bornée.
2. Montrer que $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$.

Solution

1. Comme $A \subset (A \cup B)$ et $A \neq \emptyset$, par hypothèse, on a aussi $A \cup B \neq \emptyset$. Comme A et B sont bornées, il existe deux réels postifs M_1 et M_2 tel que :

$$\begin{cases} \forall x \in A, & \|x\| \leq M_1 \\ \forall x \in B, & \|x\| \leq M_2 \end{cases}.$$

Soit $x \in A \cup B$ alors $x \in A$ ou $x \in B$, donc $\|x\| \leq M$ où $M = \max(M_1, M_2)$, donc $A \cup B$ est bornée.

2. Soit $x, y \in A \cup B$, et soit $\varepsilon > 0$. comme $d(A, B) = \inf\{\|a - b\| / (a, b) \in A \times B\}$, on peut dire qu'il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $d(A, B) + \varepsilon > \|a - b\|$.
• Si $x \in A$ et $y \in B$, remarquons que $\|x - y\| \leq \|x - a\| + \|a - b\| + \|b - y\| \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B) + \varepsilon$, ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc on a :

$$(\star) \quad \|x - y\| \leq \|x - a\| + \|a - b\| + \|b - y\| \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$$

• Si $x \in B$ et $y \in B$, par symétrie des rôles on a toujours $(\star)$ vraie.
• Si x et y sont tous les deux dans A, on a $\|x - y\| \leq \delta(A)$, donc $(\star)$ est vraie.
• Si x et y sont tous les deux dans B, on a $\|x - y\| \leq \delta(B)$, donc $(\star)$ est vraie.
• Conclusion, on a bien :

$$\forall x, y \in A \cup B, \quad \|x - y\| \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$$

Donc

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$$

EXERCICE 231 Adhérence et intérieur d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$

Titre : Adhérence et intérieur d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ — **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 195 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 181 | ID : 195

Soit E un espace vectoriel normé,de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E et

$$\mathfrak{L}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) / \ker u = F\}.$$

1. Démontrer que $\mathfrak{L}_F \neq \emptyset$
2. Déterminer $\mathbf{Adh}(\mathfrak{L}_F)$ et $\mathbf{Int}(\mathfrak{L}_F)$, l'adhérence et l'intérieur de $\mathfrak{L}_F$

Solution

Si $F = \{0\}$, alors $\mathfrak{L} = \mathbf{GL}(E)$ qui est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$, d'adhérence $\mathcal{L}(E)$. Si $F = E$, alors $\mathfrak{L} = \{\theta\}$ qui est un fermé d'intérieur vide. Finalement si $\{0\} \subsetneq F \subsetneq E$ alors F' admet un supplémentaire F' et F et F' admettent des bases respectives b et b'. Notons $\mathscr{B}$ la base de E adaptée à la somme directe $F \oplus F' = E$ et les bases b et b', donc $\mathscr{B}$ est obtenue par concaténation des bases b et b' dans cet ordre. Notons $p = \dim(F)$ et $q = n - p = \dim(F')$. On va démontrer que $\mathrm{Adh}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{L}'$ avec

$$\mathfrak{L}' = \{u \in \mathcal{L}(E) / F \subset \ker(u)\}$$

Pour cela on va démontrer que $\mathfrak{L}'$ est un fermé et que $\mathfrak{L}' \subset \mathrm{Adh}(\mathfrak{L})$.
• Si on note $b = (e_1, \ldots, e_p)$, alors, un endomorphisme u est dans $\mathfrak{L}'$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, p]\!], u(e_i) = 0$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, p]\!], \Phi_{e_i}(u) = 0$, où pour tout $x \in E$, on note $\Phi_x : \mathcal{L}(E) \to E; f \mapsto \Phi_x(f) = f(x)$ qui est linéaire, donc $\mathfrak{L}' = \bigcap_{i=1}^{p} \ker(\Phi_i)$, donc c'est un fermé car par continuité de l'application linéaire Φ_x, et que son départ est de dimension finie, on a $\ker(\Phi_x)$ imagé réciproque du fermé $\{0\}$ est un fermé de $\mathcal{L}(E)$. Donc $\mathfrak{L}'$ est fermé.

Remarque : Cette démonstration prouve en même temps que $\mathfrak{L}'$ est un sous-espace vectoriel de E, vu comme intersection de sous-espace vectoriels, et d'ailleurs, cette propriété suffit pour dire qu'il est fermé car on a vu dans le cours que tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est un fermé de celui-ci.
• Soit $v \in \mathfrak{L}'$ alors la matrice de v dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. Comme $\mathbf{GL}_q(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une suite $(B_k) \in (\mathbf{GL}_q(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{k \to +\infty} B_k = B$. Si on note v_k l'endomorphisme associé à la matrice $M_k = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & B_k \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{rg}\,(v_k) \leq q$, mais comme $\mathrm{rg}\,(B_k) = q$, on arg $(v_k) = q$, donc $\dim(\ker(v_k)) = n - \mathrm{rg}\,(v_k) = n - q = p = \dim(F)$, et comme $F \subset \ker(v_k)$, on a $F = \ker(v_k)$, par suite $v_k \in \mathfrak{L}$, et on voit que $\lim\limits_{k \to +\infty} M_k = M$, donc $\lim\limits_{k \to +\infty} v_k = v$ et alors $v \in \mathrm{Adh}(\mathfrak{L})$. On a donc $\mathfrak{L}' \subset \mathrm{Adh}(\mathfrak{L})$ et $\mathfrak{L}'$ est un fermé, donc $\mathfrak{L}' = \mathrm{Adh}(\mathfrak{L})$ car $\mathrm{Adh}(\mathfrak{L})$ est le plus petit fermé contenant $\mathfrak{L}$.
Conclusion : $\mathrm{Adh}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{L}' = \{u \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / F \subset \ker(u)\}$.
On remarque que $\theta \in \mathfrak{L}'$ et si $u, v \in \mathfrak{L}'$ alors pour tout $x \in F$ on a $u(x) = v(x) = 0$, donc pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $(u + \lambda v)(x) = 0$, donc $F \subset \ker(u + \lambda v)$, donc $\mathfrak{L}'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. De plus il est strict car $F \neq \{0\}$, donc $\mathrm{Id}_E \notin \mathfrak{L}'$, donc il est d'intérieur vide (résultat connu : tout sous-espace strict d'un espace vectoriel normé est d'intérieur vide.) Don $\mathrm{Int}(\mathfrak{L}) = \emptyset$.

EXERCICE 232 — Egalité de deux boules ouvertes ou fermées

Titre : Egalité de deux boules ouvertes ou fermées — **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 196 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 182 | ID : 196

1. Soient a, b, c, d des nombres réels tel que $a < b$ et $c < d$. Démontrer que les assertions suivantes sont équavalentes :
   (i) $]a, b[\cap]c, d[\neq \emptyset$
   (ii) $\max(a, c) < \min(b, d)$
   (iii) $|a + b - c - d| \leq b - a + d - c$
2. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Pour tout $(x, r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$, on note $B_{x,r}$ la boule ouverte de cetre x et de rayon r. Pour toutes parties non vides A et B de E, on note $A + B = \{a + b / (a, b) \in A \times B\}$.
   (a) Démontrer que pour tout $(x, x', r, r') \in E \times E \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on a :
   $$B_{x,r} \cap B_{x',r'} \neq \emptyset \Leftrightarrow \|x' - x\| < r + r'$$
   (b) Démontrer que pour tout $(x, x', r, r') \in E \times E \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on a :
   $$B_{x,r} + B_{x',r'} = B_{x+x',r+r'}$$
   (c) Démontrer que pour tout $(x, x', r, r') \in E \times E \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on a :
   $$B_{x,r} = B_{x',r'} \Leftrightarrow x = x' \quad \text{et} \quad r = r'$$

Solution

1. Supposons que $]a, b[\cap]c, d[\neq \emptyset$, soit alors x un élément de cette intersection, donc $a < x < b$ et $c < x < d$. De $a < x$ et $c < x$ on déduit
   $$(1) \quad \max(a, c) < x.$$
   De $x < b$ et $x < d$, on déduit :
   $$(2) \quad x < \min(b, d).$$
   De (1) et (2), on déduit $\max(a, c) < \min(b, d)$.
   Réciproquement si $\max(a, c) < \min(b, d)$ alors il existe un nombre réel x tel que $\max(a, c) < x < \min(b, d)$, donc $a \leq \max(a, c) < x < \min(b, d) \leq b$ donc $a < x < b$ et de la même façon $c < x < d$, donc $x \in]a, b[\cap]c, d[$ et finalement : $]a, b[\cap]c, d[\neq \emptyset$. On sait que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$ et $\max(x, y) - \min(x, y) = |x - y|$, ce qui fournit :
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \\ \min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2} \end{cases}$$
   donc $\max(a, c) < \min(b, d) \Leftrightarrow \frac{a+c+|a-c|}{2} < \frac{b+d-|b-d|}{2} \Leftrightarrow$
2. (a)
   (b)

EXERCICE 233 Convexe d'interieur vide et hyperplan

Titre : Convexe d'interieur vide et hyperplan
ID : 197 **Durée :** —
Difficulté : ★★☆☆☆
Niveau : L2 | N° : 183 | ID : 197

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une partie de $\mathbb{R}^n$. On suppose que A est convexee. Démontrer que $\text{Int}(A) = \emptyset$ si et seulement si A est contenue dans un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$.

Solution

• Si $\text{Int}(A) \neq \emptyset$, on va prouver que $\text{Vect}(A) = \mathbb{R}^n$. En effet, supposons que $\text{Int}(A) \neq \emptyset$ et soit $x \in \mathbb{R}^n$.
• Si $x \in A$, terminée alors $x \in \text{Vect}(A)$.
• Si $x \notin A$, comme $\text{Int}(A) \neq \emptyset$, soit $a \in \text{Int}(A)$, donc il existe $r > 0$, tel que $B(a,r) \subset A$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, posons $x_\lambda = a + \lambda(x-a)$, alors $x_\lambda \in B(a,r)$ si et seulement si $\|x-a\| < r$ si et seulement si $|\lambda| < \frac{r}{\|x-a\|}$. Ainsi en prenant par exemple $\lambda_0 = \frac{r}{2\|x-a\|}$, on a $x_{\lambda_0} = a + \lambda_0(x-a) = b$ avec $b \in B(a,r)$, donc $b \in A$. On a $x = a + \frac{1}{\lambda_0}(b-a) = ta + (1-t)b$ avec $t = \frac{1}{\lambda_0}$, donc $x \in \text{Vect}(A)$. On a $\text{Vect}(A) = \mathbb{R}^n$, donc A n'est contenu dans aucun hyperplan H car sinon on aurait $\mathbb{R}^n = \text{Vect}(A) \subset H$, ce qui est absurde.
• Réciproquement si A n'est contenu dans aucun hyperplan, cela veut dire que $\text{Vect}(A) = \mathbb{R}^n$, donc il existe une base $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $e_k \in A$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Par convexité

$$B = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k / \lambda_k \in [0,1], \forall k \in [\![1,n]\!] \right\}$$

vérifie $B \subset A$. Soit

$$B_1 = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k / \lambda_k \in [-1,1], \forall k \in [\![1,n]\!] \right\}$$

alors B_1 est la boule fermée unité de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x = \sum_{ki=1}^{n} x_i e_i \Rightarrow \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

par suite B_1 est d'intérieur non vide , donc B est d'intérieur non vide car sinon on aurait $B_1 = B \cup (-B)$ serait d'intérieur vide. Et comme $B \subset A$ alors on a $\text{Int}(A) \neq \emptyset$.

EXERCICE 234 Une belle propriété d'une partie convexe d'intérieur non vide

Titre : Une belle propriété d'une partie convexe d'intérieur non vide
Difficulté : ★★★☆☆
ID : 198 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 184 | ID : 198

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E. On suppose que A est convexe et $\text{Int}(A) \neq \emptyset$.

1. Démontrer que pour tout $a \in \text{Int}(A)$ et tout $b \in \text{Adh}(A)$, le segment $]a,b[$ est contenu dans $\text{Int}(A)$ (autrement dit, pour tout $t \in]0,1[$, on a $(1-t)a + tb \in \text{Int}(A)$.)
2. Démontrer que $\text{Int}(A) = \text{Int}(\text{Adh}(A))$

Solution

1. Puisque $a \in \text{Int}(A)$, il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset A$. Soit $x \in]a,b[$, donc x s'écrit $x = (1-t)a + tb$ avec $t \in]0,1[$. On va démontrer que $x \in \text{Int}(A)$, pour cela on va prouver que $B(x,(1-t)r) \subset A$. Soit alors $x' \in B(x,(1-t)r)$, donc $\|x'-x| < (1-t)r$ et par suite $r_b = \frac{(1-t)r - \|x'-x\|}{t} > 0$. Comme $b \in \text{Adh}(A)$, on a $A \cap B(b,r_b) \neq \emptyset$. Soit alors $b' \in A \cap B(b,r_b)$. Soit $a' \in E$ défini par la relation :

$$(\star) \quad (1-t)a' + tb' = x'$$

Comme $\begin{cases} x = (1-t)a + tb \\ x' = (1-t)a' + tb' \end{cases}$, on a : $x' - x = (1-t)(a'-a) + t(b'-b)$, donc $\|(1-t)(a'-a)\| = \|(x'-x) - t(b'-b)\| \leq \|x'-x\| + t\|b'-b\| < \|x'-x\| + tr_b$. Donc : $(1-t)\|a'-a\| < \|x'-x\| + (1-t)r - \|x'-x\| = (1-t)r$, donc $\|x'-x\| < r$ et par suite $a' \in B(a,r)$ et comme

$B(a,r) \subset A$, on a $a' \in A$, or $b' \in A$, donc par convexité de A, on a $x' = (1-t)a' + tb' \in A$. On a donc prouvé que $x \in \text{Int}(A)$ et par suite $]a,b[\subset \text{Int}(A)$.

2. On a $A \subset \text{Adh}(A)$, donc $\text{Int}(A) \subset \text{Int}(\text{Adh}(A))$. Réciproquement, soit $x \in \text{Int}(\text{Adh}(A))$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset \text{Adh}(A)$. Comme on a supposé que $\text{Int}(A)$ est non vide, soit $a \in \text{Int}(A)$.
   - Si $x = a$, c'est terminé car on aurait $x \in \text{Int}(A)$.
   - Si $x \neq a$, soit $b = x - \frac{r}{2\|x-a\|}(x-a)$, donc $x = (1-t)a + tb$ avec $t = \frac{2\|x-a\|}{2\|x-a\|-r}$, de sorte que $0 < t < 1$, donc $x \in]a,b[$. Par la question 1) ci-dessus, on a $x \in \text{Int}(A)$, ce qu'il fallait démontrer.[a]

---

a.
Comment on a obtenu l'expression de t ?
On a $B(x,r) \subset \text{Adh}(A)$. On a $x \in \text{Adh}(A)$ et $a \in \text{Int}(A)$ et $x \neq a$. Pour pouvoir appliquer la question 1), on va chercher $x' \in \text{Adh}(A)$ tel que $x \in]a,x'[$. La condition $x' \in \text{Adh}(A)$ est réalisée si $x' \in B(x,r)$. Pour cela on cherche $x' = x + \lambda(x-a)$ tel que $\|x'-x\| < r$ donc $|\lambda| < \frac{r}{\|x'-x\|}$ et que $x \in]a,x'[$, mais on a :

$$x = \frac{1}{1+\lambda}a + \frac{\lambda}{1+\lambda}x'$$

Il suffit donc que $\lambda > 0$ pour que $t = \frac{\lambda}{1+\lambda} \in]0,1[$. Nous devons donc choisir λ tel que $\lambda > 0$ et $|\lambda| < \frac{r}{\|x'-x\|}$, et ceci est réalisé si on prend :

$$\lambda = \frac{r}{2\|x'-x\|}$$

Il en découle que :

$$t = \frac{\lambda}{1+\lambda} = \frac{r}{r+2\|x'-x\|}$$

Comme fixé ci-dessus.

EXERCICE 235 Activités sur l'adhérence, l'intérieur, la frontière, l'extérieur,..

Titre : Activités sur l'adhérence, l'intérieur, la frontière, l'extérieur,..
ID : 199 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 185 | ID : 199
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Démontrer que :

1. Pour toutes parties A et B de E, Si $A \subset B$ alors $\text{Adh}(A) \subset \text{Adh}(B)$ et $\text{Int}(A) \subset \text{Int}(B)$ et $\text{Ext}(A) \supset \text{Ext}(B)$.
2. Pour toute partie A de E, on a $\text{Adh}(A^c) = (\text{Int}(A))^c$ et $\text{Int}(A^c) = (\text{Adh}(A))^c$ et $(\text{Ext}(A))^c = \text{Adh}(A)$ et $\partial(A^c) = \partial(A)$.
3. Pour toute partie A de E, on a : $\text{Adh}(A) = \text{Int}(A) \cup \partial A$.
4. Une partie A de E est fermée si et seulement si $\partial A \subset A$.
5. Pour toutes parties A et B de E, on a :
   (a) $\text{Adh}(A \cup B) = \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$ et $\text{Adh}(A \cap B) \subset \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B)$.
   (b) $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$ et $\text{Int}(A \cup B) \supset \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$.
   (c) $\text{Ext}(A \cup B) = \text{Ext}(A) \cap \text{Ext}(B)$ et $\text{Ext}(A \cap B) \supset \text{Ext}(A) \cup \text{Ext}(B)$.
   (d) $\partial(\text{Int}(A)) \subset \partial A$ et $\partial(\text{Adh}(A)) \subset \partial(A)$ et $\partial(A \cup B) \subset \partial(A) \cup \partial(B)$.
6. Pour toute partie A de E, on a $\partial(A) = \emptyset \Leftrightarrow A$ est ouverte ou A est fermée.
7. Pour toutes parties A et B de E, si $\partial(A) \cup \partial(B) = \emptyset$, alors on a les égalités suivantes : $\text{Adh}(A \cap B) = \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B)$ et $\text{Int}(A \cup B) = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$ et $\partial(A \cap B) = (\partial(A) \cap \text{Adh}(B)) \cup (\text{Adh}(A) \cap \partial(B))$.

Solution

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Démontrer que :

1. Soiet A et B deux parties de E
   • Supposons $A \subset B$.
   • Soit $x \in \text{Adh}(A)$. Pour tout $r > 0$, on a $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ et comme $A \subset B$, on a $B(x,r) \cap A \subset B(x,r) \cap B$, donc $B(x,r) \cap B \neq \emptyset$ et $x \in \text{Adh}(B)$, donc $\text{Adh}(A) \subset \text{Adh}(B)$.
   • Soit $x \in \text{Int}(A)$, donc il existe $r > 0$, tel que $B(x,r) \subset A$ et comme $A \subset B$, on a $B(x,r) \subset B$, donc $x \in \text{Int}(B)$, donc $\text{Int}(A) \subset \text{Int}(B)$.
   • Finalement, comme $A \subset B$, on a $B^c \subset A^c$, donc par ce qu'on a prouvé ci-dessus, $\text{Int}(B^c) \subset \text{Int}(A^c)$, donc $\text{Ext}(B) \subset \text{Ext}(A)$.
2. Soit A une partie de E.
   • Prouvons que : $\text{Adh}(A^c) = (\text{Int}(A))^c$.
   • Soit $x \in \text{Adh}(A^c)$. Soit $r > 0$, donc $B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset$; il en découle que $B(x,r) \not\subset A$. On a donc prouvé que : $\forall r > 0, B(x,r) \not\subset A$, ce qui veut dire que $x \notin \text{Int}(A)$, donc $x \in (\text{Int}(A))^c$.
   • Réciproquement, Soit $x \in (\text{Int}(A))^c$, donc $x \notin \text{Int}(A)$, donc, pour tout $r > 0$, on a $B(x,r) \not\subset A$, donc pour tout $r > 0$, on a $B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset$, ce qui veut dire que $x \in \text{Adh}(A^c)$.
   • Conclusion : $\text{Adh}(A^c) = (\text{Int}(A))^c$.

   • Prouvons que : $\text{Int}(A^c) = (\text{Adh}(A))^c$
   • Pour tout $x \in E$, on a : $x \in \text{Int}(A^c)$ si et seulement si, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A^c$, si et seulement si, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap A = \emptyset$, si et seulement si, $x \notin \text{Adh}(A)$ si et seulement si $x \in (\text{Adh}(A))^c$. Il en découle que $\text{Int}(A^c) = (\text{Adh}(A))^c$.
3. Soit A une partie de E. On a $\partial A = \text{Adh}(A) \setminus \text{Int}(A)$, donc :

$$\begin{aligned} \text{Int}(A) \cup \partial A &= \text{Int}(A) \cup (\text{Adh}(A) \setminus \text{Int}(A)) \\ &= \text{Int}(A) \cup \text{Adh}(A) \\ &= \text{Adh}(A) \qquad (\text{car } \text{Int}(A) \subset \text{Adh}(A).) \end{aligned}$$

   On rappelle ici que si X et Y sont deux parties d'un ensemble E alors $X \cup Y = X \cup (Y \setminus X)$, utilisée dans la deuxième égalité.
4. Une partie A de E est fermée si et seulement si $\partial A \subset A$.

   • On a $\partial(A) = \text{Adh}(A) \setminus \text{Int}(A)$. Si A est fermée alors $\text{Adh}(A) = A$, donc $\partial(A) = A \setminus \text{Int}(A)$, en particulier $\partial(A) \subset A$.
   • Réciproquement si $\partial(A) \subset A$, comme $\partial(A) = \text{Adh}(A) \setminus \text{Int}(A)$ et que $\text{Int}(A) \subset \text{Adh}(A)$, on a $\text{Adh}(A) = \partial(A) \cup \text{Int}(A)$ et comme $\text{Int}(A) \subset A$ et $\partial(A) \subset A$, par hypothèse, on a $\text{Adh}(A) \subset A$, donc $\text{Adh}(A) = A$, et A est fermée en conéquence.
5. Pour toutes parties A et B de E, on a :
   (a) A et B sont deux parties de E.
   • On va démontrer deux inclusions :
   • On sait que $A \subset \text{Adh}(A)$ et $B \subset \text{Adh}(B)$, donc $A \cup B \subset \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$. Comme $\text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$ est un fermé contenant $A \cup B$, on a $\text{Adh}(A \cup B) \subset \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$.

   • Comme A et B sont contenus dans $A \cup B$, on a $\text{Adh}(A)$ et $\text{Adh}(B)$ sont contenus dans $\text{Adh}(A \cup B)$, donc $\text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B) \subset \text{Adh}(A \cup B)$.
   • Il découle de tout ce qui précéde que : $\text{Adh}(A \cup B) = \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$
   • On a $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, donc $\text{Adh}(A \cap B) \subset \text{Adh}(A)$ et $\text{Adh}(A \cap B) \subset \text{Adh}(B)$, donc $\text{Adh}(A \cap B) \subset \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$.
   (b) $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$ et $\text{Int}(A \cup B) \supset \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$.
   (c) $\text{Ext}(A \cup B) = \text{Ext}(A) \cap \text{Ext}(B)$ et $\text{Ext}(A \cap B) \supset \text{Ext}(A) \cup \text{Ext}(B)$.
   (d) $\partial(\text{Int}(A)) \subset \partial A$ et $\partial(\text{Adh}(A)) \subset \partial(A)$ et $\partial(A \cup B) \subset \partial(A) \cup \partial(B)$.
6. Pour toute partie A de E, on a $\partial(A) = \emptyset \Leftrightarrow A$ est ouverte ou A est fermée.

7. Pour toutes parties A et B de E, si $\partial(A) \cup \partial(B) = \emptyset$, alors on a les égalités suivantes : $\text{Adh}(A \cap B) = \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B)$ et $\text{Int}(A \cup B) = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$ et $\partial(A \cap B) = (\partial(A) \cap \text{Adh}(B)) \cup (\text{Adh}(A) \cap \partial(B))$.

EXERCICE 236 Adherence des matrices traingulaires

Titre : Adherence des matrices traingulaires
ID : 200 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 186 | ID : 200
Difficulté : ★★☆☆☆

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\text{Im}\, z|^n$
2. Montrer que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables.

Solution

1. Soit $P = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$ scindé sur $\mathbb{R}$. Soit $z = u + iv \in \mathbb{C}$ avec $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Alors $|P(z)|^2 = \prod_{i=1}^{n}\left((u - a_i)^2 + v^2\right) \geq v^{2n}$. Ainsi $|P(z)| \geq |v|^n = |\text{Im}\, z|^{\deg P}$. Réciproquement, on suppose :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\text{Im}\, z|^n$$

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P(z_0) = 0$. On a donc $\text{Im}\, z_0 = 0$ c'est-à-dire $z_0 \in \mathbb{R}$. Ainsi les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont réelles, donc P est scindé sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathscr{T}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont trigonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On va montrer que $\overline{\mathscr{D}} = \mathscr{T}$.
- Soit $A \in \overline{\mathscr{D}}$ et soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{D}$ qui converge vers A. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$. En particulier χ_{A_k} est unitaire, de degré n, et scindé dans $\mathbb{R}[X]$. D'après la question 1 , on a :

$$|\chi_{A_k}(z)| = |\det(zI_n - A_k)| \geq |\text{Im}(z)|^n$$

Par continuité de l'application déterminant :

$$\lim_{k\to+\infty} |\det(zI_n - A_k)| = |\det(zI_n - A)|$$

Ainsi : $\forall z \in \mathbb{C}, |\chi_A(z)| \geq |\text{Im}\, z|^n$ Donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$. Ainsi $A \in \mathscr{T}$: on a montré $\overline{\mathscr{D}} \subset \mathscr{T}$.
Remarque : de ce qui précède, on déduit aussi que $\mathscr{T}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ - Réciproquement, soit M dans $\mathscr{T}$.
Il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$, et $T = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure, telles que $M = PTP^{-1}$ Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_k = T + \text{diag}\left(\frac{1}{k}, \ldots, \frac{n}{k}\right)$$

qui est triangulaire supérieure. Il n'y a qu'un nombre fini d'entiers k pour lesquels A_k peut avoir au moins deux coefficients diagonaux identiques ; en effet si $i, j \in [\![1, n]\!]$ tel que $i \neq j$ et $\lambda_i + \frac{i}{k} = \lambda_j + \frac{j}{k}$ alors $\lambda_i \neq \lambda_j$ et $k = \frac{j-i}{\lambda_i - \lambda_j}$ et on voit facilement que l'ensemble $\{\frac{j-i}{\lambda_i-\lambda_j} / i, j \in [\![1, n]\!], \lambda_i \neq \lambda_j\}$ est fini.
Il existe donc k_0 tel que A_k, donc $M_k = PA_kP^{-1}$, soit diagonalisable pour $k \geq k_0$. Par construction, $\lim_{k\to+\infty} A_k = T$, donc $\lim_{k\to+\infty} M_k = PTP^{-1} = M$ Ainsi M est limite d'une suite de matrices diagonalisables, donc est dans l'adhérence de $\mathscr{D}$ Finalement, on a montré l'égalité $\overline{\mathscr{D}} = \mathscr{T}$.

EXERCICE 237 Distance à une partie atteinte

Titre : Distance à une partie atteinte
ID : 201 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 187 | ID : 201
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel normé de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A une partie fermée non vide de E. Démontrer que :

$$\forall x \in E, \exists a \in A, \quad d(x,A) = \|x-a\|$$

Solution

Soit $x \in E$. Par définition de $d(x,A)$ à savoir :

$$d(x,A) = \inf_{a\in A} \|x-a\|$$

Si on note $\delta = d(x,A)$, on a pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_p \in A$ tel que :

$$(\star) \quad \delta + \frac{1}{p} > \|x - a_p\|$$

Il en découle que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\|a_p\| \leq \|a_p - x\| + \|x\| \leq \delta + \frac{1}{p} + \|x\| \leq \delta + \|x\| + 1$$

et que la suite (a_p) est bornée. Comme E est de dimension finie, la suite (a_p) admet une valeur d'adhérence a, donc il existe $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante tel que $\lim\limits_{p\to+\infty} a_{\varphi(p)} = a$. Comme la suite $(a_{\varphi(p)})$ est à valeurs dans A et que A est fermé, on a $a \in A$. Il découle de $(\star)$ ci-dessus que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \|a_{\varphi(p)} - x\| \leq \delta + \frac{1}{\varphi(p)}$$

Par passage à la limite, quand $p \to +\infty$, on a

$$\|a - x\| \leq \delta.$$

Or

$$\delta = d(x,A) \leq d(x,a) = \|x-a\|$$

car $a \in A$. Il en découle que $d(x,A) = \|x-a\|$

EXERCICE 238 Une variante du théorème du point fixe

Titre : Une variante du théorème du point fixe
ID : 202 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 188 | ID : 202
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit E un espace vectoriel normé. Soit K une partie compacte convexe de E. Soit f une application de K dans K, 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe.
Indication : pour a dans K fixé et tout entier naturel n non nul, on pourra considérer l'application f_n définie sur K par : $f_n : x \mapsto \frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x)$.

Solution

Analyse :
L'application f n'étant pas contractante, on ne peut bien sûr pas conclure prématurément ! Comme

$\frac{1}{n} \in]0;1]$ et $\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$, l'expression de $f_n(x)$ doit nous faire penser à la convexité de K! On montre alors facilement que f_n est à valeur dans K. Ne serait-elle pas ... contractante ?

Résolution :
On a : $\frac{1}{n} \in]0;1]$ et $\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$. Par ailleurs, a et $f(x)$ sont, par hypothèse sur a et f, dans K. Comme K est une partie convexe de E, on en déduit que $\frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x)$ est un élément de K. Pour tout entier naturel n non nul, la partie K est donc stable par f_n. Notons alors $\|.\|$ la norme sur E. Pour tous vecteurs x et y de E et tout entier naturel n non nul, on a :

$$\begin{aligned} \|f_n(y) - f_n(x)\| &= \left\| \frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x) - \left[\frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(y)\right] \right\| \\ &= \left\| \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(y) \right\| \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|f(x) - f(y)\| \end{aligned}$$

Mais l'application f étant 1 - lipschitzienne, on a : $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$. Finalement :

$$\|f_n(y) - f_n(x)\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x - y\|$$

Pour tout entier naturel strictement supérieur à 1 , on a : $\frac{1}{n} \in]0;1[$ et l'application f_n est contractante. K étant une partie compacte de E, elle est complète et l'application f_n admet ainsi un unique point fixe dans K que nous notons x_n. La partie K étant compacte, nous pouvons extraire de la suite (x_n) une suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ convergente. Notons l sa limite. On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = l$ L'application f étant 1 - lipschitzienne, elle est continue et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = f(l)$. Par ailleurs, on a : $f_n\left(x_{\varphi(n)}\right) = x_{\varphi(n)}$. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\left(x_{\varphi(n)}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = l$ On en tire immédiatement : $f(l) = l$. Ainsi, toute valeur d'adhérence de la suite (x_n) est point fixe de f.

EXERCICE 239 Théorème du pont fixe

Titre : Théorème du pont fixe
ID : 203 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 189 | ID : 203
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit E un espace vectoriel normé de dimesnion finie sur $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit A une partie finie non vide et $f : A \to E$ une application de A vers E tel que :

$$\begin{cases} f(A) \subset A \\ \exists k \in [0,1[, \forall (x,y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\| \end{cases}$$

Soit $a \in A$ et (x_n) la suite définie par $\begin{cases} x_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$.

1. Démontrer que la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ est absolument convergente.
2. En déduire que la suite (x_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3. Démontrer que ℓ est l'unique point fixe de f, c'est-à-dire l'unique $t \in A$ tel que $f(t) = t$.

Solution

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq 1$, alors $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\|$. Démontrons par récurrrence que pour tout $^j \in \mathbb{N}$, on a $\|x_{j+1} - x_j\| \leq k^j\|x_1 - x_0\|$.

• Pour $j = 0$, la condition s'écrit : $\|x_1 - x_0\| \leq k^0\|x_1 - x_0\|$, chose vraie.
• Soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_{j+1} - x_j\| \leq k^j\|x_1 - x_0\|$, alors :

$$\begin{aligned}\|x_{j+2} - x_{j+1}\| &\leq k\|x_{j+1} - x_j\| \\ &\leq k.k^j\|x_1 - x_0\| \\ &= k^{j+1}\|x_1 - x_0\|\end{aligned}$$

Donc $\|x_{j+2} - x_{j+1}\| \leq k^{j+1}\|x_1 - x_0\|$, ce qu'il fallait démontrer. La série géométrique (k^j) est convergente, donc par comparaison la série $\sum\|x_{j+1} - x_j\|$ est convergente. On a même :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{|x_1 - x_0|}{1-k}.$$

2. Comme la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ est absolument convergente et E de dimension finie, la série est convergente, donc la suite (x_n) est convergente.
3. On va démontrer deux choses :
   • ℓ est un point fixe de f : Par continuité de f et la relation $x_{n+1} = f(x_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(\ell) = \ell$, donc ℓ est un point fixe de f.
   • L'unicité d'un tel point fixe. Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux points fixes de f alors

$$\|\ell_2 - \ell_1\| = \|f(\ell_2) - f(\ell_1)\| \leq k\|\ell_2 - \ell_1\|,$$

   donc $(1-k)\|\ell_2 - \ell_1\| \leq 0$, et comme $1 - k > 0$, on a $\ell_1 = \ell_2$.

EXERCICE 240 Une autre variante du théorème du point fixe

Titre : Une autre variante du théorème du point fixe
ID : 204 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 190 | ID : 204
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit E un espace vectoriel normé de dimesnion finie sur $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit K une partie compacte non vide de E et $f : K \to E$ une application tel que $f(K) \subset K$ et $\forall(x, y) \in K^2, x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$. Démontrer que f admet un et un seul point fixe ℓ et que tout suite $(x_n)_{n\geq 0} \in K^{\mathbb{N}}$, :définie par $x_0 \in K$ et $\forall n \in N, x_{n+1} = f(x_n)$ est convergente de limite ℓ.

Solution

• Commençons par le premier point et considérons l'application $g : K \to \mathbb{R}; x \mapsto g(x) = \|f(x) - x\|$ qui est une fonction continue sur le compact K, donc elle est bornée et atteint ses bornes, en particulier sa borne inférieure, donc il existe $\ell \in K$ tel que $g(\ell) = \inf_{x\in\mathbb{K}}\|f(x) - x\|$. On a $f(\ell) = \ell$ cat sinon, d'après la condtion $(\star)$ sur f on aurai : $\|f(f(\ell)) - f(\ell)\| < \|f(\ell) - \ell\|$, ce qui contredit la définition de ℓ.

• Unicité : Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux points de K tel que $\ell_1 \neq \ell_2$, alors, d'après $(\star)$, on a : $\|f(\ell_2) - f(\ell_1)\| < \|\ell_2 - \ell_1\|$, par suite $f(\ell_2) \neq f(\ell_1)$ et ℓ_1 et ℓ_2 ne peuvent pas être en même temps des points fixes de f. Ceci prouve l'unicité du point fixe de f.

• Soit $a \in K$ et la suite (x_n) définie par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite (x_n) est à valeurs dans K. On va démontrer que (x_n) est convergente vers ℓ. Pour cela, il suffit de démontrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\delta_n = \|x_n - \ell\|$ alors la suite (δ_n) converge vers 0. On remarque

tout de suite que la suite (δ_n) est positive et décroissante car, si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\delta_{n+1} = \|x_{n+1} - \ell\| = \|f(x_n) - f(\ell)\| \leq \|x_n - \ell\|$$

car si $x_n \neq \ell$, c'est vrai d'après $(\star)$ et si $x_n = \ell$ alors $x_{n+1} = f(x_n) = \ell$ et l'inégalité est vraie aussi. Il en découle que la suite (δ_n) converge vers une limite α. Comme K est compact, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tel que la suite $x_{\varphi(n)}$ converge vers $\ell' \in K$. Comme f est lipschitzienne elle est continue donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_{\varphi(n)}) = f(\ell')$. On $\forall n \in \mathbb{N}$, $(f(x_{\varphi(n)}) = (x_{\varphi(n)+1})$, donc, en posant $\forall n \in \mathbb{N}, \psi(n) = \varphi(n) + 1$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\psi(n)} = f(\ell')$. Or, on a ψ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$, donc $(\delta_{\psi(n)})$ est une sous-suite de (δ_n), par suite on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_{\psi(n)} = \alpha$. Cela veut dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_{\psi(n)} - \ell\| = \alpha$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f(x_{\varphi(n)}) - \ell\| = \alpha$, donc $\|f(\ell') - \ell\| = \alpha$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_{\varphi(n)} = \alpha$ donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_{\varphi(n)} - \ell\| = \alpha$, donc : $\|\ell' - \ell\| = \alpha$ et finalement $\|f(\ell') - f(\ell)\| = \|\ell' - \ell|$, donc $\ell = \ell'$ et $\alpha = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$

EXERCICE 241 — Union de boules ouvertes de rayon 1

Titre : Union de boules ouvertes de rayon 1 — **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 205 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 191 | ID : 205

Soit E un espace vectoriel normé et Ω un ouvert de E. On note $\mathbf{O}(\Omega) = \bigcup\limits_{\omega\in\Omega} B_f(\omega, 1)$. Démontrer que $\mathbf{O}(\Omega)$ est un ouvert de E.

Solution

Soit $x \in \mathbf{O}(\Omega)$, par définition il existe $\omega \in \Omega$ tel que $x \in B_f(\omega, 1)$, donc $x = \omega + u$ avec $\|u\| \leq 1$, comme $\omega \in \Omega$ et Ω est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(\omega, r) \subset \Omega$, on va prouver que $(\star)$: $B(x, r) \subset \mathbf{O}(\Omega)$, soit $y \in B(x, r)$, donc $y = x + v$ avec $\|v\| < r$. Par suite $y = \omega + u + v = (\omega + v) + u$, si on pose $\omega' = \omega + v$, on a $\omega' \in B(\omega, r)$ et comme $B(\omega, r) \subset \Omega$ on a $\omega' \in \Omega$, par ailleurs $\|y - \omega'\| = \|u\| \leq 1$, donc $y \in B_f(\omega', 1)$ et $\omega' \in \Omega$, donc $y \in \mathbf{O}(\Omega)$, donc $(\star)$ est prouvée et par suite $\forall x \in \mathbf{O}(\Omega), \exists r > 0, B(x, r) \subset \Omega(\Omega)$, ce qui prouve que $\mathbf{O}(\Omega)$ est une partie ouverte de E.

EXERCICE 242 — Convergence d'une suite de fonctions suivant la norme

Titre : Convergence d'une suite de fonctions suivant la norme — **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 206 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 192 | ID : 206

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des appliocations continues de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$. Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ dans l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|_p)$ pour les cas $p = 1$, $p = 2$ et $p = \infty$, dans les deux cas suivants :

1. La suite (f_n) définie par :

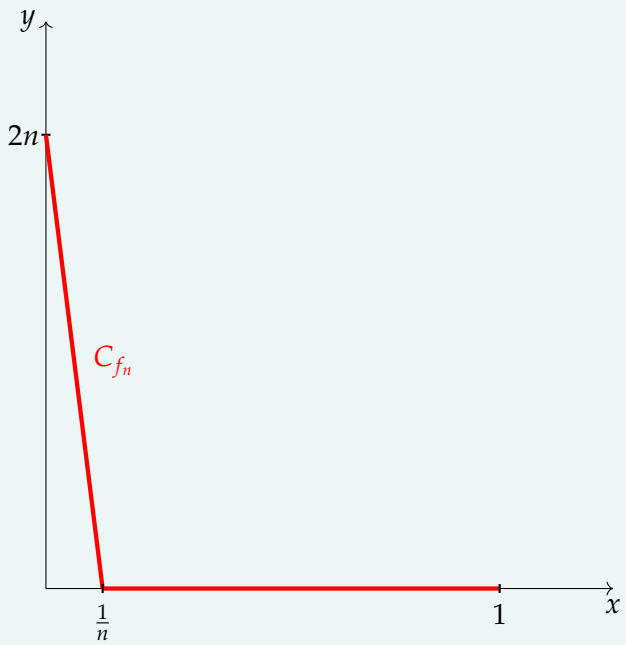
$$\forall t \in [0, 1], f_n(t) = \begin{cases} -2n^2t + 2n & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 \quad \text{si} \quad \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

2. La suite (f_n) définie par :

$$\forall t \in [0, 1], f_n(t) = \begin{cases} -2n\sqrt{n}t + 2\sqrt{n} & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 \quad \text{si} \quad \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Solution

1. Avant de donner une réponse voici une representation graphique de f_n qui, notamment permet de visualiser $\|f_n\|_\infty$ et $\|f_n\|_1$:



La suite diverge dans $(E, \|.\|_\infty)$ car si on suppose que la suite (f_n) converge vers une application f, on aurait la suite réelle $(f_n(0))$ qui convergerait vers $f(0)$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|f_n(0) - f(0)| \leq \|f_n - f\|_\infty$ et comme (f_n) converge vers f, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Ainsi on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = f(0)$, chose absurde puisque $f_n(0) = 2n$ tends vers $+\infty$.

Pour la norme $\|.\|_1$, la réponse est non ; chose qu'on va démontrer par l'absurde. Si on suppose que (f_n) converge vers f alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left|\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t = \|f_n - f\|_\infty$ et cette dernière converge vers 0, par suite :

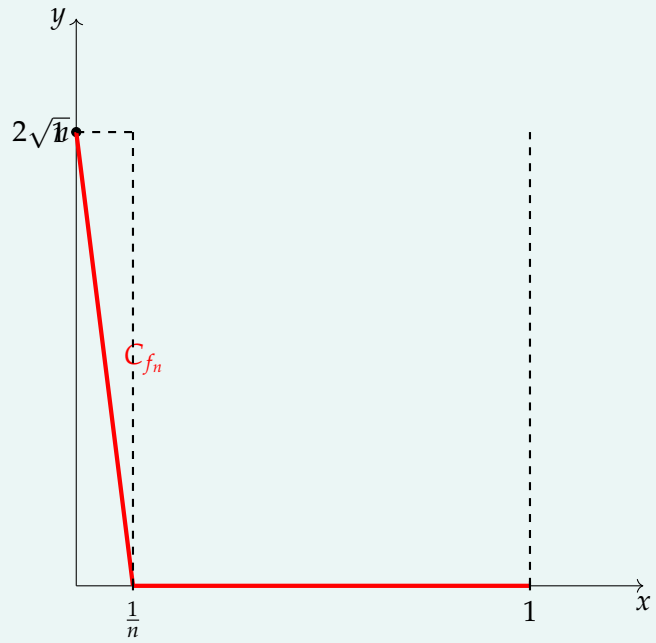
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t,$$

et comme $\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = 1$, on a alors $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1$.

Comme f est continue, il existe alors $t_0 \in [0,1]$ tel que $f(t_0) > 0$ et par continuité, il existe $a, b \in [0,1]$ tel que $0 < a < b \leq 1$ et $f > 0$ sur $[a,b]$, donc $\alpha_n = \|f_n - f\|_1 \geq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t$ et comme f est continue $m = \min\limits_{a\leq t\leq b} f(t)$ existe et on a $\alpha_n \geq m(b-a)$ (en effet si $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} < a$, alors f_n est nulle sur $[a,b]$ pour tout $n \geq N$), ce qui est absurde cat $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

Pour la norme $\|.\|_2$, on sait que $\|.\|_1 \leq \|.\|_2$, donc si (f_n) converge vers f pour $\|.\|_2$, on aurait $\|f_n - f\|_1 \leq \|f_n - f\|_2$ et on aurait la convergence pour $\|.\|_1$, chose fausse.

2. Voici dans l'image ci-dessous une représentation graphique de la fonction f_n, ce qui facilitera de visualiser $\|f_n\|_\infty$ et $\|f_n\|_1$.



De même ici on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{n} = +\infty$, donc il est impossible que (f_n) converge pour la norme $\|.\|_\infty$.
$\|f_n - 0\| = \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc (f_n) converge vers 0 pour la norme $\|.\|_1$.
Pour la norme $\|.\|_2$, remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\delta_n = \|f_n - f_{2n}\|_2^2 = \int_0^1 (f_n(t) - f_{2n}(t))^2\mathrm{d}t$$

Or, on a :

$$\int_0^1 (f_n(t) - f_{2n}(t))^2\mathrm{d}t \geq \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} (f_n(t))^2\mathrm{d}t$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} (f_n(t))^2\mathrm{d}t &= \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} (-2n\sqrt{n}t + 2\sqrt{n})^2\mathrm{d}t \\
&= \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} (4n^3t^2 - 8n^2t + 4n)\mathrm{d}t \\
&= \frac{4n^3}{3}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^3 - \left(\frac{1}{2n}\right)^3\right) - \frac{8n^2}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{2n}\right)^2\right) + 4\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right) \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n - f_{2n}\|_2 \geq \sqrt{\frac{1}{6}}$, par suite la suite (f_n) diverge pour $\|.\|_2$ car si elle converge vers f on aurait $\|f_n - f_{2n}\| \leq \|f_n - f\| + \|f_{2n} - f\| \underset{0}{\longrightarrow} n \to +\infty$, ce qui n'est pas le cas.

EXERCICE 243 Norme de convergence uniforme

Titre : Norme de convergence uniforme
ID : 207 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 193 | ID : 207
Difficulté :

Soit $E = \mathscr{B}([-1,1], \mathbb{R})$ l'espace des applications bornées de $[-1,1]$ vers $\mathbb{R}$ muni de la norme de convergence

uniforme $\|.\|_\infty$ et A la parties de E constituées des applications continues. Camculer $d(f,A)$ où f est l'application définie par :

$$\forall t \in [-1,1], f(t) = \begin{cases} \frac{t}{|t|} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Solution

$d(f,A) = \inf_{g\in A} \|f-g\|_\infty$. Pour $g(t) = 0, \forall t \in [-1,1]$, on a $g \in A$ et $\|f-g\|_\infty = 1$, donc $(\star)$ $d(f,A) \leq$ 1. Par ailleurs pour tout $g \in A$, on a $1 \leq \|f-g\|$, en effet :

- Si g s'annule en un point $t_0 \neq 0$ alors $\|f-g\| \geq |f(t_0)-g(t_0)| = |f(t_0)| = 1$.
- Sinon et $g(0) = 0$, pour tout $t \in]0,1]$, on a $|f(t)-g(t)| = |1-g(t)| \leq \|f-g\|_\infty$, par passage à la limite quand $t \to 0^+$, il vient $1 \leq \|f-g\|_\infty$.
- Finalement si g ne s'annule guère sur $[-1,1]$, alors :

- Soit $g > 0$ donc $|g(-1)-f(-1)| = 1+g(-1) \geq 1$, donc $\|g-f\| \geq 1$.
- Soit $g < 0$, donc $\|f-g\| \geq |g(1)-f(1)| = |1-f(1)| = 1-f(1) \geq 1$.

Ainsi on a prouvé que $\forall g \in A, \|f-g\|_\infty \geq 1$, donc $(\star)'$ $d(f,A) \geq 1$,et compte tenu de $(\star)$ ci-dessus et $(\star)'$, on a $d(f,A) = 1$.

EXERCICE 244 Activités sur les normes équivalentes

Titre : Activités sur les normes équivalentes
ID : 208 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 194 | ID : 208
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$. Si N_1 et N_2 deux normes de E, on dit que N_1 et moins fine que N_2 et on note $N_1 \prec N_2$ si et seulement s'il existe une constante $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leq \alpha N_2$. Pour tout $k \in \{1,2\}$ et tout $(a,r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$, on adoptera les notations suivantes :

- $\mathscr{O}_k$ l'ensemble des ouverts de l'espace normé (E,N_k).
- $B^k(a,r)$(resp. $B_f^k(a,r)$) la boule ouverte(resp. fermé) de centre a et de rayon r de l'espace vectoriel normé (E,N_k).
- $\mathscr{I}_{1,2} = \{\frac{N_2(x)}{N_1(x)} / x \in E\backslash\{0\}\}$ et $\mathscr{I}_{2,1} = \{\frac{N_1(x)}{N_2(x)} / x \in E\backslash\{0\}\}$.

Dans tout ce qui suite N_1 et N_2 sont deux normes de E.

1. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) N_2 est plus fine que N_1.
   (ii) $\mathscr{I}_{2,1}$ est majorée.
   (iii) $\exists r > 0, B_f^2(0,r) \subset B_f^1(0,r)$.
   (iv) $\mathscr{O}_1 \subset \mathscr{O}_2$.
2. Démontrer que N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si $N_1 \prec N_2$ et $N_2 \prec N_1$.
3. Démontrer que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes si et seulement si $\mathscr{I}_{1,2}$ ou $\mathscr{I}_{2,1}$ n'est pas majorée. En déduire que si N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes alors il existe une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}^*}$ tel que (x_n) converge dans l'un des espace vectoriels normés $(E,N_1),(E,N_2)$ et diverge dans l'autre.
4. En déduire que N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si (E,N_1) et (E,N_2) ont les mêmes suites convergentes.
5. Démontrer que Si N_1 et N_2 sont équivalentes alors pour toute suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ convergente pour l'une des normes, elle converge pour l'autre et les limites sont égales.
6. Démontrer que N_1 N_2 sont équivalentes si et seulement si (E,N_1) et (E,N_2) ont les mêmes suites qui convergent vers 0.

Solution

1. Démontrons l'équivalence des quatres assertions en démontrant : $(i) \Leftrightarrow (ii)$, $(i) \Leftrightarrow (iii)$, $(ii) \Leftrightarrow (iv)$.
   • $(i) \Leftrightarrow (ii)$: On fait une démonstration par équivalences successives. On a : (i) si et seulement si N_2 est plus fine que N_1 si et seulement si $\exists \alpha > 0$ tel que $N_1 \leq \alpha N$ si et seulement si $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in E, N_1(x) \leq \alpha N_2(x)$, et comme l'inégalité est toujours vraie pour $x = 0$, on a N_2 plus fine que N_1 si et seulement si $\exists \alpha > 0, \forall x \in E\backslash\{0\}, \frac{N_1(x)}{N_2(x)} \leq \alpha$ si et seulement si $\mathscr{I}_{2,1}$ est majorée. Donc (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

   • $(i) \Leftrightarrow (iii)$:
   • Si (i) est vraie alors N_2 est plus fine que N_1, donc $\exists \alpha > 0$ tel que $N_1 \leq \alpha N_2$. Soit $r > 0$ et $x \in B_f^2(0,r)$ alors $N_2(x) \leq r$, donc $N_1(x) \leq \alpha N_2(x) \leq \alpha r$. Si on prend $r = \frac{1}{\alpha}$, on a bien $B_f^2(0,r) \subset B_f^1(0,1)$. Ainsi on a prouvé que (i) $\Rightarrow$ (iii).

   • Si (iii) est vraie alors il existe $r > 0$ tel que $B_f^2(0,r) \subset B_f^1(0,1)$. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$ alors $x' = \frac{r}{N_2(x)} x \in B_f^2(0,r)$, donc $N_1(x') \leq 1$, ce qui donne $N_1(x) \leq \alpha N_2(x)$ pour $\alpha = \frac{1}{r}$, donc $(iii) \Rightarrow (i)$, et finalement on a $(i) \Leftrightarrow (iii)$.

   • Preuve de $(ii) \Leftrightarrow (iv)$
   • Supposons que $\mathscr{O}_1 \subset \mathscr{O}_2$; comme $B^2(0,1) \in \mathscr{O}_1$, on a $B^2(0,1) \in \mathscr{O}_2$, et comme $0 \in B^2(0,1)$, il existe $r' > 0$ tel que $B^2(0,r') \subset B^2(0,1)$, soit $r = \frac{r'}{2}$ alors $B_f^2(0,r) \subset B^2(0,1) \subset B_f^2(0,1)$, donc on a prouvé la vérité de (ii).
   • Supposons (ii) vraie et soit $W \in \mathscr{O}_1$ et $x \in W$, alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B^1(x,\varepsilon) \subset W$, donc $B_f^1(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subset W$, donc $B_f^1(0,1) \subset \frac{2}{\varepsilon}(-x + W)$. Comme (ii) est vraie il existe $r > 0$ tel que $B_f^2(0,r) \subset B_f^1(0,1)$, donc $B_f^2(0,r) \subset \frac{2}{\varepsilon}(-x + W)$. Il en découle que $B^2(0,r) \subset \frac{2}{\varepsilon}(-x + W)$, donc $\frac{\varepsilon}{2} B^2(x,r) = B^2(x, \frac{\varepsilon r}{2}) \subset W$ et par suite W est un ouvert de (E, N_2), donc $W \in \mathscr{O}_2$. Ainsi on a $\mathscr{O}_1 \subset \mathscr{O}_2$. On a donc prouvé l'équivalence des quatres assertions.
2. Par définition on a $N_1 \sim N_2$ si et seulement si $\exists \alpha, \beta > 0$ tel que $\lambda N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$, donc $N_1 \leq \frac{1}{\alpha} N_2$ et $N_2 \leq \beta N_1$ et par suite $N_1 \prec N_2$ et $N_2 \prec N_1$. Réciproquement si $N_1 \prec N_2$ et $N_2 \prec N_1$, il existe $c, c' > 0$ tel que $N_1 \leq c N_2$ et $N_2 \leq c' N_1$, donc $\frac{1}{c} N_1 \leq N_2 \leq c' N_1$, donc $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$ avec $\alpha = \frac{1}{c}$ et $\beta = c'$. Ainsi $N_1 \sim N_2$.
3. D'après l'équivalence $(i) \Leftrightarrow (ii)$ de la question 1), et par équivalence des négations on a N_1 et N_2 non équivalentes si et seulement si $\mathscr{I}_{1,2}$ ou $\mathscr{I}_{2,1}$ non majorée. Supposons par exemple que $\mathscr{I}_{1,2}$ n'est pas majoré, alors on a en particulier :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in E, a_n \neq 0, \frac{N_2(a_n)}{N_1(a_n)} \geq n$$
   On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $N_2(a_n) \geq n N_1(a_n)$. Posons $x_n = \frac{a_n}{\sqrt{n} N_1(a_n)}$, alors $N_1(x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ de sorte que $\lim\limits_{n \to +\infty} N_1(x_n) = 0$, par contre $N_2(x_n) = \frac{N_2(a_n)}{N_1(a_n)} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} N_2(x_n) = +\infty$ de sorte que (x_n) converge vers 0 pour N_1 et diverge pour N_2. Cette démarche sert aussi dans le cas où $\mathscr{I}_{2,1}$ n'est pas majoré, et en conclusion, on a prouvé que si N_1 et N_2 sont non équivalentes, il existe une suite qui converge pour l'une et diverge pour l'autre.
4. Par contraposé, de l'implication de la question précédente, on a : si N_1 et N_2 ont les mêmes suites convergentes alors $N_1 \sim N_2$.
5. Si N_1 et N_2 sont équivalente et (x_n) une suite convergente vers ℓ_1 pour N_1, d'après la question précédente (x_n) converge vers ℓ_2 pour N_2. Comme les normes sont équivalentes, il existe $k > 0$ tel que $N_1 \leq k N_2$, en particulier, on a : On a $\forall n \in \mathbb{N}, N_1(x_n - \ell_2) \leq k N_2(x_2 - \ell_2)$ donc (x_n) converge vers ℓ_2 dans (E, N_1), et par unicité de la limite on a $\ell_1 = \ell_2$.
6. Si N_1 et N_2 sont équivalentes, alors d'après la question précédente une suite (x_n) converge vers 0 dans (E, N_1) si et seulement si (x_n) converge vers 0 dans (E, N_2). Réciproquement si (E, N_1)

et (E, N_2) ont les normes ont les mêmes suites qui convergent vers 0, soit (x_n) une suite qui converge vers ℓ dans (E, N_1), donc $(x_n - \ell)$ converge vers 0 dans (E, N_1), donc elle converge vers 0 dans (E, N_2), ce qui veut dire que (x_n) converge vers ℓ dans (E, N_2). Par symétrie des rôles toute suite convergente dans (E, N_2) converge(vers la même limite) dans (E, N_1), donc N_1 et N_2 ont les mêmes suites convergentes, donc N_1 et N_2 sont équivalentes.

EXERCICE 245 Un exemple de boule unité fermée non compacte

Titre : Un exemple de boule unité fermée non compacte
ID : 209 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 195 | ID : 209
Difficulté : ★☆☆☆☆

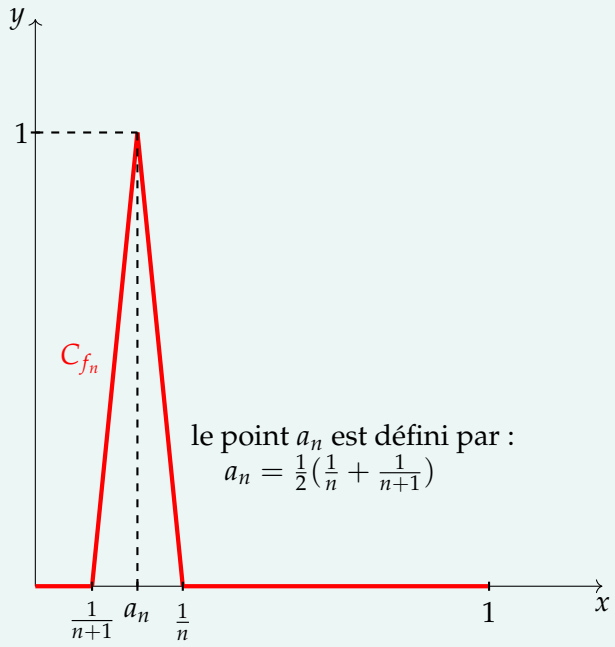
Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ muni de la norme de convergence uniforme $\|.\|_\infty$, c'est-à-dire :

$$\forall f \in E, \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Démontrer que la boule fermée unité de $(E, \|.\|_\infty)$ n'est pas compacte.

Solution

Considérons la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ dont le graphe est donné par la figure ci-dessous :
On voit bien que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n \in B_f(0,1)$ car $\|f_n\|_\infty = 1$



Démontrons que la suite (f_n) n'admet pas de valeur d'adhérence. Par l'absurde. Sinon, il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ qui converge vers f avec $f \in B_f(0,1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi}(n)\| = 1$ car si on pose $a_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+\varphi(n+1)} + \frac{1}{\varphi(n+1)})$, on a $a_n < \frac{1}{\varphi(n+1)} < \frac{1}{\varphi(n)}$, par suite $f_{\varphi(n)}(a_n) = 0$ et comme $f_{\varphi(n+1)}(a_n) = 1$, on a

$$(\star) \quad \|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\| \geq 1.$$

Or $\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_\infty \leq \|f_{\varphi(n+1)} - f\|_\infty + \|f_{\varphi(n)} - f\|_\infty$, ce qui donne :

$$(\star)' \quad \lim_{n\to+\infty} \|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_\infty = 0$$

et il est clair que $(\star)$ et $(\star)'$ sont contradictoires, donc la suite (f_n) n'admet aucune valeur d'adhérence et pourtant elle est à valeurs dans $B_f(0,1)$, donc cette dernière n'est pas compacte.

EXERCICE 246 Complémentaire d'un sev connxe par arc

Titre : Complémentaire d'un sev connxe par arc
ID : 210 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 196 | ID : 210
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé au moins de dimension 2, donc elle peut être éventuellement infinie.

1. Démontrer que si E_1, E_2, E_3 sont trois s.e.v. de E tel que $E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq E_3$ et si $a, b \in E$ tel que $a \in E_2 \backslash E_1$ et $b \in E_3 \backslash E_2$ alors $E_1 \cap [a, b] = \emptyset$.
2. En utilisant le résultat établi dans la question 1), démontrer que si F est un sous-espace vectoriel de E tel que $\text{codim}(F) \notin \{0, 1\}$ alors $E' = E \backslash F$ est une partie non vide connexe par arcs de E.

Solution

1. Sinon, il existe $x \in E_1 \cap [a, b]$, donc il existe $t \in [0, 1]$ tel que $(\star) \quad x = (1-t)a + tb$, donc $tb = x - (1-t)a$ et comme $a \in E_2$ et $x \in E_1 \subset E_2$, on a $tb \in E_2$ et comme $b \notin E_2$, on a $t = 0$ et si on revient à la relation $(\star)$ on obtient $x = a$, c'est absurde car $x \in E_1$ et $a \notin E_1$.
2. Soit $a, b \in E'$. Comme $F \neq E$ et F n'est pas un hyperplan, il existe un hyperplan H de E tel que $F + \mathbb{K}a \subset H$, donc en posant $E_1 = F$, $E_2 = H$ et $E_3 = E$, on a $E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq E_3$. On va discuter deux cas :
   • Si $b \notin H$ alors en appliquant la première question on a $[a, b] \subset E'$, donc a et b sont joignables dans E'.
   • Si $b \in H$, il existe $c \in E \backslash H$. En appliquant la question 1) au couple (a, c) d'une part et (b, c) d'autre part on a $[a, c] \subset E'$ et $[c, b] \subset E'$, donc a et b sont joignables dans E'.

EXERCICE 247 Topologie de l'ensemble des projecteurs

Titre : Topologie de l'ensemble des projecteurs
ID : 211 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 197 | ID : 211
Difficulté : ★☆☆☆☆

$\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$ et

$$\mathscr{P}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / M^2 = M\}.$$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme quelconque.

1. $\mathscr{P}_n$ est elle une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Prouver que $\mathscr{P}_n$ n'est pas connexe par arcs.
3. Pour tout $r \in [\![0, n]\!]$, on note $\mathscr{P}_{n,r} = \{M \in \mathscr{P}_n / \text{ rg }(M) = r\}$
   (a) Prouver que $\mathscr{P}_{n,r}$ est connexe par arcs dans chacun des cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ puis $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   (b) Soit $r, r' \in [\![0, r]\!]$ tel que $r \neq r'$. Démontrer que si $A \in \mathscr{P}_{n,r}$ et $B \in \mathscr{P}_{n,r'}$ alors il n'existe aucune chemin qui joigne A et B dans $\mathscr{P}_n$.
   (c) En déduire les composantes connexes de $\mathscr{P}_n$.

Solution

1. $\mathscr{P}_n$ n'est pas compacte car la suite (A_k) définie par $A_k = E_{1,1} + kE_{1,n}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{P}_n$, puisque, compte tenu de $n \neq 1$, on a :

$$A_k^2 = E_{1,1}^2 + k^2 \underbrace{E_{1,n}^2}_{=0} + k \underbrace{E_{1,1}E_{1,n}}_{=kE_{1,n}} + k \underbrace{E_{1,n}E_{1,1}}_{=\delta_{n,1}E_{1,1}=0} = E_{1,1} + kE_{1,n} = A_k$$

et on a par exemple $\|A_k\|_\infty = k$, donc $\lim\limits_{k \to +\infty} \|A_k\| = +\infty$ et la suite (A_k) n'est pas bornée donc

$\mathscr{P}_n$ est non bornée donc non compacte.

2. $\mathscr{P}_n$ n'est pas connexe par arcs car $\det(\mathscr{P}_n) = \{0,1\}$ n'est pas un connexe par arcs de $\mathbb{K}$ et det est une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$. On rappelle que l'image par une application continue d'une partie connexe par arcs est connexe par arcs.
3. Pour tout $r \in [\![0,n]\!]$, on note $\mathscr{P}_{n,r} = \{M \in \mathscr{P}_n / \operatorname{rg}(M) = r\}$

   (a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs et si on note $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, l'application :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & \Phi(M) = MJ_rM^{-1} \end{array} \right.$$

   est continue(car de composantes polynômiale en les coefficients de M) et on a $\Phi(\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})) = \mathscr{P}_{n,r}$ puisque toute matrice $A \in \mathscr{P}_n$ étant celle d'un projecteur, elle est diagonalisable semblable à J_r. Ainsi $\mathscr{P}_{n,r}$ est connexe par arcs comme image par une application continue d'un connexe par arcs.
   • Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'application

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{GL}_n^+(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & MJ_rM^{-1} \end{array} \right.$$

   est comme précédemment continue et $\mathbf{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, donc $\Psi(\mathbf{GL}_n^+(\mathbb{R}))$ est connexe par arcs. Or si $A \in \mathscr{P}_{n,r}$, on sait qu'il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PJ_rP^{-1}$, et deux cas sont possibles, soit $P \in \mathbf{GL}_n^+(\mathbb{R})$, alors $A \in \Psi(\mathbf{GL}_n^+(\mathbb{R}))$; soit $P \in \mathbf{GL}_n^-(\mathbb{R})$, si on note $K = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a $K \in \mathbf{GL}_n^-(\mathbb{R})$ et $K^2 = I_n$ et alors $K^{-1}J_rK = KJ_rK = J_rK^2$ (car produit de matrices diagonales), donc $K^{-1}J_rK = J_r$ et en posant $Q = KP$, on a $A = Q^{-1}J_rQ$ et $Q \in \mathbf{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et par suite on aussi dans ce cas $A \in \Psi(\mathbf{GL}_n^+(\mathbb{R}))$. En conclusion $\mathscr{P}_{n,r} = \Psi(\mathbf{GL}_n^+(\mathbb{R}))$ est connexe par arcs comme image d'un connexe par arcs par une application continue.

   (b) Si un tel chemin existe on aurait $\mathscr{P}_{n,r} \cup \mathscr{P}_{n,r'}$ serait connexe par arcs, et comme l'application tr est continue on aurait $\operatorname{tr}(\mathscr{P}_{n,r} \cup \mathscr{P}_{n,r'})$ serait un connexe par arcs de $\mathbb{K}$, or la trace d'un projecteur est égale à son rang et comme $r \neq r'$, la paire $\{r, r'\}$ n'est pas un connexe par arcs de $\mathbb{K}$, donc le chemin proposé n'existe pas.

   (c) Ce qui précède permet de dire que les classes d'équivalence de la relation d'équivalence $A, B \in \mathscr{P}_n$, $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A$ et B sont joignables par un chemin dans $\mathscr{P}_n$ sont les parties $\mathscr{P}_{n,r}$, il en découle que ces dernières sont les composantes connexes par arcs de $\mathscr{P}_n$.

EXERCICE 248 Etude d'une suite résurrente linéaire par réduction

Titre : Etude d'une suite résurrente linéaire par réduction
ID : 478 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 461 | ID : 478
Difficulté : ★★☆☆☆

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$u_0 = 0, u_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$$

1. Determiner une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

   Veuillez bine justifier votre réponse.
2. Determiner le plynôme cractéristique $\chi_A(X)$ de A et calculer ses valeurs propres λ_1 et λ_2.
3. Soit $R_n(X) = a_n X + b_n$ te reste de la division euclidienne de X^n par $\chi_A(X)$. Calculer a_n et b_n (on pourra utiliser les racines λ_1, λ_2 de $\chi_A(X)$.)
4. Montrer que $A^n = a_n A + b_n I_n$, en déduire que la suite $(A^n)_{n\geq 0}$ converge lorsque n tend vers $+\infty$ vers une limite A_∞ que l'on determinera. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution

1. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

   alors

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

   Comme

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n),$$

   on a

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_n.$$

   Notons $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ alors $X_{n+1} = AX_n$, donc, par une simple récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$, et comme $X_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$.
2. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$ dont les racines sont $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ et $\lambda_2 = 1$.
3. On a $X^n = Q(X)\chi_A(X) + a_n X + b_n$, par application aux racines de χ_A, il vient $\begin{cases} \lambda_1^n = a_n\lambda_1 + b_n \\ \lambda_2^n = a_n\lambda_2 + b_n \end{cases}$. Après calcul, on trouve :

$$a_n = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right) \text{ et } b_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{2^n}\right).$$

4. Le théorème de Cayley-Hamilton permet de dire que $\chi_A(A) = 0$, donc $A^n = a_n A + b_n I_n$.
   - Commme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}I_n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A_\infty$ avec $A_\infty = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   - Comme $X_n = A^n X_0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = A_\infty X_0$. On a $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$.

EXERCICE 249 L'application distance à une partie, lien avec un compact

Titre : L'application distance à une partie, lien avec un compact
ID : 496 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 478 | ID : 496
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Soit A une partie non vide de E. Montrer que l'application $x \mapsto d(x,A)$ est continue sur E.
2. Soit K un compact non vide inclus dans un ouvert U. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in K, B(x,\alpha) \subset U$$

Solution

1. Soient $x, x' \in E$.
$$\forall y \in A, \|x-y\| \leq \|x-x'\| + \|x'-y\|$$
donc $d(x,A) \leq \|x-x'\| + \|x'-y\|$ puis $d(x,A) - \|x-x'\| \leq \|x'-y\|$ et $d(x,A) - \|x-x'\| \leq d(x',A)$. Ainsi $d(x,A) - d(x',A) \leq \|x-x'\|$ et par symétrie $|d(x,A) - d(x',A)| \leq \|x-x'\|$. Finalement, $x \mapsto d(x,A)$ est 1-lipschitzienne donc continue.
2. Considérons l'application $x \mapsto d(x, \mathcal{C}_E U)$ définie sur le compact K.
Cette application est bornée et atteint ses bornes. Posons $\alpha = \min_{x\in K} d(x, \mathcal{L}_E U)$ atteint en $x_0 \in K$. Si $\alpha = 0$ alors $x_0 \in \overline{\mathcal{C}_E U}$ or $\mathcal{C}_E U$ est fermé et donc $x_0 \notin U$ or $x_0 \in K$. Nécessairement $\alpha > 0$ et alors
$$\forall x \in K, B(x,\alpha) \subset U.$$

EXERCICE 250 Distance d'un point à l'union de deux parties

Titre : Distance d'un point à l'union de deux parties
ID : 539 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 520 | ID : 539
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

1. A et B sont deux parties non vides de E. Démontrer que
$$\forall x \in E, \mathrm{d}(x, A \cup B) = \min(d(x,A), d(x,B))$$
2. Soit $x \in E$ et on note $B_x = B_f(x, \|x\|)$ la boule fermé de centre x et de rayon $\|x\|$. Soit F une partie de E tel que $F \cap B_x \neq \emptyset$.Démontrer que $d(x,F) = d(x, F \cap B_x)$.
3. En déduire que le résultat de la question précédente est vrai si F est un sous-espace vectoriel de E.
4. En déduir que si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E alors :
$$\forall x \in E, \exists y \in F, d(x,F) = \|x-y\|$$

Solution

1. Soit $x \in E$, comme $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, on a $\begin{cases} d(x,A) \geq d(x, A\cup B \\ d(x,B) \geq d(x, A \cup B) \end{cases}$, par suite $(\star)\, \min(d(x,A), d(x,B)) \geq d(x, A \cup B)$. Soit $\varepsilon > 0$, par définition de $d(x, d(x, A\cup B)$, il existe $c \in A \cup B$ tel que $d(x, A\cup B) + \varepsilon \geq d(x,c)$. Si $c \in A$ alors $d(x,c) \leq d(x,A) \leq \min(d(x,A), d(x,B))$ et si $c \in B$ alors $d(x,c) \leq d(x,B) \leq \min(d(x,A), d(x,B))$, donc $d(x, A\cup B) + \varepsilon \geq \min(d(x,A), d(x,B))$, et par passage à la limite quand ε tend vers 0, on a $(\star\star) d(x, A\cup B) \geq \min(d(x,A), d(x,B))$. De $(\star)$ et $(\star\star)$, on déduit que
$$\forall x \in E, \mathrm{d}(x, A \cup B) = \min(d(x,A), d(x,B))$$
2. On remarque que $F = (F \cap B_x) \cup (F \cap B_x^c)$. Deux cas sont possibles :
• Soit $B_x^c \cap F = \emptyset$, donc $F \subset B_x$ et $F \cap B_x = F$, donc le résultat demandé est vrai.
• Soit $B_x^c \cap F = \emptyset$, alors d'après la question 1), on a $d(x,F) = \min(d(x, (F\cap B_x)), d(x, (F \cap B_x^c))$. Or si $y \in F \cap B_x$ et $z \in F \cap B_x^c$ alors $\|x-y\| \leq \|x\|$ et $\|x\| < \|z-x\|$, par suite $\|y-x\| < \|z-x\|$

ceci pour tout $y \in F \cap B_x$ et tout $z \in F \cap B_x^c$, donc $d(x, F \cap B_x) \leq d(x, F \cap B_x^c)$ et finalement $d(x,F) = d(x, F \cap B_x)$.

3. Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $0 \in F \cap B_x$, donc $F \cap B_x \neq \emptyset$, d'où la vérité de la propriété dans ce cas.
4. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie alors $C = B_x \cap F$ est une partie compacte de E, comme $d(x,C)$ est un point adhérent de $\{\|x-c\| / c \in C\}$, il existe une suite $(c_n) \in C^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x - c_n\| = d(x,C)$, et comme C est compacte il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_{\varphi(n)} = y$ avec $y \in C$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x - c_{\varphi(n)}\| = d(x,C)$, donc $\|x-y\| = d(x,C) = d(x,F)$.

EXERCICE 251 Distance à l'union d'une famille quelconque de parties

Titre : Distance à l'union d'une famille quelconque de parties
ID : 540 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 521 | ID : 540
Difficulté : ★★★☆☆

Soit (E,d) un espace métrique , I un ensemble non vide et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties *non vides* de E. Démontrer que :

$$(\star\star) \quad d(x, \bigcup_{i\in I} A_i) = \inf_{i\in I} d(x, A_i).$$

Solution

Soit (E,d) un espace métrique , I un ensemble non vide et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties *non vides* de E. Pour tout $x \in E$, on a :

$$(\star\star) \quad d(x, \bigcup_{i\in I} A_i) = \inf_{i\in I} d(x, A_i).$$

En effet, notons tout d'abord que $\inf\limits_{i\in I} d(x, A_i)$ existe car l'ensemble $\{d(x,A_i) / i \in I\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$ donc elle admet une borne inférieure. Pour simplifier notons $A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$. Pour tout $i \in I$, on a $A_i \subset A$, donc $d(x,A_i) \geq d(x,A)$, par suite

$$(\star) \quad d(x,A) \leq \inf_{i\in I} d(x, A_i).$$

Inversement si $a \in A$, il existe $j \in I$ tel que $a \in A_j$, donc $d(x,a) \geq d(a,A_j) \geq \inf\limits_{i\in I} d(x,A_i)$, ceci pour tout $a \in A$, donc

$$(\star') \quad \mathrm{d}(x,A) \geq \inf_{i\in I} d(x, A_i)$$

Par $(\star)$ et $(\star')$ on obtient $(\star\star)$.

EXERCICE 252 Mtrices stochstiques et convergence

Titre : Mtrices stochstiques et convergence
ID : 542 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 523 | ID : 542
Difficulté : ★★☆☆☆

p, q, r sont des nombres réelles strictement positifs tel que $p+q+r = 1$. On considère la matrice $M \in$

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Solution

non disopnible

EXERCICE 253 Un endomorphisme de matrices qui est une dérivation

Titre : Un endomorphisme de matrices qui est une dérivation
ID : 544 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 525 | ID : 544
Difficulté : ★★☆☆☆

On fixe $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et on considère $\Delta : M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA$.

1. Prouver que Δ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall (M,N) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2, \Delta^n(MN) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k(M)\Delta^{n-k}(N)$$

2. On suppose que $B = \Delta(H)$ commute avec A. Montrer :

$$\Delta^2(H) = 0 \text{ et } \Delta^{n+1}(H^n) = 0$$

Vérifier $\Delta^n(H^n) = n!B^n$.

3. Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que $\|B^n\|^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

4. En déduire que la matrice B est nilpotente.

Solution

1. Δ est évidemment linéaire de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dans lui-même. En exploitant

$$\Delta(BC) = ABC - BCA = (AB - BA)C + B(AC - CA) = \Delta(B)C + B\Delta(C)$$

on montre la relation

$$\Delta^n(MN) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k(M)\Delta^{n-k}(N)$$

en raisonnant par récurrence comme pour établir la formule de Leibniz.

2. $AB = BA$ donne directement $\Delta(B) = 0$ et donc $\Delta^2(H) = 0$. La relation $\Delta^{n+1}(H^n) = 0$ s'obtient alors en raisonnant par récurrence et en observant que les termes sommés sont nuls dans la relation

$$\Delta^{n+1}(H^n) = \Delta^{n+1}\left(HH^{n-1}\right) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \Delta^k(H)\Delta^{n+1-k}\left(H^{n-1}\right).$$

L'identité $\Delta^n(H^n) = n!B^n$ s'obtient aussi par récurrence et un calcul assez analogue.

3. Considérons une norme sous-multiplicative (par équivalence des normes en dimension finie, cela ne change rien au problème). On a

$$\|B^n\| = \frac{1}{n!}\left\|\Delta^n\left(H^n\right)\right\|.$$

L'application linéaire Δ étant continue, on peut introduire $k \geq 0$ vérifiant

$$\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \|\Delta(M)\| \leq k\|M\|$$

On a alors

$$\|B^n\| \leq \frac{1}{n!}k^n\|H^n\| \leq \frac{1}{n!}(k\|H\|)^n$$

puis

$$\|B^n\|^{1/n} \leq \frac{1}{(n!)^{1/n}}(k\|H\|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ car } n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

4. On peut plonger le problème dans le cadre complexe. Soit λ une valeur propre complexe de B et M une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ dont toutes les colonnes sont vecteurs propres de B associés à la valeur propre λ. On a $BM = \lambda M$ et donc $B^nM = \lambda^n M$ puis $\|B^nM\|^{1/n} = |\lambda|\|M\|^{1/n}$. Or

$$\|B^nM\|^{1/n} \leq \|B^n\|^{1/n}\|M\|^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et on peut donc conclure $\lambda = 0$. Puisque 0 est la seule valeur propre complexe de B, celle-ci est nilpotente (cf. théorème de Cayley-Hamilton).

EXERCICE 254 Fermeture d'une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Titre : Fermeture d'une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
ID : 546 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 527 | ID : 546
Difficulté : ★★★☆☆

Soit $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \operatorname{Sp}(A) \neq \emptyset\}$. Démontrer que $\mathcal{F}$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution

Munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme subordonnée $|||.|||$, c'est-à-dire, on fixe une norme $\|.\|$ de $\mathbb{R}^n$ et on pose

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |||M||| = \sup_{\substack{X\in\mathbb{R}^n \\ X\neq 0}} \frac{\|MX\|}{\|X\|}$$

et soit (A_k) une suite de matrices de $\mathcal{F}$ tel que $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = A$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Puisque $A_k \in F$, il existe $\lambda_k \in \operatorname{Sp}(A_k)$, soit donc $X_k \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé à λ_k tel que $\|X_k\| = 1$ donc $A_kX_k = \lambda_kX_k$, par suite

$$|\lambda_k| = \|\lambda_kX_k\| = \|AX_k\| \leq |||A|||\,\|X_k\| = |||A_k|||$$

et comme (A_k) est convergente on peut dire que la suite (A_k) est bornée, donc la suite (λ_k) est bornée. Par le théorème de Stowne-Weierstrass il existe une sous-suite $\lambda_{\varphi(k)}$ convergente $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_{\varphi(k)} = \lambda \in \mathbb{R}$.
Comme $\lambda_k \in \operatorname{Sp}(A_k)$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \det(A_k - \lambda_kI_n) = 0,$$

donc on a aussi

$$\forall k \in \mathbb{N}, \det(A_{\varphi(k)} - \lambda_{\varphi(k)}I_n) = 0$$

et par passage à la limite et par continuité du determinant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\det(A - \lambda I_n) = 0,$$

donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $A \in \mathcal{F}$, donc $\mathcal{F}$ est fermé.

EXERCICE 255 Raisonnement par compacité

Titre : Raisonnement par compacité
ID : 550 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 531 | ID : 550
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E pour laquelle il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait $\|x_m - x_n\| \geq \varepsilon$ pour tous entiers naturels m, n distincts.

1. Montrer qu'une telle suite n'admet aucune valeur adhérence.
   Soit K une partie compacte d'un espace normé E.
2. Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, il existe un entier $p > 0$ et $x_1, \ldots, x_p$ éléments de K tels que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{p} B(x_k, \alpha)$$

   Pour I un ensemble d'indexation quelconque, on considère une famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ de parties ouvertes de E telle que [1]

$$K \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i.$$

3. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in K$, il existe un indice $i \in I$ pour lequel la boule $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert Ω_i.
4. En déduire qu'll existe une sous-famille finie $\left(\Omega_{i_1}, \ldots, \Omega_{i_p}\right)$ de la famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ telle que [2]

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}$$

Solution

1. S'il existe $\left(x_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite a alors, pour k assez grand, $\left\|x_{\varphi(k)} - a\right\| < \varepsilon/2$ et donc

$$\left\|x_{\varphi(k+1)} - x_{\varphi(k)}\right\| \leq \left\|x_{\varphi(k+1)} - a\right\| + \left\|a - x_{\varphi(k)}\right\| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

   Cela contredit l'hypothèse vérifiée par la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: celle-ci n'admet donc pas de valeur d'adhérence.
2. Méthode : On raisonne par l'absurde en employant l'hypothèse absurde pour construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments du compact K vérifiant $\|x_m - x_n\| \geq \alpha$ pour tous m, n distincts. Par l'absurde, supposons la propriété énoncée fausse, c'est-à-dire supposons qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que K ne puisse pas être inclus dans une réunion finie de boules ouvertes de rayons α. On va construire par récurrence une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ satisfaisant à la propriété de la question précédente. On choisit x_1 arbitrairement dans K. Une fois $x_1, \ldots, x_n$ déterminés, l'hypothèse absurde assure que K n'est pas inclus dans la réunion des $B(x_i, \alpha)$. On peut alors choisir x_{n+1} appartenant à K en dehors des boules précédentes, c'est-à-dire vérifiant $\|x_{n+1} - x_i\| \geq \varepsilon$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de K telle que $\|x_m - x_n\| \geq \varepsilon$

pour tous $m, n \geq 1$ distincts. On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments du compact K qui ne possède pas de valeurs d'adhérence : c'est absurde.

3. Méthode : On raisonne à nouveau par l'absurde pour construire une suite d'éléments de K n'ayant aucune suite extraite convergente.
   Par l'absurde, supposons la propriété énoncée fausse : pour tout réel $\alpha > 0$, il existe $x \in K$ tel que la boule $B(x, \alpha)$ n'est incluse dans aucun Ω_i. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha = 1/n > 0$, il existe $x_n \in K$ tel que la boule de centre x_n et de rayon $1/n$ n'est incluse dans aucun Ω_i. La partie K étant compacte, on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente $\left(x_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de limite $a \in K$. L'élément a appartient à la réunion de Ω_i et il existe donc un indice $i \in I$ tel que $a \in \Omega_i$. La partie Ω_i étant ouverte, il existe $\alpha > 0$ tel que $B(a, \alpha) \subset \Omega_i$. Cependant, pour k assez grand, $\left\|x_{\varphi(k)} - a\right\| \leq \alpha/2$ et $1/\varphi(k) \leq \alpha/2$ de sorte que

$$B\left(x_{\varphi(k)}, 1/\varphi(k)\right) \subset B\left(x_{\varphi(k)}, \alpha/2\right) \subset B(a, \alpha) \subset \Omega_i.$$

   C'est absurde puisque cela contredit le principe de construction de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Pour le réel $\alpha > 0$ introduit à la question précédente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_p$ éléments de K tels que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{p} B\left(x_k, \alpha\right).$$

   Pour chaque $k = 1, \ldots, p$, il existe un indice $i_k \in I$ tels que $B\left(x_k, \alpha\right) \subset \Omega_{i_k}$ et alors

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}$$

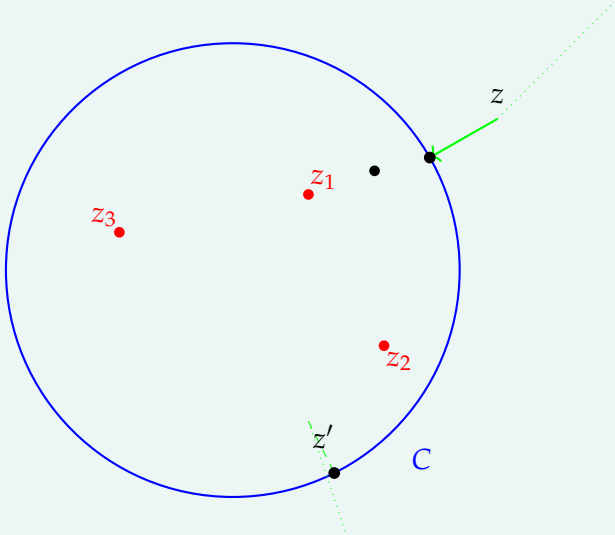
EXERCICE 256 GL_$n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs

Titre : GL_$n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs
ID : 589 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 570 | ID : 589
Difficulté : ★☆☆☆☆

1. Montrer que $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de complexes est une partie connexe par arcs.
2. Application : Établir que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est une partie connexe par arcs.
   On pourra considérer l'application $z \mapsto \det((1-z)A + zB)$ pour $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Solution

1. Notons $z_1, \ldots, z_p$ les nombres complexes à exclure et étudions la connexité par arcs de $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{z_1, \ldots, z_p\}$. Pour $R = \max\{|z_1|, \ldots, |z_p|\} + 1$, le cercle $C = \{z \in \mathbb{C} || z| = R\}$ est une partie connexe par arcs incluse dans Ω. Montrons que tout $z \in \Omega$ peut être relié dans Ω à un point de C. Soit $z \in \Omega$. Cas : $|z| \geq R$. On écrit $z = |z|e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Le segment d'extrémités z et $Re^{i\theta}$ est inclus dans Ω et rejoint z à un point de C. Cas : $|z| < R$. Toutes les droites passant par z coupent C en deux points. Ces droites sont en nombre infini et il n'y a qu'un nombre fini de celles-ci qui passent par l'un des $z_1, \ldots, z_p$. Il existe donc une droite passant par z et coupant C tout en restant incluse dans Ω. Il est donc possible de relier z à C par un segment inclus dans Ω. Quitte à transiter par un arc du cercle C, il est possible de relier entre eux tout en restant dans Ω n'importe quels points de Ω : Ω est une partie connexe par arcs.



Il existe d'autres constructions géométriques pouvant résoudre le problème : pour z, z' distincts des $z_1, \dots, z_p$, on peut construire deux droites non parallèles, l'une passant par z et l'autre passant par z' et aucune ne passant par $z_1, \dots, z_p$. Ces deux droites se coupent et cela permet de définir un chemin convenable allant de z à z'.

2. Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. L'application $z \mapsto \det((1-z)A + zB)$ est un polynôme en z dont 0 et 1 ne sont pas racines. Ce polynôme possède un nombre fini de racines $z_1, \dots, z_p$. Puisque $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_p\}$ est connexe par arcs et contient 0 et 1 , il existe une application continue $\gamma : [0;1] \to \mathbb{C}$ vérifiant $\gamma(0) = 0, \gamma(1) = 1$ et $\gamma(t) \notin \{z_1, \dots, z_p\}$ pour tout $t \in [0;1]$. Considérons alors l'application $\varphi : [0;1] \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ donnée par

$$\varphi(t) = (1 - \gamma(t))A + \gamma(t)B$$

Celle-ci est continue, vérifie $\varphi(0) = A, \varphi(1) = B$ et, par construction, prend ses valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ car $\det(\varphi(t)) \neq 0$ pour tout $t \in [0;1]$.

EXERCICE 257 Topologie de certain sous-espaces de suites

Titre : Topologie de certain sous-espaces de suites
ID : 673 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 654 | ID : 673
Difficulté : ★★☆☆☆

On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites réelles bornées de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :

1. $A = \{$ suites croissantes $\}$,
2. $B = \{$ suites convergeant vers $0\}$,
3. $C = \{$ suites convergentes $\}$,
4. $D = \{$ suites admettant 0 pour valeur d'adhérence $\}$,
5. $E = \{$ suites périodiques $\}$.

Solution

1. A est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de A convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|.\|_\infty$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}, u_n^p \leq u_{n+1}^p$ qui donne à la limite $u_n \leq u_{n+1}$ et donc $u \in A$.

Explication : Si (U^p) converge ver U alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} U_n^p = U_n$, en effet , pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|U_n^p - U_n| \leq \|U^p - U\|_\infty \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. B est fermé car si $u^p = \left(u_n^p\right)$ est une suite d'éléments de B convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|u - u^p\|_\infty \leq \varepsilon/2$ et puisque $u_n^p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \left|u_n^p\right| \leq \varepsilon/2$$

et donc

$$|u_n| \leq \left|u_n - u_n^p\right| + \left|u_n^p\right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi $u \to 0$ et donc $u \in B$.

3. C est fermé. En effet, si $u^p = \left(u_n^p\right)$ est une suite d'éément de C convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors en notant ℓ^p la limite de u^p, la suite (ℓ^p) est une suite de Cauchy puisque $|\ell^p - \ell^q| \leq \|u^p - u^q\|_\infty$. Posons ℓ la limite de la suite (ℓ^p) et considérons $v^p = u^p - \ell^p . v^p \in B$ et $v^p \to u - \ell$ donc $u - \ell \in B$ et $u \in C$.

4. D est fermé car si $u^p = \left(u_n^p\right)$ est une suite d'éléments de D convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|.\|_\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|u - u^p\|_\infty \leq \varepsilon/2$ et puisque 0 est valeur d'adhérence de u^p, il existe une infinité de n tels que $\left|u_n^p\right| \leq \varepsilon/2$ et donc tels que

$$|u_n| \leq \left|u_n - u_n^p\right| + \left|u_n^p\right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi 0 est valeur d'adhérence de u et donc $u \in D$.

5. E n'est pas fermé. Notons δ^p, la suite déterminée par $\delta_n^p = 1$ si $p \mid n$ et 0 sinon. La suite δ^p est périodique et toute combinaison linéaire de suites δ^p l'est encore. Posons alors

$$u^p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} \delta^k$$

qui est élément de E. La suite u^p converge car

$$\left\|u^{p+q} - u^p\right\|_\infty \leq \sum_{k=p+1}^{p+q} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^p} \to 0$$

et la limite u de cette suite n'est pas périodique car

$$u_0 = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} = 1$$

et que $u_n < 1$ pour tout n puisque pour que $u_n = 1$ il faut $k \mid n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 258 Jauge de Minkowvski d'un ouvert convexe symétrique

Titre : Jauge de Minkowvski d'un ouvert convexe symétrique
ID : 679 **Durée :** —
Difficulté : ★★☆☆☆
Niveau : L2 | N° : 660 | ID : 679

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé réel et on considère une partie $\mathbf{O}$ de E tel que $\mathbf{O}$ est convexe, ouvert bornée et symétrique ($\forall x \in E, x \in E \Rightarrow -x \in E$.) et $0 \in \mathbf{O}$. Pour tout $x \in E$, on pose :

$$N(x) = \inf\left\{\lambda > 0 / \frac{x}{\lambda} \in \mathbf{O}\right\}.$$

Prouver que N est une norme sur E.

Solution

• Avant tout c'est bien définie car, comme $\mathbf{O}$ est ouvert et $0 \in \mathbf{O}$, il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset E$, donc si $x \in E$ et $x \neq 0$, en notant $\lambda = \frac{2\|x\|}{r}$, on a $\frac{x}{\lambda} \in \mathbf{O}$ car $\|\frac{x}{\lambda\|} = \frac{r}{2} < r$.

• **Inégalité triangulaire :** Soit $x, y \in E$ et $\lambda, \mu > 0$, tel que $\begin{cases} \frac{x}{\lambda} \in \mathbf{O} \\ \\ \frac{y}{\mu} \in \mathbf{O} \end{cases}$. Comme $\mathbf{O}$ est convexe, on a $[\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\mu}] \subset \mathbf{O}$. Il en découle que pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$(1-t)\frac{x}{\lambda} + t\frac{y}{\mu} \in \mathbf{O}.$$

En particulier, pour

$$t = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \text{ ,donc } 1-t = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

on a $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{y}{\mu} \in \mathbf{O}$, donc $\frac{x+y}{\lambda+\mu} \in \mathbf{O}$.
• Si $x+y=0$ alors $N(x+y) = 0 \leq N(x)+N(y)$.
• Si $x+y \neq 0$, on a $N(x+y) \leq \lambda+\mu$
On suppose désormais que $x+y \neq 0$, et on peut dire qu'on vient de prouver que pour tous $\lambda, \mu > 0$, si $\frac{x}{\lambda} \in \mathbf{O}$ et $\frac{y}{\mu} \in \mathbf{O}$ alors $N(x+y) \leq \lambda+\mu$. Soit ε un nombre réel tel que $\varepsilon > 0$, par définition de la borne inférieure on a :

$$\exists \lambda > 0, \exists \mu > 0, \begin{cases} N(x) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \lambda \\ N(y) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \mu \end{cases}.$$

Il en découle que $N(x)+N(y)+\varepsilon \geq \lambda+\mu$. On a donc prouvé que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad N(x)+N(y)+\varepsilon \geq N(x+y).$$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$, il vient :

$$N(x+y) \leq N(x)+N(y).$$

• **Homogénéité :** Soit $x \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Remarquons tout d'abord que si $\alpha = 0$ alors $N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$, c'est pour cela qu'on suppose désormais que $\alpha \neq 0$. Soit $\lambda > 0$ tel que $\frac{x}{\lambda} \in \mathbf{O}$. Il en découle que $\frac{\alpha x}{\alpha x} \in \mathbf{O}$ et par symétrie $-\frac{\alpha x}{\alpha \lambda} \in \mathbf{O}$ donc $N(\alpha x) \leq |\alpha|\lambda$ donc pour tout $\lambda > 0$ tel que $\frac{x}{\lambda} \in \mathbf{O}$, on a $\frac{N(\alpha x)}{|\alpha|} \leq \lambda$. Il en découle que $\frac{N(\alpha x)}{|\alpha|} \leq N(x)$ et que finalement on a prouvé :

$$(\star) \quad \forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, N(\alpha x) \leq |\alpha| N(x)$$

Si pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ on prend $x' = \lambda x$ et $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$, en appliquant $(\star)$ pour x' et λ', on a $\mathbb{N}(\alpha' x') \leq |\alpha'| N(x')$, donc $N(x) \leq \frac{1}{|\alpha|} N(\alpha x)$, donc

$$(\star') \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\alpha x) \geq |\alpha| N(x).$$

Combinant $(\star)$ et $(\star)'$, on a l'homogénéité.
• **Séparation :** Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$. Soit $\lambda > 0$ tel que $\frac{x}{\lambda} \in \mathbf{O}$. Puisque $\mathbf{O}$ est bornée, il existe $M > 0$, tel que $\forall y \in \mathbf{O}, \|y\| \leq M$, on a donc $\|\frac{x}{\lambda}\| \leq M$, donc $\lambda \geq \frac{\|x\|}{M}$. On a donc démontré que

$$\forall \lambda > 0, \frac{x}{\lambda} \in \mathbf{O} \Rightarrow \lambda \geq \frac{\|x\|}{M},$$

donc par passage à la borne inférieure, on a $N(x) \geq \frac{\|x\|}{M} > 0$, donc $N(x) > 0$, donc $N(x) \neq 0$. En conclusion : N est une norme sur E.

Chapitre 005 — Espaces préhilbertiens réels (L2)

EXERCICE 259 Groupe orthogonale, des questions

Titre : Groupe orthogonale, des questions
ID : 18 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 6 | ID : 18
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit E un espace euclidien de dimension n et $f \in \mathbf{O}(E)$.

1. On suppose que n est impair et $f \in \mathbf{O}^+(E)$. Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}(f)$. (*Indication :* Comparer $\det(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\det(f^{-1} - \mathrm{Id}_E)$.)
2. Que peut-on dire quand n est pair ?
3. Soit n quelconque et $f \in \mathbf{O}^-(E)$. Montrer que $-1 \in \mathrm{Sp}(f)$

Solution

1. Puisque $f \in \mathbf{O}(E)$, on a $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$. Si $1 \notin \mathrm{Sp}(f)$ alors soit $\mathrm{Sp}(f) = \emptyset$, auquel cas il existe une base orthonormée $\mathscr{E}$ de E tel que la matrice de f relativement à $\mathscr{E}$ est de la forme $M = \mathrm{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_s})$ où $s \in \mathbb{N}^*$ et $\theta_k \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, pour tout $k \in [\![1, s]\!]$, mais ce cas n'est pas possible car alors M de taille pair alors que $\dim(E)$ est impaire. Soit $\mathrm{Sp}(f) = \{-1\}$, auquel cas M serait de la forme $\mathrm{diag}(-I_q, R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_s})$ on a alors $\dim(E) = q + 2s$ et comme $\dim(E)$ est impaire on a q est impair et $\det(f) = -1$, chose fausse. Il en découle que 1 est une valeur propre de f.
2. Si n est pair soit 1 et -1 sont valeurs propres de f avec -1 de multiplicité paire, soit -1 est la seule valeur propre toujours avec une multiplilicité paire soit 1 est la seule valeur propre avec une multiplicité paire, soit f n'a pas de valeur propre.
3. Soit n quelconque et $f \in \mathbf{O}^-(E)$ si p et q sont les multiplicités respectives de 1 et -1, on a $\det(f) = (-1)^q = -1$, donc $q \neq 0$ donc $-1 \in \mathrm{Sp}(f)$.

EXERCICE 260 Adjoint d'un endomorphisme de matrices

Titre : Adjoint d'un endomorphisme de matrices
ID : 28 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 15 | ID : 28
Difficulté : ★★☆☆☆

1. Montrer que l'application $\Phi : (A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f : X \mapsto AX - XB$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et trouver son adjoint f^*

Solution

1. Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\Phi(A, B) = \mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}(({}^t({}^tAB)) = \mathrm{tr}({}^tBA) = \Phi(B, A)$, donc Φ est symétrique, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A_1, A_2, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\Phi(A_1 + \lambda A_2, B) = \mathrm{tr}({}^t(A_1 + \lambda A_2)B) = \mathrm{tr}(({}^tA_1 + \lambda {}^tA_2)B) = \mathrm{tr}({}^tA_1B) + \lambda\,\mathrm{tr}({}^tA_2B) = \Phi(A_1, B) + \lambda\Phi(A_2, B)$, donc Φ est bilinéaire à gauche et comme elle est symétrique elle est bilinéaire. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors :
$$\Phi(A, A) = \mathrm{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} [{}^tAA]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [{}^tA]_{i,j}[A]_{j,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{j,i}^2,$$
donc $\Phi(A, A) \geq 0$ et $\Phi(A, A) = 0 \iff \forall i, j \in [\![1, n]\!], [A]_{i,j} = 0 \iff A = 0$. Il en découle que Φ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive donc un produit scalaire.

2. Démontrons que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et determinons son adjoint :
• Si $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$f(X+\lambda Y) = A(X+\lambda Y) - (X+\lambda Y)B = (AX - XB) + \lambda(AY - YB) = f(X) + \lambda f(Y),$$

donc f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
• Soit $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\Phi(X, f(Y)) &= \Phi(X, AY - YB) \\
&= \text{tr}({}^tX(AY - YB)) \\
&= \text{tr}({}^tXAY - {}^tXYB) \\
&= \text{tr}({}^t({}^tXAY - {}^tXYB)) \\
&= \text{tr}({}^tY({}^tAX - X{}^tB)) \\
&= \Phi(Y, g(X))
\end{aligned}$$

où $g(X) = {}^tAX - XtB$, comme g est une application linéaire qui vérifie

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \Phi(X, f(Y)) = \Phi(g(X), Y),$$

on a l'adjoint de f est $f^\star = g$.

EXERCICE 261 Exemple de diagonalisation d'une matrice

Titre : Exemple de diagonalisation d'une matrice
ID : 31 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 18 | ID : 31
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
2. Trouver une matrice orthogonale $P \in \mathbf{O}_3(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Solution

1. Comme A réelle symétrique, elle est diagonalisable. Elle est même orthogonalement diagonalisable.
2. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ 1 & X-1 & 1 \\ 1 & 1 & X-1 \end{vmatrix}$. Par l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ et après facorisation, il vient $\chi_A = \begin{vmatrix} X+1 & 1 & 1 \\ X+1 & X-1 & 1 \\ X+1 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & X-1 & 1 \\ 1 & 1 & X-1 \end{vmatrix}$. Par les opérations élémentaires $L_k \leftarrow L_k - L_1$, pour $k \in \{2,3\}$, il vient : $\chi_A = (X+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X+1)(X-2)^2$. Il en découle que $\text{Sp}(A) = \{-1, 2\}$.
• Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est $vect(e_1 + e_2 + e_3)$ car si $V_1 = e_1 + e_2 + e_3$, on a vu que $AV_1 = -V_1$.
• Soit $X = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. On a $AX = 2X$ si et seulement si $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ si et seulement

si $X \in (\mathbb{R}V_1)^\perp$, donc $E_2(A)$ est le plan $(\mathbb{R}V_1)^\perp$ l'orthogonal de la droite engendrée par V_1. pour $V_2 = (1,-1,0)$ on a $V_2 \in E_2(A)$ et $V_1 \perp V_2$. Prenons $V_3 = V_1 \wedge V_2 = {}^t(1,1,-2)$. Il en découle que (V_1, V_2, V_3) est une base orthogonale de diagonalisation. Il suffit de normaliser ses vecteurs on obtient $v_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}{}^t(1,1,1)$, $v_2 = \frac{V_2}{\|V_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t(1,-1,0)$ et $v_3 = \frac{V_3}{\|V_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}{}^t(1,1,-2)$.

• La matrice de passage de $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ à $\mathscr{V} = (v_1 v_2, v_3)$ est

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

et comme $P \in \mathbf{O}_3(\mathbb{R})$, on a

$$P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

et on a bien $A = P\Delta P^{-1}$ où $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

EXERCICE 262 — u o v symétrique si et seulment si u et v commutent

Titre : u o v symétrique si et seulment si u et v commutent
ID : 45 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 32 | ID : 45
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit E un espace vectoriel euclidien et u et v deux endomorphismes symétriques de E.

1. Démontrer que $\ker(u) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(u) = E$.
2. Démontrer que $u \circ v$ est symétrique si et seulement si $u \circ v = v \circ u$.

Solution

1. On va d'abord démontrer que ces deux sous-espaces sont orthogonaux, donc en somme directe orthogonale. Soit $x \in \ker(u)$ et soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Alors il existe $y \in E$ tel que $y = u(z)$. On en déduit alors, en utilisant la symétrie de u,

$$\langle x, y\rangle = \langle x, u(z)\rangle = \langle u(x), z\rangle = 0.$$

En utilisant le théorème du rang, on conclut alors que ces deux sous-espaces sont supplémentaires.

2. Soient $x, y \in E$. En utilisant successivement le fait que u et v sont symétriques, on en déduit que

$$\begin{aligned} \langle u \circ v(x), y\rangle &= \langle v(x), u(y)\rangle \\ &= \langle x, v \circ u(y)\rangle. \end{aligned}$$

On en déduit que si $u \circ v = v \circ u$, alors $u \circ v$ est symétrique. Réciproquement, si $u \circ v$ est symétrique, alors le calcul précédent montre que, pour tous $x, y \in E$, on a

$$\langle x, v \circ u(y)\rangle = \langle x, u \circ v(y)\rangle \Longrightarrow \langle x, u \circ v(y) - v \circ u(y)\rangle = 0.$$

Ainsi, le vecteur $u \circ v(y) - v \circ u(y)$ est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace : il est donc nul, et comme ceci est vrai pour tout $y \in E$, on a $u \circ v = v \circ u$.

EXERCICE 263 Norme d'un endomorphisme symétrique et rayon spectral

Titre : Norme d'un endomorphisme symétrique et rayon spectral
ID : 48 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 34 | ID : 48
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit E un espace vectoriel euclidien. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $\rho(f) = \max\{|\lambda|; \quad \lambda \text{ valeur propre de } f\}$. On pose également $\|f\| = \sup\{\|f(x)\|; \|x\| \leq 1\}$. Démontrer que si f est symétrique, alors $\|f\| = \rho(f)$.

Solution

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres pour f. Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées. Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$, et donc

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 x_i^2 \leq \rho(f)^2 \|x\|^2,$$

ce qui prouve que $\|f\| \leq \rho(f)$. D'autre part, il existe k tel que $\rho(f) = |\lambda_k|$. On a alors $\|f(e_k)\| = |\lambda_k| = \rho(f)$, et comme $\|e_k\| = 1$, on a $\rho(f) \leq \|f\|$.

EXERCICE 264 Matrices symétriques positives, définies positives

Titre : Matrices symétriques positives, définies positives
ID : 212 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 198 | ID : 212
Difficulté : ★★☆☆☆

On dit qu'une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive si S est symétrique et vérifie la condition :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0 \Rightarrow {}^tXSX > 0$$

On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles matrices. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée réelle. Pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose :

$$\langle X, Y \rangle_S = \langle SX, Y \rangle$$

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que :

$$S \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$$

2. Démontrer que $\langle , \rangle_S$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si S est symétrique définie positive.
3. Soit φ un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une et une seule matrice $S \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\varphi = \langle , \rangle_S$.

Solution

1. Supposons que S est définie positive. Soit λ une valeur propre de S, alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \neq 0$ et $SX = \lambda X$ donc ${}^tXSX = \lambda {}^tXX = \lambda \langle X, X \rangle$ et comme $X \neq 0$ on a $\langle X, X \rangle > 0$ et ${}^tXSX > 0$ donc $\lambda > 0$.
   Réciproquement si $S \in \mathcal{S}_n(R)$ tel que S est symétrique de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ strictement positives, soit $(V_1, \ldots, V_s)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres associés aux valeurs propres respectives $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de S. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \neq 0$ et posons :

$$X = \sum_{k=1}^n x_k V_k$$

alors

$$SX = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k V_k$$

et par suite

$${}^tXSX = \langle SX, X\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2$$

Comme $X \neq 0$, il existe au moins $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_j \neq 0$ et comme $\lambda_j > 0$, on a $\lambda_j x_j^2 > 0$ et par suite ${}^tXSX > 0$.

2. On remarque que pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\langle X, Y\rangle_S = \langle SX, Y\rangle$ où $\langle , \rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que, pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$. Il en découle que l'application $\langle , \rangle_S$ est bilinéaire. Elle est symétrique car si $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors $\langle X, Y\rangle_S = \langle SX, Y\rangle = \mathrm{tr}({}^t(SX)Y) = {}^tS{}^tXSY$ et comme S est symétrique, $\langle X, Y\rangle_S = {}^tXSY = \mathrm{tr}({}^tBAS) = \langle X, AY\rangle = \langle AY, X\rangle = \langle Y, X\rangle_S$. Finalement, puisque la matrice S est symétrique définie positive, alors tout vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : $\langle X, X\rangle_S = \langle SX, X\rangle \geq 0$ avec ègalité si et seulement si $X = 0$. Il en découle que $\langle , \rangle_S$ est une forme bilinéaire symétrique définie et positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. Soit φ un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathscr{E} = (E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si $S = (s_{i,j})$ existe alors pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a $\varphi(E_i, E_j) = \langle SE_i, E_j\rangle = s_{i,j}$, ce qui prouve l'unicité de S. Réciproquement, si on pose $s_{i,j} = \varphi(E_i, E_j)$, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a la matrice S est symétrique et si X est un vecteur non nul alors $\langle SX, X\rangle = \varphi(X, X)$, et comme φ est un produit scalaire on a $\langle SX, X\rangle \geq 0$, avec égalité si et seulement si $X = 0$, ce qui prouve que S est symétrique définie positive.

EXERCICE 265 Matrice tel que $AA^\top A = I_n$

Titre : Matrice tel que $AA^\top A = I_n$ **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 213 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 199 | ID : 213

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A{}^tAA = I_n$. Démontrer que $A = I_n$.

Solution

On a $A = ({}^tAA)^{-1}$ donc A est symétrique car ${}^tAA$ est symétrique et l'inverse d'une matrice symétrique est symétrique. Donc ${}^tA = A$ et l'égalité $(\star)$ devient $A^3 = I_n$. La matrice A étant réelle symétrique, elle est diagonalisable, donc $A = P\Delta P^{-1}$ avec $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonale, donc $\lambda_k^3 = 1$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et par suite $A = I_n$.

EXERCICE 266 Matrice de trace nulle orthogonalement semblable à une matrice à diagonale null

Titre : Matrice de trace nulle orthogonalement semblable à une matrice à diagonale null **Difficulté :** ★★☆☆☆
ID : 214 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 200 | ID : 214

E est un espace euclidien et u un endomorphisme de E.

1. Démontrer que si x et y sont deux vecteurs propres de u associés aux valeurs propres λ, μ tel que $\lambda\mu \leq 0$ alors il existe un vecteur $z \in E$ tel que $z \neq 0$ et $u(z) \perp z$.
2. Démontrer que si $\mathrm{tr}(u) = 0$ alors il existe aux moins un vecteur $z \in E$ tel que $\|z\| = 1$ et $z \perp u(z)$.

3. Démontrer que $\mathrm{tr}(u) = 0$ si et seulement si il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E tel que les termes diagonaux de la matrice de u relativement à $\mathcal{B}$ sont nuls.
4. Soit :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$
Démontrer qu'il existe $\Omega \in \mathbf{SO}(3)$ tel que $A = \Omega\Delta\,{}^t\Omega$ avec Δ une matrice dont tous les termes de la diagonale sont égaux à 1.

Solution

1. Si $\lambda\mu = 0$ alors $z = x$ ou $z = y$ convient. Supposons donc que $\lambda < 0$ et $\mu > 0$ et soit $g : E \to E; v \mapsto g(v) = \langle v, u(v)\rangle$, alors g est continue car elle est polynomiale en les coordonnées de v. Comme le segment $[x, y]$ est connexe par arcs car convexe son image par v est un intervalle de $\mathbb{R}$. On a $g(x) = \lambda\|x\|^2$ et $g(y) = \mu\|y\|^2$, donc $g(x) < 0$ et $g(y) > 0$, donc il existe $z \in [x, y]$ tel que $g(z) = 0$. Forcément $z \neq 0$, car sinon la famille (x, y) serait liée et $y = \alpha x$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\alpha \neq 0$ et $u(x) = \alpha u(y)$ donne $\lambda x = \alpha\mu y = \alpha^2\mu x$ donc $\lambda = \lambda^2\mu$, ce qui contredit $\lambda\mu < 0$, donc $z \neq O$ et $z \in [x, y]$ et $z \perp u(z)$.
2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E alors $\mathrm{tr}(u) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, u(e_k)\rangle = 0$. Si il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\langle e_k, u(e_k)\rangle = 0$ c'est terminé, sinon comme la somme des réels non nuls $\langle e_k, u(e_k)\rangle$ est nulle il existe au moins $i, j \in [\![1, n]\!]$ tel que $\langle e_i, u(e_i)\rangle < 0$ et $\langle e_j, u(e_j)\rangle > 0$. Comme (e_i, e_j) est libre on a $0 \notin [e_i, e_j]$. L'application $h : [e_i, e_j] \to \mathbb{R}, v \mapsto h(v) = \frac{\langle v, u(v)\rangle}{\|v\|^2}$ est continue donc l'image de $[e_i, e_j]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et comme $h(e_i) < 0$ et $h(e_j) > 0$ il existe $w \in [e_i, e_j]$ tel que $h(w) = 0$ en posant $z = \frac{1}{\|w\|}w$, on a $\|z\| = 1$ et $\langle z, u(z)\rangle = 0$ donc $z \perp u(z)$.
3. Un sens est immédiat : Si u admet une matrice à diagonale nulle dans une base orthonormée sa trace est nulle. Pour la réciproque on va raisonner par récurrence sur la dimension de E. Pour $n = 1$ c'est clair car l'endomorphisme nul est le seul qui a la trace nulle. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété ci-dessus est vraie pour tout espace euclidien de dimension n et soit E un espace euclidien de dimension $n + 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{tr}(u) = 0$. D'près la question précédente il existe un vecteur e_1 de norme 1 tel que $e_1 \perp u(e_1)$. Complétons en une base orthonormée $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ alors la matrice de u relativement à $\mathcal{E}$ est de la forme :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & B \end{pmatrix}, \text{ avec } B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$
Soit v l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice B dans $\mathbb{R}^n$ muni son produits scalaire canonique. On a $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$ donc $\mathrm{tr}(v) = \mathrm{tr}(B) = 0$. Par hypothèse de récurrence il existe une matrice orthogonale $U \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $UBU^{\perp} = B'$ avec B' à diagonale nulle. Soit :
$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$$
alors $A' = V^{\top}AV = \begin{pmatrix} 0 & LUU^{\top} \\ C & B' \end{pmatrix}$ est une matrice à diagonale nulle. Si $\mathcal{C}$ est la base de E tel que V est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{C}$ la matrice de u relativement à $\mathcal{C}$ est A' qui est à diagonale nulle.
4. On munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire canonique, à savoir, pour tout
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$
on pose
$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

En particulier, la base canonique $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),$$

et, notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, donc $\mathrm{mat}_{\mathscr{E}}(u) = A$. Notons $\tilde{u} = u - \mathrm{Id}$, alors la matrice de $\tilde{u}$ relativement à $\mathscr{E}$ est

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donc $\mathrm{tr}(\tilde{u}) = 0$, donc d'après la question 2), il existe $\mathscr{E}'$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{E}'}(\tilde{u}) = D$ avec la diagonale de D est nulle, donc $\mathrm{mat}_{\mathscr{E}'}(u) = D + I_3 = \Delta$ à diagonale avec des 1 seulement. Comme $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ sont des bases orthonormées, la matrice U de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$ est une matrice orthogonale et on a $A = U\Delta U^{\perp}$. Si $\det(U) = 1$ alors en prenant $\Omega = U$ on a $\Omega \in \mathbf{SO}(3)$ et $A = \Omega\Delta\Omega^{\perp}$; et si $\det(\Omega) = -1$, on pose $\Omega = -U$, donc $\Omega \in \mathbf{SO}(3)$ et on a toujours la relation $A = \Omega\Delta\Omega^{\perp}$.

Une autre méthode proposée par l'élève de la promotion 2023-2024 est de considérer $u + u^*$ autoadjoint donc diagonalisable, donc il existe $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ une BON tel que $\mathrm{mat}_{\Omega}(u) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Cherchons un vecteur $e = \sum_{k=1}^{n} x_k \omega_k$ tel que que $\langle e, (u + u^*)(e)\rangle = 0$, cela donne $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$ et pour cela il suffit de prendre $e = \sum_{k=1}^{n} \omega_k$ puisque $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \mathrm{tr}(u + u^*) = 0$, or $\langle e, (u + u^*)(e)\rangle = 2\langle e, u(e)\rangle$, donc $\langle e, u(e)\rangle = 0$.

EXERCICE 267 Orthogonalité par une inégalité

Titre : Orthogonalité par une inégalité
ID : 215 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 201 | ID : 215
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $x, y \in E$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $x \perp y$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|x + \lambda y\| \geq \|x\|$

Solution

Si $\langle x, y\rangle = 0$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 = \|x\|^2 + \lambda^2\|y\|^2 \geq \|x\|^2$, donc $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$
Réciproquement, si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ alors en élevant au carré on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} P(\lambda) \geq 0$$

où P est le polynôme $P(X) = \|y\|^2 X^2 + 2\langle x, y\rangle X$ qui est de degré 2 si $y \neq 0$, auquel cas son discriminant est négatif ou nul donc $\langle x, y\rangle = 0$ et si $y = 0$ on a clairement $\langle x, y\rangle = 0$.

EXERCICE 268 Un produit scalaire dans $\mathbb{R}[X]$

Titre : Un produit scalaire dans $\mathbb{R}[X]$ **Difficulté :**
ID : 216 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 202 | ID : 216

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Etablir l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes (P_n) formée de polynômes deux à deux orthogonaux avec chaque P_n de degré n et de coefficient dominant 1.
b) Etudier la parité des polynômes P_n.
c) Prouver que pour chaque $n \geqslant 1$, le polynôme $P_{n+1} - XP_n$ est élément de l'orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
d) En déduire alors qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$P_{n+1} = XP_n + \lambda_n P_{n-1}$$

Solution

(a) Par récurrence sur $n \geq 0$, établissons l'existence et l'unicité de la sous-famille $(P_k)_{0<k<n}$ telle que voulue. Cas : $n = 0$. Le polynôme P_0 vaut 1 . Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 0$. Les polynômes $P_0, \ldots, P_n$ sont alors déterminés de façon unique par l'hypothèse de récurrence et il reste seulement à former P_{n+1}. Celui-ci peut s'écrire $P_{n+1} = X^{n+1} + Q(X)$ avec $Q(X) \in \mathbb{R}_n[X]$. Le polynôme P_{n+1} doit réaliser $\langle P_{n+1}, P_k\rangle = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, donc Q doit vérifier

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \langle Q(X), P_k\rangle = -\left\langle X^{n+1}, P_k\right\rangle$$

Ces relations détermine entièrement le polynôme Q puisque $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$Q = -\sum_{k=0}^{n} \frac{\left\langle X^{n+1}, P_k\right\rangle}{\|P_k\|^2} P_k$$

Le polynôme P_{n+1} existe donc et est unique. Récurrence établie.

(b) La famille $((-1)^n P_n(-X))$ vérifie les mêmes conditions que celles ayant défini la suite (P_n). On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$$

(c) Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ On peut écrire $Q = \sum_{k=0}^{n-2} a_k P_k$ et donc

$$\langle P_{n+1}, Q\rangle = 0$$

On peut aussi écrire $XQ = \sum_{k=0}^{n-1} a'_k P_k$ et donc

$$\langle XP_n, Q\rangle = \langle P_n, XQ\rangle = 0$$

On en déduit

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X], \langle P_{n+1} - XP_n, Q\rangle = 0$$

(d) Par simplification des termes de plus haut degré

$$P_{n+1} - XP_n \in \mathbb{R}_n[X]$$

On peut donc écrire

$$P_{n+1} - XP_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$$

Or $P_{n+1} - XP_n$ est orthogonal à $P_0, \ldots, P_{n-2}$ donc

$$P_{n+1} - XP_n = \alpha_n P_n + \alpha_{n-1} P_{n-1}$$

Enfin, par parité, $\alpha_n = 0$ et donc

$$P_{n+1} - XP_n = \alpha_{n-1} P_{n-1}$$

EXERCICE 269 **Polynômes de Legendre**

Titre : Polynômes de Legendre
ID : 217 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 203 | ID : 217
Difficulté : ★☆☆☆☆

Dans ce sujet, on identifie polynôme et fonction polynomiale associée sur $[-1,1]$. On munit l'espace $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit le polynôme P_n dfini par :

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x^2-1)^n\right)$$

1. Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.
2. Montrer que P_n est une fonction polynôme de degré n orthogonal à tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.
3. En commençant par dériver deux fois $(x^2-1)^{n+1}$, établir que pour tout $n \geq 1$:
$$P'_{n+1} = (2n+1)P_n + P'_{n-1}$$
4. En déduire :
$$\|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

Solution

1. On écrit $\left(x^2-1\right)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ et lion dérive le produit *par* la formule de Leibniz. Introduisons les fonctions f et g données par $f(x) = (x-1)^n$ et $g(x) = (x+1)^n$. On a

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

avec, par dérivations successives.

$$f^{(k)}(x) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left((x-1)^n\right) = \frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k} \quad \text{et} \quad g^{(n-k)}(x) = \frac{n!}{k!}(x+1)^k$$

On obtient donc l'expression

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k$$

On peut alors directement évaluer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$:

$$P_n(1) = 1 \quad \text{et} \quad P_n(-1) = (-1)^n$$

2. Par dérivation à l'ordre n d'un polynôme de degré $2n$, le polynôme P_n est de degré ^1n. Soit Q un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. Calculons $(P_n \mid Q)$. On procède par intégration par parties où l'on dérive le polynôme Q. On réalise une première intégration par parties où l'on intègre $P_n = U_n^{(n)}$ en $U_n^{(n-1)}$

$$(P_n \mid Q) = \int_{-1}^{1} P_n(t)Q(t)\mathrm{d}t = \left[U_n^{(n-1)}(t)Q(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} U_n^{(n-1)}(t)Q'(t)\mathrm{d}t$$

Les valeurs 1 et -1 sont racines de multiplicité n de U_n, elles sont donc aussi racines des polynômes $U_n', \dots, U_n^{(n-1)}$. L'égalité précédente devient alors

$$(P_n \mid Q) = -\int_{-1}^{1} U_n^{(n-1)}(t) Q'(t) \mathrm{d}t$$

On répète ces intégrations par parties jusqu'à disparition par dérivation du polynôme Q

$$(P_n \mid Q) = \int_{-1}^{1} U_n^{(n-2)}(t) Q''(t) \mathrm{d}t = \cdots = (-1)^n \int_{-1}^{1} U_n(t) Q^{(n)}(t) \mathrm{d}t = 0 \quad \text{car} \quad Q^{(n)} =$$

Le polynôme P_n est donc orthogonal à tout polynôme de Q de degré inférieur à $n-1$

3. La dérivée seconde de $\left(x^2-1\right)^{n+1}$ peut s'écrire

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\left(x^2-1\right)^{n+1}\right) &= 2(n+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\left(x^2-1\right)^n\right) \\
&= 2(n+1)\left(\left(x^2-1\right)^n + 2nx^2\left(x^2-1\right)^{n-1}\right) \\
&= 2(n+1)\left(\left(x^2-1\right)^n + 2n\left(\left(x^2-1\right)+1\right)\left(x^2-1\right)^{n-1}\right) \\
&= 2(n+1)(2n+1)\left(x^2-1\right)^n + 4n(n+1)\left(x^2-1\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

En dérivant encore à l'ordre $n-1$ et en divisant par $2^{n+1}(n+1)!$, on obtient la relation souhaitée

$$\begin{aligned}
P_{n+1}'(x) &= \frac{2(n+1)(2n+1)}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\right) + \frac{4n(n+1)}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\left(x^2-1\right)^{n-1}\right) \\
&= \frac{(2n+1)}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\right) + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\left(x^2-1\right)^{n-1}\right) \\
&= (2n+1)P_n + P_{n-1}'
\end{aligned}$$

4. Pour $n = 0$, l'égalité s'obtient par un calcul direct. Pour $n \geq 1$, la relation qui précède permet d'écrire

$$(2n+1)\left\|P_n\right\|^2 = (P_n \mid (2n+1)P_n) = \left(P_n \mid P_{n+1}' - P_{n-1}'\right) = \left(P_n \mid P_{n+1}'\right) - \left(P_n \mid P_{n-1}'\right)$$

D'une part, P_n et P_{n-1}' sont orthogonaux car P_{n-1}' est de degré strictement inférieur à n. D'autre part, une intégration par parties donne

$$\left(P_n \mid P_{n+1}'\right) = \left[P_n P_{n+1}\right]_{-1}^{1} - \left(P_n' \mid P_{n+1}\right)$$

avec $\left[P_n P_{n+1}\right]_{-1}^{1} = 1 - (-1)^n(-1)^{n+1} = 2$ et $\left(P_n' \mid P_{n+1}\right) = 0$ car P_n' est *ur* polynôme de degré strictement inférieur à $n+1$. Finalement, $(2n+1)\left\|P_n\right\|^2 = 2$ ce qui conduit à la formule voulue.

EXERCICE 270 Famille de vecteurs substangle

Titre : Famille de vecteurs substangle
ID : 218 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 204 | ID : 218
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de $n \geqslant 2$ vecteurs d'un espace préhilbertien réel.
On suppose

$$\forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \left(x_i \mid x_j\right) < 0$$

Montrer que toute sous famille de $n-1$ vecteurs de $\mathcal{F}$ est libre.

Solution

Raisonnons par récurrence sur $n \geq 2$. Pour $n = 2$ la propriété est immédiate car aucun vecteur ne peut être nul. Supposons la propriété établie au rang $n \geq 2$. Soit $(x_1, \dots, x_{n+1})$ une famille de vecteurs vérifiant

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n+1, (x_i \mid x_j) < 0$$

Par projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel de dimension finie $D = \text{Vect}(x_{n+1})$, on peut écrire pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$x_i = y_i + \lambda_i x_{n+1}$$

avec y_i un vecteur orthogonal à x_{n+1} et $\lambda_i < 0$ puisque $(x_i \mid x_{n+1}) < 0$. On remarque alors

$$(x_i \mid x_j) = (y_i \mid y_j) + \lambda_i \lambda_j \|x_{n+1}\|^2$$

et on en déduit

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n, (y_i \mid y_j) < 0$$

Par hypothèse de récurrence, on peut affirmer que la famille $(y_2, \dots, y_n)$ est libre et puisque ses vecteurs sont orthogonaux au vecteur x_{n+1} non nul, on peut aussi dire que la famille $(y_2, \dots, y_n, x_{n+1})$ est libre. Enfin, on en déduit que la famille $(x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ car cette dernière engendre le même espace que la précédente et est formée du même nombre de vecteurs. Par permutation des indices, ce qui précède vaut pour toute sous-famille formée de n vecteurs de la famille initiale $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ Récurrence établie.

EXERCICE 271 Calcul de minimum à l'aide de la projection orthogonale

Titre : Calcul de minimum à l'aide de la projection orthogonale
Difficulté : ★☆☆☆☆
ID : 219 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 205 | ID : 219

1) Calculer

$$\inf \left\{ \int_0^1 t^2 (\ln t - at - b)^2 \, \mathrm{d}t, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2) Calculer

$$\inf \left\{ \int_0^1 (\ln t - at - b)^2 \, \mathrm{d}t, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Solution

1) En introduisant l'espace E des fonctions réelles f continues sur $]0;1]$ telles que $t \mapsto (tf(t))^2$ soit intégrable et en munissant cet espace du produit scalaire

$$(f \mid g) = \int_0^1 t^2 f(t) g(t) \mathrm{d}t$$

la quantité cherchée est : $m = d(f, F)^2$ avec $f : t \mapsto \ln(t)$ et $F = \text{Vect}(f_0, f_1)$ où $f_0(t) = 1$ et $f_1(t) = t$. $m = \|f - p(f)\|^2$ avec p la projection orthogonale sur F.

$$p(f)(t) = a + bt \text{ avec } (p(f) \mid f_0) = (f \mid f_0) \text{ et } (p(f) \mid f_1) = (f \mid f_1)$$

La résolution du système ainsi obtenu donne $a = 5/3$ et $b = -19/12$. $m = \|f - p(f)\|^2 = (f - p(f) \mid f) = 1/432$

2) On considère l'espace préhilbertien $\mathrm{L}^2(10;1], \mathbb{R})$ où le produit scalaire est défini par

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t) g(t) dt$$

On remarque que la fonction $f = \ln$ est élément de cet espace et il s'agit ici de calculer

$$m = (d(f,F))^2 \text{ avec } F = \text{Vect}(1, \text{Id})$$

On sait

$$d(f,F) = \|f - p_F(f)\|$$

avec p_F la projection orthogonale sur F. Par application du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on forme une base orthonormale (e_1, e_2) de F avec

$$e_1(x) = 1 \quad \text{et} \quad e_2(x) = 2\sqrt{3}(x - 1/2)$$

On peut alors déterminer le projeté de f

$$p_F(f) = (f \mid e_1) \cdot e_1 + (f \mid e_2) \cdot e_2$$

avec (après calcul par intégrations par parties)

$$(f \mid e_1) = 1 \quad \text{et} \quad (f \mid e_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On en déduit

$$\|p_F(f)\|^2 = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

puis, par Pythagore,

$$m = \|f - p_F(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|p_F(f)\|^2 = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$$

EXERCICE 272 — Matrice A tel que $\|AX\| \leq \|X\|$ pour tout vecteur X

Titre : Matrice A tel que $\|AX\| \leq \|X\|$ pour tout vecteur X — **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 220 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 206 | ID : 220

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\| \leq \|X\|$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur l'espace des colonnes.

1. Montrer que :
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|{}^tAX\| \leq \|X\|.$$
2. Montrer que :
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX = X \Rightarrow {}^tAX = X.$$
3. Prouver que :
$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \ker(A - I_n) \oplus \text{Im}(A - I_n).$$

Solution

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors : $\|{}^tAX\|^2 = {}^t({}^tAX){}^tAX = {}^tXA{}^tAX = \langle X, A{}^tAX\rangle$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :
$$\langle X, A{}^tAX\rangle \leq \|X\|\|A{}^tAX\|$$
Il en découle compte de l'hypotèse $(\star\star)$ de l'énoncé
$$(\star\star) \quad \forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AZ\| \leq \|Z\|$$

appliquée à $Z = {}^tAX$, que :

$$(\star) \quad \|{}^tAX\|^2 \leq \|X\|\|{}^tAX\|.$$

• Si ${}^tAX = 0$, l'inégalité demandée est vérifiée.
• Si ${}^tAX \neq 0$, l'inégalité $(\star)$ donne : $\|{}^tAX\|(\|{}^tAX\| - \|X\|) \leq 0$. En divisant par $\|{}^tAX\|$ on obtient l'inégalité demandée.

2. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = X$. On a $\|{}^tAX - X\|^2 = \|{}^tAX\|^2 + \|X\|^2 - 2\langle X, {}^tAX\rangle$. Comme $\|{}^tAX\| \leq \|X\|$, on a : $\|{}^tAX - X\|^2 \leq 2\|X\|^2 - 2\langle X, {}^tAX\rangle = 0$ puisque ${}^tAX$, donc ${}^tAX = X$
3. Prouver que : Par le théorème du rang, on a :

$$n = \dim(\ker(A - I_n)) + \dim(\mathrm{Im}(A - I_n)).$$

Il suffit donc de prouver que :

$$\ker(A - I_n) \cap \mathrm{Im}(A - I_n) = \{0\}.$$

Pour cela soit $X \in \ker(A - I_n) \cap \mathrm{Im}(A - I_n)$, alors $AX = X$ et il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $AY - Y = X$. Il en découle que $\|X\|^2 = \langle X, X\rangle = \langle AY - Y, X\rangle = {}^tY{}^tAX - {}^tYX$, or d'après la question précédente, on a ${}^tAX = X$, donc $\|X\|^2 = {}^tYX - {}^tYX = 0$ et finalement $X = 0$, donc

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \ker(A - I_n) \oplus \mathrm{Im}(A - I_n).$$

EXERCICE 273 Une suite de matrices à partir d'une matrice orthogonale à la Cesaro

Titre : Une suite de matrices à partir d'une matrice orthogonale à la Cesaro

Difficulté : ★☆☆☆☆

ID : 221 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 207 | ID : 221

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de A.

1. Étudier la convergence de

$$\frac{1}{p+1}(I_n + A + \cdots + A^p)$$

lorsque $p \to +\infty$.

2. La suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Solution

1. Posons $B_p = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} A^k$. Alors

$$(\star) \quad (I_n - A)B_p = \frac{1}{p+1}(I_n - A^{p+1}).$$

On a $A \in O_n(\mathbb{R})$ et puisque $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe, on a : $\forall p \in \mathbb{N}, A^{p+1} \in O_n(\mathbb{R})$. Rappelons que si $M \in O_n(\mathbb{R})$, on a $\|M\|_2 = \sqrt{n}$ (les colonnes de A sont toutes de norme 1, en sommant on trouve $\|M\|^2 = \sum_{j=1}^{n}\|C_j\|^2 = n$, où C_j sont les colonnes de M. Donc $\|A^p\| = \sqrt{n}$, donc tenant compte de la relation $(\star)$ ci-dessus, on a $\|(I_n - A)B_p\| \leq \frac{1}{p+1}(\|I_n\| + \|A^{p+1}\|) = \frac{2\sqrt{n}}{p+1}$. En particulier $\lim_{p\to+\infty}(I_n - A)B_p = 0$. La matrice $I_n - A$ est inversible car par hypothèse, $1 \notin \mathrm{Sp}(A)$, donc en multipliant par $(I_n - A)^{-1}$, compte tenu de la continuité de l'application $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); X \mapsto (I_n - A)^{-1}X$, on a $\lim_{p\to+\infty} B_p = 0$.

2. Supposons que la suite (A^p) converge de limites M. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on

a $A^{p+1}X = A \times (A^pX)$; par passage à la limite, on obtient : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), MX = ABX$ donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), M(I_n - A)X = 0$, donc $M(I_n - A) = 0$ et comme $I_n - A$ est inversible, $M = 0$. Or $\forall p \in \mathbb{N}, \|A^p\| = \sqrt{n} \neq 0$, c'est absurde, donc la suite $(A^p)_{p\geq 0}$ est divergente.

EXERCICE 274 Exemple de sous-espaces orthogonaux

Titre : Exemple de sous-espaces orthogonaux
ID : 222 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 208 | ID : 222
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $E = \mathbb{R}^4$, muni de son produit scalaire canonique et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de E. On considère le sous-espace vectoriel F de E défini par le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

1. Donner une base orthonormée de F et $F^\perp$.
2. On note p_F la projection orthogonale de E sur F. Donner la matrice de p_F relativement à $\mathcal{B}$.
3. Calculer $d(a, F)$ où $a = (2, 3, 2, 3)$

Solution

1. Cherchons des bases orthonormées de F et $F^\perp$.
   • Soit $X = (x, y, z, t) \in F$ alors, $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$, ce qui est équivalent à $\begin{cases} z = -x \\ t = -y \end{cases}$, c'est-à-dire $X = (x, y, -x, -y) = xV_1 + yV_2$, où $V_1 = (1, 0, -1, 0)$ et $V_2 = (0, 1, 0, -1)$. Donc la famille (V_1, V_2) est une famille génératrice de F. Comme $\langle V_1, V_2\rangle = 0$, la famille (V_1, V_2) est une famille orthogonale formée de vecteurs non nuls, donc elle est libre et constitue une base orthogonale de F. Comme $\|V_1\| = \|V_2\| = \sqrt{2}$, alors en posant $\begin{cases} v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} V_1 \\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} V_2 \end{cases}$, la famille (v_1, v_2) est une base orthonormée de F.
   • On remarque d'après les équations de F que les vecteurs $V_3 = (1, 1, 1, 1)$ et $V_4 = (1, -1, 1, -1)$ sont des vecteurs de F^{bot} puisque le système des équations définissant F n'est autre que $\begin{cases} \langle X, V_3\rangle = 0 \\ \langle X, V_4\rangle = 0 \end{cases}$. On remarque d'une part que $\dim(F^\perp) = 4 - \dim(F) = 2$ et d'autre par la famille (V_3, V_4) est libre puisque elle est orthogonale formée de deux vecteurs non nuls, donc (V_3, V_4) est une base orthogonale de $F^\perp$, et comme $\|V_3\| = \|V_4\| = 2$, la famille (v_3, v_4) avec $\begin{cases} v_3 = \frac{1}{2} V_3 \\ v_4 = \frac{1}{2} V_4 \end{cases}$ est une base orthonormée de $F^\perp$.
2. Avant de commencer notons que puisque (v_1, v_2) est une base de F et $v_3, v_4)$ est une base de $F^\perp$ alors $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de E. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et comme P est une matrice orthogonale on a : $P^{-1} = {}^tP$, donc :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice de p_F relativement à $\mathcal{B}'$ est $\text{mat}'_{\mathcal{B}}(p_f) = M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si on note $M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(p_f)$, la relation qui lie M et M' est $M = PM'P^{-1}$. Le calcul donne :

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. La colonne des coordonnées de a relativement à $\mathscr{B}$ En notant $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, donc, la colonne des coordonnées de $p_F(a)$ relativement à $\mathscr{B}$ est

$$X' = MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il en découle que

$$d(a,F) = d(a,p_F(a)) = \|a - p_F(a)\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2+3^2+2^2+3^2} = \sqrt{26}.$$

EXERCICE 275 Orthogonal de l'esemble des matrices diagonales

Titre : Orthogonal de l'esemble des matrices diagonales
ID : 223 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 209 | ID : 223
Difficulté :

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre n. Pour tout $X, Y \in E$, on note $\langle X, Y\rangle = \text{tr}({}^tXY)$.

1. Démontrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E.
2. Déterminer $(D_n(\mathbb{R}))^\perp$, où $D_n(R)$ est l'ensemble des matrices diagonales de E.

Solution

1. L'application $(X,Y) \mapsto \text{tr}({}^tXY)$ est bilinéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ vers $\mathbb{R}$, chose facile à vérifier. Elle est symétrique car

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle X, Y\rangle = \text{tr}({}^tXY) = \text{tr}({}^t({}^tXY)) = \text{tr}({}^tYX) = \langle Y, X\rangle.$$

Elle est positive car

$$\forall X = (x_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}, \langle X, X\rangle = \text{tr}({}^tXX) = \sum_{1\le i,j\le n} x_{i,j}^2 \ge 0,$$

et finalement elle est définie car si $\langle X, X\rangle = 0$ on a $\forall i,j \in [\![1,n]\!], x_{i,j}^2 = 0$ donc $\forall i,j \in [\![1,n]\!], x_{i,j} = 0$ et alors $X = 0$. il s'agit donc d'un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On sait que $D_n(R) = \text{Vect}\{E_{i,i}, i \in [\![1,n]\!]\}$, donc $\dim(D_n(\mathbb{R}) = n$ et par suite $\dim((D_n(\mathbb{R}))^\perp) = n^2 - n$. On va démontrer que $E_{i,j} \in (D_n(\mathbb{R}))^\perp$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. En effet si $i,j,k \in [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$, on a $\langle E_{i,j}, E_{kk}\rangle = \text{tr}(E_{j,i} \times E_{k,k}) = \delta_{i,k}\,\text{tr}(E_{j,k}) = 0$ si $i \neq k$ et si $i = k$ forcément $j \neq k$ donc $\text{tr}(E_{j,k}) = 0$ et dans tous les cas, on a $\langle E_{i,j}, E_{kk}\rangle$. Comme la famille $(E_{i,j})_{\substack{i,j\in[\![1,n]\!]\\ i\neq j}}$ est libre comprenant $n^2 - 1$ vecteurs, il en découle que c'est une base de $D_n(R))^\perp$ et par suite ce dernier n'est autre que l'ensemble de toutes les matrices carrée de E à diagonale nulle.

EXERCICE 276 Contre-exemple sur le supplémentaire orthogonal

Titre : Contre-exemple sur le supplémentaire orthogonal
ID : 224 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 210 | ID : 224
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. Pour tout $f,g \in E$, on note $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions polynomiales.

1. Prouver que pour tout $h \in E$, il existe une suite $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = h$ dans $(E,\langle,\rangle)$.
2. En déduire que $F^\perp = \{\theta\}$, où θ est la fonction nulle de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$.

Solution

1. Par Stone-Weierstrass il existe $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ tel que $\|h - f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or
$$\|f_n - h\|^2 = \int_0^1 (f_n(t) - h(t))^2 dt \leq \|f_n - h\|_\infty^2,$$
donc $\|f_n - h\| \leq \|f_n - h\|_\infty$ et par suite $\|h - f_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \theta$ dans $(E,\langle,\rangle)$.
2. Soit $h \in F^\perp$. Soit $f \in E$. D'après question précédente, il existe une suite $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = h$ dans $(E,\langle,\rangle)$. On a $h \in F^\perp$, donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \langle f_n, h\rangle = 0$, et comme $\langle,\rangle$ est continue, on a par passage à la limite $\langle h,h\rangle = 0$, donc $\|h\| = \theta$ et par suite $h = 0$. Il en découle que $F^\perp = \{\theta\}$.

EXERCICE 277 Sous-espaces supplémentaires orthogonaux $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Titre : Sous-espaces supplémentaires orthogonaux $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
ID : 225 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 211 | ID : 225
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique : pour tout $A,B \in \mathcal{M}_n(R)$, $\langle A,B\rangle = \text{tr}({}^tAB)$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$(resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques(resp. antisymétriques).

1. Démontrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $d(M,\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ en fonction de M.
3. **Exemple :** Calculer $d(M,\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ pour $M = I_n + E_{1,n}$, puis pour $M = J$ où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Solution

1. $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et tout $A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}(S \mid A) &= \operatorname{tr}\left({}^tSA\right) = \operatorname{tr}(SA) = \operatorname{tr}(AS)\\ &= \operatorname{tr}\left(\left(-{}^tA\right)S\right) = -\operatorname{tr}(AS) = -(A \mid S) = -(S \mid A),\end{aligned}$$

d'où : $(S \mid A) = 0$

Il en découle que $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux l'espace euclidien $(\mathbf{M}_n(\mathbb{R}, (. \mid .))$. Il en résulte en particulier : $\mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$.

- On a, pour toute $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$:

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}\left(M + {}^{\mathrm{t}}M\right)}_{\in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(M - {}^{\mathrm{t}}M\right)}_{\in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})},$$

$$\text{donc : } \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) + \mathbf{A}_n(\mathbb{R}).$$

Finalement, $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$

2. Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\text{Notons : } S = \frac{1}{2}\left(M + {}^{\mathrm{t}}M\right), A = \frac{1}{2}\left(M - {}^{\mathrm{t}}M\right)$$

On a alors :

$$M = S + A, S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}), A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R}) = \left(\mathbf{S}_n(\mathbb{R})\right)^{\perp}$$

Ceci montre que S est le projeté orthogonal de M sur $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$. On a donc

$$\begin{aligned}&\left(d\left(M, \mathbf{S}_n(\mathbb{R})\right)\right)^2 = \|M - S\|^2 = \|A\|^2 = \operatorname{tr}\left({}^tAA\right)\\ &= \operatorname{tr}\left[\left(\tfrac{1}{2}\left(M - {}^tM\right)\right)\tfrac{1}{2}\left(M - {}^tM\right)\right] = -\tfrac{1}{4}\operatorname{tr}\left(\left(M - {}^tM\right)^2\right)\end{aligned}$$

3. Pour $M = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}_{i1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$A = \tfrac{1}{2}\left(M - {}^{\mathrm{t}}M\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & \dots & -1/2 \\ 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & (0) & \vdots \\ 1/2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\left(d\left(M, \mathbf{S}_n(\mathbb{R})\right)\right)^2 = \|A\|^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left((A)_{ij}\right)^2 = \frac{n-1}{2}$

On conclut : $d\left(M, \mathbf{S}_n(\mathbb{R})\right) = \sqrt{\frac{n-1}{2}}$

EXERCICE 278 — Matrice à la fois symétrique et orthogonale

Titre : Matrice à la fois symétrique et orthogonale
ID : 226 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 212 | ID : 226
Difficulté : ★☆☆☆☆

Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à la fois symétriques et orthogonales.

Solution

A est symétrique si et seulement si ${}^tA = A$ et elle est orthogonale si et seulement si ${}^tAA = I_3$, donc A est symétrique et orthogonale si et seulement si :

$$A^2 = I_3 \quad \text{et} \quad A \in \mathbf{O}(3)$$

En prenant $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, les cas possibles sont :
- $A = \varepsilon I_3$
- $A = \varepsilon S$, où S est la matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite engendrée par un vecteur normé $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Alors $S = 2U^tU - I_3$ et S représente la symétrie par rapport au plan vectoriel orthogonal à U.

$$S = \begin{pmatrix} a^2-b^2-c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & b^2-c^2-a^2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & c^2-a^2-b^2 \end{pmatrix} \text{ ou } a^2+b^2+c^2 = 1$$

EXERCICE 279 Paramètres pour lesquels une matrice symétrique est orthogonale

Titre : Paramètres pour lesquels une matrice symétrique est orthogonale

Difficulté : ★★☆☆☆

ID : 227 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 213 | ID : 227

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & x & y \\ c & y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Comment choisr $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour qu'il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ telle que M soit une matrice orthogonale ?

Solution

La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & x & y \\ c & y & z \end{pmatrix}$ de M_3 (R) est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colcnnes sont deux à deux orthogonaux :

$$\begin{cases} ab + bx + cy = 0 & (P_1) \quad \text{plan} \\ ac + by + cz = 0 & (P_2) \quad \text{plan} \\ bc + xy + yz = 0 & (H) \quad \text{paraboloíde hyperbolique} \end{cases}$$

et unitaires :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 & (S) \quad \text{sphere} \\ b^2 + x^2 + y^2 = 1 & (C_1) \quad \text{cylindre} \\ c^2 + y^2 + z^2 = 1 & (C_2) \quad \text{cylindre} \end{cases}$$

supposons M orthogonale avec $bc \neq 0$; alors $(P_1) \cap (P_2)$ est une droite dont un paramé- trage est :

$$(P_1) \cap (P_2) : x = c^2t - a, y = -bct, \quad z = b^2t - a$$

L'équation au paramètre t de l'intersection $(P_1) \cap (P_2) \cap (H)$ est :

$$\left(b^2 + c^2\right) t^2 - 2at - 1 = 0 \quad E$$

Cette équation E a deux racines distinctes, donc la droite $(P_1) \cap (P_2)$ coupe (H) en deux points U et V.

En prenant (a, b, c) sur (S), l'équation au paramètre t de l'intersection $(P_1) \cap (P_2) \cap (C_1)$ est :

$$b^2 + \left(c^2t - a\right)^2 + b^2c^2t^2 = 1 \text{ ou } c^2\left[\left(b^2 + c^2\right) t^2 - 2at - 1\right] = 0$$

Même résultat pour l'intersection $(P_1) \cap (P_2) \cap (C_2)$. Autrement dit, la droite $(P_1) \cap (P_2)$ coupe (C_1) en U et V ainsi que (C_2) . Ainsi, en choisissant (a, b, c) sur (S), avec $bc \neq 0$ si $(x, y, z) = U$ ou V, la matrice M est orthogonale. Supposons M orthogonale avec $b \neq 0, c = 0$. Ces conditions s'écrivent :

$$a + x = 0, y = 0, y(x + z) = 0, a^2 + b^2 = 1, b^2 + x^2 = 1, z^2 = 1$$

Avec (a,b,c) sur$(S) : a^2+b^2=1 (a=\cos\alpha, b=\sin\alpha)$ On trouve (x,y,z) tel que M soit orthogonale :

$$M=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & \pm 1\end{pmatrix}$$

Même résultat si $b=0, c\neq 0$
Même résultat si $b=0, c=0$
Conclusion : Si $a^2+b^2+c^2=1$ alors il existe $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que M soit orthogonale, M représente alors une symétrie.

EXERCICE 280 Recherche d'un minimum d'une intégrale

Titre : Recherche d'un minimum d'une intégrale
ID : 228 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 214 | ID : 228
Difficulté : ★☆☆☆☆

Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on pose :

$$\Phi(a,b)=\int_0^\pi (\sin t-(at^2+bt))^2 dt$$

Calculer $\min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\Phi(a,b)$.

Solution

Soit $E=C^0([0,\pi],\mathbb{R}), u\mapsto \|u\|=\left(\int_0^\pi u^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme euclidienne sur cet espace associé au produit scalaire :

$$(u,v)\mapsto \langle u\mid v\rangle=\int_0^\pi u(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Considérons le plan P engendré par les fonctions :

$$\varphi : x\mapsto x \text{ et } \Phi : x\mapsto x^2$$

il s'agit de calculer $\min\limits_{u\in P}\|u-\sin\|^2$. On sait que ce minimum est égal à $\|p(\sin)-\sin\|^2$ où $p(\sin)$ désigne la projection orthogonale de la fonction sin sur P. En posant $p(\sin)=\lambda\varphi+\mu\Phi_1$, le couple (λ,μ) est déterminé par le système : $\begin{cases}\langle\lambda\varphi+\mu\Phi|\varphi\rangle=\langle\sin\mid\varphi\rangle\\ \langle\lambda\varphi+\mu\Phi\mid\Phi\rangle=\langle\sin\mid\Phi\rangle\end{cases}$ c'est-à-dire :

$$\begin{cases}\lambda\int_0^\pi x^2dx+\mu\int_0^\pi x^3dx=\int_0^\pi x\sin x dx\\ \lambda\int_0^\pi x^3dx+\mu\int_0^\pi x^4dx=\int_0^\pi x\sin x^2dx\end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases}\lambda\frac{\pi^3}{3}+\mu\frac{\pi^4}{4}=\pi\\ \lambda\frac{\pi^4}{4}+\mu\frac{\pi^5}{5}=\pi^2-4\end{cases}$$

On en déduit $\lambda=\frac{240}{\pi^4}-\frac{12}{\pi^2}$, $\mu=\frac{20}{\pi^3}-\frac{320}{\pi^5}$, par suite :

$$p(\sin)(x)=\left(\frac{240}{\pi^4}-\frac{12}{\pi^2}\right)x+\left(\frac{20}{\pi^3}-\frac{320}{\pi^5}\right)x^2$$

D'après le théorème de Pythagore, on a alors

$$\begin{aligned}\|p(\sin)-\sin\|^2 &= \|\sin\|^2-\|p(\sin)\|^2\\ &= \int_0^\pi \sin^2 x dx-\left(\lambda^2\int_0^\pi x^2dx+2\lambda\mu\int_0^\pi x^3dx+\mu^2\int_0^\pi x^4dx\right)\\ &= \frac{\pi}{2}-\left(\lambda^2\frac{\pi^3}{3}+2\lambda\mu\frac{\pi^4}{4}+\mu^2\frac{\pi^5}{5}\right)\\ &= \frac{\pi}{2}+\frac{160}{\pi^3}-\frac{1280}{\pi^5}-\frac{8}{\pi}\end{aligned}$$

Ainsi $\min f = 0.00183$ à 5.10^{-6} près.

EXERCICE 281 Lien entre conservation de la distance et endom orth

Titre : Lien entre conservation de la distance et endom orth
ID : 229 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 215 | ID : 229
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit E un espace euclidien.

1. Soit $f : E \to E$ une application telle que :

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ \forall (x,y)\in E^2, \|f(x)-f(y)\| = \|x-y\| \end{cases}.$$

   Montrer que f est un endomorphisme orthogonal de E.

2. Soit $f : E \to E$ une application telle que :

$$\forall (x,y)\in E^2, \|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$$

   Que peut-on dire de f ?

Solution

En prenant $y=0$, on obtient $\|f(x)\| = \|x\|$, pour tout $x\in E$, donc f conserve la norme.
Pour $(x,y)\in E^2$:

$$\begin{aligned}\langle f(x)-f(y), f(x)-f(y)\rangle &= \|f(x)\|^2+\|f(y)\|^2-2\langle f(x),f(y)\rangle\\ &= \langle x-y_1x-y\rangle = \|x\|^2+\|y\|^2-2\langle x,y\rangle\end{aligned}$$

impose $\langle f(x),f(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ (puisque f conserve la norme) : f conserve le produit scalaire. Montrons alors la linéarité de f. Soit :

$$\begin{aligned}&\langle f(x+y)-f(x)-f(y), f(x+y)-f(x)-f(y)\rangle\\ &= \|f(x+y)\|^2+\|f(x)\|^2+\|f(y)\|^2\\ &\quad -2\langle f(x+y)\cdot f(x)\rangle - 2\langle f(x+y),f(y)\rangle+2\langle f(x),f(y)\rangle\\ &= |\ x+y\ \|^2+\|\ x\ \|^2+\|\ y\|^2+2\langle x+y,x\rangle-2(x+y,y\rangle+2\{x,y\rangle = 0\end{aligned}$$

Calculons de la même façon :

$$\begin{aligned}\|f(\lambda x)-\lambda x\|^2 &= \|f(\lambda x)\|^2-2\lambda\langle f(\lambda x),f(x)\rangle+\lambda^2\|x\|^2\\ &= \|\lambda x\|^2-2\lambda\ \langle\lambda x_1 x\rangle+\lambda^2\|x\|^2\end{aligned}$$

$= 0$ (car f conserve le produit scalaire) Conclusion : f est un endomorphisme de E qui conserve le produit scalaire, donc $f\in \mathbf{O}(E)$ (toute application de E dans E conservant la distance et vérifiant $f(0)=0$ est un endomorphisme orthogonal.)

EXERCICE 282 Existence d'un polynôme P tel que $P(A)$ symétrique et ..

Titre : Existence d'un polynôme P tel que $P(A)$ symétrique et .. **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 230 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 216 | ID : 230

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

1. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que la matrice $P(A)$ est symétrique à valeurs propres positives ou nulles et $(P(A))^2 = A$.
2. Trouver P pour $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution

1. Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée, donc $A = U\Delta U^{-1}$ avec $U \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ et Δ une matrice diagonale qu'on peut écrire $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_s, \dots, \lambda_s)$ avec $s = \operatorname{card}(\operatorname{Sp}(A))$, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de A. Soit $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_1, \dots, \mu_s, \dots, \mu_s)$ avec $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$ pour tout $k \in [\![1, s]\!]$ et $B = UDU^{-1}$ alors $B^2 = A$ et si P est le polynôme interpolateur de Lagrange tel que $\forall i \in [\![1, s]\!], P(\lambda_i) = \mu_i$, donc $P(X) = \sum_{k=1}^{s} \sqrt{\lambda_k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{s} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$ vérifie $P(A) = B$ car

$$\begin{aligned} P(A) &= P(U\Delta U^{-1}) \\ &= UP(\Delta)U^{-1} \\ &= U \operatorname{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_s), \dots, P(\lambda_s))U^{-1} \\ &= U \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_1, \dots, \mu_s, \dots, \mu_s)U^{-1} = UDU^{-1} \\ &= B \end{aligned}$$

2. On diagonalise A, le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = (X-1)^2(X-4)$, donc $\operatorname{Sp}(A) = \{1, 4\}$, on trouve $A = U\Delta U^{-1}$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Il en découle que $B = UDU^{-1}$ réalise $B^2 = A$, où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice diagonale dont le coefficients diagonaux sont les racines carrées de ceux de Δ. Le polynôme interpolateur de Lagrange P tel que $P(1) = 1$ et $P(4) = 2$ réalise $P(A) = B$, or $P(X) = 1\frac{X-4}{1-4} + 2\frac{X-1}{4-1}$, donc $P(X) = \frac{1}{3}(X+2)$, donc $B = \frac{1}{3}(A + 2I_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 283 Calcul de la borne inférieure sur la trace d'un carré

Titre : Calcul de la borne inférieure sur la trace d'un carré **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 231 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 217 | ID : 231

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

étant muni de son produit scalaire canonique, calculer :

$$\inf_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}} \operatorname{tr}((A-tX{}^{\mathrm{t}}X)^2).$$

Solution

A est symétrique réelle donc diagonalisable et il existe une matrice $P\in\mathbf{O}(n)$ telle que :

$$A={}^tP\triangle P \text{ où } \triangle=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

Soit alors $Y=PX$, $X^tX=({}^tPY)({}^tYP)$ et $\|Y\|=1$ (changement de base orthonormale). Du fait de l'invariance de la trace par similitude, on est ramené à minimiser :

$$\operatorname{tr}(\Delta-xX^tX)^2 \text{ où } \|X\|=1$$
$$(\Delta-xX^tX)^2=(\Delta-xX^tX)^t(\Delta-xX^tX)=M^tM$$

car cette matrice est symétrique.

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(M^tM)&=\sum_i\sum_j m_{ij}^2=\sum_i m_{ii}^2+\sum_i\sum_{j\neq i}m_{ij}^2\\&=\sum_i(\lambda_i-xx_i^2)^2+x^2\sum_i(\sum_{j\neq i}x_i^2x_j^2)\\&=\sum_i(\lambda_i^2-2x\lambda_ix_i^2)+x^2\underbrace{(\sum_j x_j^2)}_{=1}x_i^2\\&=\sum_i(\lambda_i^2-2x\lambda_ix_i^2+x^2x_i^2)\end{aligned}$$

Posons $Q(x)=\sum_i\lambda_i^2-2x\sum_i\lambda_ix_i^2+x^2$, $Q(x)=b-2ax+x^2$. Pour $x\in\mathbb{R}$ et pour X fixé tel que $\|X\|=1$, le minimum de Q est obtenu en $x=a$:

$$G(a)=b-a^2.\quad B(x)\geq G(a)$$
$$G(a)=\sum_{i=1}^n\lambda_i^2-(\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^2)^2$$

Or $0\leq\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^2\leq\max_{1\leq i\leq n}(\lambda_i)$., puisque $\|x\|=\sum_{i=1}^n x_i^2=1$. Donc, $\forall x\in\mathbb{R},\forall x\in S_n, Q(x)\geq\sum_{i=1}^n\lambda_i^2-\max_{1\leq i\leq n}(\lambda_i^2)$, soit :

$$Q(x)\geq\operatorname{tr}(A^2)-R^2 \text{ où } R=\max_{1\leq i\leq n}(\lambda_i)$$

Montrons que cette valeur est le minimum. On choisit pour X le vecteur e_k, vecteur propre normé associé à la valeur propre $\lambda_k=R$.

$$g(x)=\operatorname{tr}(A^2)-2\lambda_kx+x^2$$
$$G(x)=\operatorname{tr}(A^2)+(x-\lambda_k)^2-\lambda_k^2$$

dont le minimum est :

$$\operatorname{tr}(A^2)-\lambda_k^2=\sum_{i\neq k}\lambda_i^2$$

EXERCICE 284 Un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Titre : Un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **Difficulté :**
ID : 232 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 218 | ID : 232

n est un entier naturel non nul, On note :

$$Z = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

$$J = Z{}^tZ \quad \text{et} \quad M = I_n - \frac{1}{n}J.$$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle X, Y\rangle = \text{tr}({}^tXY)$$

et $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, c'est-à-dire, si $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $y = (y_i)_{1\leq i\leq n}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ alors

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

On note π l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

1. Démontrer que π est une projection orthogonale de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, (|))$, et en préciser les éléments caractéristiques.
2. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \Phi(X) = MXM.$$

Démontrer que Φ est une projection orthogonale de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle.\rangle)$.

Solution

1. Il est aisé de voir que π est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$. On a $M^2 = I_n + \frac{1}{n^2}J^2 - \frac{2}{n}J$ et comme $J^2 = nJ$, on a $M^2 = I_n + \frac{1}{n}J - \frac{2}{n}J = I_n - \frac{1}{n}J = M$. Il en découle que π est un projecteur. Il reste à prouver que c'est un projecteur orthogonal, poiur cela si $x \in \mathbb{R}^n$ et X la colonne des coordonnées de x qu'on confond avec x, alors :

$$\begin{aligned}(x - \pi(x)|\pi(x)) &= (X - MX|MX)\\ &= (X|MX) - \|MX\|^2\\ &= (X|X - \frac{1}{n}JX) - \|X - \frac{1}{n}JX\|^2\\ &= \|X\|^2 - \frac{1}{n}(X, JX) - \|X\|^2 - \frac{1}{n^2}\|JX\|^2 + \frac{2}{n}(X, JX)\end{aligned}$$

On a $\|JX\|^2 = X^\top J^2 X = nX^\top JX = n(X, JX)$. Il en découle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (x - \pi(x)|\pi(x)) = 0.$$

et que π est une projection orthogonale.
• Remarquons que si $X \in \mathbb{R}^n$ alors $X \in \ker(\pi) \iff MX = 0 \iff JX = nX$. On sait que la matrice J est symétrique réelle donc elle est diagonalsable, et comme elle est de rang 1, on a 0 est une valeur propre de multiplicité $n-1$ et la valeur propre qui reste est $\text{tr}(J) = n$, donc n est une valeur propre et il est aisé de voir que $\ker(J - nI_n) = \mathbb{R}Z$, qui est exactement $\ker(\pi)$. Il en découle que $\text{Im}(\pi) = (\mathbb{R}Z)^\perp$ est l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

2. Il s'agit bien d'une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\Phi^2(X) = M(MXM)M = M^2XM^2 = MXM = \Phi(X)$, donc $\Phi^2 = \Phi$ est alors Φ est un projecteur. Par

ailleurs pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\langle X - \Phi(X), \Phi(X)\rangle = \langle X, MXM\rangle - \langle \Phi(X), \Phi(X)\rangle$, or $\langle \Phi(X), \Phi(X)\rangle = \text{tr}((MXM)^\top MXM) = \text{tr}(MX^\top MXM) = \text{tr}(X^\top MXM^2) = tr(X^\top MXM) = \langle X, MXM\rangle$, donc $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle X - \Phi(X), \Phi(X)\rangle = 0$ et alors Φ est un projecteur orthogonal de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 285 — $A + \Omega \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ avec $\text{rg}\,(A) = 1$ et $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$

Titre : $A + \Omega \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ avec $\text{rg}\,(A) = 1$ et $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ — **Difficulté :** ★★☆☆☆
ID : 233 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 219 | ID : 233

Soit

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

une matrice tel que

$$\text{rg}\,(A) = 1$$

Soit

$$\Omega = (\omega_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$$

une matrice orthogonale. Démontrer que

$$A + \Omega \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow 1 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \omega_{i,j}a_{i,j} \neq 0.$$

Solution

Si $M = A + \Omega$ est non inversible alors $0 \in \text{Sp}(M)$, donc il existe un vecteur non nul X_0 tel que $MX_0 = 0$ donc $AX_0 + \Omega X_0 = 0$, donc en multipliant par ${}^t\Omega$, il vient ${}^t\Omega AX_0 = -X_0$, donc -1 est une valeur propre de ${}^t\Omega A = A'$. On a $\text{rg}\,(A') = \text{rg}\,(A) = 1$, donc 0 est une valeur propre de A' de multiplicité au moins $n-1$, donc égale à $n-1$ puisque -1 en est une. Par suite $\text{tr}(A') = -1$. Or $\text{tr}(A') = \text{tr}({}^t\Omega A) = \langle \Omega, A\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \omega_{i,j}a_{i,j}$ donc finalement, si M est non inversible alors $1 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \omega_{i,j}a_{i,j} = 0$ et réciproquement si $1 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \omega_{i,j}a_{i,j} = 0$ alors -1 est une valeur propre de A' et par suite A non inversible, d'où le résultat demandé.

EXERCICE 286 — Des endomorphismes orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Titre : Des endomorphismes orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ — **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 234 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 220 | ID : 234

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On admet que si pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B\rangle = \text{tr}({}^tAB)$ alors il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Φ_Ω et Ψ_Ω les endomorphsimes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définis par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \begin{cases} \Phi_\Omega(M) = M\Omega \\ \Psi_\Omega(M) = \Omega^{-1}M\Omega \end{cases}.$$

1. Prouver que Φ_Ω est un endomorphisme orthogonal de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si Ω est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Prouver que Ψ_Ω est un endomorphisme orthogonal de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe un scalaire non nul $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\alpha\Omega$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution

1. Supposons que Ω est une matrice orthogonale, donc ${}^t\Omega\Omega = I_n$. Démontrons que Φ_Ω est un endomorphisme orthogonal, pour cela on va démontrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\Phi_\Omega(M)\| = \|M\|$. Soit alors $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\|\Phi_\Omega(M)\|^2 = \|M\Omega\|^2 = \operatorname{tr}({}^t(M\Omega)M\Omega) = \operatorname{tr}({}^t\Omega{}^tMM\Omega) = \operatorname{tr}({}^tMM\Omega{}^t\Omega) = \operatorname{tr}({}^tMM) = \|M\|^2$. D'où le résultat désiré.
réciproquement supposons que Φ_Ω est un endomorphisme orthogonal, alors il conserve le produit scalaire, en d'autres termes on a :
$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle \Phi_\Omega(X), \Phi_\Omega(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle$$
ce qui signifie :
$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \operatorname{tr}({}^t\Omega{}^tXY\Omega) = \operatorname{tr}({}^tXY).$$
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et prenons $\begin{cases} X = {}^tM \\ Y = I_n \end{cases}$, il vient :
$$\operatorname{tr}({}^t\Omega M\Omega) = \operatorname{tr}(M).$$
donc
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ \operatorname{tr}(\Omega{}^t\Omega M) = \operatorname{tr}(M)$$
Donc
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ \operatorname{tr}(\Omega{}^t\Omega M - M) = \operatorname{tr}((\Omega{}^t\Omega - I_n)M) = \langle {}^t\Omega\Omega - I_n, M\rangle = 0$$
donc la matrice ${}^t\Omega\Omega - I_n$ est orthogonale à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc elle est nulle et on a ${}^t\Omega\Omega = I_n$, donc Ω est une matrice orthogonale.
2.

EXERCICE 287 — Problème : quotient de Rayleight, racine carrée d'une matrice symétrique positive et autres

Titre : Problème : quotient de Rayleight, racine carrée d'une matrice symétrique positive et autres choses
Difficulté : ★☆☆☆☆
ID : 235 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 221 | ID : 235

E est un espace euclidien de dimension n avec $n \geq 2$ et u est un endomorphisme symétrique de E, c'est-à-dire que $u \in \mathcal{S}^n(E)$ où $\mathcal{S}_n(E)$ est l'ensemble des endomorphismes symétriques de E. On pourra confondre une vecteur $x = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ et la colonne $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ des coordonnées de x relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique qui fait de sa base canonique une base orthonormée.
On note
$$\alpha = \min(\operatorname{Sp}(u)), \beta = \max(\operatorname{Sp}(u))$$
Pour tout $x \in E\backslash\{0\}$, on pose :
$$R_u(x) = \frac{\langle u(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2}.$$

Partie I : Quotient de Rayleygh, endomorphisme(resp. matrice) symétrique positif(resp. défini positif)

1. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ et $x \in E_\lambda(u)$. calculer $R_u(x)$.
2. (a) Justifier l'existence de α et β.
   (b) Justifier l'existence de deux vecteurs $v, w \in E$ tel que $\|v\| = \|w\| = 1$ et $u(v) = \alpha v$ et $u(w) = \beta w$.
   (c) Prouver que :
$$\forall x \in E\backslash\{0\}, \quad \alpha \leq R_u(x) \leq \beta$$

3. On note $\mathcal{S}^1$ la sphère unité de E et on considère l'application

$$\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, t \mapsto \varphi(t) = R_u(\cos(t)v + \sin(t)w).$$

   (a) Démontrer que $R_u(E\backslash\{0\}) = R_u(\mathcal{S}^1)$.
   (b) Justifier que φ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $\varphi(0)$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
   (c) En déduire que $R_u(E\backslash\{0\}) = [\alpha, \beta]$

4. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (1) $\forall x \in E, \langle u(x), x\rangle \geq 0$.
   (2) $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.

   Désormais si l'une des assertions (1) et (2) est vraie on dit que l'endomorphisme symétrique u est positif. On note $\mathscr{S}_n^+(E)$ l'ensemble de tels endomorphismes.

5. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (1)′ $\forall x \in E\backslash\{0\}, \langle u(x), x\rangle > 0$.
   (2)′ $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

   Désormais si l'une des assertions (1)′ et (2)′ est vraie on dit que l'endomorphisme symétrique u est défini positif. On note $\mathscr{S}_n^{++}(E)$ l'ensemble de tels endomorphismes. Il est clair que $\mathscr{S}_n^{++}(E) \subset \mathscr{S}_n^+(E) \subset \mathscr{S}_n(E)$.

6. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que A est symétrique. on dit que A est positive(resp. définie positive) si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geq 0$ (resp. $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}, {}^tXAX > 0$.).
   (a) Vérifier que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f_A l'endomorphisme canoniquement associé à A alors A est positive(resp. définie positive) si et seulement si f_A est positif(resp. défini positif).
   (b) En déduire une autre caractérisation de A positive(resp. A définie positive) utilisant le spectre de A.

Partie II : Racine carrée d'une matrice symétrique positive

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Démontrer qu'il existe une matrice B symétrique positive tel que $B^2 = A$.
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. On suppose que M est une matrice symétrique positive tel que $M^2 = A$. Soient u et v les endomorphismes respectifs canoniquement associés à A et M.
   (a) Justifier que u et v sont symétriques positifs.
   (b) Montrer que u et v commutent.
   (c) Soit λ une valeur propre de u et on note u_λ l'endomorphisme induit par u sur le sous-espace propre $E_\lambda(u)$. Que peut-on dire de u_λ ?
   (d) Justifier que $E_\lambda(u)$ est stable par v. On note v_λ l'endomorphisme de $E_\lambda(u)$ induit par v.
   (e) Justifier que v_λ est diagonalisable.
   (f) Prouver que v_λ admet une et une seule valeur propre qu'on exprimera en fonction de λ.
3. Déduire de la question précédente que pour toute matrice symétrique positive A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une et une seule matrice symétrique positive B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $B^2 = A$. B sera appelée la racine carrée de A.

Partie III : Application : Décomposition polaire

1. Soit $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.
   Démontrer que si $A = \Omega S$ avec Ω une matrice orthogonale et S une matrice symétrique alors forcément S est la racine carrée de ${}^tAA$.
   (a) Démontrer que si S est la racine carrée de ${}^tAA$ alors S est symétrique définie positive. On pose alors $\Omega = AS^{-1}$. Démontrer que Ω est une matrice orthogonale.

(b) Déduire de ce qui précède que :

$$\forall A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), \exists!(\Omega, S) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \quad A = \Omega S$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier l'existence d'une suite $(A_p) \in (\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{p\to+\infty} A_p = A$.
   (b) Montrer que le groupe orthogonal $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (c) En déduire qu'il existe une suite convergente (Ω_k) de matrices orthogonales tel que $\Omega = \lim\limits_{k\to+\infty} \Omega_k$ est une matrice orthogonale et tel que $\forall k \in \mathbb{N}, A_k = \Omega_k S_k$ où $S_k \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   (d) Démontrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
3. En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = \Omega S$.

Solution

Si v et w sont deux vecteurs quelconques de E, la fonction $\Phi_{v,w}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi_{a,b}(x) = \|xv + w\|$$

est convexe car, si $a, b \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$ alors $\Phi_{v,w}((1-t)a + tb) = \|((1-t)a + tb)v + w\|$ et comme on peut écrire $w = ((1-t) + t)w$, il vient : $\Phi_{v,w}((1-t)a + tb) = \|((1-t)a + tb)v + ((1-t) + t)w\| = \|((1-t)(av + w) + t(bv + w)\|$ et par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\Phi_{v,w}((1-t)a + tb) \leq (1-t)\|av + w\| + t\|bv + w)\| = (1-t)\Phi_{v,w}(a) + t\Phi_{v,w}(b).$$

EXERCICE 288 Une variante de la preuve de $\mathrm{Sp}(A) \neq \emptyset$ pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Titre : Une variante de la preuve de $\mathrm{Sp}(A) \neq \emptyset$ pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ **Difficulté :** ★★☆☆☆
ID : 236 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 222 | ID : 236

Soit $(E, \langle . \rangle)$ un espace euclidien de dimension n avec $n \geq 2$. Soit u un endomorphisme symétrique de E. On se propose de donner une démonstration du fait que $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$. Pour tout $x \in E$, on pose $g(x) = \langle u(x), x \rangle$.

1. Démontrer que si $v_1, v_2 \in E$ tel que $v_1 \neq 0$ et $\forall x \in E, x \perp v_1 \Rightarrow x \perp v_2$ alors $v_2 \in \mathbb{R}v_1$.
2. Justifier que g est continue sur E.
3. Démontrer que si on note S^1 la sphère unité de E alors g est bornée sur S^1 et atteint ses bornes. On note $\lambda = \min\limits_{x \in S^1} g(x)$.
4. Soit $\omega_1 \in S^1$ tel que $g(\omega_1) = \min\limits_{x \in S^1} g(x) = \lambda$. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$ et $x \perp \omega_1$. On pose $\omega_2 = \frac{1}{\|x\|}x$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(t) = \cos(t)\omega_1 + \sin(t)\omega_2$ et $f(t) = g(\varphi(t))$.
   (a) Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Démontrer que f admet un minimum absolu au point $t_0 = 0$. Que vaut $f'(0)$?
   (c) En déduire que $x \perp u(\omega_1)$.
   (d) Montrer que la famille $(\omega_1, u(\omega_1))$ est liée et en déduire que $\mathrm{Sp}(u)$ est non vide.

Solution

1. La condition peut s'écrire $(\mathbb{R}v_1)^\perp \subset (\mathbb{R}v_2)^\perp$, donc $\mathbb{R}v_2 \subset \mathbb{R}v_1$ et en particulier $v_2 \in \mathbb{R}v_1$.
2. Si on munit E d'une base orthonormée alors $g(x)$ est une fonction polynômiale en les coordonnées $x_1, \cdots, x_n$ du vecteur x, donc g est continue.
3. La sphère unité S^1 est une partie fermée et bornée de E, donc elle est compacte car E est de dimension finie, et comme g est continue, g est bornée sur S^1 et atteint ses bornes, en particulier

sa borne inférieure, donc il existe $\omega_1 \in S^1$, tel que $\lambda = g(\omega_1) = \min_{x\in S^1} g(x)$.

4. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car l'expression explicite de f, en tenant compte du fait que u est symétrique et par suite que $\langle u(\omega_1), \omega_2\rangle = \langle \omega_1, u(\omega_2)\rangle$, est pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \cos^2(t)\langle u(\omega_1), \omega_1\rangle + \sin^2(t)\langle u(\omega_2), \omega_2\rangle + \sin(2t)\langle u(\omega_1), \omega_2\rangle$$

(b) On a $f(0) = g(\omega_1) = \lambda \leq g(\varphi(t))$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc $\forall t \in \mathbb{R}, f(0) \leq f(t)$ et par suite $f(0)$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$. Il en découle que $f'(0) = 0$.

(c) L'expression ci-dessus de $f'(t)$ donne $f'(0) = 2\langle u(\omega_1), \omega_2\rangle$. Comme $f'(0) = 0$, on a $u(\omega_1)\perp\omega_1$ et comme x et ω_2 sont colinéaires, on déduit que $x\perp u(\omega_1)$.

(d) On vient de prouver que :

$$\forall x \in E\backslash\{0\}, x\perp\omega_1 \Rightarrow x\perp u(\omega_1)$$

chose vrai aussi pour $x = 0$. En vertu de la question 1), on déduit que $u(\omega_1) \in \mathbb{R}\omega_1$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u(\omega_1) = \alpha\omega_1$, donc $\alpha \in \mathrm{Sp}(u)$, ce qui prouve que $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$.

EXERCICE 289 — Un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$

Titre : Un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ — **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 237 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 223 | ID : 237

On pose $E = \mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R})$ et

$$\forall f,g \in E, \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que $\langle\cdots,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.

(b) On pose $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \mid f \text{ est } \mathscr{C}^2 \text{ et } f'' = f\}$ Montrer que V et W sont supplémentaires et orthogonaux. Exprimer la projection orthogonale sur W.

(c) Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ et

$$E_{\alpha,\beta} = \{f \in E \mid f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$$

Calculer

$$\inf_{f\in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)\mathrm{d}t$$

Solution

(a) Il est aisé de vérifier la bilinéarité, la symétrie et la positivité. La forme linéaire est définie, en effet, si $\langle f,f\rangle = 0$ alors $\int_0^1 (f(t))^2\mathrm{d}t + \int_0^1 (f'(t))^2\mathrm{d}t = 0$, donc $\int_0^1 (f(t))^2\mathrm{d}t = \int_0^1 (f'(t))^2\mathrm{d}t = 0$ et comme f et f' sont continues on a f^2 et f'^2 continues sur $[0,1]$ d'intégrales nulles donc $f = f' = 0$ donc $f = 0$.

(b) Soit $(f,g) \in V \times W$. On a

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g''(t) + f'(t)g'(t)\mathrm{d}t = \left[f(t)g'(t)\right]_0^1 = 0$$

et les espaces V et W sont donc en somme directe. Soit $f \in E$. Posons

$$\lambda = f(0) \text{ et } \mu = \frac{f(1) - f(0)\,\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}(1)}$$

On a $f = g + h$ avec $h = \lambda\mathrm{ch} + \mu\mathrm{sh} \in W$ et $g = f - h \in V$ par construction. Les espaces V et W sont donc supplémentaires orthogonaux et l'on peut introduire la projection orthogonale p sur W. Par ce

qui précède

$$p(f) = f(0)\mathrm{ch} + \frac{f(1) - f(0)\,\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}(1)}\,\mathrm{sh}$$

(c) Soit g la fonction de $E_{\alpha,\beta}$ définie par

$$g = \alpha\mathrm{ch} + \frac{\beta - \alpha\,\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}(1)}\mathrm{sh}$$

Les fonctions de $E_{\alpha,\beta}$ sont alors de la forme $f = g + h$ avec h parcourant V et par orthogonalité de g et h

$$\int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)\mathrm{d}t = \|f\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2$$

On en déduit

$$\inf_{f\in E_{a,\beta}} \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)\mathrm{d}t = \|g\|^2 = \frac{\left(\alpha^2+\beta^2\right)\mathrm{ch}(1) - 2\alpha\beta}{\mathrm{sh}(1)}$$

EXERCICE 290 Un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Titre : Un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ **Difficulté :**
ID : 238 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 224 | ID : 238

n désigne un entier naturel. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t$$

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$
2. Calculer $\langle X^k, X^\ell\rangle$, pour tout $k, \ell \in [\![0, n]\!]$.
3. On suppose dans cette question que $n = 3$. Vérifier que $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ n'est pas orthonormée et trouver par le procédé de Schmidt une base orthonormée $\mathscr{E}$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
4. On suppose toujours que $n = 3$ et soit $F = \mathrm{Vect}(X + 1, -3X + 2)$. Determiner $F^\perp$, le supplémentaire orthogonal de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Solution

1. Il faut prouver que c'est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
   • La forme est bien définie(attention, dans des cas il faut démontrer que c'est bien définie, par exemple qu'on on a des intégrales impropres avec des bornes infinies ou finies mais singulières).

   • Il aisé de prouver que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ est bilinéaire symétrique (Il est conseillé de commencer par prouver la symétrie).
   • Positive : Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a : $\langle P, P\rangle = (P(0))^2 + \int_0^2 (P'(t))^2(t)\mathrm{d}t$ donc $\langle P, P\rangle \geq 0$ (intégrale entre 0 et 1 d'une application continue positive).
   • Définie. Si $\langle P, P\rangle = 0$ alors $P(0) = 0$ et $\int_0^1 (P'(t))^2\mathrm{d}t = 0$. Comme $t \mapsto (P'(t))^2$ est continue positive d'intégrale nulle, elle est nulle, donc $\forall t \in [0, 1],\ P'(t) = 0$. Le polynôme P' admet une infinité de racines dons il est nul donc P est constant et comme $P(0) = 0$ on a $P = 0$.
2. Le calcul donne :

$$\langle X^k, X^\ell\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = \ell = 0 \\ 1 & \text{si} \quad k = 0 \quad \text{et} \quad \ell \neq 0 \\ \frac{k\ell}{k+\ell-1} & \text{si} \quad k\ell \neq 0 \end{cases}$$

3. On suppose dans cette question que $n = 3$. $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ n'est pas orthonormée puisque

par exemple $\langle X^2, X^3\rangle = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. On trouve en utilisant le procédé de Schmidt une base orthonormée $\mathscr{E} = (E_0, E_1, E_2, E_3)$ avec $E_0 = 1, E_1 = X, E_2 = \sqrt{3}(X^2 - X), E_3 = \sqrt{5}(2X^3 - 3X^2 + X)$.

4. Les polynômes $X+1$ et $-3X+2$ sont linéairement indépendants donc ils forment une base de $\mathbb{R}_1[X]$ puisqu'ils appartiennent à $\mathbb{R}_1[X]$. Donc $F = \mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(X+1, -3X+2) = \text{Vect}(E_0, E_1)$ et d'après ce qui précède(question ci-dessus) on a $F^\perp = \text{Vect}(E_2, E_3)$.

EXERCICE 291 — Applications diverses de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Titre : Applications diverses de l'inégalité de Cauchy-Schwarz
ID : 239 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 225 | ID : 239
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$. Démontrer que l'on a les inégalités suivantes :

1. $0 \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leq n$
2. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{\text{rg}\,(A)}$.
3. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leq n^{\frac{3}{2}}$

Solution

1. Soit V le vecteur dont toutes les composantes valent 1.
   - On a : $\langle AV, V\rangle = {}^tVAV = {}^tVA^2V = {}^tV{}^tAAV = \langle AV, AV\rangle = \|AV\|^2 \geq 0$, donc $\sum_{1\leq i,j\leq n} \geq 0$.
   - Soit $b = I_n - A$, alors B est symétrique et $B^2 = B$ donc $\sum b_{i,j} \geq 0$, donc $\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} \leq n$.
2. Soit M la matrice de colonnes $C_k = V$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et $\tilde{A} = (|a_{i,j}|)_{1\leq i,j\leq n}$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\langle M, \tilde{A}\rangle \leq \|M\|^2\|\tilde{A}\|^2$. On a :

$$\begin{aligned}\langle M, \tilde{A}\rangle &= \text{tr}(M\tilde{A}) \\ &= \sum_{j=1}^{n}[M\tilde{A}]_{j,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} M_{j,i}\tilde{A}_{i,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|\end{aligned}$$

   - Par ailleurs, on a $\|M\|^2 = n^2$ et $\|\tilde{A}\|^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} {a_{i,j}}^2 = \text{tr}({}^tAA) = \text{tr}(A^2) = \text{tr}(A) = \text{rg}\,(A)$ car $A^2 = A$, donc A est la matrice d'un projecteur.
   - On a donc $\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{\text{rg}\,(A)}$.
3. Découle du 2) puisque $\text{rg}\,(A) \leq n$.

EXERCICE 292 — Un réel indépendant du choix des bases orthonormées

Titre : Un réel indépendant du choix des bases orthonormées
ID : 240 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 226 | ID : 240
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit E un espace euclidien de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère deux bases orthonormées $\mathscr{B} = (b_1, \dots, b_n)$ et $\mathscr{C} = (c_1, \dots, c_n)$ de E et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que le réel $\alpha_u = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle u(b_i), c_j \rangle^2$ est indépendant des bases orthonormées $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$

Solution

• Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on sait que :

$$u(b_i) = \sum_{j=1}^{n} \langle u(b_i), c_j \rangle$$

et

$$\|u(b_i)\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle u(b_i), c_j \rangle^2$$

Il en découle que

$$\alpha_u = \sum_{i=1}^{n} \|u(b_i)\|^2$$

Si on note $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de u relativement à $\mathscr{B}$, et $B_1, \dots, B_n$ ses colonnes, on a

$$\alpha_u = \sum_{j=1}^{n} \|A_j\|^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \operatorname{tr}({}^t AA)$$

.

• Si on note $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de u relativement à $\mathscr{C}$, comme les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont orthonormée, la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ est une matrice orthogonale et on a $C = {}^tPBP$, donc ${}^tCC = {}^tP{}^tBP{}^tPBP = {}^tP{}^tBBP = P^{-1}{}^tBBP$, donc les matrices ${}^tBB$ et ${}^tCC$ sont semblables et par suite ont même trace et finalement

$$\alpha_u = \sum_{i=1}^{n} \|u(b_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u(c_i)\|^2$$

donc α_u ne dépend pas de la base orthonormée choisie.

EXERCICE 293 Inégalité à la Hadamard

Titre : Inégalité à la Hadamard
ID : 241 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 227 | ID : 241
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que pour toute matrice symétrique positive S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a l'inégalité :

$$1 + \sqrt[n]{\det(S)} \leq \sqrt[n]{\det(I_n + S)}$$

Solution

D'après le théorème spectral, il exste $U \in \mathbf{O}(n)$ et $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$S = {}^tU\Delta U,$$

et comme S est positive, on a $\lambda_k \geq 0$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On a aussi

$$I_n + S = {}^tU(I_n + \Delta)U,$$

et par suite les valeurs propres de $I_n + S$ sont $1+\lambda_1, \dots, 1+\lambda_n$ et on peut alors dire que l'inégalité demandée est équivalente à :

$$(\star\star) \quad \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} (1+\lambda_i)}$$

• S'il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $\lambda_j = 0$, l'inégalité $(\star\star)$ est vérifiée.
• Si $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, considérons l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \ln(1+e^t)$, elle est convexe car deux fois dérivable de dérivée seconde positive puisque

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g''(t) = \frac{e^t}{(e^t+1)^2},$$

donc on peut appliquer l'inégalité de Jensen pour les réels $t_i = \ln(\ln(\lambda_i)$ et dire :

$$g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(\lambda_i)\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\ln(\lambda_i))$$

ce qui donne l'inégalité demandée.

EXERCICE 294 Activités sur l'orthogonal d'une partie

Titre : Activités sur l'orthogonal d'une partie
ID : 371 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 357 | ID : 371
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

1. Si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$.
2. $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
3. $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
4. $F \subset (F^\perp)^\perp$. Montrer que c'est une égalité si E est de dimension finie et donner un exemple où l'inclusion est stricte.

Solution

1. Supposons que $F \subset G$, pour tout $x \in G^\perp$ si $y \in F$ alors $y \in G$, donc $x \perp y$, par suite $x \in F^\perp$, donc $G^\perp \subset F^\perp$.
2. Tout d'abord, comme $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$, on a par la question 1) : $(F+G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F+G)^\perp \subset G^\perp$, donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$. Réciproquement soit $x \in E$ tel que $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Pour tout $y +\infty F+G$, il existe $(y', y'') \in F \times G$ tel que $y = y' + y''$, donc $\langle x, y\rangle = \langle x, y'y''\rangle = \langle x, y'\rangle + \langle x, y''\rangle = 0$ donc $x \in (F+G)^\perp$. Ainsi on a $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
3. On a $\begin{cases} F \cap G \subset F \\ F \cap G \subset G \end{cases}$. Par la question 1), on déduit : $\begin{cases} F^\perp \subset (F \cap G)^\perp \\ G \cap G)^\perp \end{cases}$, donc $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Il en découle que $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.
4. Soit $x \in F$. Pour tout $y \in F^\perp$, on a $x \perp y$, donc $x \in (F^\perp)^\perp$, donc $F \subset (F^\perp)^\perp$.
   • Si F est de dimension finie on sait que $F \oplus F^\perp = E$ et $F^\perp + (F^\perp)^\perp = E$, donc $\dim((F^\perp)^\perp) = \dim(E) - \dim(F^\perp) = \dim(E) - (\dim(E) - \dim(F)) = \dim(F)$. On a $F \subset (F^\perp)^\perp$ et $\dim(F) = \dim((F^\perp)^\perp)$, donc $F = (F^\perp)^\perp$.
   • Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ et $F = X\mathbb{R}[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(0) = 0\}$. On va démontrer que $F^\perp = \{0\}$: Soit $Q \in F^\perp$, comme $XQ \in F$, on a $\langle Q, XQ\rangle = 0$, donc $\int_0^1 tQ(t)Q(t)\mathrm{d}t = 0$, donc $\int_0^1 t(Q(t))^2\mathrm{d}t = 0$ et comme $t \mapsto t(Q(t))^2$ est continue positive sur $[0,1]$, elle est nulle, donc Q est nulle sur $]0,1]$ et comme c'est un polynôme

on a $Q = 0$, donc $F^\perp = \{0\}$ et alors $(F^\perp)^\perp = E$ et comme $F \neq E$, on a $F \subsetneq E$.

EXERCICE 295 Distance d'une matrice à $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

Titre : Distance d'une matrice à $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.
ID : 473 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 456 | ID : 473
Difficulté : ★☆☆☆☆

On munit $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.

1. Déterminer l'orthogonal de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.

Solution

Le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est défini par :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2, (A \mid B) = \operatorname{Tr}\left({}^tAB\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

1. Déterminons l'orthogonal de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $(A, B) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \times \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

$$(A \mid B) = \operatorname{Tr}\left({}^tAB\right) = \operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA) = -\operatorname{Tr}\left({}^tBA\right) = -(B \mid A).$$

et donc $(A \mid B) = 0$. Donc $\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) \subset (\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))^\perp$ et comme de plus, $\dim(\mathscr{S}_3(\mathbb{R})) = \dim\left(\left((\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))^\perp\right)\right)$, on a montré que

$$(\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))^\perp = \mathscr{S}_3(\mathbb{R})$$

2. Ainsi, la projection orthogonale de M sur $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ est exactement la partie antisymétrique $p_a(M)$ de M et la distance cherchée est la norme de $M - p_a(M) = p_s(M)$ avec

$$p_s(M) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$d(M, \mathscr{A}_3(\mathbb{R})) = \|p_s(M)\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 1.$$

EXERCICE 296 Utilisation de la compacité du groupe orthogonal

Titre : Utilisation de la compacité du groupe orthogonal
ID : 497 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 479 | ID : 497
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier qu'il existe $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\operatorname{tr}(A\Omega) \geq \operatorname{tr}(AU)$ pour toute matrice $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que la matrice $S = A\Omega$ est alors symétrique à valeurs propres positives. On pourra commencer par étudier le cas $n = 2$.

Solution

1. La fonction $f : U \mapsto \mathrm{tr}(AU)$ est linéaire donc continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Sa restriction au départ du compact non vide $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est donc bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$f(\Omega) = \mathrm{tr}(A\Omega) \geq \mathrm{tr}(AU) = f(U) \quad \text{pour tout } U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$$

2. Posons $S = A\Omega$. Puisque $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe, le résultat qui précède donne

$$\forall U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(S) \geq \mathrm{tr}(SU)$$

Cas : $n = 2$. On écrit

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

et donc $\mathrm{tr}(S) \geq \mathrm{tr}(SR(\theta))$ ce qui donne

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, a + d \geq (a + d)\cos(\theta) + (b - c)\sin(\theta) = \varphi(\theta)$$

La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et présente un maximum en $\theta = 0$ donc

$$\varphi'(0) = b - c = 0$$

On en déduit que $b = c$: la matrice S est symétrique. La matrice S est alors orthogonalement diagonalisable : on peut écrire

$$S = PDP^\top \text{ avec } P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \text{ et } D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

D'une part,

$$\mathrm{tr}(S) = \mathrm{tr}\left(PDP^\top\right) = \mathrm{tr}\left(DP^\top P\right) = \mathrm{tr}(D)$$

D'autre part, pour $U \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$

$$\mathrm{tr}(SU) = \mathrm{tr}\left(PDP^\top U\right) = \mathrm{tr}\left(DP^\top UP\right) = \mathrm{tr}(DV) \text{ avec } V = P^\top UP$$

et l'on a

$$\mathrm{tr}(D) \geq \mathrm{tr}(DV)$$

On peut considérer $V = \mathrm{diag}(-1, 1)$ (ou plus exactement $U \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^\top UP$ corresponde à cette matrice V) et la comparaison qui précède donne

$$\alpha + \beta \geq -\alpha + \beta$$

et donc $\alpha \geq 0$. On montre de même $\beta \geq 0$. Finalement, la matrice S est symétrique à valeurs propres positives. Cas général : On suit la même démarche !

EXERCICE 297 Oral, centrale, MP

Titre : Oral, centrale, MP
ID : 506 **Durée :** —
Difficulté : ★★☆☆☆

Niveau : L2 | N° : 488 | ID : 506

Soit n dans $\mathbb{N}^*$, $a = (a_1, \cdots, a_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, et

$$M(a) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

On dit qu'une matrice symétrique réelle d'ordre n est :

— positive si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geq 0$

— définie-positive si : $\forall X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX > 0$

Dans les questions 1)a) et 1)b) on étudie le rang de$M(a)$

Question 1.a
On suppose $a_i \neq a_{i+1}$ pour tout $i \in [\![1, \ldots, n-1]\!]$. Montrer que $M(a)$ est inversible.

Question 1.b Dans le cas général, donner une méthode donnant rg$(M(a)$ en fonction de $(a_1, \cdots, a_n)$
Dans les questions 2)a) à 2)d), on étudie le caractère positif de la matrice symétrique $M(a)$

Question 2.a
Montrer que si $M(a)$ est positive alors $a_i \geq 0$ pour tout i de $\{1, \cdots, n\}$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} a_i & a_{i+1} \\ a_{i+1} & a_{i+1} \end{pmatrix}$ est positive pour tout i de $\{1, \cdots, n-1\}$

Question 2.b
En déduire que si $M(a)$ est positive alors :

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$$

Question 2.c

Établir la réciproque par récurrence, avec $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients tous égaux à 1 .

Question 2.d
À quelles conditions la matrice $M(a)$ est-elle symétrique définie positive ?

Solution

1)a) On réalise les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$, pour i allant de 1 à $n-1$. On en déduit que M est équivalente à une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont :

$$a_1 - a_2, a_2 - a_3, \cdots, a_{n-1} - a_n \text{ et } a_n$$

$$\text{Conclusion : le rang vaut } \begin{cases} n \text{ si } a_n \neq 0 \\ n-1 \text{ si } a_n = 0 \end{cases}$$

1)b) Supposons $a_i = a_{i+1}$. Alors la colonne i est égale à la colonne $i+1$, et il en est de même pour les lignes.
On peut donc supprimer par exemple la ligne et la colonne $i+1$ sans changer le rang. Ceci montre que pour calculer le rang de $M(a)$, on supprime toutes les répétitions consécutives dans la liste a et on applique la question précédente en testant si le dernier est nul ou pas.

2)a)Immédiat en choisissant X dans Vect (e_i), puis dans Vect (e_i, e_{i+1}).

2)b) Si on choisit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors :

$$ {}^tX \begin{pmatrix} a_i & a_{i+1} \\ a_{i+1} & a_{i+1} \end{pmatrix} X = a_i - a_{i+1} \geq 0$$

donc $a_i \geq a_{i+1}$. Sachant que les a_i sont positifs, on trouve bien :

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$$

2)c) La réciproque est évidente en taille 1. Supposons qu'elle soit vraie en taille $n-1$. Soient $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$. Notons $N = M(a) - a_n J$. On a alors $N = \begin{pmatrix} M' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où :

$$M' = M\left(a_1 - a_2, \cdots, a_{n-1} - a_n\right)$$

Avec l'hypothèse de récurrence, M' est positive. Il est alors clair que N l'est aussi. Or $M(a) = N + a_n J$. Sachant que $a_n \geq 0$ et N est positive on en déduit, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} {}^tXM(a)X &= {}^tXNX + a_n {}^tXJX \\ &= {}^tXNX + a_n \left(x_1 + \cdots + x_n\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

On a donc bien montré que $M(a)$ est positive.

2)d) Déjà nécessairement $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0 \\ \operatorname{rg}(M(a)) = n \end{cases}$ On obtient donc grâce à (1) la condition nécessaire :

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$$

EXERCICE 298 Matrices tel que $\langle MX, X\rangle = 0$ pour tout vecteur X.

Titre : Matrices tel que $\langle MX, X\rangle = 0$ pour tout vecteur X.
ID : 547 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 528 | ID : 547
Difficulté : ★★☆☆☆

n est un entier naturel non nul et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie $\langle AX, X\rangle = 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ alors $A = 0$.
2. Soit $\Lambda = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \langle MX, X\rangle = 0, \forall X \in \mathbb{R}^n\}$.
   (a) Montrer que Λ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Determiner $\dim(\Lambda)$.

Solution

1. Soit λ une valeur propre de M et V un vecteur propre associé à λ, alors $\langle MV, V\rangle = 0 = \lambda\|V\|^2$, donc, $\lambda = 0$. Il en découle que $\operatorname{Sp}(M) = \{0\}$ et comme M est diagonalisable on a $M = 0$.
2. Soit $\Lambda = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \langle MX, X\rangle = 0, \forall X \in \mathbb{R}^n\}$.
   (a) On a $0 \in \Lambda$ et si $M_1, M_2 \in \Lambda$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle (M_1 + \lambda M_2)X, X\rangle = \langle M_1 X, X\rangle + \lambda\langle M_2 X, X\rangle = 0$, donc $M_1 + \lambda M_2 \in \Lambda$, donc Λ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Soit $M \in \Lambda$ alors $M + M^\top \in \Lambda$, en effet pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\begin{aligned}\langle (M+M^\top)X, X\rangle &= \langle MX, X\rangle + \langle M^\top X, X\rangle \\ &= \langle M^\top X, X\rangle = X^\top M^\top X \\ &= (X^\top M^\top X)^\top = X^\top MX \\ &= \langle MX, X\rangle = 0.\end{aligned}$$

Ainsi on a $M+M^\top \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et réalise $\forall X \in \mathbb{R}^n, \langle (M+M^\top)X, X\rangle = 0$, d'après la question 1) on a $M+M^\top = 0$ donc M est antisymétrique donc $\Lambda \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, réciproquement si A est une matrice antisymétrique alors pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\langle AX, X\rangle = (AX)^\top X = X^\top A^\top X = -\langle AX, X\rangle,$$

donc $\langle AX, X\rangle = 0$ et $A \in \Lambda$, donc $\Lambda = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\dim(\Lambda) = \frac{n(n-1)}{2}$.

EXERCICE 299 Matrices antisymétriques

Titre : Matrices antisymétriques
ID : 683 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 664 | ID : 683
Difficulté : ★★☆☆☆

On se fixe un entier naturel non nul n et une matrice $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que A est antisymétrique. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et toute matrice carrée B d'ordre n, on a $X^\top BX = X^\top B^\top X$. En déduire que $X^\top AX = 0$.
2. Soit une matrice colonne X telle que $(A+I)X = 0$. En calculant $X^\top(A+I)X$ de deux manières différentes, montrer que $X = 0$.
3. En déduire que $A+I$ est inversible.
4. Montrer que la matrice $B = (I-A)(I+A)^{-1}$ est orthogonale.
5. Calculer $(I+B)(I+A)$. En déduire que $I+B$ est inversible.
6. Réciproquement, soit B une matrice orthogonale telle $I+B$ soit inversible. On considère la matrice $C = (I+B)^{-1}(I-B)$. Montrer que l'on a $C^\top = I - B^{-1} - C^\top B^{-1}$, puis que la matrice C est antisymétrique.

Solution

1. Soit X $\in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a $X^\top BX \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, donc cette matrice est nécessairement symétrique. Autrement dit, on a

$$X^\top BX = (X^\top BX)^\top = X^\top B^\top X^{\top\top} = X^\top B^\top X$$

En appliquant cette relation à la matrice antisymétrique, A, on obtient $X^\top AX = X^\top A^\top X = -X^\top AX$, d'où l'on déduit $X^\top AX = 0$.

2. On a d'une part $X^\top(A+I)X = X^\top 0_{n,1} = 0$, d'autre part, $X^\top(A+I)X = X^\top AX + X^\top IX = X^\top X$ car on a prouvé que $X^\top AX = 0$. Il en découle que $X^\top X = 0$, donc $\|X\|^2 = 0$ et finalement $X = 0_{n,1}$.
3. La question précédente montre exactement que $\ker(A+I) = \{0_{n,1}\}$. On en déduit $A+I \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.
4. On a (en notant notamment que la transposition est linéaire, et que la transposée d'une matrice M inversible est elle-même inversible, avec $(M^\top)^{-1} = (M^{-1})^\top$. On a $B = (I-A)(I+A)^{-1}$,

donc

$$\begin{aligned} B^\top = [(I-A)(I+A)^{-1}]^\top &= [(I+A)^{-1}]^\top (I-A)^\top \\ &= [(I+A)^\top]^{-1}(I-A)^\top \\ &= (I-A)^{-1}(I+A). \end{aligned}$$

Il en découle que $B^\top B = [(I-A)^{-1}(I+A)][(I-A)(I+A)^{-1}]$. En utilisant l'associativité du produit matriciel et le fait que les matrices $I+A$ et $I-A$ commutent, on a $B^\top B = (I-A)^{-1}(I-A)][(I+A)(I+A)^{-1} = I.I = I$, ce qui montre que B est orthogonale.

5. On a

$$\begin{aligned} (I+B)(I+A) &= I+A+B(I+A) \\ &= I+A+(I-A)(I+A)^{-1}(I+A) \\ &= I+A+I-A \\ &= 2I \end{aligned}$$

ce qui montre que $I+B$ est inversible, d'inverse $\frac{1}{2}(I+A)$.

6. De $C = (I+B)^{-1}(I-B)$, on déduit $(I+B)C = I-B$. Il en résulte que l'on a $C^\top(I+B)^\top = (I-B)^\top$, donc $C^\top(I+B^\top) = I-B^\top$. Comme la matrice B est une matrice orthogonale on a $B^\top = B^{-1}$, par suite $C^\top(I+B^{-1}) = I-B^{-1}$, donc $C^\top + C^\top B^{-1} = I-B^{-1}$ et finalement $C^\top = I-B^{-1}-C^\top B^{-1}$.

   On a

$$\begin{aligned} C^\top &= (I-B)^\top((I+B)^{-1})^\top \\ &= \left(I-B^{-1}\right)\left(I+B^{-1}\right)^{-1} \\ &= (B-I)B^{-1}\left((B+I)B^{-1}\right)^{-1} \\ &= (B-I)B^{-1}B(B+I)^{-1} \\ &= -(I-B)(I+B)^{-1} \\ &= -(I+B)^{-1}(I-B) \\ &= -C \end{aligned}$$

la relation de commutation utilisée à l'avant-dernière ligne provenant du fait que, puisqu'une matrice inversible commute toujours avec son inverse, les matrices $(I+B)^{-1}$ et $I+B$ commutent. Comme $I-B = 2I-(I+B)$ est une combinaison linéaire de I et de $I+B$, elle commute également avec $(I+B)^{-1}$.

EXERCICE 300 Propriété cractéristique des matrices positives

Titre : Propriété cractéristique des matrices positives
ID : 684 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 665 | ID : 684
Difficulté : ★★☆☆☆

n est un entier naturel non nul. On se propose de démontrer que pour toute matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a S est symétrique positive si et seulement si

$$\forall M \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(SM) \leq \operatorname{tr}(S).$$

On munit l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique et on rappelle que $\langle X, Y\rangle = \operatorname{tr}(X^\top Y)$ défini un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer l'implication directe.
2. Démontrer que si A est une matrice antisymétrique alors e^A est une matrice orthogonale.

3. Démontrer que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$, la matrice $\Omega_x = I_n - 2xx^\top$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$..
4. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(SM) \leq \operatorname{tr}(S).$$
et soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Démontrer que l'application $u : t \mapsto \operatorname{tr}(e^{tA})$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $u'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Justifier que $u'(0) = 0$ et en déduire que $\langle S, A \rangle = 0$
   (c) Démontrer que $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   (d) Soit λ une valeur propre de S et x un vecteur propre de S associé à λ tel que $\|x\| = 0$. En utilisant la matrice Ω_x définie dans la question 3) ci-dessus prouver que $\lambda \geq 0$
5. Conclure.

Solution

1. Supposons que S est symétrique positive et soit $M \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ alors $\operatorname{tr}(\Omega S) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_{i,j}\Omega_{j,i}$.
2. Soit A est une matrice antisymétrique alors $(e^A)^\top e^A = e^{A^\top} e^A = e^{A^\top + A} = e^{O_n} = I_n$, donc e^A est une matrice orthogonale.
3. $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$. Soit $\Omega_x = I_n - 2xx^\top$, alors ${\Omega_x}^\top = \Omega_x$, donc ${\Omega_x}^\top \times \Omega_x = \Omega_x^2 = I_n - 4xx^\top + 4(xx^\top)^2 = I_n - 4xx^\top + 4xx^\top = I_n$, donc Ω_x est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(SM) \leq \operatorname{tr}(S).$$
et soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) L'application $t \mapsto tA$ est linéaire donc de classe C^1, exp et tr sont de classe C^1, donc l'application $u : t \mapsto \operatorname{tr}(e^{tA})$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $u'(t) = \operatorname{tr}(Ae^{tA})$.
   (b) On a $u(0) = \operatorname{tr}(S)$ est un maximum de u, donc $u'(0) = 0$, donc $\operatorname{tr}(SA) = 0$, donc $\langle S, A \rangle = 0$
   (c) On a prouvé ci-dessus que $\forall A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), A \perp S$, donc $S \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp$, or $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, donc $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   (d) Soit λ une valeur propre de S et x un vecteur propre de S associé à λ tel que $\|x\| = 0$. On a $\Omega_x \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, donc $\operatorname{tr}(S) \geq \operatorname{tr}(S\Omega_x)$, or $S\Omega_x = S - Sxx^\top = S - \lambda xx^\top$, donc $\operatorname{tr}(S) \geq \operatorname{tr}(S) - \lambda$, donc $\lambda \geq 0$.
5. On a démontré que pour toute matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si S est symétrique positive alors elle vérifie la condition ci-dessus et réciproquement si S vérifie la condition ci-dessus alors S est symétrique et toutes les valeurs propres de S sont positives, c'est-à-dire S symétrique positive. On donc démontré l'équivalence souhaitée.

EXERCICE 301 Propriété cractéristique des matrices positives

Titre : Propriété cractéristique des matrices positives
Difficulté : ★★☆☆☆
ID : 691 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 672 | ID : 691

n est un entier naturel non nul. On se propose de démontrer que pour toute matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a S est symétrique positive si et seulement si
$$\forall M \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(SM) \leq \operatorname{tr}(S).$$
On munit l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique et on rappelle que $\langle X, Y \rangle = \operatorname{tr}(X^\top Y)$ défini un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer l'implication directe.
2. Démontrer que si A est une matrice antisymétrique alors e^A est une matrice orthogonale.
3. Démontrer que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$, la matrice $\Omega_x = I_n - 2xx^\top$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$..
4. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(SM) \leq \operatorname{tr}(S).$$
et soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Démontrer que l'application $u : t \mapsto \operatorname{tr}(e^{tA})$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $u'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Justifier que $u'(0) = 0$ et en déduire que $\langle S, A\rangle = 0$
   (c) Démontrer que $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   (d) Soit λ une valeur propre de S et x un vecteur propre de S associé à λ tel que $\|x\| = 0$. En utilisant la matrice Ω_x définie dans la question 3) ci-dessus prouver que $\lambda \geq 0$
5. Conclure.

Solution

1. Supposons que S est symétrique positive et soit $M \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ alors $\operatorname{tr}(\Omega S) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_{i,j}\Omega_{j,i}$.
2. Soit A est une matrice antisymétrique alors $(e^A)^\top e^A = e^{A^\top} e^A = e^{A^\top + A} = e^{O_n} = I_n$, donc e^A est une matrice orthogonale.
3. $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$. Soit $\Omega_x = I_n - 2xx^\top$, alors ${\Omega_x}^\top = \Omega_x$, donc ${\Omega_x}^\top \times \Omega_x = \Omega_x^2 = I_n - 4xx^\top + 4(xx^\top)^2 = I_n - 4xx^\top + 4xx^\top = I_n$, donc Ω_x est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(SM) \leq \operatorname{tr}(S).$$
et soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) L'application $t \mapsto tA$ est linéaire donc de classe C^1, exp et tr sont de classe C^1, donc l'application $u : t \mapsto \operatorname{tr}(e^{tA})$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $u'(t) = \operatorname{tr}(Ae^{tA})$.
   (b) On a $u(0) = \operatorname{tr}(S)$ est un maximum de u, donc $u'(0) = 0$, donc $\operatorname{tr}(SA) = 0$, donc $\langle S, A\rangle = 0$
   (c) On a prouvé ci-dessus que $\forall A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), A \perp S$, donc $S \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp$, or $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, donc $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   (d) Soit λ une valeur propre de S et x un vecteur propre de S associé à λ tel que $\|x\| = 0$. On a $\Omega_x \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, donc $\operatorname{tr}(S) \geq \operatorname{tr}(S\Omega_x)$, or $S\Omega_x = S - Sxx^\top = S - \lambda xx^\top$, donc $\operatorname{tr}(S) \geq \operatorname{tr}(S) - \lambda$, donc $\lambda \geq 0$.
5. On a démontré que pour toute matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si S est symétrique positive alors elle vérifie la condition ci-dessus et réciproquement si S vérifie la condition ci-dessus alors S est symétrique et toutes les valeurs propres de S sont positives, c'est-à-dire S symétrique positive. On donc démontré l'équivalence souhaitée.

Chapitre 006 — Séries numériques et intégrales impropres (L2)

EXERCICE 302 **Une série avec suite récurrente**

Titre : Une série avec suite récurrente
ID : 14 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 3 | ID : 14
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $a \in]0,1[$ et (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{2} \end{cases}$$

Démontrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

Solution

Si $f(t) = \frac{t+t^2}{2}$ alors $f'(t) = \frac{1}{2} + t$ donc f est strictement croissante sur $[0,1]$ et comme $u(0) = 0$ et $f(1) = 1$, on a $f([0,1]) = [0,1]$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \in [0,1]$.
Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n-1} - u_n = f(u_n) - u_n$ or $\forall t \in [0,1], f(t) - t = \frac{t^2 - t}{2} \leq 0$, donc la suite (u_n) est décroissante, comme elle est positive elle est convergente et par continuité de f sa limite ℓ et solution de l'équation $f(t) = t$ donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$ et comme $u_0 = a < 1$, on a forcément $\ell = 0$, donc (u_n) converge vers 0.
Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} + u_n$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$, et par la règle de D'Alembert la série $\sum u_n$ est convergente.

EXERCICE 303 Série dont le terme général sous forme d'une intégrale

Titre : Série dont le terme général sous forme d'une intégrale
ID : 29 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 16 | ID : 29
Difficulté : ★★☆☆☆

Quelle est la nature de la série numérique $\sum u_n$ où $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3(t)}{1+t} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\forall t \in [0, \frac{\pi}{n}], |\sin^3(t)| \leq t^3 \leq (\frac{\pi}{n})^3$, donc $|u_n) = u_n \leq (\frac{\pi}{n})^3 \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{1+t} dt \leq \frac{\pi^4}{n^4}$ et comme la série de Riemanne $\sum \frac{1}{n^4}$ est convergente, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

EXERCICE 304 Une liste d'intégrales généralisées

Titre : Une liste d'intégrales généralisées
ID : 242 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 228 | ID : 242
Difficulté : ★★☆☆☆

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 t^\alpha \ln t \, dt$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $\int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta dt$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. $\int_0^1 \frac{t^\alpha + (1-t)^\beta}{t^\alpha (1-t)^\beta} dt$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
4. $\int_0^1 \frac{|\ln(t)|^\gamma}{t^\alpha (1-t)^\beta} dt$, avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
5. $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2} dt.$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
6. $\int_0^{+\infty} x(\sin x) e^{-x} dx$.
7. $\int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} dt$.
8. $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$.
9. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t - 1} dt$.
10. $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$.
11. $\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$.
12. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$.

13. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \mathrm{d}x$.
14. $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{nt}} \mathrm{d}t, n \in \mathbb{N}$.
15. $\int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{t}} \mathrm{d}t$.
16. $\int_0^{+\infty} \left(1 + t \ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right) \mathrm{d}t$.
17. $\int_2^{+\infty} (\sqrt{x^4+x^2+1} - x\sqrt[3]{x^3+ax}) \mathrm{d}x$ où $a \in \mathbb{R}$.
18. $\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$.

Solution

1. la fonction $f : t \mapsto f(t) = t^\alpha \ln t$ est continue négative sur l'intervalle $]0,1]$. L'intégrale demandée est impropre en 0.
   • Au voisinage de 0 à droite :
   • Si $\alpha > -1$, soit β tel que $-1 < \beta < \alpha$, alors $f(t) = o(t^\beta)$ car $\frac{f(t)}{t^\beta} = t^{\alpha-\beta}\ln(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ car $\alpha - \beta > 0$, et comme $\int_0^1 t^\beta \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{t^{-\beta}} \mathrm{d}t$ est convergente(car $-\beta < 1$), l'intégrale $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.
   • si $\alpha < -1$ alors en prenant β tel que $\alpha < \beta < -1$ on a $t^\beta = o(f(t))$ car $\frac{t^\beta}{f(t)} = \frac{t^{\beta-\alpha}}{\ln t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ car $\alpha - \beta > 0$ car $\beta > \alpha$, et comme $\int_0^1 t^\beta \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{t^{-\beta}} \mathrm{d}t$ est divergente (car $-\beta > 1$), l'intégrale $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ est divergente.
2. La fonction $f : t \mapsto f(t) = t^\alpha(1-t)^\beta$ est cntinue sur $]0,1[$. L'intégrale $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ est généralement impropre aux deux bornes 0 et 1.
   • Quand t tend vers 0 à droite on a $f(t) \sim t^\alpha$, donc $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)$ converge si et seulement si $-\alpha < 1$ si et seulement si $\alpha > -1$.
   • Quand t tend vers 1 à gauche, on a $f(t) \sim (1-t)^\beta$ donc $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\beta > -1$.
   • Il découle de cette étude que $\int_0^f f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > -1$ et $\beta > -1$.
3. L'intégrale $\int_0^1 \frac{t^\alpha+(1-t)^\beta}{t^\alpha(1-t)^\beta} \mathrm{d}t$. Notons

$$f(t) = \frac{t^\alpha + (1-t)^\beta}{t^\alpha(1-t)^\beta},$$

   pour tout $t \in]0,1[$.
   • On voit que f est continue sur $]0,1[$ et que l'intégrale présente un problème aux deux bornes, donc on va étudier la convergence de $\int_0^c f(t)\mathrm{d}t$ et celle de $\int_c^1 f(t)\mathrm{d}t$ où c est un réel tel que $0 < c < 1$.
   • Observez que f est le produit de trois quantités :

$$\begin{cases} f_1(t) = t^\alpha + (1-t)^\beta \\ f_2(t) = \frac{1}{t^\alpha} \\ f_3(t) = \frac{1}{(1-t)^\beta} \end{cases}.$$

   - Etude au voisinage de 0
   • Au voisinage de 0 on peut dire que $f_3(0) = 1$ et que $f_1(0)$ et $f_2(0)$ ne sont pas toujours définis(si par exemple $\alpha < 0$), on prend donc l'équivalent $f(t) \sim \frac{f_1(t)}{f_2(t)} = \frac{t^\alpha+(1-t)^\beta}{t^\alpha}$.
   • On va ensuite donner un équivalent simple de $f_1(t)$ selon le cas, pour cela remarquons que $f_1(t) = t^\alpha + (1-t)^\beta$est la somme de deux quantité tel que la deuxième tend vers 1 quand t tend vers 0.
   • Si $\alpha > 0$, on observe que $t^\alpha = o(1)$, donc $f_1(t) \sim 1$ et $f(t) \sim \frac{1}{t^\alpha}$, par suite $\int_0^c f(t)\mathrm{d}t$ CV si $\alpha < 1$ et $\int_0^c f(t)\mathrm{d}t$ DV si $\alpha > 1$.
   • Si $\alpha < 0$ alors $\lim\limits_{t\to 0^+} t^\alpha = +\infty$, donc $1 = o(t^\alpha)$ et $f_1(t) \sim t^\alpha$ et $f(t) \sim 1$, donc $\int_0^c f(t)\mathrm{d}t$ CV Il en découle que $\int_0^c f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

- Etude au voisinage de 1

On suivant la même démarche, on trouve que $\int_c^1 f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\beta < 1$ et comme conclusion $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$ et $\beta < 1$.

4. La fonction $t \mapsto f(t) = \frac{|\ln(t)|^\gamma}{t^\alpha(1-t)^\beta}$ est continue sur $]0,1[$ et au voisinage de 0, on a $f(t) \sim \frac{|\ln(t)|^\gamma}{t^\alpha}$ et au voisinage de 1 à droite $\ln(t) = \ln(1+(t-1)) \sim t-1$, donc $|f(t)| \sim \frac{(1-t)^\gamma}{t^\alpha(1-t)^\beta} = \frac{1}{t^\alpha(1-t)^{\beta-\gamma}} \sim \frac{1}{(1-t)^{\beta-\gamma}}$, en résumé on a :

$$\begin{cases} |f(t)| \sim \frac{|\ln(t)|^\gamma}{t^\alpha}, \text{ quand } t \to 0^+ \\ |f(t)| \sim \frac{1}{(1-t)^{\beta-\gamma}} \text{ quand } t \to 1^- \end{cases}$$

donc par critères de comparaison, on a $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$ ou $\alpha = 1$ et $\gamma < -1$ et $\beta - \gamma < 1$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \alpha < 1 \\ \beta < \gamma + 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \gamma < -1 \\ \beta < \gamma + 1 \end{cases}$$

5. $f : t \mapsto t^\alpha e^{-t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et au voisinage de 0, on a $f(t) \sim t^\alpha = \frac{1}{t^{-\alpha}}$, donc $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $-\alpha < 1$ si et seulement si $\alpha > -1$. Au voisinage de $+\infty$, on a $t^\alpha e^{-t^2} = \mathrm{o}(\frac{1}{t^2})$, donc $\int_1^{+\infty} f(t)$ converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. En combinant les deux résultats on a $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\alpha > -1$.
6. $\int_0^{+\infty} x(\sin x)e^{-x}\mathrm{d}x$: La fonction $f : x \mapsto x(\sin x)e^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Le problème de l'intégrale est uniquement à la borne $+\infty$, au voisinage de laquelle on a $|x^2 f(x)| \leq x^3 e^{-x^2}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2|f(x)| = 0$, donc $|f(x)| = \mathrm{o}(\frac{1}{x^2})$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est convergente.
7. $\int_0^{+\infty} (\ln t)e^{-t}\mathrm{d}t$. L'application $f : t \mapsto (\ln t)e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $f(t) \sim \ln(t)$ au voisinage de 0 et $f(t) = \mathrm{o}(\frac{1}{t^2})$ au voisinage de $+\infty$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln t)e^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente, par critères de comparaison et le fait que $t \mapsto \ln(t)$ est integrable sur $]0,1]$.
8. $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\mathrm{d}t$. L'application $f : t \mapsto \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}$ est continue sur l'intervalle $]0,1[$, et au voisinage de 0 on a $f(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ et au voisinage de 1, on a $f(t) \sim \frac{1}{1-t}$. Il en découle que $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ est divergente car $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t$ est divergente.
9. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t-1}\mathrm{d}t$. L'application $t \mapsto \frac{1}{e^t-1}\mathrm{d}t$ est continue sur $]0,+\infty[$ et au voisinage de 0 on a $e^t = 1 + t + \mathrm{o}(t)$, donc $e^t - 1 \sim t$, par suite $f(t) \sim \frac{1}{t}$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t-1}\mathrm{d}t$ est divergente.
10. $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}dt$. La fonction $f : t \mapsto \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}$ est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Le problème est uniquement à la borne $+\infty$. Au voisinage de $+\infty$, on a $f(t) \sim \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}$, donc $t^2 f(t) \sim te^{-\sqrt{t}}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f(t) = 0$, donc $f(t) = \mathrm{o}(\frac{1}{t^2}$, par suite l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}dt$ est convergente.
11. $\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$. La fonction $f : t \mapsto \cos^2\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue sur l'intervalle $]0,1]$, de plus on a $\forall t \in]0,1], |f(t)| \leq 1$. Par critère de comparaison et que $t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0,1]$, on af est intégrable sur $]0,1)$, en particulier l'intégrale $\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ est convergente.
12. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t$. L'application $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t^2+1}$ est continue sur $]0,+\infty[$, et au voisinage de 0, on a $f(t) \sim \ln(t)$ et au voisinage de $+\infty$, on a $f(t) \sim \frac{\ln(t)}{t^2}$. Il en découle que $|t^{\frac{3}{2}} f(t)| \leq \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f(t) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$, donc $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.
13. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. L'application $f : x \mapsto \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$ est continue sur $]1,+\infty[$. Au voisinage de 1, on a $f(x) \sim \frac{\sqrt{\ln x}}{x-1}\ln(x) = \ln(1+x-1) \sim x-1$, donc $\sqrt{\ln(x)} \sim \sqrt{x-1}$ et par suite

$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}$, donc $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ est convergente. Par ailleurs, au voisinage de $+\infty$, on a $f(x) \sim \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x\sqrt{x}}$ il en découle que $x^{\frac{5}{4}} f(x) \sim \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x^{\frac{1}{4}}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f(x) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^{\frac{5}{4}}}\right)$, donc l'intégrale est convergente.

14. $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{nt}}\mathrm{d}t$. La fonction $f : t \mapsto e^{-\sqrt{nt}}$ est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Si $n = 0$ alors $f(t) = 1$ pour tout $t \in [0,+\infty[$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est divergente. Si $n \geq 1$, alors et au voisinage de $+\infty$, on a $f(t) = 0\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

15. $\int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{t}}\mathrm{d}t$. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1-\sqrt{t}}$ est continue sur l'intervalle $[0,1[$. Remarquons que pour t voisin de 1, on a $f(t) = \frac{1+\sqrt{t}}{1-t} \sim \frac{2}{1-t}$, donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ diverge.

16. $\int_0^{+\infty} \left(1 + t\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right)\mathrm{d}t$. La fonction $f : t \mapsto 1 + t\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)$ est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Au voisinage de 0 on a $f(t) = 1 + t\ln(t) - t\ln(t+1)$, donc $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 1$, il en découle qu'il n'y a pas de problème au voisinage de 0. Au voisinage de $+\infty$ on a $f(t) = 1 - \ln(1+\frac{1}{t}) = 1 - \frac{1}{t} + \mathrm{o}(\frac{1}{t})$, donc $f(t) \sim 1$ et comme la fonction constante $t \mapsto 1$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$, donc finalement l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(1 + t\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right)\mathrm{d}t$ est divergente.

17. $\int_2^{+\infty} (\sqrt{x^4+x^2+1} - x\sqrt[3]{x^3+ax})\mathrm{d}x$ où $a \in \mathbb{R}$. On a $x^3 + ax = x(x^2+a)$, donc l'intégral est pourvue de sens si $4 + a \geq 0$, c'est-à-dire si $a \geq -4$. On retient donc cette condition par la suite. La fonction $f : x \mapsto f(x) = (\sqrt{x^4+x^2+1} - x\sqrt[3]{x^3+ax})$ est continue sur $[2,+\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, on a $f(x) = x^2(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4})^{\frac{1}{2}} - x^2(1+\frac{a}{x^2})^{\frac{1}{3}}$. On effectue un développement asymptotique et on trouve :

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}a\right) + \left(\frac{3}{8} + \frac{a^2}{9}\right)\frac{1}{x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

On discute les cas suivant a :
- Si $a \neq \frac{3}{2}$ alors au voisinage de $+\infty$, on a $f(x) \sim a - \frac{3}{2}$ et par suite l'intégrale diverge.
- Si $a = \frac{3}{2}$ alors $\frac{3}{8} + \frac{a^2}{9} = \frac{19}{48}$, il en découle que dans ce cas $f(x) \sim \frac{19}{48}\frac{1}{x^2}$ et l'intégrale converge.

18. $\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$. L'application $f : t \mapsto e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- Au voisinage de 0 on a $f(t) \sim \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)$, donc $1 - e^{-t} = 1 - (1 - t + \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)) = t - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)$, donc

$$\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1-\frac{t}{2}+o(\frac{1}{t})} - 1\right) = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{t}{2} - 1 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$$

donc au voisinage de 0 on a $f(t) \sim \frac{1}{2}$, et on a un faux problème.
- Au voisinage de $+\infty$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) = 1$, donc $f(t) \sim e^{-t}$ et comme $\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge, on a $\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ est convergente.

EXERCICE 305 Deux intégrales généralisées

Titre : Deux intégrales généralisées
ID : 243 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 229 | ID : 243
Difficulté : ★☆☆☆☆

Discuter, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^{\alpha}}\mathrm{d}t$

2. $\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(x + e^{\alpha x}\right) \mathrm{d}x$

Solution

1. La fonction $f : t \mapsto f(t) = \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha}$ est continue sur $]0, +\infty[$. L'intégrale demandée est impropres aux deux bornes de l'intervalle $]0, +\infty[$.
   • Au voisinage de 0 à droite $f(t) \sim t \ln t$ et $|t \ln t| = 0(1/\sqrt{t})$, donc $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge absolument pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
   • Au voisinage de $+\infty$, on a $f(t) \sim t^{1-2\alpha} \ln t = \frac{\ln(t)}{t^{2\alpha-1}}$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $2\alpha - 1 > 1$ c'est-à-dire $\alpha > 1$. En effet :
   • Si $\alpha > 1$ alors $t^\alpha f(t) \sim \frac{\ln(t)}{t^{\alpha-1}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f(t) = o(1t^\alpha)$ et $\int_1^{+\infty}(1/t^\alpha)\mathrm{d}t$ est convergente donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.
   • Si $\alpha = 1$ alors pour tout $x > 1$ on a $\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^{2\alpha-1}}\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t = [\frac{1}{2}(\ln t)^2]_1^x = \ln^2 x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est divergente.
   • Si $\alpha < 1$ alors $\frac{\ln t}{t^\alpha} \geq \frac{\ln t}{t}$, pour tout $t \geq 1$, donc par comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est divergente.
   • L'étude ci-dessus montre que $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. $f : t \mapsto f(t) = t^\alpha \ln(t + e^{\alpha t})$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale est impropre uniquement à la borne $+\infty$.
   • Si $\alpha < 0$.
   • Quand t tend vers $+\infty$, on a $f(t) \sim t^\alpha \ln t$ car $\ln(t + e^{\alpha t}) = \ln(t) + \ln(1 + (e^{\alpha t}/t)$ et $\ln(1 + (e^{\alpha t}/t) \sim e^{\alpha t}/t$ et comme $\lim_{t\to+\infty} e^{\alpha t}/t = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} \ln(t) = +\infty$, on a $\ln(t + e^{\alpha t}) \sim \ln(t)$. Il en découle que $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $-\alpha > 1$ si et seulement si $0 < \alpha < -1$.
   • Si $\alpha = 0$ alors $f(t) = \ln(t + 1)$ et c'est claire que $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.
   • Si $\alpha > 0$ alors $\forall t \geq 1, \quad f(t) \geq \ln t$ et comme $\int_1^{+\infty} \ln(t)\mathrm{d}t$ diverge on déduit que $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

EXERCICE 306 Une autre liste d'intégrales généralisées

Titre : Une autre liste d'intégrales généralisées
ID : 244 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 230 | ID : 244
Difficulté : ★☆☆☆☆

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3+1}}\ \mathrm{d}x.$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2e^{-x}}{x^2+e^{-2x}}\ \mathrm{d}x\ .$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^4}}\ \mathrm{d}x\ .$
4. $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^3+x^2}\mathrm{d}x.$
5. $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^6}}\ \mathrm{d}x.$
6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{ch}\, 2x}\ \mathrm{d}x$
7. $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\ \mathrm{d}x$
8. $\int_0^{+\infty} \frac{x-5}{x^2+4x+4}\mathrm{d}x$
9. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\ \mathrm{d}x$
10. $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u$

11. $\int_0^{+\infty} \dfrac{2+\ln x}{x+4}\,\mathrm{d}x$
12. $\int_1^2 \dfrac{1}{t^2-t}\,\mathrm{d}t$
13. $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}\,\mathrm{d}t$
14. $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x$
15. $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$
16. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$,
17. $\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$
18. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
19. $\int_1^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x\ln(2+x^2)}\,\mathrm{d}x$,
20. $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}x$,
21. $\int_0^1 \frac{\cosh x-\cos x}{x^{5/2}}\,\mathrm{d}x$,
22. $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\left(1/x^2\right)}{\ln(1+x)}\,\mathrm{d}x$.

Solution

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$. La fonction $x \mapsto f(x) = \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{x^3+1}}$ est continue sur $[0,+\infty[$, le problème en $+\infty$, on a $|f(x)| \leq \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}}$ et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$ est convergente, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est convergente, elle est même absolument convergente.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2e^{-x}}{x^2+e^{-2x}}\,dx$. La fonction $x \mapsto f(x) = \frac{1+x^2e^{-x}}{x^2+e^{-2x}}$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$, le problème en $+\infty$ et en $-\infty$. Au voisinage de $+\infty$ on a $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ et au voisnage de $-\infty$ on a $f(x) \sim \frac{e^{-x}}{e^{-2x}} = e^x$ et comme les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ et $\int_{-\infty}^0 e^x\mathrm{d}x$ sont convergentes, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est convergente.
3. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^4}}\,dx$. La fonction $f : x \mapsto f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^4}}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Au voisinage de 0 à droite $f(x) \sim \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, donc $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ est convergente. Au voisinage de $+\infty$ on a $|f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$, donc $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est convergente et en conclusion $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est convergente (absolument convergente même).

EXERCICE 307 Une liste de 132 séries numériques à étudier

Titre : Une liste de 132 séries numériques à étudier
ID : 245 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 231 | ID : 245
Difficulté : ★★☆☆☆

Étudier le convergence de la série $\sum u_n$ dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \frac{3^n+n^4}{5^n-3^n}$
2. $u_n = \frac{\mathrm{ch}(2n)}{\mathrm{ch}(3n)}$
3. $u_n = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)^n$
4. $u_n = \tanh(n+a)-\tanh(n)$, $a \in \mathbb{R}$ donné.
5. $u_n = \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$
6. $u_n = \frac{1}{1+x^{2n}}$, $x \in \mathbb{R}$, donné.

7. $u_n = 1 - \cos\frac{1}{n}$
8. $u_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1$
9. $u_n = n^{-\left(1+\frac{2}{n}\right)}$
10. $u_n = \exp\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \exp\left(\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$
11. $u_n = x^{\ln(n)}, x > 0$, donné.
12. $u_n = n^2 a^{\sqrt{n}}, a > 0$ donné.
13. $u_n = \frac{n!}{a^n}, a > 0$, donné.
14. $u_n = \frac{n!}{n^n}$
15. $u_n = \frac{a^n}{n^a}, a > 0$ donné.
16. $u_n = \left(a + \frac{1}{n}\right)^n, a > 0$ donné.
17. $u_n = \frac{1}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}, a > 0$ donné.
18. $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n^2}, x \in \mathbb{R}$, donné.
19. $u_n = \left(\frac{\sin^2 n}{n}\right)^n$
20. $u_n = \left(1 - \exp\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\sqrt{\ln(n)}$
21. $u_n = \frac{1}{\ln(n!)}$
22. $u_n = n^{n^{-a}} - 1, a > 0$ donné.
23. $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
24. $u_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$
25. $u_n = \frac{n^2}{n^3+1}$
26. $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}$
27. $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$
28. $u_n = \frac{1}{\ln(n^2+n+1)}$
29. $u_n = \frac{n^2}{(1+\delta)^n}$, δ un nombre réel tel que $|\delta| < \frac{1}{2}$.
30. $u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{\sum_{k=1}^{n} k^2} = \frac{1+\cdots+n}{1^2+\cdots+n^2}$.
31. $u_n = \frac{a^n+1}{n+a^{2n}}, a > 0$ donné.
32. $u_n = 2^{-\sqrt{n}}$.
33. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$
34. $u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \exp\left(\frac{1}{n+a}\right), a > 0$ donné.
35. $u_n = f\left(a + \frac{1}{n}\right) + f\left(a - \frac{1}{n}\right) - 2f(a)$ avec : $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle de classe C^2 sur un intervalle de la forme $]a - \alpha, a + \alpha[, \alpha > 0$
36. $u_n = \frac{1}{an+b} - \frac{c}{n}$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$: discuter suivant a, b et c.
37. $u_n = \frac{2^n+a^n}{2^n+b^n}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$: discuter suivant a et b.
38. $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \arctan\frac{1}{n}$
39. $u_n = \sin\left(\left(n + \frac{a}{n}\right)\pi\right), a \in \mathbb{R}$
40. $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n^a}$, $a \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.
41. $u_n = \frac{\cos(an+b)}{n^\alpha}$, avec $(a, b, \alpha) \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha > 0$ et $\alpha \not\equiv 0\ [2\pi]$.

42. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+2\sin n}$
43. $u_n = (-1)^n(\sqrt{n^2+1}-n)$
44. $u_n = \ln\left(1+\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right)$
45. $u_n = \frac{\sin(2n)}{n^2-n+1}$
46. $u_n = \frac{1+\ln(n)}{n^2}$
47. $u_n = \frac{2^n+5}{3^n+11}$
48. $u_n = \frac{5^n+2}{11^n+3}$
49. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$
50. $u_n = \frac{n!}{n^n}$
51. $u_n = \frac{(n+1)^4}{n!+1}$,
52. $u_n = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$,
53. $u_n = \frac{n^{\ln(n)}}{\ln(n)^n}$,
54. $u_n = n^2\sin(\frac{1}{2^n})$,
55. $u_n = (n^6+3)^a - (n^2+2)^{3a}$, où $a \in \mathbb{R}$
56. $u_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)}$,
57. $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}-1\right)^\alpha$, où $\alpha > 0$, DL2 de la suite u_n.
58. $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$.
59. $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$,
60. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\ln(n)}$, DL2 de la suite u_n.
61. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n+1}}$,
62. $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha+(-1)^n}$ avec $\alpha > 0$.
63. $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 0$.
64. $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n+(-1)^n}$
65. $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$,
66. $u_n = (-1)^n\sqrt{n}\sin(\frac{1}{n})$,
67. $u_n = \cos\left(n^2\pi\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$,
68. $u_n = \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}}{e^{\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)}-1} - 1$,
69. $u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n-4}}\right)$,
70. $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$,
71. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ et équivalent du reste.
72. $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.
73. $u_n = \frac{x^n}{1+y^{2n}}$ selon les valeurs des réels x et y.
74. $u_n = \left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$
75. $u_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}} - \left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)^n$

76. $u_n = n^{\frac{1}{1+n^2}} - 1$
77. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
78. $u_n = \frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\sin(\frac{1}{n})}$, DL2 de la suite u_n.
79. $u_n = \frac{n^2+n-3}{n!}$
80. $u_n = \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right)$
81. $u_n = \frac{n-1}{n(n+1)(n+2)}$
82. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$
83. $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$
84. $u_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n} \sin(1/\sqrt{n})}{n+(-1)^n}$
85. $u_n = \frac{\cos(\ln n)}{n}$
86. $u_n = \prod_{p=2}^{n} (2 - \sqrt[p]{e})$
87. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$: généraliser à $u_n = \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha + e^{in\theta}}$
88. $u_n = (\sin(\pi e n!))^p$
89. $u_n = \sum_n \sin \pi\sqrt{n^2+1}$;
90. Pour $n \geq 1$, $u_n = (\frac{1}{p(n)})^{p(n)}$, où $p(n)$ est le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n;
91. Pour $n \geq 1$,$u_n = \frac{\sigma(n)}{n^2}$, où $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est une bijection;
92. $u_n = \sin(\pi(2+\sqrt{5})^n)$
93. $u_n = \dfrac{n+1}{n^3-7}$,
94. $u_n = \dfrac{n+1}{n^2-7}$,
95. $u_n = \dfrac{n+1}{n-7}$,
96. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,
97. $u_n = \dfrac{2^n+3^n}{n^2+5^n}$,
98. $u_n = \dfrac{1}{n^{(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}}$,
99. $u_n = \dfrac{1}{\ln(n^2+2)}$,
100. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$,
101. $u_n = \dfrac{n}{2^n}$,
102. $u_n = \dfrac{n^{100\,000}}{2^n}$,
103. $u_n = \dfrac{1}{n!}$,
104. $u_n = \dfrac{n^{100\,000}}{n!}$,
105. $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$,
106. $u_n = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n)!}$,

107. $u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$,

108. $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$,

109. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

110. $u_n = \frac{1}{n^{3/4}} + \frac{\sin(2n)}{n^{3/4}}$,

111. $u_n = \frac{1}{n^{3/4}} + \frac{1 - n^{(n-3/4)}}{n^n}$,

112. $u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}} - \exp\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n^{3/4}}\right)$.

113. $u_n = n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,

114. $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n\sqrt{n}}$.

115. $u_n = (-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)}$,

116. $u_n = \sin\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right)$,

117. $u_n = (-1)^n(\sqrt{1+n} - \sqrt{n})$.

118. $u_n = (-1)^n \frac{n^3}{n!}$,

119. $u_n = \frac{a^n}{n!}$ avec $a \in \mathbb{C}$,

120. $u_n = na^{n-1}$ avec $a \in \mathbb{C}$,

121. $u_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+p)^2}$ (comparer à une intégrale)

122. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{2/3} + \cos n}$

123. $u_n = \frac{\cos\sqrt{n}}{n(\ln n)^2}$

124. $u_n = x^{-\sqrt{1+n}} \quad (x \in \mathbb{R}_+^*)$.

125. $u_n = \frac{\cos(\ln n)}{n}$

126. $u_n = \left(\frac{2n}{3n+2}\right)^n$,

127. $u_n = \frac{1}{n^n}$,

128. $u_n = \frac{n!}{n^n}$,

129. $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

130. $u_n = \frac{(n+1)2^n}{n!}$,

131. $u_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}}$

132. $u_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$

Solution

1. $u_n = \frac{3^n + n^4}{5^n - 3^n}$, on a $u_n \sim \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente, donc $\sum u_n$ est convergente.
2. $u_n = \frac{\mathrm{ch}(2n)}{\mathrm{ch}(3n)}$, donc $u_n \sim \frac{e^{2n}}{e^{3n}} = e^{-n}$, qui est le terme général de la série géométrique convergente de raison $q = e^{-1}$, donc $\sum u_n$ est convergente.

3. $u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n$. On a $u_n = \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{e}{2^n}$, donc la série $\sum u_n$ est convergente en vertu de la convergence de la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et un critère de comparaison.
4. $u_n = \tanh(n+a) - \tanh(n)$, $a \in \mathbb{R}$ donné. On a $u_n = \frac{\tanh(a)+\tanh(n)}{1+\tanh(a)\tanh(n)} - \tanh(n) = \frac{\tanh(a)(1-\tanh^2(n))}{1+\tanh(a)\tanh(n)}$
   - On sait que $1 - \tanh^2(n) = \frac{1}{\cosh^2(n)} \sim 4e^{-2n}$
   - Et comme $\lim_{n\to+\infty}(\tanh(n)) = 1$, on a $u_n \sim \frac{4\tanh(a)}{1+\tanh(a)}e^{-2n}$.
   - Il en résulte que la série $\sum u_n$ est convergente, par critère de comparaison et la convergence de la série géométrique de raison e^{-2}.
5. $u_n = \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$. Puisque $3 + (-1)^n \in \{2, 4\}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité $|u_n| \leq (\frac{1}{2})^n$, donc $\sum u_n$ est convergente par critère de comparaison et la convergence de la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
6. $u_n = \frac{1}{1+x^{2n}}$, $x \in \mathbb{R}$, donné.
   - Si $|x| < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ et la série diverge grossièrement.
   - si $|x| > 1$ alors $u_n \sim \left(\frac{1}{|x|}\right)^n$ et la série $\sum u_n$ est convergente par critère de comparaison et la convergence de la série géométrique de raison $\frac{1}{|x|}$.
   - Si $|x| = 1$ alors $u_n = \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la série est grossièrement divergente.
7. $u_n = 1 - \cos\frac{1}{n}$. On a $u_n = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{2n^2}\right)$, donc $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$, donc $\sum u_n$ est convergente par critère de comparaison et convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$.
8. $u_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1$. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{n}} - 1 \\ &= \exp\left(-\frac{1}{n}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) - 1 \\ &= \exp\left(-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) - 1 \\ &= \exp\left(-\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 = 1 - \frac{1}{n^2} - 1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

   Il en découle que $\sum u_n$ est convergente.
9. $u_n = n^{-\left(1+\frac{2}{n}\right)}$. On a $u_n = \frac{1}{n}\exp\left(\frac{2\ln(n)}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, donc la série $\sum u_n$ est divergente.
10. On fait un développement asymptotique, on a $\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{2n^2}\right)$, il en découle que

$$\exp\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = e\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{2n^2}\right)\right).$$

    De la même manière on a

$$\exp\left(\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right) = e\left(1 - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

    Par suite

$$u_n = \frac{3e}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

    donc $u_n \sim \frac{c}{n^2}$ avec $c = \frac{3e}{2}$. Donc $\sum u_n$ est convergente.
11. Si $x \geq 1$, la série diverge grossièrement car $x^{\ln(n)} \geq 1$. Si $0 < x < 1$, posons $\ln(x) = -\alpha$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-\alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-\alpha\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par la règle de Raabe-Duhamel, la série $\sum_u n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ si et seulement si $0 < x < \frac{1}{e}$.

EXERCICE 308 Liste de 14 série : convergence et calcul de la somme

Titre : Liste de 14 série : convergence et calcul de la somme
ID : 246 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 232 | ID : 246
Difficulté : ★☆☆☆☆

Calculer la somme de la série $\sum u_n$ dans chacun des cas suivants, après justification de sa convergence.

1. $u_n = \frac{3^n}{7^{n-2}}, n \geq 2$;
2. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}, n \geq 1$;
3. $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, n \geq 1$;
4. $u_n = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}, n \geq 1$ et $p \in \mathbb{N}^*$ fixé;
5. $u_n = \ln \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}, n \geq 1$;
6. $u_n = \ln(1 + 2^{-2^n}), n \geq 0$.
7. $u_n = \frac{n^2+9n+5}{(n+1)(2n+3)(2n+5)(n+4)}$.
8. $u_n = n \ln\left(\frac{n^4+2n^3-2n-1}{n^4+2n^3}\right)$.
9. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!2^{n-k}}$.
10. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!}$.
11. $u_n = \frac{E(\sqrt{n+1})-E(\sqrt{n})}{n}$.
12. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2-1}$.
13. $u_n = na^n, a \in [0,1[$.
14. $u_n = \frac{a^n}{n}, a \in [0,1[$.

Solution

1. $u_n = \frac{3^n}{7^{n-2}}, n \geq 2$; donc $u_n = 49\left(\frac{3}{7}\right)^n$ et la série géométrique de raison $q = \frac{3}{7}$ est convergente donc $\sum u_n$ est convergente et sa somme est $S = 49\left(\frac{3}{7}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{3}{7}} = \frac{63}{4}$
2. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}, n \geq 1$, la somme partielle d'ordre n est $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$, donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$ et par suite $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.
3. $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, n \geq 1$, même principe de téléscopage en remarquant que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \frac{1}{2}(v_n - v_{n+1})$ avec $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$, puisque $\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 2u_n$, il vient donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

EXERCICE 309 Deux bonnes intégrales généralisées

Titre : Deux bonnes intégrales généralisées
ID : 247 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 233 | ID : 247
Difficulté : ★★☆☆☆

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} \mathrm{d}x$
2. $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin x}{x^\alpha}\right) \mathrm{d}x$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.

Solution

1. On a
$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}\right)\\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1-\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+O\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)\right)\\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}}-\frac{\sin^2 x}{x}+O\left(x^{-3/2}\right)\end{aligned}$$
Or, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ converge, et il en est de même de $\int_1^{+\infty} O\left(x^{-3/2}\right) dx$. L'intégrale $\int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} dx$ est donc de même nature que $\int_4^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$. Mais, en écrivant que
$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$$
Une intégration par parties et le fait que $\int_4^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}$ est convergente, et que $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{2x}$ est divergente, donne $\int_4^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ est divergente. Il en est de même de l'intégrale de départ. Remarquons que
$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} \sim_{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$
et que pourtant les deux integrales ne sont pas de la même nature. Ceci montre l'importance du fait que les fonctions sont positives pour appliquer les critères de comparaison.
2. Posons $f(x) = \ln\left(1+\frac{\sin x}{x^2}\right)$, puis effectuons un développement limité au voisinage de $+\infty$. On trouve
$$f(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha} - \frac{\sin^2 x}{2x^{2\alpha}} + o\left(\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}\right)$$
Posons $g(x) = -\frac{\sin^2 x}{2x^{2\pi}} + o\left(\frac{\sin^2 x}{x^{2/2}}\right)$. Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ converge (effectuer une intégration par parties), les intégrales $\int_1^{+\infty} f$ et $\int_1^{+\infty} g$ sont de même nature. Mais
$$g \sim_{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}$$
qui est une fonction positive. Donc $\int_1^{+\infty} f$ est de méme que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$. Utilisant la même méthode que pour la question précédente, on prouve que lintégrale converge si $\alpha > 1/2$ et diverge si $\alpha \leq 1/2$. En conclusion, lintégrale $\int_1^{+\infty} f$ converge si et seulement si $\alpha > 1/2$

EXERCICE 310 Etude de la convergence d'une intégrale généralisée

Titre : Etude de la convergence d'une intégrale généralisée
ID : 248 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 234 | ID : 248
Difficulté : ★★☆☆☆

Démontrer que l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} ((1+x)^{\frac{1}{1+x}} - x^{\frac{1}{x}}) \mathrm{d}x$ est convergente.

Solution

On va donner deux méthodes
Première méthode : Tout d'abord, l'application $f : I = [1, +\infty[\to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) = (1+x)^{\frac{1}{1+x}} - x^{\frac{1}{x}}$ est continue sur I, donc l'intégrale en question est impropre uniquement en la borne $+\infty$ à laquelle on va s'interesser.
• Posons $F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$, pour tout $x \in I$.
• Pour tout $x \in I$, par le changement de variable $u = t+1$, on a $\int_1^x (1+t)^{\frac{1}{1+t}} = \int_2^{x+2} u^{\frac{1}{u}}\mathrm{d}u$, donc $F(x) = \int_2^{x+2} u^{\frac{1}{u}}\mathrm{d}u - \int_1^x u^{\frac{1}{u}}\mathrm{d}u = \int_2^{x+2} u^{\frac{1}{u}}\mathrm{d}u$. On a cette transformation $F(x) = \int_2^x u^{\frac{1}{u}}\mathrm{d}u + \int_x^{x+1} u^{\frac{1}{u}}\mathrm{d}u - \int_1^2 u^{\frac{1}{u}}\mathrm{d}u - \int_2^x u^{\frac{1}{u}}\mathrm{d}u$, donc $F(x) = c + G(x)$ où $c = -\int_1^2 u^{\frac{1}{u}}\mathrm{d}u$ et $G(x) = \int_x^{x+1} u^{\frac{1}{u}}\mathrm{d}u$. Pour prouver que l'intégrale I converge, il suffit de prouver que $G(x)$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$, quand x tend vers $+\infty$. On $G(x) = H(x+1) - H(x)$ où $H(x) = \int_1^x u^{\frac{1}{u}}\mathrm{d}u$, donc $\forall x \in I, G'(x) = H'(x+1) - H'(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$ où $\varphi(x) = x^{\frac{1}{x}}$, pour tout $x \in I$. On observe que $\forall x \in I, \varphi(x) = \exp(\frac{\ln x}{x})$ et si on pose $\psi(x) = \frac{\ln x}{x}$, alors $\psi'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, donc en particulier $\forall x \in J =]e, +\infty[, \psi'(x) < 0$, donc φ est décroissante sur J et $G' \leq 0$ sur J, donc G est positive décroissante sur J, par suite $G(x)$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$, quand x tend vers $+\infty$. Donc l'intégrale I est convergente.

Deuxième méthode :

EXERCICE 311 Une intégrale généralisée non évidente

Titre : Une intégrale généralisée non évidente
ID : 249 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 235 | ID : 249
Difficulté : ★★☆☆☆

Quelle est la nature de l'intégrale suivante $\int_0^{+\infty} e^{\cos(x)}\mathrm{d}x$?

Solution

On remarque par exemple que $S_n = \int_0^{2n\pi} f(t)\mathrm{d}t \geq \int_{a_n}^{2n\pi} f(t)\mathrm{d}t \geq e^{\cos(a_n)}(2n\pi - a_n)$ avec $a_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, donc $e^{\cos(a_n)} = 1$ et $S_n \geq 2n\pi - \frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Il en découle que l'intégrale en question diverge.
Plus rapide : $\forall x \in [0, +\infty[, e^{\cos(x)} \geq \frac{1}{e}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e}\mathrm{d}t$ est divergente.

EXERCICE 312 Intégrale généralisée dépendant de deux paramètres

Titre : Intégrale généralisée dépendant de deux paramètres
ID : 250 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 236 | ID : 250
Difficulté : ★☆☆☆☆

Déterminer les valeurs possibles de α et β pour lesquelles l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{\alpha x + \beta x^2}\mathrm{d}x$ est convergente.

Solution

Tout d'abord si $\beta < 0$ alors l'intégrale converge et si $\beta > 0$ elle diverge.
Si $\beta = 0$ on discute selon α, il y'a convergence si et seulement si $\alpha < 0$.
En résumé, il y'a convergence si et seulement si $\beta < 0$ ou $\beta = 0$ et $\alpha < 0$.

EXERCICE 313 Une suite pas aisée

Titre : Une suite pas aisée
ID : 251 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 237 | ID : 251

Difficulté :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{n^2}{\left(\prod_{k=1}^{n} k^k\right)^{\frac{4}{n^2}}}$$

Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons : $P_n = \prod_{k=1}^{n} k^k$, alors :

$$S_n = \ln(P_n) = \sum_{k=1} k\ln(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

avec $f(x) = x\ln x$ pour tot réel strictement positif x. Il est aisé de voir que f est croissante donc pour tout $\in \mathbb{N}$, tel que $k \geq 2$, on a l'encadrement :

$$\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \leq f(k) \leq \int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t$$

donc

$$\int_1^n f(t) = \mathrm{d}t \leq S_n \leq \int_2^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \int_1^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$$

Une intégration par partie donne :

$$a_n \leq S_n \leq a_{n+1}$$

avec :

$$\begin{aligned} a_n &= \int_1^n f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_1^n t\ln t\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^n - \frac{1}{2}\int_1^n t\mathrm{d}t \\ &= \frac{n^2}{2}\ln(n) - \frac{n^2-1}{4} \end{aligned}$$

Il en découle que :

$$a_{n+1} - a_n = \int_n^{n+1} t\ln(t)\mathrm{d}t \leq (n+1)\ln(n+1) \leq 2n\ln(n+1)$$

Donc :

$$a_n \leq S_n \leq a_n + 2n\ln(n+1)$$

ce qui donne successivement :

$$2\ln(n) - 1 + \frac{1}{n^2} \leq \frac{4}{n^2}S_n \leq 2\ln(n) - 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{8\ln(n+1)}{n}$$

$$n^2e^{-1}e^{\frac{1}{n^2}} \leq (P_n)^{\frac{4}{n^2}} \leq n^2e^{-1}e^{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{8\ln(n+1)}{n}\right)}$$

Il en découle que, quand n tends vers $+\infty$:

$$n^2e^{-1} \sim (P_n)^{\frac{4}{n^2}}$$

et comme

$$u_n = \frac{n^2}{(P_n)^{\frac{4}{n^2}}},$$

il en découle finalement que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = e.$$

EXERCICE 314 la série $\sum \frac{\sin\sqrt{n}}{n^\alpha}, n \geq 1$

Titre : la série $\sum \frac{\sin\sqrt{n}}{n^\alpha}, n \geq 1$
ID : 252 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 238 | ID : 252

Difficulté : ★☆☆☆☆

Démontrer que pour tout nombre réel α, si $\alpha > \frac{1}{2}$ alors la série $\sum \frac{\sin\sqrt{n}}{n^\alpha}, n \geq 1$ est convergente.

Solution

Première méthode :

On va même prouver que la série $\sum \frac{e^{i\sqrt{n}}}{n^\alpha}$ est convergente.
Le résultat s'en déduira en prenant la partie imaginaire.
On notera désormais, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{e^{i\sqrt{n}}}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad w_n = e^{i\sqrt{n}}$$

il en découle que

$$u_n = \frac{w_n}{n^\alpha}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
e^{i\sqrt{n+1}} &= e^{i\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&= e^{i\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\
&= e^{i\sqrt{n}+\frac{i}{2\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)} \\
&= e^{i\sqrt{n}}\left(1+\frac{i}{2\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= e^{i\sqrt{n}}+\frac{ie^{i\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \\
&\quad \text{car } |e^{i\sqrt{n}}| = 1
\end{aligned}$$

En résumé, on a quand n tends vers $+\infty$:

$$e^{i\sqrt{n+1}} = e^{i\sqrt{n}}+\frac{ie^{i\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

Donc :

$$w_{n+1}-w_n = \frac{iw_n}{2\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

donc, en multipliant par $\frac{2\sqrt{n}}{in^\alpha}$ et en notant

$$\beta = \alpha - \frac{1}{2}$$

on a :

$$\frac{-iw_{n+1}+iw_n}{n^\beta}=\frac{w_n}{n^\alpha}+O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

Alors :

$$u_n=\frac{-iw_{n+1}+iw_n}{n^\beta}+O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

En notant

$$b_n=-iw_{n+1}+iw_n$$

on a alors :

$$u_n=\frac{b_n}{n^\beta}+O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

La somme partielle d'ordre n de la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est :

$$B_n=-iw_{n+1}+iw_1$$

donc (B_n) est bornée car $|B_n|\leq |w_{n+1}|+|w_1|\leq 2$.
Puisqu'on plus la suite $\left(\frac{1}{n^\beta}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante et converge vers 0, car $\beta>0$ puisqu'on a supposé que : $\alpha>\frac{1}{2}$
La transformation d'Abel[a] permet de conclure que la série $\sum\frac{b_n}{n^\beta}$ est convergente.
La série de terme général $O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ est absolument convergentes car $\alpha+1>1$
Donc la série $\sum u_n$ est convergente.

Deuxième méthode

On considère les fonctions f et F définies par $f(x)=\frac{\sin\sqrt{x}}{x^\alpha}$ et $F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ pour tout $x\in[1,+\infty[$.
F est de classe C^2 sur $[1,+\infty[$, la formule de Taylor-Reste intégral permet d'écrire pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$F(n+1)=F(n)+F'(n)+\int_n^{n+1}(n+1-t)F''(t)\mathrm{d}t$$

Il en découle que

$$u_n=\int_n^{n+1}f(t)\mathrm{d}t+\int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)\mathrm{d}t=V_n+W_n$$

avec $V_n=\int_n^{n+1}f(t)\mathrm{d}t$ et $W_n=\int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)\mathrm{d}t$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. On va démontrer que les séries $\sum V_n$ et $\sum W_n$ sont convergentes.
Pour la série $\sum V_n$, elle converge car l'intégrale $\int_1^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$ est convergente puisque, si on fixe x réel tel que $x>1$, on a :

$$F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=\int_1^x\frac{\sin\sqrt{t}}{t^\alpha},$$

Par le changement de variable $\sqrt{t}=u$, il vient en posant $\gamma=2\alpha-1$ (donc $\gamma>0$, compte tenu de l'hypothèse $\alpha>\frac{1}{2}$) :

$$F(x)=2\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\sin u}{u^{2\alpha-1}}\mathrm{d}u=2\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\sin u}{u^\gamma}\mathrm{d}u$$

Une intégration par parties permet de trouver :

$$F(x)=2\cos(1)-2\frac{\cos\sqrt{x}}{x^{\frac{\gamma}{2}}}-2\gamma\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\cos u}{u^{\gamma+1}}\mathrm{d}u$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}$ existe puisque :
• $\frac{\cos\sqrt{x}}{x^{\frac{\gamma}{2}}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$, car $\left|\frac{\cos\sqrt{x}}{x^{\frac{\gamma}{2}}}\right|\leq\frac{1}{x^{\frac{\gamma}{2}}}$.
• L'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\cos u}{u^{\gamma+1}}\mathrm{d}u$ est absolument convergente puisque : $\left|\frac{\cos u}{u^{\gamma+1}}\right|\leq\frac{1}{u^{\gamma+1}}$ et $\gamma+1>1$.

- Pour la série $\sum W_n$, on a pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a $f(t) = \frac{\sin(\sqrt{t})}{t^\alpha}$, donc :

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\cos(\sqrt{t})\frac{1}{t^\alpha} - \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}\sin(\sqrt{t}) = \frac{1}{t^{\alpha+1}}\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\cos(\sqrt{t}) - \alpha\sin(\sqrt{t})\right)$$

ce qui permet de faire la majoration suivante :

$$\forall t \in [n, n+1], |f'(t)| \leq \frac{1}{n^{\alpha+1}}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{2} + \alpha\right)$$

et comme pour tout $t \in [n, n+1]$ on a $0 \leq n+1-t \leq 1$, il en découle que

$$W_n \leq \frac{1}{n^{\alpha+1}}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{2} + \alpha\right) = W'_n$$

Quand n tends vers $+\infty$, on a $W'_n \sim \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ qui est le terme d'une série de Riemann convergente puisque $\alpha > \frac{1}{2}$, donc $\alpha + \frac{1}{2} > 1$.

a. On rappelle ici le règle d'Abel : Si (a_n) est une suite réelle positive décroissante qui converge vers 0 et (b_n) une suite complexe tel que la suite (B_n) des sommes partielles est bornée alors la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

EXERCICE 315 — Une étude d'intégrales généralisées

Titre : Une étude d'intégrales généralisées
ID : 253 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 239 | ID : 253
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit a un niombre réel et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{C}$ une apllication de classe C^1 tel que les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^{+\infty} |f'(t)|\mathrm{d}t$ sont convergentes. Démontrer que la série $\sum f(n), n \geq p$ est convergente, p étant le plus petit entier naturel supérieur ou égal à a.

Solution

Soit F définie sur $[a, +\infty[$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, c'est la primitive de f s'annulant au point a. La fonction F est de classe C^2, ce qui permet d'écrire pour tout $n \geq p$, en utilisant la formule de Taylor-Reste intégral :

$$F(n+1) = F(n) + F'(n) + \int_n^{n+1}(n+1-t)F''(t)\mathrm{d}t$$

ce qui donne :

$$f(n) = \underbrace{\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t}_{V_n} - \underbrace{\int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)\mathrm{d}t}_{W_n} = V_n - W_n$$

avec, pour tout $n \geq p$:

$$\begin{cases} V_n = \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \\ W_n = \int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)\mathrm{d}t \end{cases}.$$

La somme partielle de la série $\sum V_n$ est :

$$S_n = \sum_{k=p}^{n} V_k = \int_p^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$$

donc (S_n) est convergente en vertu de la convergence de l'integrale $\int_p^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et la caractérisation séquentielle de la convergence.
La série $\sum W_n$ est absolument convergente car pour tout $n \geq p$, on a :

$$|W_n| \leq \int_n^{n+1} |n+1-t||f'(t)|\mathrm{d}t$$

et comme $|n+1-t| \leq 1$, pour tout $t \in [n, n+]$, il en découle que :

$$|W_n| \leq \int_n^{n+1} |f'(t)|\mathrm{d}t = W'_n$$

La somme partielle de la série $\sum W'_n$ est $S'_n = \int_p^{n+1} |f'(t)|\mathrm{d}t$, et comme l'intégrale $\int_p^{+\infty} |f'(t)|\mathrm{d}t$ est convergente, la série de terme général W'_n est convergente d'où l'absolue convergence de $\sum W_n$ et la convergence de $\sum f(n)$.

EXERCICE 316 la série de terme général $u_n = \frac{e^{in^\beta}}{n^\alpha}$

Titre : la série de terme général $u_n = \frac{e^{in^\beta}}{n^\alpha}$
ID : 254 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 240 | ID : 254
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $1 - \alpha < \beta < 1$.

1. Démontrer que la série de terme général
$$u_n = \frac{e^{in^\beta}}{n^\alpha}$$
est convergente.
2. En déduire que les séries de termes généraux respectifs
$$c_n = \frac{\cos(n^\beta)}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad s_n = \frac{\sin(n^\beta)}{n^\alpha}$$
sont convergentes.

Solution

On applique le résultat de l'exercice ci-dessus pour la fonction $f(t) = \frac{e^{it^\beta}}{t^\alpha}$. La fonction f est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente car pour tout $x \geq 1$, on a :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{e^{it^\beta}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$$

Par le changement de variable $t^\beta = u$, il vient :

$$F(x) = \int_1^x x^\beta \frac{e^{iu}}{u^{\frac{\alpha}{\beta}}} \frac{1}{\beta} u^{\frac{1}{\beta}-1}\mathrm{d}u$$

EXERCICE 317 Une série qui l'air alternée

Titre : Une série qui l'air alternée
ID : 255 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 241 | ID : 255
Difficulté : ★☆☆☆☆

Quelle est la nature de la série de terme générale $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}+(-1)^n}$?

Solution

On effectue un développement asymptotique de u_n, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}}\left(1-\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}}}_{a_n} - \underbrace{\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}}_{b_n} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{c_n} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right)}_{d_n} \end{aligned}$$

Les séries $\sum a_n$ et $\sum c_n$ sont convergnetes car elles sont alternées et vérifient les condtions du critère spécial des séries alternées, de même la série $\sum d_n$ est convergente car son terme général est un grand O de celui d'une série de Riemann convergente. Par ailleurs $\sum b_n$ est divergente, donc $\sum u_n$ est aussi divergente.

EXERCICE 318 Une série dont le terme général est une intégrale

Titre : Une série dont le terme général est une intégrale
ID : 256 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 242 | ID : 256
Difficulté : ★★☆☆☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$.
1) Montrer que (a_n) est décroissante.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}a_n$. En déduire que $a_n \sim a_{n+1}$.
3) Montrer que la suite de terme générale $b_n = (n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1}$ est constante. En déduire un équivalent de a_n et la nature de la série $\sum a_n$.

Solution

On pose $f_n : t \in [0,1] \mapsto t^n\sqrt{1-t^2}$
1) Comme $\forall t \in [0,1], f_{n+1}(t) \leqslant f_n(t)$, la propriété de croissance de l'intégrale montre que $a_{n+1} \leqslant a_n$.
On calcule aisément (la première intégrale est l'aire d'un quart du disque de centre l'origine et de rayon 1 , et pour la deuxième, on remarque que $f_1(t) = -\frac{1}{2}u'(t)u(t)^{1/2}$, avec $u(t) = 1-t^2$) :
On a : $a_0 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$
et : $a_1 = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\left(1-t^2\right)^{3/2}}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$
2) On intègre par parties, en dérivant t^{n+1} et en intégrant $t\sqrt{1-t^2}$, puis en écrivant que $\left(1-t^2\right)^{3/2} = \left(1-t^2\right)\sqrt{1-t^2}$ et en distribuant le produit sur le facteur $1-t^2$:

$$\begin{aligned} a_{n+2} = \int_0^1 t^{n+2}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\left(1-t^2\right)^{3/2}}{3}t^{n+1}\right]_0^1 + \frac{n+1}{3}\int_0^1 t^n\left(1-t^2\right)^{3/2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{n+1}{3}\left(\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\right)\mathrm{d}t - \int_0^1 t^{n+2}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t\Big) = \frac{n+1}{3}\left(a_n - a_{n+2}\right) \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}a_n$ La décroissance de (a_n) montre que $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$. En divisant cet encadrement par le nombre strictement positif a_n, on obtient $\frac{n+1}{n+4} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$, et par passage à la limite quand n tend vers l'infini, $a_n \sim a_{n+1}$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1}$. D'après la question précédente,

$$u_{n+1} = (n+2)(n+3)(n+4)\frac{n+1}{n+4}a_n a_{n+1} = (n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1} = u_n$$

ce qui prouve que (u_n) est constante. La valeur de la constante est obtenue en calculant $u_0 = 6a_0a_1 = \frac{\pi}{2}$. Comme $a_n \sim a_{n+1}$, on a $u_n \sim n^3 a_n^2$, et on en déduit que

$$a_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{n^{3/2}}$$

Il en résulte que la série de terme général a_n est convergente.

EXERCICE 319 — Estimation du reste d'une intégrale convergente

Titre : Estimation du reste d'une intégrale convergente
ID : 257 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 243 | ID : 257
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application strictement positive de classe C^1 tel que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$$

1. Montrer que f est intégrable sur $[1, +\infty[$
2. Démontrer que, quand x tends vers $+\infty$, on a

$$\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = o(f(x))$$

Solution

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application strictement positive de classe C^1 tel que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$$

1. Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$, il existe $a \geq 1$ tel que :

$$\forall t \in [a, +\infty[, \frac{f'(t)}{f(t)} \leq -1$$

En intégrant sur $[a, x]$, pour $x \in [a, +\infty[$, il vient :

$$\forall x \in [a, +\infty[, \ln(f(x)) - \ln(f(a)) \leq a - x$$

Donc :

$$(\star) \quad \forall x \in [a, +\infty[, 0 < f(x) \leq f(a)e^a e^{-x} = Me^{-x}, \quad \text{avec} \quad M = f(a)e^a.$$

Comme $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$, il en résulte que f est intégrable sur $[a, +\infty[$, donc sur $[1, +\infty[$.

2. L'inégalité $(\star)$ ci-dessus montre aussi que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$, la fonction f étant strictement positive sur $[1, +\infty[$, il existe $b \geq 1$ tel que $f' < 0$ sur $[b, +\infty[$. Pour tout $x \geq b$, on a $\int_b^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(b) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -f(b)$ donc f' est intégrable. Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{f'(x)}$ donc

$f(x) = o(f'(x))$ quand x tends vers $+\infty$. Par sommation des relation de comparaison, les restes héritent la même comparaison, donc :

$$\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = o\left(\int_x^{+\infty} f'(t)\mathrm{d}t\right)$$

Soit :

$$\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = o(f(x))$$

Démontrer que, quand x tends vers $+\infty$, on a

$$\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = o(f(x))$$

EXERCICE 320 Une condition d'intégrabilité pour que la fonction tende vers 0

Titre : Une condition d'intégrabilité pour que la fonction tende vers 0 — **Difficulté :** ★★☆☆☆

ID : 258 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 244 | ID : 258

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer que, si f^2 et f'^2 sont intégrables sur $[0, +\infty[$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Solution

On a : $|ff'| \leqslant \frac{1}{2}\left(f^2 + f'^2\right)$ Puisque f^2 et f'^2 sont intégrables sur l'intervalle $[0, +\infty[$, leur somme $f^2 + f'^2$ est aussi intégrable. Par le critère de comparaison des fonctions positives intégrable, la fonction $|ff'|$ est intégrable, donc ff' aussi. Pour tout réel x tel que $x \geq 0$, on a : $\int_0^x f(t)f'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(f^2(x) - f^2(0))$, donc $f^2(x) = f^2(0) + 2\int_0^x f(t)f'(t)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} f^2(0) + \int_0^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t = L$, par suite :

$$\lim_{x\to+\infty} f^2(x) = L$$

Si $L \neq 0$, alors f^2 ne serait pas intégrable sur $[0, +\infty[$, donc $L = 0$, donc $f^2(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par suite $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

EXERCICE 321 Un extrait de concours (ENSI) sur les intégrales

Titre : Un extrait de concours (ENSI) sur les intégrales — **Difficulté :** ★★☆☆☆

ID : 259 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 245 | ID : 259

Soit α un nombre réel *strictement* positif. Pour tout nombre réel strictement positif x, on pose $F_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}\int_0^x \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}\mathrm{d}u$.

1. Montrer que F_α est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer $F_1(x)$ et $F_{\frac{1}{2}}(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Trouver la limite, quand x tend vers 0 à droite de $F_\alpha(x)$.
4. Montrer que sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto F_\alpha(x)$ est la seule solution de l'équation différentielle (E_α) $\quad xy' + \alpha y = \frac{1}{x+1}$ qui ait une limite finie quand la variable x tend vers 0 à droite.
5. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $F_\alpha(x) \geq \frac{1}{\alpha(1+x)}$.

(b) Montrer que, sur l'intervalle $x > 0$, la fonction $x \mapsto F_\alpha(x)$ est décroissante.

6. (a) Si $\alpha > 1$, montrer que, pour tout $x > 0$, on a $F_\alpha(x) \leq \frac{1}{(\alpha-1)x}$.
   (b) Si $0 < \alpha < 1$, montrer qu'il existe un nombre réel c_α, ne dépendant que de α, tel que, pour tout $x > 0$, on ait : $F_\alpha(x) \leq \frac{c_\alpha}{x^\alpha}$.
7. (a) Trouver une relation simple entre $F_\alpha(x)$ et $F_{\alpha+1}(x)$.
   (b) En déduire la limite, quand x tend vers $+\infty$, de $xF_{\alpha+1}(x)$.

Solution

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. L'application $u \mapsto \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}$ est continue sur l'intervalle $]0, x]$ et au voisinage de 0 à droite $\frac{u^{\alpha-1}}{1+u} \sim u^{\alpha-1} = \frac{1}{u^{1-\alpha}}$ et comme $1-\alpha < 1$, l'integrale $\int_0^x \frac{1}{u^{1-\lambda}} du$ est convergente. Par critères de comparaison l'integrale définissant $F_\alpha(x)$ est convergente.
2. Un calcule rapide donne :
   - $F_1(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{1+u} du = \frac{1}{x}[\ln(1+u)]_0^x = \frac{\ln(1+x)}{x}$.
   - $F_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{u}(1+u)} du$. Par le changement de variable $\sqrt{u} = v$, il vient

$$\begin{aligned} F_{\frac{1}{2}}(x) &= 2\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{v(1+v^2)} v dv \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+v^2} dv = \frac{2}{\sqrt{x}}[\arctan(v)]_0^{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

3. On a $F_\alpha(x) = \int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^\alpha \frac{1}{u(1+u)} du$. Le changement de variable $s = \frac{u}{x}$ donne

$$F_\alpha(x) = \int_0^1 s^\alpha \frac{1}{xs(1+xs)} x ds = \int_0^1 \frac{s^{\alpha-1}}{1+xs} ds.$$

   Pour tout $s \in]0,1]$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{s^{\alpha-1}}{1+xs} = s^{\alpha-1}$ et on a la domination

$$\forall (x,s) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,1], \left|\frac{s^{\alpha-1}}{1+xs}\right| \leq s^{\alpha-1}$$

   et $s \mapsto s^{\alpha-1}$ est intégrable sur $]0,1]$. L'extension du théorème de convergence dominée permet de dire que $\lim\limits_{x\to 0^+} \int_0^1 \frac{s^{\alpha-1}}{1+xs} ds = \int_0^1 s^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha}$.

   Remarque : Ce résultat est bien vérifié dans les cas particuliers ci-dessus pour $\alpha = 1$ pui $\alpha = \frac{1}{2}$, puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} F_1(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} F_{\frac{1}{2}}(x) = 2$.
4. Tout d'abord, la fonction F_α est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ car c'est le produit de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ qui est de façon claire de classe C^1 et $g : x \mapsto \int_0^x \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}$ qui est de classe C^1 car pour tout $x > 0$, on a $g(x) = g(1) + \int_1^x \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}$ et comme $u \mapsto \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}$ est continue sur $]0,+\infty[$, alors $x \mapsto \int_1^x \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée et $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+u}$, donc F_α est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} F'_\alpha(x) &= -\alpha x^{-\alpha-1}\int_0^x \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} du + x^{-\alpha}\frac{x^{\alpha-1}}{x+1} \\ &= -\frac{\alpha}{x}F_\alpha(x) + \frac{1}{x(x+1)} \end{aligned}$$

   Il en découle que

$$xF'_\alpha(x) = -\alpha F_\alpha(x) + \frac{1}{x+1}$$

et par suite F_α est une solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $xy'+\alpha y=\frac{1}{x+1}$. On sait par ailleurs que $\lim\limits_{x\to 0^+} F_\alpha(x)=\frac{1}{\alpha}$.

• Si f est une solution de l'équation différentielle $xy'+\alpha y=\frac{1}{x+1}$ sur $]0,+\infty[$ tel que f admet une limite ℓ quand x tend vers 0 à droite, démontrons que $f=F_\alpha$. Si f est une solution de l'équation différentielle

$$xy'+\alpha y=\frac{1}{x+1}$$

comme F_α en est aussi une solution la différence $Y=f-F_\alpha$ est une solution de l'équation différentielle :

$$xy'+\alpha y=0$$

c'est-à-dire

$$y'=-\frac{\alpha}{x}y$$

dont les solutions sont :

$$Y(x)=\lambda e^{\int_1^x -\frac{\alpha}{t}\mathrm{d}t}=\lambda e^{-\alpha\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t}=\lambda e^{-\alpha\ln(x)}$$

Donc $Y(x)=\lambda x^{-\alpha}$ et comme

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\ell \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} F_\alpha(x)=\ell'$$

On a

$$\ell-\ell'=\lim_{x\to 0^+} Y(x)=\lim_{x\to 0^+}\lambda x^{-\alpha}$$

Le seule cas où une telle limite existe est quand $\lambda=0$, car sinon on a une limite qui vaut $\pm\infty$. Il en découe que $f=F_\alpha$ est l'unique solution de (E) qui possède une limite quand x tends vers 0 à droite.

5. (a) On a

$$\begin{aligned}
F_\alpha(x) &= \frac{1}{x^\alpha}\int_0^x \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}\mathrm{d}u\\
&\geq \frac{1}{x^\alpha}\int_0^x \frac{u^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{x^\alpha(x+1)}\int_0^x u^{\alpha-1}\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{x^\alpha(x+1)}\left[\frac{u^\alpha}{\alpha}\right]_0^x\\
&= \frac{1}{x^\alpha(x+1)}\frac{x^\alpha}{\alpha}=\frac{1}{\alpha(x+1)}
\end{aligned}$$

On a donc $\forall x>0, F_\alpha(x)\geq\frac{1}{\alpha(x+1)}$.

(b) Comme F_α est solution de l'équation différentielle $xy'+\alpha y=\frac{1}{x+1}$, on a pour tout $x>0$, la relation :

$$F'_\alpha(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-\alpha F_\alpha(x)\right)$$

d'après 5)a), on a donc :

$$F'_\alpha(x)\leq\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-\alpha\frac{1}{\alpha(x+1)}\right)=0$$

Il en découle que F_α est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

6. (a) On suppose que $\alpha > 1$. On a

$$F_\alpha(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{1+u}\mathrm{d}u$$

Le changement de variable $t = \frac{u}{x}$ donne

$$F\alpha(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+tx}x\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+tx}\mathrm{d}t$$

donc

$$F_\alpha(x) \leq \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{tx}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^1 t^{\alpha-2}\mathrm{d}t = \frac{1}{x(\alpha-1)}$$

(b) Si $0 < \alpha < 1$ alors l'integrale $\int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}}{u+1}\mathrm{d}u$ est convergente car au voisinage de 0 c'est déjà traité et au voisinage de $+\infty$ on a $\frac{u^{\alpha-1}}{u+1} \sim \frac{1}{u^{2-\alpha}}$ et come $\alpha < 1$, on a $2-\alpha > 1$ d'où l'intégrale converge. On a alors $F_\alpha(x) \leq \frac{1}{x^\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}}{u+1}\mathrm{d}u = \frac{c_\alpha}{x^\alpha}$ où $c_\alpha = \int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}}{u+1}\mathrm{d}u$ est une constante qui ne dépend que de α.

7. (a) On a $F_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}\int_0^x \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}\mathrm{d}u$, donc $\frac{1}{x}F_\alpha(x) = \frac{1}{x^{\alpha+1}}\int_0^x \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}\mathrm{d}u$, alors

$$\frac{1}{x}F_\alpha(x) + F_{\alpha+1}(x) = \frac{1}{x^{\alpha+1}}\int_0^x \frac{u^{\alpha-1}+u^\alpha}{1+u}\mathrm{d}u = \frac{1}{x^{\alpha+1}}\int_0^x u^{\alpha-1}\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha x}$$

On en déduit que :

$$\forall \alpha > 0, \forall x > 0, F_{\alpha+1}(x) = \frac{1}{\alpha x} - \frac{1}{x}F_\alpha(x)$$

(b) On a alors $xF_{\alpha+1}(x) = \frac{1}{\alpha} - F_\alpha(x)$. D'après la question 6), on a $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\alpha(x) = 0$ car

- Si $\alpha > 1$, on a $F_\alpha(x) \leq \frac{1}{(\alpha-1)x}$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{(\alpha-1)x} = 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\alpha(x) = 0$.
- Si $a < \alpha < 1$, on a $F_\alpha(x) \leq \frac{c_\alpha}{x^\alpha}$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{c_\alpha}{x^\alpha} = 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\alpha(x) = 0$.
- Finalement si $\alpha = 1$, on a trouvé dans la question 2) que $F_1(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ donc pour ce cas aussi, on a bien : $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\alpha(x) = 0$.

Conclusion : dans tous les cas on a $\lim\limits_{x\to+\infty} xF_{\alpha+1}(x) = \frac{1}{\alpha}$.

EXERCICE 322 Une interessante intégrale impropre

Titre : Une interessante intégrale impropre
ID : 260 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 246 | ID : 260
Difficulté : ★★☆☆☆

Etudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\cos(x)}\mathrm{d}x$.

Solution

On désigne par f la fonction intégrée, c'est-à-dire définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\cos(x)}$$

pour tout $x \in [1, +\infty[$. Un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ fournit :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+\frac{\cos x}{\sqrt{x}}} \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \underbrace{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}_{g(x)} - \frac{\sin(2x)}{2x} + O\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

Les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{\sin(kx)}{x^m}$, où k est une constante, ont des intégrales semi-convergentes sur $[1, +\infty[$ lorsque $0 < m \leq 1$. Il résulte alors du développement ci-dessus que l'intégrale proposée est convergente (elle est seulement semi-convergente, mais la preuve n'est pas demandée).

Note :

On rappelle ici comment prouver que l'intégrale

$$I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} \mathrm{d}x$$

est convergente dans le cas $0 < \alpha \leq 1$. On fixe $X > 0$, et on intègre par parties :

$$\int_1^X \frac{\sin x}{x^\alpha} \mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos x}{x^\alpha}\right]_1^X - \alpha \int_0^X \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}} \mathrm{d}x.$$

Le crochet a pour limite cos 1 quand X tend vers $+\infty$ et la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, puisque $\alpha + 1 > 1$, par suite l'intégrale $\int_1^m \frac{\sin x}{x^2} \mathrm{d}x$ admet une limite finie quand m tends vers $+\infty$.

EXERCICE 323 — Série dont le terme général est un reste

Titre : Série dont le terme général est un reste
ID : 261 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 247 | ID : 261
Difficulté : ★★☆☆☆

On pose $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
1) Justifier l'existence de R_n.
2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathrm{R}_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x$.
3) Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^*$ tels que $\mathrm{R}_n = \mathrm{A}\frac{(-1)^{n+1}}{n^\beta} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\beta+1}}\right)$. En déduire la convergence de $\sum \mathrm{R}_n$.
4) Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{R}_n$.

Solution

1. C'est une conséquence de la convergence de la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ car elle vérifie les conditions du théorème de Leibnitz ou le critère spécial des séries alternées.
2. Intégrons sur $[0; 1]$ la relation

$$1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^{n-1} = \frac{1 - (-x)^n}{1+x}$$

on obtient

$$-S_n = \ln(2) + (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$$

Le dernier terme est majoré par $\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$, ce qui montre qu $\lim_{n\to\infty} S_n = -\ln(2)$, résultat que l'on connaissait depuis longtemps. On en déduit par ailleurs que

$$R_n = S - S_n = -\ln(2) - S_n = (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

3. On effectue une intégration par parties, il vient

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx$$

Cette dernière intégrale est clairement majorée par $\frac{1}{n+2}$, donc

$$\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit que

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit la convergence de la série $\sum R_n$.

4. Enfin, si on remplace R_n par son expression intégrale, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} R_n &= -\sum_{n=0}^{N} \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,dx \\
&= -\int_0^1 \sum_{n=0}^{N} \frac{(-x)^n}{1+x}\,dx \\
&= -\int_0^1 \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x}\,dx \\
&= -\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx - \underbrace{\int_0^1 \frac{(-x)^{N+1}}{(1+x)^2}\,dx}_{\leqslant 1/(N+2)}
\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n = -\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{2}$$

EXERCICE 324 — Série de terme général $u_n = \frac{a_n}{(1+a_0)(1+a_1)\cdots(1+a_n)}$, où $(a_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$

Titre : Série de terme général $u_n = \frac{a_n}{(1+a_0)(1+a_1)\cdots(1+a_n)}$, où $(a_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$

Difficulté : ★☆☆☆☆

ID : 262 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 248 | ID : 262

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs. Montrer que la série $\sum u_n$ de terme général

$$u_n = \frac{a_n}{(1+a_0)(1+a_1)\cdots(1+a_n)}$$

converge et calculer sa somme en fonction des a_n.

Solution

On calcule les deux ou trois premiers termes et on montre par recurrence que

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{(1+a_0)(1+a_1)\cdots(1+a_n)} = 1 - \alpha_n$$

Par ailleurs la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive, elle admet donc une limite

$$\ell = \prod_{k=0}^{\infty} (1+a_k)^{-1}$$

et la série $\sum u_n$ converge et a pour somme $1-\ell$

EXERCICE 325 Une famille d'integrales divergentes

Titre : Une famille d'integrales divergentes
ID : 263 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 249 | ID : 263
Difficulté :

Démontrer que pour tout nombre complexe p,l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{x^2} e^{-px} \mathrm{d}x$$

est divergente.

Solution

On va discuter deux cas suivant que p est réel ou non.
• Si p est réel remarquons que

$$e^{x^2-px} = e^{\frac{x^2}{2}} e^{\frac{x^2}{2}-px}$$

et comme

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x^2}{2}-px} = +\infty,$$

il existe $A > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geq A \Rightarrow e^{x^2-px} \geq A e^{\frac{x^2}{2}},$$

et comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$ est divergente, il en est de même de I.

• Si $p \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, alors $p = a + ib$ avec $b \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}$.
Supposons que l'intégrale I est convergente. On a

$$I = \int_0^{+\infty} e^{t^2-at} e^{-ibt} \mathrm{d}t$$

et puisqu'elle converge sa partie réelle

$$J = \int_0^{+\infty} e^{x^2-ax} \cos(bx) \mathrm{d}x$$

converge. Puisque la fonction cos est paire, on peut, sans nuire à la généralité, supposer que $b > 0$, et par le changement de variable $t = bx$, on a

$$J = \frac{1}{b} \int_0^{+\infty} e^{\alpha t^2 - \beta t} \cos t \mathrm{d}t,$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{b^2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{a}{b}.$$

Il en découle donc que l'intégrale

$$K = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t^2 - \beta t} \cos t \mathrm{d}t$$

est convergente et par suite si on pose :

$$\forall t > 0, \quad g(t) = e^{\alpha t^2 - \beta t} \cos t$$

et

$$\forall x > 0, \quad G(x) = \int_x^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$$

on a

$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0,$$

donc il existe $A > 0$ tel que

$$\forall x \in [A, +\infty[, |G(x)| \leq 1.$$

Par suite, pour tout $(x, y) \in [A, +\infty[^2$, on a

$$\left| \int_x^y g(t)\mathrm{d}t \right| = \left| \int_x^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t - \int_y^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \right|,$$

donc

$$\begin{aligned} \left| \int_x^y g(t)\mathrm{d}t \right| &\leq \left| \int_x^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \right| + \left| \int_y^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \right| \\ &= |G(x)| + |G(y)| \leq 2. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \frac{A}{2\pi}$, posons

$$u_n = 2n\pi \quad \text{et} \quad v_n = \frac{\pi}{4} + 2n\pi.$$

Comme $A < u_n < v_n$, on a

$$(\star) \quad \forall n \geq \frac{A}{2\pi}, \quad \lambda_n = \left| \int_{u_n}^{v_n} g(t)\mathrm{d}t \right| \leq 2$$

et ceci pour tout entier naturel n tel que $n \geq \frac{A}{2\pi}$. Remarquons que la fonction g est positive sur l'intervalle $[u_n, v_n]$ puisque $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos t \leq 1$ pour tout $t \in [u_n, v_n]$, donc

$$\lambda_n \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{u_n}^{v_n} h(t)\mathrm{d}t$$

avec

$$\forall t > 0, \quad h(t) = e^{\alpha t^2 - \beta t}$$

La fonction h a le même sens de variation que la fonction $t \mapsto \alpha t^2 - \beta t$, laquelle est croissante sur l'intervalle $\left[\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right[$, et par suite si on considère un entier naturel N tel que

$$N > \max\left(\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{A}{2\pi}\right),$$

alors pour tout entier naturel n tel que $n \geq N$, on a :

$$h(t) \geq \min_{t \in [u_n, v_n]} (h(t)) = h(u_n),$$

donc

$$\lambda_n = \int_{u_n}^{v_n} h(t)\mathrm{d}t \leq h(u_n)\int_{u_n}^{v_n} 1\mathrm{d}t = h(u_n)\frac{\pi}{4}.$$

Ainsi on a

$$\forall n \geq N \quad \lambda_n \geq \frac{\pi}{4}e^{4\alpha\pi^2n^2-2\beta\pi n} = w_n$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$, il en découle que :

$$(\star\star) \qquad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$$

or $(\star)$ ci-dessus donne :

$$(\star)' \quad \forall n \geq N, \quad \lambda_n \leq 2$$

qui est en contradiction avec $(\star\star)$. Il en découle que l'intégrale I est divergente.

EXERCICE 326 — Convergence dominée pour les suites

Titre : Convergence dominée pour les suites
ID : 285 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 271 | ID : 285
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $(a_{n,k})_{n,k\geq 0}$ une famille de réels. On suppose que :
- Pour tout $k \geq 0$, la suite $(a_{n,k})_{n\geq 0}$ est convergente, de limite a_k.
- Il existe une famille $(b_k)_{k\geq 0}$ telle que $|a_{n,k}| \leq b_k$ pour tout $k, n \geq 0$ et telle que $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$.

Montrer que les quantités $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}$ et $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sont bien définies, puis que l'on a $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Solution

L'inégalité $|a_{n,k}| \leq b_k$ montre que la série $\sum\limits_{k\geq 0} a_{n,k}$ est absolument convergente, donc convergente. Ainsi S_n est bien définie. De plus, par passage à la limite en n, on a également $|a_k| \leq b_k$, et on conclut de la même façon que S est bien définie. Soit $\varepsilon > 0$. La série $\sum\limits_{k\geq 0} b_k$ est convergente, donc il existe un rang $K \geq 1$ tel que $\sum\limits_{k=K}^{\infty} b_k \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Soit maintenant $k \in \{0, \ldots, K-1\}$. Par définition de la limite d'une suite, il existe un rang $n_k \geq 1$ tel que $\forall n \geq n_k, |a_{n,k} - a_k| \leq \frac{\varepsilon}{3K}$. On pose $N = \max\{n_0, \ldots, n_{K-1}\}$. Par l'inégalité triangulaire, on a pour $n \geq N$:

$$\begin{aligned} |S_n - S| &\leq \sum_{k=0}^{K-1} |a_{n,k} - a_k| + \sum_{k=K}^{\infty} |a_{n,k}| + \sum_{k=K}^{\infty} |a_k| \\ &\leq K \cdot \frac{\varepsilon}{3K} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

On a donc : $\forall n \geq N, |S_n - S| \leq \varepsilon$, ce qui prouve la limite souhaitée.

EXERCICE 327 — Limite de la suite $(\frac{a_n}{n})_n$ avec $\forall \in \mathbb{N}, a_n + 1 = \sqrt{a_0 + \cdots + a_n}$

Titre : Limite de la suite $(\frac{a_n}{n})_n$ avec $\forall \in \mathbb{N}, a_n + 1 = \sqrt{a_0 + \cdots + a_n}$
ID : 489 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 471 | ID : 489
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et $\forall \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sqrt{a_0 + \cdots + a_n}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}$.

Solution

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$ car $a_0 > 0$ et si $n \in \mathbb{N}$ et $a_k > 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ alors $a_{n+1} = \sqrt{a_0 + \cdots + a_n} > 0$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq 1$, an a $\begin{cases} a_{n+1}^2 = a_0 + \cdots + a_n \\ a_n^2 = a_0 + \cdots + a_{n-1} \end{cases}$, donc par différence $a_{n+1}^2 - a_n^2 = a_n$, par suite $\forall n \in \mathbb{N}^0, a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + a_n}$, chose vrai aussi pour $n = 0$, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier on a $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \geq a_n$, donc (a_n) est croissante.

• Si on suppose que (a_n) est convergente, par continuité sa limite ℓ réalise $\ell = \sqrt{\ell^2 + \ell}$ donc $\ell = 0$, chose absurde, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$. On a laors le developpement asymptotique $a_{n+1} = a_n \sqrt{1 + \frac{1}{a_n}} = a_n(1 + \frac{1}{2a_n} + o(\frac{1}{a_n})) = a_n + \frac{1}{2} + o(1)$, par suite $a_{n+1} - a_n \sim \frac{1}{2}$. Par sommation des relations de comparaison, on a $a_n \sim \frac{n}{2}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 328 Série $\sum \frac{1}{u_n}$ avec (u_n) une suite récurrente

Titre : Série $\sum \frac{1}{u_n}$ avec (u_n) une suite récurrente
Difficulté : ★★☆☆☆
ID : 492 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 474 | ID : 492

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]1; +\infty[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$$

a) Montrer : $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

b) Existence et calcul de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$.

Solution

4.32 a) Montrons, par récurrence sur n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1.$$

La propriété est vraie pour $n = 0$, car $u_0 \in]1; +\infty[$. Si la propriété est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 = \underbrace{(u_n - 1)^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{u_n}_{>1} > 1,$$

donc la propriété est vraie pour $n + 1$. On conclut, par récurrence sur n : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$. - On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geqslant 0,$$

donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. - Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell$. Alors, par passage à la limite dans la définition de la suite, on a : $\ell = \ell^2 - \ell + 1$, d'où $\ell = 1$. Mais, d'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_0$, d'où, par passage à la limite : $\ell \geqslant u_0 > 1$, contradiction.
Ceci montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et divergente, on conclut :

$$u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

b) On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} &= \frac{1}{u_n^2 - u_n} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{1 - u_n}{u_n (u_n - 1)} = -\frac{1}{u_n}. \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$, par télescopage :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{u_n} = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right)$$
$$= \frac{1}{u_0 - 1} - \frac{1}{u_{N+1} - 1} \xrightarrow[N\infty]{} \frac{1}{u_0 - 1}.$$

On conclut que la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{u_n}$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_0 - 1}.$$

EXERCICE 329 Série des rextes de la série exp(1)

Titre : Série des rextes de la série exp(1)
ID : 494 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 476 | ID : 494
Difficulté :

Donner un équivalent simple de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

Solution

On a $R_n \sim \frac{1}{(n+1)!}$. En effet on a :

$$(n+1)!R_n = 1 + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{k!} = 1 + U_n,$$

où l'on a posé :

$$U_n = \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{k!},$$

alors

$$U_n \leq \frac{1}{n+2} + \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)\dots(n+(k-n))}$$

donc

$$U_n \leq \frac{1}{n+2} + \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

EXERCICE 330 Si les série $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent

Titre : Si les série $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent
ID : 498 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 480 | ID : 498
Difficulté :

Soit (u_n) une suite réelle tel que les séries $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ sont convergentes.

1. Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq k \Rightarrow u_n + 1 \neq 0$. On note p le plus petit $k \in \mathbb{N}$ réalisant (1) ci-dessus.
2. Démontrer que la série $\sum_{n \geq p} \frac{u_n}{1+u_n}$ est convergente

Solution

1. Puisque la série $\sum u_n$ est convergente, la suite (u_n) converge vers 0, donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k \Rightarrow |u_n| < \frac{1}{2}$, en particulier, on a $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k \Rightarrow |u_n| \neq 1$, donc $u_n \neq -1$.
2. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a le developpement asymptotique suivant : $\frac{1}{1+u_n} = 1 - u_n + o(u_n)$, donc $\frac{u_n}{1+u_n} = u_n - u_n^2 + o(u_n^2)$. On a la somme de termes généraux de saries convergentes donc la série $\sum_{n\geq p} \frac{u_n}{1+u_n}$ est convergente.

   • Méthode 2 : On pose $U_n = \frac{u_n}{u_n+1}$ alors $|U_n - u_n| = \frac{u_n^2}{1+u_n} \sim u_n^2$. Donc la série $\sum(U_n - u_n)$ est absolument convergente donc convergente, et comme $U_n = (U_n - u_n) + u_n$ et $\sum u_n$ est convergente, on a $\sum U_n$ est convergente.

EXERCICE 331 De bons exemples de séries dont le terme général est une intégrale

Titre : De bons exemples de séries dont le terme général est une intégrale

Difficulté : ★★☆☆☆

ID : 499 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 481 | ID : 499

Nature des séries $\sum u_n$ et $\sum U_n$ pour $u_n = \int_0^1 \tan(x^n)\mathrm{d}x$ et $U_n = \int_0^1 \tan(x^{n^2})\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Solution

• On a $\forall x \in [0,1], \tan(x) \geq x$, donc $\tan(x^n) \geq x^n$, en intégrant $u_n \geq \frac{1}{n+1}$ et comme la série harmonique diverge, par les critères de comparaison, la série à termes positifs $\sum u_n$ est divergente.

• La changement de variable $x^{n^2} = t$ donne $x = t^{\frac{1}{n^2}}$ donc $\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}t^{\frac{1}{n^2}-1}\mathrm{d}t$ et par suite $U_n = \frac{1}{n^2}\int_0^1 \tan(t)t^{\frac{1}{n^2}-1}\mathrm{d}t$ donc, compte tenu de $|t|^{\frac{1}{n^2}-1} \leq 1$, on a $0 \leq U_n \leq \frac{c}{n^2}$ où $c = \int_0^1 \frac{\tan(t)}{t}\mathrm{d}t$, donc $c > 0$.

• Remarque : On peut aussi traiter $\sum U_n$ en utilisant l'inégalité : $\tan(t) \leq 2t.$, valable $\forall t \in [0,1]$.

EXERCICE 332 De bonx exemple de séries numériques

Titre : De bonx exemple de séries numériques

Difficulté : ★★☆☆☆

ID : 500 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 482 | ID : 500

Nature des séries $\sum u_n$ et $\sum U_n$ pour $u_n = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n} k!$ et $U_n = \frac{1}{(n+2)!}\sum_{k=0}^{n} k!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Solution

On commence par donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=0}^{n} k!$, on prouve que $S_n \sim n!$, pour cela remarquons que $S_n - n! = (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k!$, donc $S_n - n! \leq (n-1)! + (n-1)(n-2)! = 2(n-1)(n-2)! = o(n!)$, donc $S_n \sim n!$ et cela donne tout de suite $u_n \sim \frac{1}{n}$ et $U_n \sim \frac{1}{n^2}$ donc $\sum u_n$ diverge alors que $\sum U_n$ converge.

EXERCICE 333 La suite des sinus itérés, une généralisation

Titre : La suite des sinus itérés, une généralisation
ID : 501 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 483 | ID : 501
Difficulté : ★★☆☆☆

1. Soit (u_n) une suite de nombre complexes et (U_n) définie par $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$. Démontrer que si (u_n) est convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$ alors (U_n) converge aussi vers ℓ.
2. Soit $\alpha \in]0,1[$ et (x_n) la suite définie par $\begin{cases} x_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \sin(x_n) \end{cases}$.
   (a) Montrer que (x_n) converge vers 0.
   (b) Montrer que $x_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$ quand $n \to +\infty$.
3. **Généralisation :** Soit a un nombre réel tel que $a > 0$ et $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ une application concave strictement croissante tel qu'il existe k et p constantes réelles strictement positives tel que, pour x voisin de 0 dans $[0,a]$, on aie :
$$f(x) = x - kx^{p+1} + o(x^{p+1}).$$
Soit alors (x_n) une suite définie par $x_0 \in]0,a[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$. Démontrer que quand n tend vers $+\infty$, on a : $x_n \sim \left(\frac{1}{pkn}\right)^{\frac{1}{p}}$.

Solution

1. On discute les cas :
   • Si $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell > 0$, on a $u_n \sim \ell$, par sommation des relations de comparaison la somme partielle (S_n) de (u_n) vérifie $S_n \sim n\ell$, donc $U_n = \frac{S_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
   • Si $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell < 0$, on applique l'étude ci-dessus à la suite $(-u_n)$.
   • Si $\ell = 0$, on considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} V_n = 1$ pour $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k+1) = \frac{i}{n}S_n + n = U_n + 1$, donc $U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Soit $\alpha \in]0,1[$ et (x_n) la suite définie par $\begin{cases} x_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \sin(x_n) \end{cases}$.
3. Finalement si $\ell \in \mathbb{C}$, on écrit $u_n = a_n + ib_n$ et $\ell = \ell_1 + i\ell_2$ donc $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell_1$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell_2$ donc $\lim_{n\to+\infty} A_n = \ell_1$ et $\lim_{n\to+\infty} B_n = \ell_2$ pour $A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Donc $U_n = A_n + iB_n$ et alors (U_n) converge vers $\ell_1 + i\ell_2 = \ell$.
   (a) La suite (x_n) est décroissante positive donc elle converge. En effet $\forall t \in [0,1]\ \sin(t) \leq t$ et $x_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque $x_0 = \alpha \in]0,1[$ et si $n \in \mathbb{N}$ réalise $u_n \in [0,1]$ alors $0 \leq \sin(u_n) \leq \sin(1) \leq 1$. Il en découle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_{n+1} = \sin(x_n) \leq x_n$. Sa limite est solution de l'équation $\sin(x) = x$, or l'étude de la fonction $g(x) = x - \sin(x)$ montre que $g'(t) = 1 - \cos(t)$, donc g est strictement croissante donc 0 est l'unique solution de $\sin(t) = t$ donc $\ell = 0$.
   (b) On a le developpment asymptotique
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3}{6} + o(x_n^3) = x_n\left(1 - \frac{x_n^2}{6} + o(x_n^2)\right),$$
donc
$$x_{n+1}^{\beta} = x_n^{\beta}\left(1 - \frac{x_n^2}{6} + o(x_n^2)\right)^{\beta} = x_n^{\beta}\left(1 - \beta\frac{x_n^2}{6} + o(x_n^2)\right)$$
donc
$$x_{n+1}^{\beta} - x_n^{\beta} = -\beta\frac{x_n^{\beta+2}}{6} + o(x_n^2)$$

Prenons $\beta = -2$, donc

$$x_{n+1}^{-2} - x_n^{-2} \sim \frac{1}{3}$$

Par la première question on a $\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}^{-2} - x_k^{-2} \sim \frac{n}{3}$ donc $x_n^{-2} - x_0^{-2} \sim \frac{n}{3}$ et comme $x_n^{-2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $x_n^2 \sim \frac{3}{n}$, donc $x_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$

EXERCICE 334 Série dont le terme général est construit à l'aide de Γ d'Euler

Titre : Série dont le terme général est construit à l'aide de Γ d'Euler
ID : 503 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 485 | ID : 503
Difficulté : ★★☆☆☆

On note la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$. On pose $u_n = \int_n^{n+1} \ln\Gamma(x)\mathrm{d}x$. Préciser la nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{u_n}$.

Solution

La fonction d'Euler Γ est bien sûr continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. On sait que : $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Pour $x \geq 1$, posons $\varphi(x) = \int_x^{x+1} \ln\Gamma(t)\mathrm{d}t$. On a : $\varphi'(x) = \ln\Gamma(x+1) - \ln\Gamma(x) = \ln x \geq 0$. Ainsi : $\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \geq 1, \varphi(x) = x\ln x - x + K$. Donc φ est croissante et $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$. La suite $n \mapsto u_n = \varphi(n)$ est donc positive (au moins à partir d'un certain rang, mais en fait dès que $n \geq 1$) et tend vers 0 en décroissant. Le théorème spécial des séries alternées s'applique. On en déduit que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{u_n}$ converge.

EXERCICE 335 suites et séries, developpements asymptotiques

Titre : suites et séries, developpements asymptotiques
ID : 504 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 486 | ID : 504
Difficulté : ★★★☆☆

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists! a_n \in \mathbb{R}, e^{a_n} + na_n = 2$.
2. Déterminer la nature de $\sum a_n$ et $\sum (-1)^n a_n$.
3. Déterminer la limite de $n\,(1 - na_n)$ en $+\infty$.
4. Développer a_n à la précision o $\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Solution

1. On pose $f_n(x) = \mathrm{e}^x + nx - 2$. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante, et $f_n(0) = -1$. Il existe donc un unique $a_n > 0$ tel que $f_n(a_n) = 0$.
2. On a : $f_{n+1}(a_n) - f_n(a_n) = a_n$. Sachant $f_n(a_n) = 0$ et $a_n > 0$, il en découle :

$$f_{n+1}(a_n) = a_n > 0 = f_{n+1}(a_{n+1})$$

La croissance de f_{n+1} assure que : $a_n \leq a_{n+1}$. (a_n) est décroissante minorée donc convergente. Soit ℓ sa limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$na_n = 2 - \mathrm{e}^{a_n}$$

Supposons par l'absurde $\ell > 0$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} na_n = +\infty$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} (2 - \mathrm{e}^{a_n}) = 2 - \mathrm{e}^{\ell}$$

Mais c'est contradictoire ; Donc $\lim a_n = 0$.
Ainsi $\lim_{n\to+\infty} na_n = 1$ donc $a_n \sim \frac{1}{n}$. Par comparaison, la série $\sum a_n$ diverge. La suite (a_n) décroit vers 0 donc (théorème spécial des séries alternées) la série $\sum(-1)^n a_n$ converge.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $e^{a_n} - 1 = 1 - na_n$. De plus $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ donc $e^{a_n} - 1 \sim a_n$. Ainsi $n(1 - na_n) \sim na_n$ donc :
$$\lim_{+\infty} n(1 - na_n) = 1$$

4. On déduit de $(\star)$ que $1 - na_n \sim \frac{1}{n}$. Ainsi : $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
On peut pousser ce développement :
$$\begin{aligned} e^{a_n} - 1 &= a_n + \frac{a_n^2}{2} + o\left(a_n^2\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$
Ainsi $1 - na_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Finalement : $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

EXERCICE 336 Séries et integration, un équivalent d'une suite

Titre : Séries et integration, un équivalent d'une suite
ID : 505 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 487 | ID : 505
Difficulté : ★★★☆☆

On pose $a_n = -\int_0^1 \frac{t^n \ln t}{t+1}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que (a_n) est définie. Donner sa limite.
2. Calculer $a_n + a_{n+1}$. En déduire un équivalent de a_n.
3. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Solution

1. Les $t \mapsto f_n(t) = \frac{t^n \ln t}{t+1}$ sont continues sur $]0,1]$ La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est CVS vers 0 sur $]0,1]$. Les f_n sont dominées sur $]0,1]$ par $t \mapsto |\ln t|$. Le théorème de convergence dominée assure alors l'existence de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$, et donne $\lim_{+\infty} a_n = 0$.

2. On trouve $a_n + a_{n+1} = J_n$, où $J_n = -\int_0^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t$. Ainsi, pour tout $n \geq 0$:
$$\begin{aligned} J_n &= \underbrace{\left[-\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right]_0^1}_{=0} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$
La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est clairement décroissante. Pour tout $n \geq 1$, on a donc :
$$\frac{a_n + a_{n+1}}{2} \leq a_n \leq \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$$
Ainsi : $\frac{1}{2(n+1)^2} \leq a_n \leq \frac{1}{2n^2}$. Il en résulte : $a_n \sim \frac{1}{2n^2}$.

3. On sait que $\sum_{n\geq 0} a_n = \int_{]0,1]} |f_n|$ converge absolument. Les interversions série/intégrale sont

donc justifiées par le théorème d'intégration terme à terme. - Tout d'abord :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\sum_{n=0}^{+\infty}(-t)^n\,\mathrm{d}t$$
$$= -\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

On intègre par parties (astucieusement !). Ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = -\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$\underbrace{\left[\frac{-t}{1+t}\ln t\right]_0^1}_{=0} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$$

- Ensuite :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\,\mathrm{d}t$$
$$= -\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\ln t\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} J_{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Classiquement :

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$

Finalement, on trouve : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{\pi^2}{8}$

EXERCICE 337 Comparaison de deux sommes de séries

Titre : Comparaison de deux sommes de séries
ID : 507 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 489 | ID : 507
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit (u_n) une suite réelle strictement positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$. Comparer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{S_n}$.

Solution

On va démontrer que les deux séries sont de même nature.
• Si $\sum u_n$ est convergente de somme S alors en posant $v_n = \frac{u_n}{S_n}$, on a $v_n \leq \frac{u_n}{u_0}$, donc la série $\sum v_n$ est convergente.
• Réciproquement si $\sum u_n$ est divergente alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ par suite $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 - v_n = 1 - \frac{u_n}{S_n} = \frac{S_{n-1}}{S_n}$, donc $\ln(1 - v_n) = \ln(S_{n-1}) - \ln(S_n)$. Par sommation téléscopique, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a $\Sigma_N = \sum_{n=1}^{N} \ln(1 - v_n) = \ln \frac{u_n}{S_n}$, donc $\lim_{N \to +\infty} \Sigma_N = -\infty$. Deux cas sont possibles :
• Soit $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$, alors $\ln(1 - v_n) \sim -v_n$ et comme la série $\sum \ln(1 - v_n)$ diverge, il en est de même de la série $\sum v_n$.
• Soit (v_n) ne converge pas vers 0, alors $\sum v_n$ est grossiérement divergente.

EXERCICE 338 Une série : convergence et calcul de la somme

Titre : Une série : convergence et calcul de la somme
ID : 513 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 495 | ID : 513
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit (x_n) la suite définie par

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} x_k \end{cases}.$$

Démontrer que la série $\sum \frac{1}{x_n}$ converge et calculer sa somme.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k},$$

alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$(\star) \quad V_{p+1} - V_p = \frac{1}{x_{p+1}} = \frac{1}{S_p}$$

où $\forall p \in \mathbb{N}, S_p = \sum_{k=0}^{p} x_k$.
Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_{n+1} = S_n + x_{n+1} = 2S_n$, donc la suite (S_n) est la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $S_0 = x_0 = 1$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_n = 2^n$ et par suite

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{S_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

donc, compte tenu de la relation $(\star)$ ci-dessus, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, V_{p+1} - V_p = \frac{1}{2^{p+1}}$$

Par sommation, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (V_{k+1} - V_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

C'est une somme téléscopique, donc

$$V_n - V_0 = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

et comme $V_0 = 1$, il vient

$$V_n = 1 + 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

relation valable aussi pour $n = 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

et par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, il vient :

$$V = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x_n} = \lim_{n \to +\infty} V_n = 3$$

EXERCICE 339 Un exercice sur les intégrales et le suites

Titre : Un exercice sur les intégrales et le suites
ID : 529 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 510 | ID : 529
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit f la fonction définie par :

$$f(t) = \frac{2t-1}{\ln t - \ln(1-t)}$$

et soit :

$$I = \int_0^1 f(t)dt.$$

1. Justifier l'existence de I
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{4n} \leq I - \frac{\pi}{2n^3} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \leq \frac{3}{4n}$$

3. En déduire que $I = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{x(1-x)}{\sin(\pi x)} dx$.

Solution

1. La fonction f est continue sur l'intevalle $]0,1[$ car d'une part $t \mapsto 2t-1$ l'est car polynômiale et d'autre part les fonctions $t \mapsto \ln(t)$ et $t \mapsto \ln(1-t)$ sont bien définies sur $]0,1[$ et $\ln(t) \neq \ln(1-t)$ puisque $t \neq 1-t$ pour tout $t \in]0,1[$. Il reste à étudier les problèmes aux bornes de cette intégrale :
   • La borne 0 : Pour t voissin de 0 à droite, on a $2t-1 \sim -1$ et $\ln(t) - \ln(1-t) \sim \ln(t)$, donc $f(t) \sim -\frac{1}{\ln(t)}$. La fonction $t \mapsto -\frac{1}{\ln(t)}$ est positive intégrable sur $]0, \frac{1}{2}[$ car au voisinage de 0, on a $-\frac{1}{\ln(t)} = o(\frac{1}{\sqrt{t}}$.
   • Au voisinage de 1, on a $(2t-1) \sim 1$ et $\ln(t) - \ln(1-t) \sim \ln(1-t)$, donc $f(t) \sim \frac{1}{\ln(1-t)}$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln(1-t)}$ est négative et $\frac{1}{\ln(1-t)} = o(\frac{1}{\sqrt{1-t}}$ qund $t \to 1^-$, donc intégrable.
2.

EXERCICE 340 Une famille sommable pas facile

Titre : Une famille sommable pas facile
ID : 533 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 514 | ID : 533
Difficulté : ★★★☆☆

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de complexes telle que $\sum_{n \geq 1} a_n^2$ est absolument convergente.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k |a_k| \, \mathrm{e}^{ikx} \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{2\pi}{i} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq p \leq n}} \frac{|a_k| \, |a_p|}{k+p}.$$

2. Montrer que la famille $\left(\frac{a_p a_q}{p+q} \right)_{p,q \in \mathbb{N}^*}$ est sommable.

Solution

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} x \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k |a_k| \, \mathrm{e}^{ikx} \right)^2 \mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} x \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq h \leq n}} (-1)^{h+k} |a_k| \, |a_h| \, \mathrm{e}^{ix(k+h)} \right) \mathrm{d}x \\ &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq h \leq n}} (-1)^{h+k} |a_k| \, |a_h| \int_{-\pi}^{\pi} x \mathrm{e}^{ix(k+h)} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Or, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, en intégrant par parties :

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \mathrm{e}^{xip} \, \mathrm{d}x = \left[x \frac{\mathrm{e}^{ixp}}{ip} \right]_{-\pi}^{\pi} - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{xip}}{ip} \, \mathrm{d}x}_{=0} = \frac{1}{ip} \left((-1)^p (\pi + \pi) \right) = \frac{(-1)^p 2\pi}{ip},$$

donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k |a_k| \, \mathrm{e}^{ikx} \right)^2 \mathrm{d}x = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq h \leq n}} (-1)^{k+h} |a_k| \, |a_h| \, \frac{(-1)^{k+h} 2\pi}{i(k+h)} = \frac{2\pi}{i} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq p \leq n}} \frac{|a_k| \, |a_p|}{k+p}.$$

2. La formule de la première question doit permettre de majorer $\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq p \leq n}} \frac{|a_k||a_p|}{k+p}$ par une constante, ce qui prouve alors la sommabilité de la famille $\left(\frac{a_p a_q}{p+q} \right)_{p,q \in \mathbb{N}^*}$.

$$\sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n}} \frac{|a_p a_q|}{p+q} = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} x \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k |a_k| \, \mathrm{e}^{ikx} \right)^2 \mathrm{d}x \right|.$$

Il est naturel de majorer à l'aide de l'inégalité triangulaire, qui donne :

$$\sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n}} \frac{|a_p a_q|}{p+q} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k| \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k| \right)^2$$

mais la série $\sum |a_n|$ peut diverger et dans ce cas, $\frac{\pi}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k| \right)^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc la majoration

précédente est trop grossière. Il faut réaliser une majoration plus fine.

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leq p\leq n\\1\leq q\leq n}}\frac{|a_pa_q|}{p+q} &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right|a_k\left|\mathrm{e}^{ikx}\right|^2\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k|a_k|\,\mathrm{e}^{ikx}\sum_{h=1}^{n}(-1)^h|a_h|\,\mathrm{e}^{-ihx}\,\mathrm{d}x \quad \left(\text{car }\forall z\in\mathbb{C},|z|^2=z\bar{z}\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\1\leq h\leq n}}(-1)^{k+h}|a_k||a_h|\,\mathrm{e}^{i(k-h)x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Or, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{ipx}=\left[\frac{\mathrm{e}^{ipx}}{ip}\right]_{-\pi}^{\pi}=0$. Donc $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq p\leq n\\1\leq q\leq n}}\frac{|a_pa_q|}{p+q}\leq\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\,\pi\leq\pi\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|^2$.

EXERCICE 341 Equivalent pour une integrale

Titre : Equivalent pour une integrale
ID : 557 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 538 | ID : 557
Difficulté : ★★★☆☆

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une application continue tel que $f(1)\neq 0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $I_n=\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$. Démontrer que $I_n\sim\frac{f(1)}{n}$ dans les deux cas suivants :

1. f est de classe C^1.
2. f est de classe C^0.

Solution

Viendra

EXERCICE 342 Calcul de l'intégrale de Dirichlet et de $\zeta(2)$.

Titre : Calcul de l'intégrale de Dirichlet et de $\zeta(2)$.
ID : 682 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 663 | ID : 682
Difficulté : ★★☆☆☆

On se propose de démontrer que $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ et de calculer $S'=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

1. Soient deux réels $a<b$ et une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$. Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t=0$. (Utiliser une intégration par parties.)
2. Soit un entier non-nul $n\in\mathbb{N}^*$. On définit la fonction S_n sur $[0,\pi]$ par

$$S_n(t)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt)$$

Montrer sans utiliser de récurrence que $\forall t\in]0,\pi[\quad S_n(t)=\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$. et calculer $S_n(0),S_n(\pi)$.

3. Calculer l'intégrale $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$

4. On définit la fonction ϕ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$. Montrer que la fonction ϕ est dérivable en 0 et préciser $\phi'(0)$. Montrer ensuite que la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t)\sin(2n+1)t \, \mathrm{d}t$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ où
$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t} \, \mathrm{d}t.$$
6. Déterminer deux réels α et β tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\pi} (\alpha t + \beta t^2)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$
7. En déduire que
$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \int_0^{\pi} (\alpha t + \beta t^2) \, S_n\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t$$
est un réel indépendant de n que l'on précisera.
8. On définit la fonction h sur $]0, \pi]$ par $h(t) = \frac{(\alpha t + \beta t^2)}{\sin\frac{t}{2}}$. Montrer que h se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.
9. Montrer que les séries $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ sont convergentes et calculer leur sommes respectives : $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $S' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Solution

1. On donne $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$. Une intégration par parties donne, pour tout nombre réel λ tel que $\lambda > 0$:
$$\begin{aligned} \int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{\lambda} g(t)\cos(\lambda t)\right]_a^b + \frac{1}{\lambda}\int_a^b g'(t)\cos(\lambda t)\mathrm{d}t. \\ &= \frac{1}{\lambda}(g(b)\cos(\lambda b) - g(a)\cos(\lambda a)) + \frac{1}{\lambda}\int_a^b g'(t)\cos(\lambda t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$
Comme g est de classe C^1 les fonctions g et g' sont continues sur le segment $[a, b]$, donc elles y sont bornée et on note alors $\|g\|_{\infty,[a,b]} = \sup\limits_{x\in[a,b]} |g(t)|$ et $\|g'\|_{\infty,[a,b]} = \sup\limits_{x\in[a,b]} |g'(t)|$, et avec ces notations on a alors :
$$\begin{aligned} \left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t\right| &\leq \frac{1}{\lambda}(|g(b)||\cos(\lambda b)| + |g(a)||\cos(\lambda a)|) + \frac{1}{\lambda}\int_a^b |g'(t)||\cos(\lambda t)|\mathrm{d}t. \\ &\leq \frac{2\|g\|_{\infty,[a,b]}}{\lambda} + \frac{b-a}{\lambda}\|g'\|_{\infty,[a,b]} \\ &= \frac{M}{\lambda}, \text{ avec } M = 2\|g\|_{\infty,[a,b]} + (b-a)\|g'\|_{\infty,[a,b]} \end{aligned}$$
Comme $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \frac{M}{\lambda} = 0$, on a alors
$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t = 0$$
2. $n \in \mathbb{N}^*$,$S_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt)$.
• Puisque $t \in]0, \pi[$ le nombre complexe $z = e^{i2t}$ réalise $z \neq 1$, ce qui permet d'appliquer la formule $\sum_{k=0}^{N} z^k = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, qu'on utilisera par la suite.

• On a alors :

$$\begin{aligned} S_n(t) &= 1+2\Re\left(\sum_{k=1}^{n} e^{i2kt}\right) = 1+2\Re\left(e^{i2t}\frac{1-e^{i2nt}}{1-e^{i2t}}\right) \\ &= 1+2\Re\left(e^{i2t}\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}e^{i(n-1)t}\right) = 1+2\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\Re\left(e^{i(n+1)t}\right) \\ &= 1+2\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\cos((n+1)t) = \frac{\sin(t)+2\sin(nt)\cos(n+1)t}{\sin(t)} \\ &= \frac{\sin(t)+\sin(nt+(n+t)t)+\sin(nt-(n+1)t)}{\sin(t)} = \frac{\sin(2n+1)t)}{\sin(t)} \end{aligned}$$

• On a $S_n(0) = 1+2\sum\limits_{k=1}^{n} 1 = S_n(\pi) = 2n+1$.

3. On a $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} S_n(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ car $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}t + \sum\limits_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2kt)\mathrm{d}t$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2kt)\mathrm{d}t = \frac{1}{2k}[-\cos(2k\pi)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$. En conclusion $J_n = \frac{\pi}{2}$.

4. $\phi : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to R; t \mapsto \phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

• Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, posons $\Delta(t) = \frac{\phi(t)-\phi(0)}{t-0} = \frac{\sin(t)-t}{t^2\sin(t)}$. Pour t voisin de 0, on a $\Delta(t) = \frac{t-\frac{t^3}{6}-t+o(t^3)}{t^3+o(t^3)}$, donc $\Delta(t) \sim \frac{-\frac{1}{6}t^3}{t^3}$ et par suite $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\phi(t)-\phi(0)}{t-0} = -\frac{1}{6}$, donc ϕ est dérivable au point 0 et $\phi'(0) = -\frac{1}{6}$

• Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\phi'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} = \frac{t^2\cos(t)-\sin^2(t)}{t^2\sin^2(t)}$. On va effectuer un developpement limité à l'ordre 4 du numérateur :

$$\begin{aligned} N(t) &= t^2\cos(t) - \sin^2(t) \\ &= t^2(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)) - (t-\frac{t^3}{6}+o(t^4))^2 \\ &= t^2 - \frac{t^4}{2} - \left(t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4)\right) \\ &= -\frac{1}{6}t^4 + o(t^4) \end{aligned}$$

Il en découle que, quand t tend vers 0, on a $N(t) \sim -\frac{1}{6}t^4$, donc $\phi'(t) \sim \frac{-\frac{1}{6}t^4}{t^4} \sim -\frac{1}{6}$, donc $\lim\limits_{t\to 0}\phi'(t) = -\frac{1}{6} = \phi'(0)$ et finalement ϕ' est continue au point 0, donc ϕ est de classe C^1 sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.

5. D'après la question 1), et compte tenu du fait que ϕ est de classe C^1 sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ et de la caractérisation séquentielle de la limite et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1) = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t)\sin(2n+1)t\mathrm{d}t = 0$. On a noté $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\mathrm{d}t$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut dire que

$$I_n - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}\right)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t)\sin(2n+1)t\mathrm{d}t.$$

Comme d'après la question 2), on a $J_n = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la limite calculée ci-dessus, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$. Il en découle que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

6. Déterminons deux réels α et β tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\pi}(\alpha t + \beta t^2)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$

• Calculons tout d'abord les intégrales $u_n = \int_0^{\pi} t\cos(nt)\mathrm{d}t$ et $v_n = \int_0^{\pi} t^2\cos(nt)\mathrm{d}t$.

• On a : $u_n = \int_0^{\pi} t\cos(nt)\mathrm{d}t = [\frac{t}{n}\sin(nt)]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}[\cos(nt)]_0^{\pi} = \frac{(-1)^n-1}{n^2}$

• De même : $v_n = \int_0^\pi t^2\cos(nt)\mathrm{d}t = [\frac{t^2}{n}\sin(nt)]_0^\pi - \frac{2}{n}\underbrace{\int_0^\pi t\sin(nt)\mathrm{d}t}_{w_n}$.

• On a $w_n = \int_0^\pi t\sin(nt)\mathrm{d}t = [-\frac{t}{n}\cos(nt)]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nt)\mathrm{d}t = -\frac{\pi(-1)^n}{n}$.

• Il en découle que $v_n = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}$.

• On a alors $\mu_n = \int_0^\pi(\alpha t + \beta t^2)\cos(nt)\mathrm{d}t = \alpha u_n + \beta v_n = \frac{\alpha((-1)^n-1)}{n^2} + \frac{2\beta\pi(-1)^n}{n^2}$.

• Il en découle que :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*, \mu_n = \frac{1}{n^2} &\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*, \alpha((-1)^n-1) + 2\beta\pi(-1)^n = 1\\ &\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*, [\alpha+2\beta\pi](-1)^n - [\alpha+1] = 0.\end{aligned}$$

Comme les suites $(-1)^n$ et (1) sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ car non nulles et l'une d'elles est divergente et l'autre convergente, on a

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \mu_n = \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+1=0\\ \alpha+2\beta\pi=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=\frac{1}{2\pi}\end{cases}$$

7. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on a :

$$\frac{1}{k^2} = \int_0^\pi(\alpha t+\beta t^2)\cos(kt)\mathrm{d}t.$$

Il en découle que :

$$\begin{aligned}2\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2} &= \int_0^\pi(\alpha t+\beta t^2)\sum_{k=1}^n 2\cos(kt)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\pi(\alpha t+\beta t^2)\left(S_n\left(\frac{t}{2}\right)-1\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Il en découle que

$$\begin{aligned}2\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2} - \int_0^\pi(\alpha t+\beta t^2)S_n\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t &= -\int_0^\pi(\alpha t+\beta t^2)\mathrm{d}t\\ &= -\alpha\frac{\pi^2}{2} - \beta\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{2\pi}\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}\end{aligned}$$

En résumé on a :

$$2\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2} - \int_0^\pi(\alpha t+\beta t^2)S_n\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{3}.$$

8. $\forall t\in]0,\pi], h(t) = \frac{(\alpha t+\beta t^2)}{\sin\frac{t}{2}}$.

• Commençons par calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 à droite, pour cela remarquons que quand t tend vers 0 à droite on a $h(t)\sim\frac{\alpha t}{\frac{t}{2}} = 2\alpha = -2$. Il en découle que si on pose $h(0) = -2$ il s'agit d'un prolongement par continuité(noté aussi h). Ainsi, on définit désormais h sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par : $h(t) = \begin{cases}\frac{(\alpha t+\beta t^2)}{\sin\frac{t}{2}} & \text{si} \quad h\neq 0\\ -2 \quad \text{si} \quad h=0\end{cases}$. On va montrer que h ainsi définie est de classe C^1 sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. Il est clair que h est de classe C^1 sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ comme produit de fonctions de classe C^1. Le seule problème se pose pour 0.

• Montrons d'abord que h est dérivable au point 0 en examinant la limite $\lim\limits_{t\to 0}\Delta(t)$ où pour tout $t\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $\Delta(t) = \frac{h(t)-h(0)}{t-0} = \frac{1}{t}\left(\frac{\alpha t+\beta t^2}{\sin(\frac{t}{2})}+2\right) = \frac{\alpha t+\beta t^2+2\sin(\frac{t}{2})}{t\sin(\frac{t}{2})}$. On va effectuer un développement limité du numérateur $N(t)$ de $\Delta(t)$ à l'ordre 2, on a $N(t) = \alpha t+\beta t^2+2\sin(\frac{t}{2}) = \alpha t+\beta t^2+$

$2\frac{t}{2}+o(t^2)=-t+\frac{1}{2\pi}t^2-t+o(t^2)$, donc $N(t)\sim\frac{1}{2\pi}t^2$ et par suite $\Delta(t)\sim\frac{\frac{t^2}{2\pi}}{\frac{t^2}{2}}\sim\frac{1}{\pi}$. Il en découle que h est dérivable au point 0 et $h'(0)=\frac{1}{\pi}$.

• Pour terminer démontrons que h' est continue au point 0, pour cela remarquons que pour tout $t\in]0,\frac{\pi}{2}]$, on a $h'(t)=\frac{(\alpha+2\beta t)\sin(\frac{t}{2})-(\alpha t+\beta t^2)\frac{1}{2}\cos(\frac{t}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})}$. On va donner un développement limité du numérateur :

$$\begin{aligned}N'(t) &= (\alpha+2\beta t)\sin(\frac{t}{2})-(\alpha t+\beta t^2)\frac{1}{2}\cos(\frac{t}{2})\\ &= (\alpha+2\beta t)(\frac{t}{2}+o(t^2))-(\alpha t+\beta t^2)\frac{1}{2}(1-\frac{t^2}{8}+o(t^2))\\ &= \alpha\frac{t}{2}+\beta t^2-\frac{1}{2}\alpha t-\frac{1}{2}\beta t^2+o(t^2)\\ &= \frac{1}{2}\beta t^2+o(t^2)\sim\frac{1}{4\pi}t^2\end{aligned}$$

In en découle que quand t tend vers 0, on a $h'(t)\sim\frac{1}{\pi}$, donc $\lim\limits_{t\to0}h'(t)=h'(0)=\frac{1}{\pi}$ et finalement h' est continue au point 0 et h est de classe C^1 sur le segment $[0,\frac{\pi}{2}]$.

9. D'après la question **7)** on a l'expression de la somme partielle

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\pi}(\alpha t+\beta t^2)S_n\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t}_{V_n}$$

On a $V_n=\int_0^{\pi}\frac{\alpha t+\beta t^2}{\sin(\frac{t}{2})}\sin(2n+1)t=\int_0^{\pi}h(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t$. D'après la question **1)** et compte tenu du fait que h est de classe C^1 sur le segment $[0,\pi]$ et de la caractérisation séquentielle de la limite et que $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1)=+\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}h(t)\sin(2n+1)t\mathrm{d}t=0$, par suite

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}s_n=\frac{\pi^2}{6}.$$

• Comme la série $\sum\frac{1}{n^2}$ est absolument convergente, on peut faire une sommation par paquets, on a $S=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}=T+\frac{1}{4}S$. il en découle que $T=\frac{3}{4}S=\frac{\pi^2}{8}$.

EXERCICE 343 — Un orale de Mines et Ponts 2024, beos 8052

Titre : Un orale de Mines et Ponts 2024, beos 8052 — **Difficulté :** ★★☆☆☆
ID : 699 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 680 | ID : 699

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs convergente. La suite (u_n) est indexée par $\mathbb{N}$. On définit $\forall n\in\mathbb{N}^*, V_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}ku_k$ $W_n=\frac{1}{n(n+1)}\sum\limits_{k=1}^{n}ku_k$.

1. Démontrer que la suite $(V_n)_{n\geq1}$ est convergente vers 0.
2. Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geq1}W_n$ est convergente.
3. Montrer que la série de terme général $U_n=\frac{1}{n+1}\left(n!\prod\limits_{k=1}^{n}u_k\right)$ est convergente et en déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}U_k\leq\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_k$.

Solution

1. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et on note que $u_k = S_k - S_{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n} k u_k = \sum_{k=1}^{n} k(S_k - S_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} kS_k - \sum_{k=1}^{n} kS_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} kS_k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)S_k \\ &= nS_n - S_0 - \sum_{k=1}^{n-1} S_k = nS_n - \sum_{k=0}^{n-1} S_k \end{aligned}$$

Il en découle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $V_n = \frac{1}{n} T_n = S_n - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k$. Comme la série $\sum u_n$ est convergente on note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sa somme et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle d'ordre n, on a alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$ et la moyenne de Cesaro $C = \frac{1}{n} \sum_{n=0}^{n-1} u_k$ réalise aussi $\lim_{n\to+\infty} C_n = S$, donc $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$W_n - W_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} T_n - \frac{1}{(n+1)(n+2)} T_{n+1},$$

et en observant que $T_{n+1} = T_n + (n+1)u_{n+1}$, il vient

$$W_n - W_{n+1} = \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) T_n - (n+1)u_{n+1},$$

donc en effectuant les calculs nécessaires :

$$W_n - W_{n+1} = \frac{n+2-n}{n(n+1)(n+2)} T_n - \frac{1}{n+2} u_{n+1},$$

donc

$$W_n - W_{n+1} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} V_n - \frac{1}{n+2} u_{n+1}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$ on a $\frac{2}{(n+1)(n+2)} V_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq \frac{1}{n+2} u_{n+1} \leq u_{n+1},$$

et la série $\sum u_{n+1}$ est convergente. Tout ça justifie la convergence de la série numérique $\sum W_n$.

3. On rappelle l'inégalité classique AG, si $x_1, \ldots, x_n$ sont des réels strictement positifs alors la moyenne géométrique $g = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{\frac{1}{n}}$ et la moyenne arithmétique $m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$ sont liées par l'inégalité $g \leq m$ avec égalité si et seulement si les x_k sont égaux. Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a noté $U_n = \frac{1}{n+1} \left(n! \prod_{k=1}^{n} u_k \right)^{\frac{1}{n}}$, on a alors $U_n \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \leq W_n$ et comme la série $\sum W_n$ est convergente la série $\sum U_n$ est convergente.
• La déduction : Dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} U_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} W_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} k u_k = \sum_{k=1}^{+\infty} k u_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} k u_k \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k.$$

Il en découle que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} \left(n! \prod_{k=1}^{n} u_k \right) \right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} u_k.$$

EXERCICE 344 Une série avec suite dcroissante

Titre : Une série avec suite dcroissante
ID : 719 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 686 | ID : 719
Difficulté : ★★★☆☆

Soit (a_n) une suité à termes positifs et qui est décroissante et on pose $b_n = n(a_n - a_{n+1})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que $a_n = o(\frac{1}{n})$ quand $n \to +\infty$.
2. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Démoontrer que $T_n = S_n - na_{n+1}$.
3. En dédire que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature et en cas de onvergence on a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sum_{n=1}^{+\infty} n(a_n - a_{n+1})$

Solution

1. On a $R_{n-1} = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \leq na_{2n}$. Il en découle que $\lim_{n\to+\infty} 2na_{2n} = 0$, donc aussi $\lim_{n\to+\infty} (2n+1)a_{2n+1} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} aa_n = 0$ et $a_n = o(\frac{1}{n})$
2. Une transformation d'Abel on a $T_n = \sum ka_k - ka_{k+1} = \sum ka_k - \sum(k-1)a_k = \sum(k-(k-1))a_k + a_1 - na_{n+1}$
3.

Chapitre 007 — Suites vectorielles et familles sommables (L2)

EXERCICE 345 Spectre d'un élément d'une algèbre et compacité

Titre : Spectre d'un élément d'une algèbre et compacité
ID : 264 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 250 | ID : 264
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}-$algèbre normée de dimension finie. On note e son élément neutre pour la multiplication et $\mathscr{U}(\mathcal{A})$ l'ensemble de ses inversibles. Soit $a \in \mathcal{A}$. On appelle valeur spectrale de a tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $a - \lambda e$ n'est pas inversible. On note $\mathrm{Sp}(a)$ l'ensemble des valeurs spectrales de a.

1. Démontrer que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(a), |\lambda| \leq \|a\|$
2. Démontrer que $\mathscr{U}(\mathcal{A})$ est un ouvert de $\mathcal{A}$.
3. Démontrer que $\mathrm{Sp}(a)$ est un compact de $\mathcal{A}$.

Solution

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$. Si $\lambda = 0$ on a $|\lambda| \leq \|a\|$. Si $\lambda \neq 0$, supposons que $|\lambda| > \|a\|$. Alors en posant $u = \frac{1}{\lambda}a$, on a $\|u\| < 1$. Il en découle que $e - u$ est inversible. Comme $-\lambda \neq 0$, $-\lambda(e-u)$ est aussi inversible Or $-\lambda(e-u) = \lambda u - \lambda e = a - \lambda e$, donc $a - \lambda e$, est inversible, ce qui contredit le fait que $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$.
Conclusion : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(a), |\lambda| \leq \|a\|$.
2. Soit $u_0 \in \mathscr{U}(\mathcal{A})$. Pour tout $h \in \mathcal{A}$, on a $u_0 - h = u_0(e - u_0^{-1}h)$. Pour que $u_0 - h$ soit inversible,

il suffit que $\|u_0^{-1}h\| < 1$ et comme $\|u_0^{-1}h\| \leq \|u_0^{-1}\|\|h\|$, il suffit que $\|h\| < \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}$. On a donc prouver que la boule ouverte $B\left(u_0, \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}\right)$ réalise :

$$B\left(u_0, \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}\right) \subset \mathscr{U}(\mathcal{A}).$$

ce qui justifie que $\mathscr{U}(\mathcal{A})$ est un ouvert de $\mathcal{A}$.

3. $\mathrm{Sp}(a)$ est borné d'après la question 1). L'application $\Phi : \mathbb{K} \to \mathcal{A}; t \mapsto a - te$ est continue car lipschitzienne, puisque pour tout $t, t' \in \mathbb{K}$, on a $\|\Phi(t') - \Phi(t)\| = \|e\|.|t' - t|$ et on a

$$\mathrm{Sp}(a) = \Phi^{-1}(\mathcal{A} \backslash \mathscr{U}(\mathcal{A}))$$

car, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda \in \mathrm{Sp}(a) \Leftrightarrow a - \lambda e \notin \mathscr{U}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \Phi(\lambda) \in \mathcal{A}\backslash\mathscr{U}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \lambda \in \Phi^{-1}(\mathscr{U}(\mathcal{A}))$. Et comme $\mathscr{U}(\mathcal{A})$ est un ouvert, d'après 2), $\mathcal{A}\backslash\mathscr{U}(\mathcal{A})$ est un fermé de $\mathcal{A}$, son image réciproque par Φ à savoir $\mathrm{Sp}(a)$ est un fermé de $\mathbb{K}$, donc $\mathrm{Sp}(a)$ est une partie de $\mathbb{K}$ fermée et bornée, donc compacte.

EXERCICE 346 $\exp(A)$ est un polynôme en A

Titre : $\exp(A)$ est un polynôme en A **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 265 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 251 | ID : 265

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\exp(A) = P(A)$

Solution

Rappelons que $\mathbb{K}[A] = \{P(A)/P \in \mathbb{K}[X]\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, il en est de même de $\mathbb{K}[A]$, donc c'est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $S_k = P_k(A)$ avec $P_k(X) = \sum_{j=0}^{k} \frac{X^j}{j!}$ alors la suite (S_k) converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vers $\exp(A)$ et comme $\forall k \in \mathbb{N}, S_k \in \mathbb{K}[A]$, alors, par fermeture de $\mathbb{K}[A]$, on a $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$, donc il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\exp(A) = P(A)$.

EXERCICE 347 Calcul de $\exp(A)$ dans des cas particuliers interessants

Titre : Calcul de $\exp(A)$ dans des cas particuliers interessants **Difficulté :** ★★☆☆☆
ID : 266 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 252 | ID : 266

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Determiner $\exp(A)$ dans chacun des cas suivants :

1. A est la matrice d'un projecteur , c'est-à-dire $A^2 = A$.
2. A est la matrice d'une symétrie vectorielle , c'est-à-dire $A^2 = I_n$.
3. A est la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Solution

1. A est la matrice d'un projecteur , donc $A^2 = A$, donc $A^k = A$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 1$.

On a : $\exp(A) = I_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A}{k!} = I_n + (e-1)A$

2. A est la matrice d'une symétrie vectorielle , donc $A^2 = I_n$. Il en découle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $A^{2k} = I_2$ et $A^{2k+1} = A$ donc : $\exp(A) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!}\right) I_n + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\right) A$, donc $\exp(A) = \text{ch}(1) I_n + \text{sh}(1) A$.
3. A est la matrice dont tous les coefficients valent 1 donc $A^2 = nA$ et une récurrence simple permet de prouver que $A^k = n^{k-1}A$ pour tout $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, donc $\exp(A) = I_n + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^{k-1}}{k!}\right) A = I_n + \frac{e^n - 1}{n} A$.

EXERCICE 348 Surjectivité de exp pour le cas de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Titre : Surjectivité de exp pour le cas de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 267 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 253 | ID : 267

1. (a) Démontrer que :
$$\forall w \in \mathbb{C}^*, \exists z \in \mathbb{C}, \exp(z) = w.$$
(b) Que peut on dire de $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ si $\exp(z_1) = \exp(z_2)$?
(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices tel qu'il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Démontrer qu'il existe $Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $B = Q^{-1}AQ$. On exprime ça en disant que deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(d) Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Démontrer que les matrices $M = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
2. (a) Soit $A \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que A est diagonalisable. Démontrer que :
$$\exists B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \exp(B) = A.$$
(b) Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{S} = \{\alpha I_2 + \beta N / (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}$. Démontrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et que $\forall M \in \mathcal{S}, \exp(M) \in \mathcal{S}$.
(c) En déduire que : $\forall A \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C}), \exists B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \exp(B) = A$.
3. Soit $A \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable de valeurs propres λ_1 et λ_2.
(a) Démontrer que si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ alors $\exists B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \exp(B) = A$.
(b) Que peut on dire si $\lambda_1 \lambda_2 < 0$.
(c) Soit $K = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$. Diagonaliser K dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et en déduire que $\exp(K) = -I_2$.
(d) En déduire que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \exists B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \exp(B) = \lambda I_2$.
4. Soit $A \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ une matrice trigonalisable non diagonalisable. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A.
(a) Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (V_1, V_2)$ de $\mathbb{R}^2$ tel que la matrice T de u relativement à $\mathcal{C}$ est de la forme $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$.
(b) Démontrer que si $\lambda > 0$ alors $\exists B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \exp(B) = A$.
(c) On suppose que $\exists B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \exp(B) = A$ et on note v l'endomorphisme canoniquement associé à B. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $v(V_1) = \alpha V_1$.

(d) Déduire de ce qui précède que l'on a :

$$\exists B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \exp(B) = A \Leftrightarrow \lambda > 0.$$

5. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{Sp}(A) = \emptyset$.
   (a) Justifier pourquoi A est inversible.
   (b) Démontrer que A est semblable, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, à une matrice de la forme $\exp(\Delta)$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$ tel que $\lambda \in \mathbb{C}$.
   (c) Démontrer que Δ est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ à une matrice de la forme $B = rR_\theta$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ et $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
   (d) En déduire qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $\exp(M) = A$.

Solution

1. (a) Comme $w \neq 0$, il s'écrit $w = r\exp(i\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. $z = \ln(r) + i\theta$ convient.
   (b) Si $\exp(z_1) = \exp(z_2)$ alors en posant pour tout $j \in \{1,2\}$, $z_j = a_j + ib_j$ avec $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, on a $\exp(a_1)\exp(ib_1) = \exp(a_2)\exp(ib_2)$ donc $\exp(i(b_2 - b_1)) \in \mathbb{R}$ et par suite il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b_2 - b_1 = 2k\pi$ donc $(\star) : z_2 = z_1 + 2ik\pi$. Réciproquement si z_1 et z_2 son liés par une relation de la forme $(\star)$ on a bien $\exp(z_1) = \exp(z_2)$. Il en découle que :

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \exp(z_1) = \exp(z_2) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z_2 = z_1 + 2ik\pi$$

   .
   (c) Posons $P = P_1 + iP_2$ avec $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $B = P^{-1}AP$ s'écrit $PB = AP$ donc $(P_1 + iP_2)B = A(P_1 + iP_2)$ donc $\begin{cases} P_1B = AP_1 \\ P_2B = AP_2 \end{cases}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t) = \det(P_1 + tP_2)$. Il est aisé de voir que f est polynomiale en t et si on note L le polynôme associé en considérant que $L \in \mathbb{C}[X]$ et que $L(i) \neq 0$ on a L non nul donc admet un nombre finie de racines, donc il existe un réel t_0 tel que $f(t_0) \neq 0$ donc la matrice $Q = P_1 + t_0P_2$ est réelle inversible. Par ailleurs on a $\begin{cases} P_1B = AP_1 \\ t_0P_2B = t_0AP_2 \end{cases}$ donc $QB = AQ$ et alors $B = Q^{-1}AQ$.
   (d) Le polynôme caractéristique de M' est :

$$\chi_{M'} = X^2 - 2aX + a^2 + b^2 = (X - z)(X - \overline{z}).$$

   • Si $z \neq \overline{z}$, la matrice M' est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ car $\chi_{M'}$ est scindé à racines simples et comme les valeurs propres de M' sont z et $\overline{z}$, la matrice M' est semblable à $\mathrm{diag}(z, \overline{z}) = M$.
   • Si $z = \overline{z}$ alors z est réel, donc $z = \overline{z} = a$ et $M = M' = aI_2$.
   Ainsi, dans tous les cas M et M' sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
2. (a) Comme A est diagonalisable, il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Comme $A \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$, on a $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, donc il existe $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ tel que $e^{\mu_k}\lambda_k, k \in \{1,2\}$. On a alors $A = P\exp\Delta P^{-1}$ où $\Delta = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2)$, donc $A = \exp(B)$ avec $B = P\Delta P^{-1}$.
   (b) Par définition de $\mathcal{S}$, on a $\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(I_2, N)$ donc $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Soit $M = \alpha I_2 + \beta N \in \mathcal{S}$, comme I_n et N commutent, on a $\exp(M) = \exp(\alpha I_2) \times \exp(\beta N)$. Or $N^2 = 0$, donc $\exp(\beta N) = I_2 + \beta N$, donc $\exp(M) = e^\alpha I_2(I_2 + \beta N) = e^\alpha I_2 + \beta e^\alpha N$, donc $\exp(M) \in \mathcal{S}$.
   (c) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si A est diagonalisable, la question précédente montre qu'il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tel que $\exp(B) = A$. Si A n'est pas diagonalisable, elle est trigonalisable avec une seule valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, donc il existe $P \in \mathbf{GL}_2(C)$ tel que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\mu \in \mathbb{C}^*$ (sinon $\mu = 0$ et on aurait A diagonalisable). On remarque

que $T = \lambda I_2 + \mu N$, donc $T \in \mathcal{S}$. Cherchons une matrice $M \in \mathcal{S}$ tel que $\exp(M) = T$. Si on pose $M = aI_2 + bN$ alors $\exp(M) = T$ si et seulement si $e^a I_2 + be^a N = \lambda I_2 + \mu N$ si et seulement si (par liberté de la famille (I_2, N)), $\begin{cases} e^a = \lambda \\ be^a = \mu \end{cases}$. Comme $\lambda \neq 0$, il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $e^a = \lambda$ et pour ce a, on prends $b = \mu e^{-a} = \frac{\mu}{\lambda}$ et on obtient ainsi une matrice M tel que $\exp(M) = T$ et par suite $A = \exp(B)$ avec $B = PMP^{-1}$.

3. (a) Écrivons $A = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ et soit $D = \text{diag}(\mu_1, \mu_2)$ avec $\mu_j = \ln(\lambda_j)$ pour tout $j \in \{1, 2\}$. On a $\exp(D) = \Delta$, donc pour $B = PDP^{-1}$, on a $\exp(B) = A$.

   (b) Si $\lambda\lambda_2 < 0$, on ne peut pas avoir $B \in \mathcal{M}_2(R)$ tel que $\exp(B) = A$ car sinon on aurait forcément $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et, en notant u et v les endomorphismes canoniquement associés à A et B respectivement, on aurait $u \circ v = v \circ u$ donc les droites $\mathbb{R}V_1$ et $\mathbb{R}V_2$ avec V_1 et V_2 des vecteurs propres de u associés à λ_1 et λ_2 seraient stables par v donc V_1 et V_2 seraient des vecteurs propres. En posant $\mathscr{V} = (V_1, V_2)$, on aurait $\text{mat}_{\mathscr{V}}(v) = \text{diag}(\mu_1, \mu_2)$ avec $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, donc $\text{mat}_{\mathscr{V}}(u) = \text{diag}(e^{\mu_1}, e^{\mu_2})$, en particulier $\det(u) > 0$, ce qui contredit la fait que $\lambda_1\lambda_2 < 0$.

   (c) Le polynôme caractéristique de K est $\chi_K = X^2 + \pi^2$, donc $\text{Sp}(K) = \{-\pi i, \pi i\}$. On trouve $K = P\Delta P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$, donc $P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$. Il en découle que : $\exp(K) = P\exp(\Delta)P^{-1}$ et comme $\exp(\Delta) = \text{diag}(e^{\pi i}, e^{-\pi i}) = -I_2$, il vient $\exp(K) = P \times (-I_2) \times P^{-1} = -I_2$.

   (d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
   • Si $\alpha > 0$ alors $\lambda I_2 = \exp(B)$ avec $B = \ln(\lambda) I_2$.
   • Si $\lambda < 0$ alors $\lambda I_2 = (-\lambda)(-I_2) = |\lambda| I_2 \times (-I_2) = \exp(\ln(|\lambda|) I_2) \times \exp(K)$ et comme K et $\exp(|\lambda|) I_2$ commutent, on a :

$$\lambda I_2 = \exp(\ln|\lambda|) I_2 + K) = \exp(B) \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} \ln(|\lambda|) & -\pi \\ \pi & \ln(|\lambda|) \end{pmatrix}$$

   Une formule qui englobe tous les cas est

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \exp\left(\ln|\lambda| I_2 + \frac{\lambda - |\lambda|}{2\lambda} K\right) = \lambda I_2$$

4. (a) Puisque A est trigonalisable, l'endomorphisme u est trigonalisable, donc son polynôme caractéristique est scindé et par suite admet au moins une racine λ. Soit V_1 un vecteur propre associé à λ, donc $u(V_1) = \lambda V_1$. Complétons (V_1) en une base (V_1, V_2) de $\mathbb{R}^2$, alors $u(V_2) = \mu V_1 + \lambda' V_2$ avec $\lambda', \mu \in \mathbb{R}$ de sorte que si $\mathcal{C} = (V_1, V_2)$, la matrice de u relativement à $\mathcal{C}$ est $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda' \end{pmatrix}$ et comme u n'est pas diagonalisable on a forcément $\lambda = \lambda'$ et $\mu \neq 0$. Finalement $\lambda \neq 0$ car $A \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$. Ainsi :

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(u) = T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}^*.$$

   (b) Supposons que $\lambda > 0$. On a $T = \lambda I_2 + \mu N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $N^2 = 0$. Soit $M = \alpha I_2 + \beta N$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Comme les matrices αI_2 et βN commutent on a $\exp(M) = \exp(\alpha I_2) \times \exp(\beta N)$. Par ailleurs $\exp(\beta N) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\beta N)^n}{n!} = I_2 + \beta N$ puisque $N^2 = 0$, donc :

$$\exp(M) = T \Leftrightarrow e^\alpha(I_n + \beta N) = \lambda I_n + \mu N eq e^\alpha I_n + \beta e^\alpha N = \lambda I_n + \mu N,$$

   et comme la famille (I_n, N) est libre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il vient :

$$\exp(M) = T \Leftrightarrow \begin{cases} e^\alpha = \lambda \\ \beta e^\alpha = \mu \end{cases}$$

Comme $\lambda > 0$, si on prends $\alpha = \ln(\lambda)$ et $\beta = \frac{\mu}{\lambda}$ la matrice $M = \begin{pmatrix} \ln(\lambda) & \frac{\mu}{\lambda} \\ 0 & \ln(\lambda) \end{pmatrix}$ réalise $\exp(M) = T$ et comme il existe $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $A = PTP^{-1}$, alors en posant $B = PMP^{-1}$, on a $\exp(B) = A$.

(c) On a $\exp(B) = A$. On sait que B et $\exp(B)$ commutent, donc A et B commutent. Il en découle que le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est stable par v. Or $E_\lambda(u) = \mathbb{R}V_1$ est une droite, donc la famille $(V_1, v(V_1))$ est liée, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $v(V_1) = \alpha V_1$.

(d) Si B existe, on a vu dans la question précédente qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $v(V_1) = \alpha V_1$. Si on pose $v(V_2) = \beta V_1 + \alpha' V_2$, la matrice de v relativement à $\mathcal{C}$ est de la forme $T' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \lambda' \end{pmatrix}$ de sorte que T' est triangulaire supérieure. Si $\alpha \neq \alpha'$ ou $\beta = 0$ v serait diagonalisable et par suite $u = \exp(v)$ le serait aussi, donc $\alpha = \alpha'$ et $\beta \neq 0$ et $T' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ et par suite,

$$\exp(T') = \begin{pmatrix} e^\alpha & \beta e^\alpha \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix} = M,$$

et comme B et T' sont semblables A et M sont semblables et en particulier $\lambda = e^\alpha$ donc $\lambda > 0$.

5. (a) Puisque $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$ la matrice A est inversible.

(b) Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^2 - \tau X + \delta$ avec $\tau = \mathrm{tr}(A)$ et $\delta = \det(A)$, et puisque A n'a aucune valeur propre réelle, χ_A possède deux racines complexe non réelles conjuguées μ et $\overline{\mu}$ et par suite $\mu \neq \overline{\mu}$ et finalement A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ puisqu'elle possède deux valeurs propres distinctes. Donc A s'écrit $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \overline{\mu} \end{pmatrix}$. Comme $\mu \neq 0$, la question 1) permet de dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $e^\lambda = \mu$ donc $e^{\overline{\lambda}} = \overline{\mu}$ et par suite en posant $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda, \overline{\lambda})$ on a $\exp(\Delta) = D$, donc $A = PDP^{-1} = P\exp(\Delta)P^{-1}$, donc A est semblable à $\exp(\Delta)$ comme demandé.

(c) Le polynôme caractéristique de B est

$$\chi_B = X^2 - 2r\cos(\theta)X + r^2 = (X - \lambda)(X - \overline{\lambda})$$

qui est scindé à racines simples donc B est diagonalisable et B et Δ sont semblables.

(d) On a $A = P\exp(\Delta)P^{-1}$ et Δ et B sont semblables, donc A et $\exp(B)$ sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, et comme ce sont deux matrices réelles, elles sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, en vertu de la question 1)c), donc il existe $Q \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $A = Q\exp(B)Q^{-1}$ donc :

$$A = \exp(M) \text{ où } M = QBQ^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

EXERCICE 349 Conditions sur un compact de GL_$n(\mathbb{C})$ pour qu'il soit un groupe

Titre : Conditions sur un compact de **GL**_$n(\mathbb{C})$ pour qu'il soit un groupe

Difficulté : ★★★☆☆

ID : 268 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 254 | ID : 268

Soit K une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que :

$$\begin{cases} (i) & K \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \\ (ii) & \forall A, B \in K, AB \in K \end{cases}$$

Montrer que K est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.
Indication : Commencer par prouver que $I_n \in K$.

Solution

Soit $A \in \mathbb{K}$, la suite A^n admet une sous-suite convergente $A^{\varphi(n)}$ vers une limite $M \in K$, donc M est inversible, la suite $A^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}$ converge vers I_n, et par fermeture de K on $I_n \in K$. On peut choisir φ tel que $B_n = \varphi(n+1) - \varphi(n) \geq 1$ aors $B_n \in K$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = A^{-1}$, donc $A^{-1} \in K$

EXERCICE 350 Exponentielle et similitude

Titre : Exponentielle et similitude
ID : 269 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 255 | ID : 269
Difficulté :

n est un entier naturel non nul et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que si A et B sont semblables alors il en est de même de $P(A)$ et $P(B)$, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$. En déduire que $\exp(A)$ et $\exp(B)$ sont semblables.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices tel qu'il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Démontrer qu'il existe $Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $B = Q^{-1}AQ$. On exprime ça en disant que deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que A n'a aucune valeur propre réelle. Démontrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que : $\exp(B) = A$.

Solution

1. A et B sont semblables, donc il existe $Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $B = Q^{-1}AQ$. On va démontrer que
$$\forall P \in \mathbb{K}[X], P(B) = Q^{-1}P(A)Q$$
• Si $P = X^k$, avec $k \in \mathbb{N}$, on a le résultat demandé par récurrence, en effet, si $k = 0$, c'est clair. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $B^k = Q^{-1}A^kQ$, alors $B^{k+1} = B \times B^k = (Q^{-1}AQ) \times (Q^{-1}A^kQ) = Q^{-1}A \times Q \times Q^{-1})A^kQ) = Q^{-1}AA^kQ = Q^{-1}A^{k+1}Q$.
• Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{N} a_kX^k$, alors $P(B) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_kB^k = \sum\limits_{k=0}^{N} a_kQ^{-1}A^kQ = Q^{-1}\left(\sum\limits_{k=0}^{N} a_kA^k\right)Q = Q^{-1}P(A)Q$.
Déduction : On sait que $\exp(B) = \lim\limits_{N\to+\infty} P_N(B)$ avec $P_N(X) = \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{X^k}{k!}$. La question précédente permet que dire que $P_N(B) = Q^{-1}P_N(A)Q$. L'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); M \mapsto Q^{-1}MQ$ est continue car elle est linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, donc par passage à la limite on a :
$$\exp(B) = \lim_{N\to+\infty} P_N(B) = Q^{-1}\lim_{N\to+\infty} P_N(A)Q = Q^{-1}\exp(A)Q.$$

2. Si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Posons $P = P_1 + iP_2$ avec $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $B = P^{-1}AP$ s'écrit $PB = AP$ donc $(P_1 + iP_2)B = A(P_1 + iP_2)$ donc $\begin{cases} P_1B = AP_1 \\ P_2B = AP_2 \end{cases}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t) = \det(P_1 + tP_2)$. Il est aisé de voir que f est polynomiale en t et si on note L le polynôme associé en considérant que $L \in \mathbb{C}[X]$ et que $L(i) \neq 0$ on a L non nul donc admet un nombre finie de racines, donc il existe un réel t_0 tel que $f(t_0) \neq 0$ donc la matrice $Q = P_1 + t_0P_2$ est réelle inversible. Par ailleurs on a $\begin{cases} P_1B = AP_1 \\ t_0P_2B = t_0AP_2 \end{cases}$ donc $QB = AQ$ et alors $B = Q^{-1}AQ$.
3. Le polynôme caractéristique χ_A de A est $\chi_A(X) = X^2 - \tau X + \delta$ où $\tau = \mathrm{tr}(A)$ et $\delta = \det(A)$ est un polynôme à coefficients réels, de degré 2, et sans aucune racine réelle, donc χ_A admet deux racines complexes non réelles conjuguées λ et $\overline{\lambda}$. En particulier $\lambda \neq \overline{\lambda}$ et par suite A

est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc semblable à la matrice $\Delta = \text{diag}(\lambda, \overline{\lambda})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Comme $\lambda \neq 0$, il s'écrit $\lambda = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Soit μ le nombre complexe : $\mu = \ln(r) + i\theta$ alors $e^{\mu} = \lambda$ et $\overline{\lambda} = \overline{e^{\mu}} = e^{\overline{\mu}}$. Il en découle que $\exp(D) = \Delta$ où $D = \text{diag}(\mu, \overline{\mu})$. La matrice D est semblable à la matrice $M = \lambda(r)R_\theta$ avec $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ puisqu'il est aisé de voir que le polynôme caractéristique de M est $\chi_M = (X-\mu)(X-\overline{\mu})$, donc M est diagonalisable semblable à la matrice diagonale D dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Il en découle, en vertu de la question 1) que $\exp(M)$ et A sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. D'après la question 2) $\exp(M)$ et A étant réelles, elles sont aussi semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc il existe $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $A = P\exp(M)P^{-1} = \exp(B)$ avec $B = PMP^{-1}$.

EXERCICE 351 — Exponentielles de matrices importantes de taille 2

Titre : Exponentielles de matrices importantes de taille 2 — **Difficulté :** ★★☆☆☆
ID : 270 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 256 | ID : 270

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_\theta = \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix}.$$

1. Prouver que A_θ et B_θ sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
2. Comment déterminer le plus rapidement possible une matrice $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que la relation :
$$A_\theta = PB_\theta P^{-1}$$
soit vérifiée ?
3. Calculer $\exp(A_\theta)$.
4. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(M)$.

Solution

1. Si $\theta = 0$, on a même $A_0 = B_0$. Si $\theta \neq 0$, le polynôme caractéristique de A_θ est $\chi_{A_\theta} = X^2 + \theta^2 = (X - i\theta)(X + i\theta)$ possède deux racines distinctes donc A_θ est diagonalisable et A_θ est semblable à $D = \text{diag}(i\theta, -i\theta) = B_\theta$.
2. Cherchons des vecteur directeurs des sous-espace propre associé à $\lambda_1 = i\theta$ et $\lambda_2 = -i\theta$, qui, comme on le sait, sont des droites vectorielles. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.
   • Pour $\lambda_2 = -i\theta$, on a :
   $$X \in E_{\lambda_1}(A_\theta) \Leftrightarrow (A - i\theta)(X) = 0 \Leftrightarrow \theta x_1 - i\theta x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -ix_1,$$
   donc le vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $E_{i\theta}(A_\theta)$.
   • Pour $\lambda_2 = -i\theta$, on a :
   $$X \in E_{\lambda_2}(A_\theta) \Leftrightarrow (A + i\theta)(X) = 0 \Leftrightarrow \theta i x_1 - \theta x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = ix_1,$$
   donc le vecteur $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $E_{-i\theta}(A_\theta)$.
   Il en découle que la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2) à la base (V_1, V_2) est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ et par suite $P^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$ et on a la relation $A_\theta = PB_\theta P^{-1}$.

3. Il découle de la question ci-dessus que :

$$\exp(A_\theta) = P\exp(B_\theta)P^{-1}$$

et comme $\exp(B_\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$, il vient :

$$\begin{aligned}
\exp(A_\theta) &= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ie^{i\theta} & -e^{-i\theta} \\ ie^{i\theta} & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) & e^{-i\theta}-e^{i\theta} \\ e^{i\theta}-e^{-i\theta} & i(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\exp(A_\theta) = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

4. On a $M = aI_2 + A_b$, donc $\exp(M) = \exp(aI_2)\exp(A_b) = e^a R_b$, donc

$$\exp(M) = \begin{pmatrix} e^a\cos b & -e^a\sin b \\ e^a\sin b & e^a\cos b \end{pmatrix}$$

EXERCICE 352 Contre-exemple anti fubini

Titre : Contre-exemple anti fubini
ID : 271 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 257 | ID : 271
Difficulté : ★★☆☆☆

On considère le suite double $(u_{n,p})$ définie par : $u_{n,p} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = p \\ 0 & \text{si} \quad n > p \\ -\frac{1}{2^{p-n}} & \text{si} \quad n < p \end{cases}$

1. Calculer $\sum_{n=0}\left(\sum_{p=0} u_{n,p}\right)$
2. Calculer $\sum_{p=0}\left(\sum_{n=0} u_{n,p}\right)$
3. Que remarquez vous ? Explication ?

Solution

1. On a : $\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{n-1} 0 + 1 - 2^n \sum_{p=n+1} \frac{1}{2^p} = 1 - \frac{1}{2}.2 = 0$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = 0$
2. n a : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} = -2^{-p}\sum_{n=0}^{p-1} 2^n + 1 + 0 = 2^{-p}(1-2^p) + 1 = 2^{-p} - 1 + 1 = 2^{-p}$, donc $\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} 2^{-p} = 2$
3. On remarque que les deux sommes sont différentes.
   Explication : le famille $(u_{n,p})$ n'est pas sommable.

EXERCICE 353 zeta, zeta alternée et autres choses

Titre : zeta, zeta alternée et autres choses
ID : 272 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 258 | ID : 272
Difficulté : ★☆☆☆☆

On donne pour tout nombre réel x tel que $x > 1$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\gamma = \lim_{n\to+\infty}(H_n - \ln(n))$ où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la suite double $(u_{n,k})_{\substack{n\geq 2\\k\geq 2}}$ définie par $u_{n,k} = \frac{(-1)^k}{kn^k}$

1. Montrer que $(u_{n,k})$ est sommable.
2. En déduire que $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\zeta(k) = \gamma$.

Solution

1. Fixons, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On a $|u_{n,k}| = \frac{1}{kn^k}$ La série $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k$ est absolument convergente car la régle de D'Alemebert donne $\frac{|u_{n,k+1}|}{|u_{n,k}|} = \frac{k}{k+1}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} < 1$ car $n \geq 2$. Sa somme est $s_n = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k$. On considère la série entière $f(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k}x^k$, elle a pour rayon de convergence $R = 1$ et pour tout $x \in]-1,1[$, on a $f'(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} x^{k-1} = \frac{x}{1-x}$, donc pour tout $x \in]01,[$ on a $f'(x) = 1 + \frac{1}{1-x}$, donc $f(x) = -x - \ln(1-x)$ car $f(0) = 0$, donc $f\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$, donc $\sum s_n$ est absolument convergente et par suite la famille $(u_{n,k})$ est sommable.
2. La suite double $\left(\frac{(-1)^k}{kn^k}\right)_{\substack{n\geqslant 2\\k\geqslant 2}}$ est sommable, alors par le théorème de la sommation par paquets

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k}$$

Avec

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} = \frac{(-1)^k}{k}(\zeta(k) - 1)$$

et

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \gamma - 1 + \ln 2$$

Alors

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}(\zeta(k) - 1) = \gamma - 1 + \ln 2$$

La série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{(-1)^k}{k}$ est convergente de somme $1 - \ln 2$. Ainsi

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\zeta(n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}(\zeta(n) - 1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \gamma$$

EXERCICE 354 Une famille sommable non ordinaire

Titre : Une famille sommable non ordinaire
ID : 273 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 259 | ID : 273
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit λ un nombre réel tel que $0 < \lambda < 1$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme : $\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n}(1-\lambda)^{k-n}$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite sommable. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n}(1-\lambda)^{k-n}\lambda^k u_k$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et calculer sa somme.

Solution

1. En posant $x = 1-\lambda$, on est amené à calculer

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} x^{k-n} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} x^{k-n} = \frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n}$$

Si on note, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, alors pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k}{n}x^{k-n} = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$. Si $\lambda \in]0,1[$ alors $1-\lambda \in]0,1[$ et $\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k}{n}(1-\lambda)^{k-n} = \frac{1}{\lambda^{n+1}}$.

2. On pose pour $n,k \in \mathbb{N}^2$,

$$w_{n,k} = \begin{cases} \binom{k}{n}(1-\lambda)^{k-n}\lambda^k u_k & \text{si} \quad k \geqslant n \\ 0 & \text{si} \quad k < n \end{cases}$$

On fixe k, on a alors

$$s_k = \sum_{n=0}^{+\infty} |w_{n,k}| = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n}(1-\lambda)^{k-n}\lambda^k |u_k| = \left(\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}\frac{1}{(1-\lambda)^n}\right)(1-\lambda)^k\lambda^k|u_k| = \left(1+\frac{1}{1-\lambda}\right)^k (1-\lambda)^k$$

Puisque $\lambda \in [0,1]$, on a $0 \leqslant \lambda(2-\lambda) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant s_k \leqslant |u_k|$. La série $\sum|u_k|$ converge. On a donc la sommabilité puis, avec les mêmes calculs sans valeurs absolues, une somme valant $\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda(2-\lambda))^k u_k$.

EXERCICE 355 Produit de convolution dans $\ell^1(\mathbb{Z})$

Titre : Produit de convolution dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ **Difficulté :**
ID : 274 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 260 | ID : 274

On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des familles de nombres complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui sont sommables. On définit sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ une norme en posant $\|u\|$ la somme de la famille $(|u_n|)_{n\in\mathbb{Z}}$
1. Soit $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
2. Pour $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, on définit la famille $u \star v$ par $(u\star v)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$ où $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $u \star v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, puis calculer $\|u\star v\|$ en fonction de $\|u\|$ et de $\|v\|$
3. Démontrer que la loi $\star$ agissant sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ est une loi associative, commutative, et possédant un élément neutre.
4. On définit $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ par $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $u_n = 0$ sinon. Démontrer que u n'est pas inversible dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ pour $\star$

Solution

1. Puisque $(v_n)_{n\in Z}$ est sommable, la famille $(|v_n|)$ est majorée. Il existe donc une constante $M > 0$ telle que, pour tous les entiers k et n, $|u_k v_{n-k}| \leq M\,|u_k|$. Puisque $(u_k)_{k\in Z}$ est sommable, il en est de même de $(u_k v_{n-k})_{k\in Z}$.
2. Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, la famille $(|u_k v_{n-k}|)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, de somme $\sum_{n\in Z} |u_k| \cdot |v_{n-k}| = |u_k| \sum_{n\in Z} |v_n|$. La famille $(|u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|)_{k<\mathbb{Z}}$ est elle-même sommable, de somme $\sum_{k\in Z} |u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|$. Ainsi, la famille $(u_k v_{n-k})_{(k,n)\in\mathbb{Z}^2}$ est sommable, de somme $\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n$. On en déduit que la famille $(\sum_{k\in Z} u_k v_{n-k})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, de même somme. Finalement, en prenant partout des modules, on a bien

$$\sum_{n\in Z}\sum_{k\in Z} |u_k v_{n-k}| = \sum_{k\in Z} |u_k| \sum_{n\in Z} |v_n|$$

c'est-à-dire que $\|u \star v\| = \|u\| \times \|v\|$
3. On peut remarquer que $(u \star v)_n = \sum_{k+l-n} u_k v_l$. On en déduit immédiatement la commutativité. Pour l'associativité, il suffit d'écrire

$$((u \star v) \star w)_n = \sum_{k+l+m} u_k v_l w_m = (u \star (v \star w))_n$$

L'élément neutre est donné par la suite δ vérifiant $\delta_0 = 1$ et $\delta_n = 0$ sinon.
4. Imaginons que u soit inversible et notons v son inverse. Alors $(u \star v)_n = v_n - v_{n-1}$. Pour $n \geq 1$ on obtient $v_n = v_{n-1}$ et finalement $v_n = v_0$. Mais puisque (v_n) est sommable, ceci entraîne que $v_0 = 0$. Pour $n = 0$, on a $v_0 - v_{-1} = 1$, et donc $v_{-1} = -1$. Enfin, pour $n \leq -1$, on a à nouveau $v_{n-1} = v_n$, ce qui entraine que $v_n = v_{-1} = -1$ pour tout $n < 0$. Ce n'est pas possible, car ceci contredit que $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

EXERCICE 356 Une famille sommable de nombres complexes

Titre : Une famille sommable de nombres complexes
ID : 275 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 261 | ID : 275
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soient $r \in [0;1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence et calculer

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}$$

Solution

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^* \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^*$$

La sous-famille $\left(r^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. est sommable car la série géométrique $\sum r^n$ converge. De même, la sous-famille $\left(r^{|n|}\right)_{n\in Z}$, est sommable. Par sommation par paquets, la famille $\left(r^{|n|}\right)_{ncz}$ est sommable. La somme étudiée existe donc et en sommant par paquets

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} r^n e^{in\theta} + 1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{-n} e^{in\theta} = 1 + \frac{re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}}{1 - re^{-i\theta}} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2}$$

EXERCICE 357 Une autre famille de nombres complexes

Titre : Une autre famille de nombres complexes
ID : 276 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 262 | ID : 276
Difficulté : ★☆☆☆☆

Convergence et calcul, pour z complexe tel que $|z| < 1$, de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$$

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$, alors $|a_n| = \frac{|z|^{2^n}}{|1-z^{2^{n+1}}|}$, donc $|a_n| \sim |z|^{2^n}$, et comme $|z| < 1$, la série géométrique $\sum |z|^n$ est convergente, à fortiori la série $\sum |z|^{2^n}$ est convergente. Par critère de comparaison, la série $\sum a_n$ est absolument convergente.

Puisque $|z| < 1$, on peut écrire par sommation géométrique

$$\frac{1}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{k.2^{n+1}}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Tout entier naturel non nul p s'écrit de façon unique sous la forme

$$p = 2^n(2k+1) \text{ avec } n, k \in \mathbb{N}$$

On peut done affirmer que $\mathbb{N}^*$ est la réunion des ensembles deux à deux disjoints suivants

$$A_n = \{2^n(2k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Puisque la famille $(z^p)_{p\in\mathbb{N}}$ - est sommable, on peut sommer par paquets et écrire

$$\sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m\in A_n} z^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1-z}$$

EXERCICE 358 Une famille de réels positifs construite à l'aide d'une permutation

Titre : Une famille de réels positifs construite à l'aide d'une permutation
ID : 277 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 263 | ID : 277
Difficulté : ★★★☆☆

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Quelle est la nature de

$$\sum \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln n} ?$$

Solution

Posons $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln n}$. On a :

$$S_{2^{n+1}} - S_{2^n} \geq \frac{1}{2^{2(n+1)} \ln 2^{n+1}} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \sigma(k) \geq \frac{1}{2^{2(n+1)} \ln 2^{n+1}} \sum_{k=1}^{2^n} k$$

car si généralement m est un entier naturel non nul et $x_1, \ldots, x_m$ des entiers naturels non nuls deux à deux distincts alors $\sum_{k=1}^{m} x_k \leq S_m$ où $S_m = \sum_{k=1}^{m} k$, chose qu'on peut démontrer par récurrence :

- Si $m = 1$ alors c'est clair que $x_1 \leq S_1 = 1$.
- Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété ci-dessus est vraie pour m et soit $x_1, \ldots, x_{m+1}$ des entiers naturels non nuls deux à deux distincts et notons $x_p = \max_{1 \leq k \leq m+1} (x_k)$. On a $x_p \geq m+1$ car l'ensemble $X_{m+1} = \{x_1, \ldots, x_{m+1}\}$ réalise $X_{m+1} \subset [\![1, x_p]\!]$ et comme $\text{card}([\![1, x_p]\!]) = x_p$, on a $x_p \geq \text{card}\, X_{m+1} = m+1$.

On a $\sum_{k=1}^{m+1} x_k = x_p + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}} x_k \geq (m+1) + S_m = S_{m+1}$. (l'hypothèse de récurrence donne $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}} x_k \geq S_n$.)

Il vient :

$$S_{2^{n+1}} - S_{2^n} \geq \frac{2^n (2^n + 1)}{2^{2n+3}(n+1) \ln 2} \sim \frac{1}{8 \ln 2} \frac{1}{n}.$$

Puisque la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, il en de même de la série télescopique $\sum S_{2^{n+1}} - S_{2^n}$ et donc la suite (S_{2^n}) tend vers $+\infty$. On en déduit la divergence de la série étudiée.

EXERCICE 359 — Exemples de familles doubles

Titre : Exemples de familles doubles
ID : 278 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 264 | ID : 278
Difficulté : ★★☆☆☆

1. Soit s un nombre réel tel que $s \geq 1$
   (a) Démontrer que pour tout nombre réel x positif, on a : $(1+x)^s \geq 1 + sx$.
   (b) Prouver que la fonction $t \mapsto t^s$ est convexe sur $]0, +\infty[$.
   (c) En déduire que pour tous nombre réels strictement positifs x et y, on a :
   $$2^{1-s}(x+y)^s \leq x^s + y^s.$$
2. Soit α un nombre réel et on considère la famille $a = (a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ définie par :
   $$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, a_{p,q} = \frac{1}{(p+q)^\alpha}.$$
   (a) Démontrer que si $\alpha \leq 1$ alors la famille a n'est pas sommable.
   (b) Démontrer que la famille a est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > 1$ et on considère la famille $(b_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ tel que :
   $$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, b_{p,q} = \frac{1}{p^\alpha + q^\alpha}.$$
   (a) Démontrer que :
   $$\forall p, q \in \mathbb{N}^*, 2^{1-\alpha}(p+q)^\alpha \leq p^\alpha + q^\alpha \leq (p+q)^\alpha$$
   (b) En déduire que la famille b est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on pose $c_{p,q} = \frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}$. Démontrer que la famille $(c_{p,q})$ est sommable si et seulement si $\alpha > 1$.

Solution

1. s un nombre réel tel que $s \geq 1$
   (a) Soit u la fonction $u : x \mapsto (1+x)^s - sx$. Alors u est dérivable et $u'(x) = s((1+x)^{s-1} - 1)$ donc $u'(x) \geq 0$ sur $[0, +\infty[$ et u est croissante sur $[0, +\infty[$ et comme $u(0) = 1$ on a $u(x) \geq 1$ pour tout $x \geq 0$, ce qui fournit l'inégalité demandée.
   (b) La fonction $v : t \mapsto t^s$ est deux fois dérivable sur $I =]0, +\infty[$ et $v''(x) = s(s-1)t^{s-2}$ donc $v'' \geq 0$ sur I et v est convexe sur $]0, +\infty[$.
   (c) On en déduit que pour tous nombre réels strictement positifs x et y et pour tout $t \in [0,1]$, on a $v((1-t)x + ty) \leq (1-t)v(x) + tv(y)$ et en prenant $t = \frac{1}{2}$ on obtient : pour tous nombre réels strictement positifs x et y, on a :

$$2^{1-s}(x+y)^s \leq x^s + y^s.$$

2. Soit α un nombre réel et on considère la famille $a = (a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, a_{p,q} = \frac{1}{(p+q)^\alpha}.$$

   (a) Si $\alpha \leq 1$ Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $J_n = \{(p,p)/1 \leq p \leq n\}$ alors $S_n = \sum\limits_{(p,q)\in J_n} a_{p,q} = 2^{-\alpha} \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha}$ de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, la famille a n'est pas sommable.
   (b) Pour démontrer l'équivalence demandée, on va prouver deux implications :
   • Supposons que $\alpha > 2$. Pour tout $s \in \mathbb{N}^*$ tel que $s \geq 2$, posons $J_s = \{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / p+q = s\}$. On a J_s est finie et $\text{card}(J_s) = s-1$(en effet, l'application $\sigma : [\![1, s-1]\!] \to J_s, k \mapsto \sigma(k) = (k, s-k)$ est une bijection.) On a $\sum_{(p,q)\in\in J_s} a_{p,q} = \sum_{(p,q)\in J_s} \frac{1}{s^\alpha} = \text{card}(J_s)\frac{1}{s^\alpha} = \frac{1}{s^{\alpha-1}}$ et puisque $s > 2$, on a $s-1 > 1$, donc la série de Riemann $\sum \frac{1}{s^{\alpha-1}}$ est convergente. Par le théorème de sommation par paquets des familles sommable la famille a est sommable et sa somme et $S = \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{s^{\alpha-1}}$.
   • Réciproquement, supposons que $\alpha \leq 2$. En conservant les notations ci-dessus on a : $\sum_{(p,q)\in J_s} a_{p,q} = \sum_{(p,q)\in J_s} \frac{1}{s^\alpha} \geq \sum_{(p,q)\in J_s} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s}$ et la famille $\left(\frac{1}{s}\right)_{s\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable. D'après le théorème de sommation par paquets la famille a n'est pas sommable.

3. (a) $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > 1$.
   • La première inégalité est une conséquence immédiate du 1)c).
   • Pour la deuxième, soit $p, q \in \mathbb{N}^*$. Si $p \geq q$, on a :

$$(p+q)^\alpha = p^\alpha \left(1 + \frac{q}{p}\right)^\alpha$$

   D'après 1)a), on a :

$$(p+q)^\alpha \geq p^\alpha \left(1 + \alpha\frac{q}{p}\right) = p^\alpha + \alpha q p^{\alpha-1} \geq p^\alpha + \alpha q^\alpha$$

   car comme $p \geq q$, on a $p^{\alpha-1} \geq q^{\alpha-1}$. Et comme $\alpha > 1$, on a $p^\alpha + \alpha q^\alpha \geq p^\alpha + q^\alpha$ donc finalement $(p+q)^\alpha \geq p^\alpha + q^\alpha$. Si $q \geq p$, la symétrie des rôles de p et q permet de faire la même conclusion. Ainsi on a démontré que :

$$(\star) \quad \forall p, q \in \mathbb{N}^*, 2^{1-\alpha}(p+q)^\alpha \leq p^\alpha + q^\alpha \leq (p+q)^\alpha$$

   (b) Si la famille b est sommable alors d'après la première inégalité dans $(\star)$ ci-dessus, la famille $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)$ est sommable, donc $\alpha > 2$. Réciproquement si $\alpha > 2$, alors $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)$ est sommable, et par la deuxième inégalité dans $(\star)$ ci-dessus, la famille b est sommable.

4. On étudie suivant le cas la sommabilité de la famille c.
   • Si $\alpha = 1$ on a pour tout $p, q \in \mathbb{N}^*$, on a $(p+q)^2 \geq p^2+q^2$ donc $\frac{1}{p^2+q^2} \geq \frac{1}{(p+q)^2}$ et comme la famille $\left(\frac{1}{(p+q)^2}\right)$ n'est pas sommable il en est de même de la famille $\left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)$.
   • Si $\alpha < 1$ alors $\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha} \geq \frac{1}{p^2+q^2}$. Il en découle que la famille $\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)$ n'est pas sommable.
   • Si $\alpha > 1$. D'après 3)a), pour tout $p, q \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(p^2+q^2)^\alpha \geq p^{2\alpha} + q^{2\alpha}$$

   donc

$$\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha} \leq \frac{1}{p^{2\alpha}+q^{2\alpha}}$$

   et comme $2\alpha > 1$, et en vertu de 3)b), la famille $\left(\frac{1}{p^{2\alpha}+q^{2\alpha}}\right)$ est sommable, donc la famille c c'est-à-dire $\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)$ est sommable.

EXERCICE 360 La série $\sum d(n)x^n$ avec $d(n) = \text{card}'\{k \in \mathbb{N}/k|n\}$

Titre : La série $\sum d(n)x^n$ avec $d(n) = \text{card}'\{k \in \mathbb{N}/k|n\}$ **Difficulté :**
ID : 279 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 265 | ID : 279

Soit $x \in]-1, [1$ 1. Démontrer que la famille $\left(x^{kl}\right)_{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. 2. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$$

où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

Solution

1. Il suffit, par le théorème de permutation des sommes, de démontrer que, pour chaque $k \geq 1$, la série $\sum_l |x|^{kl}$ converge, et que la série $\sum_k \sum_{l\geq 1} |x|^{kl}$ est aussi convergente. Mais, puisque $|x| < 1$, la première série converge, de somme

$$\sum_{l\geq 1} x^{kl} = \frac{|x|^k}{1-|x|^k}$$

Maintenant,

$$\frac{|x|^k}{1-|x|^k} \sim_{k\to+\infty} |x|^k$$

et donc la série $\sum_{k\geq 1} \frac{|x|^k}{1-|x|^k}$ est convergente. 2. Calculons de deux façons différentes la somme de la famille sommable. D'une part, en procédant par sommation successive comme dans la question précédente, on a

$$\sum_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2} x^{kl} = \sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{1-x^k}$$

D'autre part, posons, pour $n \geq 1$, $I_n = \{(k,l); k \cdot l = n\}$. Alors on a aussi

$$\sum_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2} x^{kl} = \sum_{n\geq 1} \sum_{(k,l)\in I_n} x^{kl} = \sum_{n\geq 1} \text{card}\,(I_n)\, x^n$$

Mais le cardinal de I_n est justement le nombre de diviseurs de n (on peut choisir pour k n'importe quel diviseur positif de n, et ceci définit aussi uniquement l).

EXERCICE 361 Calcul de la somme d'une série en utilisant le produit

Titre : Calcul de la somme d'une série en utilisant le produit
ID : 280 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 266 | ID : 280
Difficulté : ★☆☆☆☆

Pour $n \geq 0$, on pose :

$$w_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!}.$$

1. Montrer que la série de terme général w_n converge.
2. Calculer sa somme en utilisant le produit d'une série géométrique par une autre série classique.

Solution

Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n \geq 0$. et comme $\sum_{n=0}^{n} \frac{4^n}{n!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n!} = e^4$, on a $w_n \leq 2^{-n} e^4$. La série de terme général $2^{-n} \exp(4)$ est convergente(série géométrique de raison $\frac{1}{2}$), donc la série $\sum w_n$ est convergente.
2. On va utiliser la série produit de Cauchy de deux séries :
   • Pour tous nombres réels a et b tel que $|a| < 1$, les séries $\sum_{k\geq 0} \frac{b^k}{k!}$ et $\sum_{k\geq 0} a^k$sont absolument convergentes, donc leur série produit de Cauchy $\sum u_n$, c'est-à-dire celle tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!} a^{n-k} = a^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(b/a)^k}{k!}$$

   est absolument convergente et on a :

$$\exp(b) \times \frac{1}{1-a} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} \right) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a^k \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

   • Si on prend $a = 1/2$ et $b = 2$, on trouve $w_n = u_n$. Il en découle que :

$$\sum_{n\geq 0} w_n = \exp(2) \times \frac{1}{1-1/2} = 2\exp(2)$$

EXERCICE 362 Prduits de Cachy, exemples

Titre : Prduits de Cachy, exemples
ID : 281 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 267 | ID : 281
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Prouver que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(1-a)(1-b)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} \text{ si } a \neq b \\ \dfrac{1}{(1-a)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n \text{ si } a = b \end{cases}$$

Solution

D'après la formule classique pour les séries géométriques, on a

$$\frac{1}{1-a} = \sum_{n\geq 0} a^n \text{ et } \frac{1}{1-b} = \sum_{n\geq 0} b^n$$

Ces deux séries sont absolument convergentes puisque $|a| < 1$ et $|b| < 1$. On peut faire le produit de Cauchy et donc on obtient que

$$\frac{1}{1-a} \times \frac{1}{1-b} = \sum_{n\geq 0} w_n \text{ avec } w_n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

Si $a = b$, on trouve directement que $w_n = \sum_{k=0}^{n} a^n = (n+1)a^n$. si $a \neq b$, alors il faut utiliser la factorisation

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

qui donne le résultat. Dans le cas où $a \neq b$, on peut très facilement conclure sans utiliser le produit de Cauchy, en calculant séparément la somme de chaque série géométrie $\sum_{n\geq 0} a^{n+1}$ et $\sum_{n\geq 0} b^{n+1}$.

EXERCICE 363 Une famille sommable pas facile

Titre : Une famille sommable pas facile
ID : 282 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 268 | ID : 282
Difficulté :

On considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites positives, telles que $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent. Prouver que $\sum_n \sum_p \frac{a_n b_p}{n+p}$ converge.

INDICATION : On montrera la lemme suivant : $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{m}}{(m+k)\sqrt{k}} \leqslant \pi$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Solution

Pour tout $x \in]0,+\infty[$, posons $f(x) = \frac{\sqrt{m}}{(m+x)\sqrt{x}}$. Alors f est continue positive et décroissante sur $]0,+\infty[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{\sqrt{m}}{(m+k)\sqrt{k}} = \int_{k-1}^{k} f(k)\mathrm{d}t \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$, donc par sommation : $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{m}}{(m+k)\sqrt{k}} \leqslant \int_0^n \frac{\sqrt{m}}{(m+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{m}}{m+u^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \pi$. On commence par récrire

$$\frac{a_n b_p}{n+p} = \left(\frac{a_n^2\sqrt{n}}{(n+p)\sqrt{p}}\right)^{1/2} \left(\frac{b_p^2\sqrt{p}}{(n+p)\sqrt{n}}\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \sqrt{\sum a_n^2} \cdot \sqrt{\sum b_n^2}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{n,p} \alpha_{n,p}\beta_{n,p} \leqslant \sqrt{\sum_{n,p} \alpha_{n,p}^2} \cdot \sqrt{\sum_{n,p} \beta_{n,p}^2}$$

Donc :

$$\sum_{n,p} \frac{a_n b_p}{n+p} \leqslant \sqrt{\sum_{n,p} \frac{a_n^2\sqrt{n}}{(n+p)\sqrt{p}}} \cdot \sqrt{\sum_{n,p} \frac{b_p^2\sqrt{p}}{(n+p)\sqrt{n}}}$$

$$\leqslant \sqrt{\sum a_n^2} \cdot \sqrt{\sum b_n^2}$$

EXERCICE 364 **Suites doubles, exemples**

Titre : Suites doubles, exemples
ID : 283 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 269 | ID : 283

Difficulté : ★☆☆☆☆

Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on pose $u_{n,p} = \begin{cases} \frac{(-1)^p}{p^2} & \text{si} \quad p \geq n > 0 \\ 0 \quad \text{si} & 1 \leq p < n \end{cases}$

1. Est ce que la suite double $(u_{n,p})$ est sommable ?
2. Étudier l'existence des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right)$ et $\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p}\right)$, et en cas d'existence, les comparer.

Solution

1. La famille n'est pas sommable car si on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ alors pour tout $p \geq n$, on a $|u_{n,p}| = \frac{1}{p^2}$ et pour tout $p < n$, on a $|u_{n,p}| = 0$, donc $s_n = \sum_{p=1}^{+\infty} |u_{n,p}| = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$. Remarquons que quand p tend vers $+\infty$, on a $\frac{1}{p^2} \sim \frac{1}{p(p+1)}$, donc par sommation des relations de comparaison et le fait que la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^2}$ est convergente on a $\sum_{p=n} \frac{1}{p^2} \sim \sum_{p=n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{n}$ et comme la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, la famille $(u_{n,p})$ n'est pas sommable.
2. Étude de l'existence des deux sommes demandées :
   • Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 1$ alors $s_n = \sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^2}$. Par le critère spécial des séries alternée et comme s_n est le reste d'ordre $n-1$ d'une telle série on a la majoration $|s_n| \leq \frac{1}{n^2}$. Il en découle que $\sum |s_n|$ est convergente et à fortiori $\sum s_n$, donc $S = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}$ existe et vaut :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^2}.$$

   • Fixons $p \in \mathbb{N}^*$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{n=1}^{p} \frac{(-1)^p}{p^2} = p\frac{(-1)^p}{p^2} = \frac{(-1)^p}{p}$. Il s'agit du terme générale d'une série alternée convergente donc on a

$$S' = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}$$

   • Il reste à comparer S et S'.
   On a $S = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^2}$. Posons $r_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $S = \sum_{k=1}^{+\infty} r_k = \lim_{N\to+\infty} S_N$

avec $S_N = \sum_{k=1}^{N} r_k$. On fait la transformation suivante :

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{p=n}^{N}\frac{(-1)^p}{p^2}+\sum_{p=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p^2}\right) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=n}^{N}\frac{(-1)^p}{p^2}}_{S_{N,1}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p^2}}_{S_{N,2}} \\ &= S_{N,1}+S_{N,2}, \text{ avec } \begin{cases} S_{N,1}=\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=n}^{N}\frac{(-1)^p}{p^2} \\ S_{N,2}=\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p^2} \end{cases} \end{aligned}$$

• Par interversion des sommes, on a

$$S_{N,1}=\sum_{p=1}^{N}\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^p}{p^2}=\sum_{p=1}^{N}p\frac{(-1)^p}{p^2}=\sum_{p=1}^{N}\frac{(-1)^p}{p}.$$

• Par ailleurs on a $|S_{N,2}|\leq\sum_{k=1}^{N}\left|\sum_{p=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p^2}\right|$. Par le critère spécial des séries alternée qui donne une majoration du reste d'ordre N, on a la majoration : $\left|\sum_{p=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p^2}\right|\leq\frac{1}{(N+1)^2}$, pa suite on a $|S_{N,2}|\leq N\frac{1}{(N+1)^2}\leq\frac{1}{N}$, donc $\lim_{N\to+\infty}S_{N,2}=0$ et par suite

$$S=\lim_{N\to+\infty}S_N=\lim_{N\to+\infty}S_{N,1}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{p=1}^{N}\frac{(-1)^p}{p}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p}=S'$$

Ce qui termine en définitif la démonstration du fait que la famille $(u_{n,p})$ n'est pas sommable et cependant les somme $S=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty}u_{n,p}$ et $S'=\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,p}$ convergent et on a $S=S'$.

EXERCICE 365 Somme double avec cos

Titre : Somme double avec cos
ID : 284 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 270 | ID : 284
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Calculer la somme $\sum_{p,q\geq0}\frac{\cos((p+q)\theta)}{p!q!}$.

Solution

On a pour tout $p,q\geq0$, $\left|\frac{\cos((p+q)\theta)}{p!q!}\right|\leq\frac{1}{p!q!}$. Comme $\sum_{p\geq0}\frac{1}{p!}<+\infty$, on en déduit que la famille $\left(\frac{\cos((p+q)\theta)}{p!q!}\right)_{p,q}$ est sommable. On remarque que la somme considérée est la partie réelle de la somme $S=\sum_{p,q\geq0}\frac{e^{i(p+q)\theta}}{p!q!}$ (qui est la somme d'une famille sommable de la même façon). Comme

$e^{i(p+q)\theta} = e^{ip\theta}e^{iq\theta}$ et que $\sum_{p\geq 0}\frac{e^{ip\theta}}{p!} = e^{e^{i\theta}}$, on en déduit que $S = e^{2e^{i\theta}}$. Par conséquent :

$$\sum_{p,q\geq 0}\frac{\cos((p+q)\theta)}{p!q!} = e^{2\cos\theta}\cos(2\sin\theta)$$

Chapitre 008 — Fonctions vectorielles (L2)

EXERCICE 366 Fonction vectorielle f tel que $f(t) \in$ O_$n(\mathbb{R})$

Titre : Fonction vectorielle f tel que $f(t) \in$ **O**_$n(\mathbb{R})$
ID : 286 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 272 | ID : 286
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = I_n$. Montrer que si $f(t)$ est une matrice orthogonale pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors $f'(0)$ est une matrice antisymétrique.

Solution

On dérive la relation ${}^t f(t) \times f(t) = I_n$, il vient ${}^t f'(t) \times f(t) + {}^t f(t) \times f'(t) = 0$ et en appliquant pour $t = 0$, et compte tenu de $f(0) = I_n$, il vient : ${}^t f'(0) + f'(0) = 0$ donc $f'(0)$ est antisymétrique.

EXERCICE 367 Dérivabilité de $t \mapsto \|f(t)\|$

Titre : Dérivabilité de $t \mapsto \|f(t)\|$
ID : 287 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 273 | ID : 287
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle , \rangle$ et soit $f : \mathbb{R} \to E$ une application dérivable. Montrer que l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto g(t) = \|f(t)\|$ est dérivable en tout point $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) \neq 0$. Calculer alors $g'(t_0)$.

Solution

Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle , \rangle$ et soit $f : \mathbb{R} \to E$ une application dérivable. Montrer que l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto g(t) = \|f(t)\|$ est dérivable en tout point $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) \neq 0$. Calculer alors $g'(t_0)$. Si on pose $h(t) = \sqrt{t}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on sait que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $g(t) = (h \circ \varphi)(t)$ où, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \langle f(t), f(t)\rangle$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc si $t \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) \neq 0$ on a $f(t_0) > 0$, par suite h est dérivable au point $f(t_0)$, et par composition, g est dérivable au point t_0 et : $g'(t_0) = h'(\varphi(t_0)).\varphi'(t_0)$. On sait que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = 2\langle f(t), f'(t)\rangle$$

Il en découle que

$$g'(t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\varphi(t_0)}}.2\langle f(t_0), f'(t_0)\rangle = \frac{\langle f(t_0), f'(t_0)\rangle}{\|f(t_0)\|^2}$$

EXERCICE 368 Fonction vectorielle matricielle

Titre : Fonction vectorielle matricielle
ID : 288 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 274 | ID : 288
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $X : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application de classe C^1 sur un intervalle I à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $t \in I$, la matrice $X(t)$ est inversible. On note alors $Y(t) = (X(t))^{-1}$ pour tout $t \in I$.

1. Démontrer que la fonction $t \mapsto Y(t)$ est de classe C^1 sur I. Préciser $Y'(t)$ en fonction de $X(t)$ et $X'(t)$ pour tout $t \in I$.
2. Soit $C : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application continue d'un intervalle ouvert I voisinage de 0 vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer l'existence et l'unicité d'une application $X : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 vérifiant :

$$\forall t \in I, X'(t) = C(t) \quad \text{et} \quad X(0) = I_n$$

En déduire qu'il existe un intervalle ouvert J voisinage de 0, dans lequel la matrice $X(t)$ est inversible. Précise ce résultat lorsque la matrice $C(t)$ est égale à une matrice D constante (indépendante de t).

Solution

1. On sait que pour tout $t \in I$, on a $Y(t) = \frac{1}{\det(X(t))}{}^t\mathrm{Com}(X(t))$. L'application $t \mapsto \det(X(t))$ est de classe C^1 et comme $A(t)$ est inversible pour tout $t \in I$, on a $\forall t \in I, \det(A(t)) \neq 0$; par ailleurs $t \mapsto {}^t\mathrm{Com}(A(t))$ est de classe C^1 car ses composantes son polynomiales en les coefficients de $A(t)$ lesquels sont les images de t par les composantes de A qui sont de classe C^1. Donc $t \mapsto Y(t) = A^{-1}(t)$ est de classe C^1 sur I.
On a $X(t)Y(t) = I_n$ pour tout $t \in I$, donc $X'(t)Y(t) + X(t)Y'(t) = 0$ et par suite

$$Y'(t) = -X^{-1}(t)X'(t)X^{-1}(t).$$

2. $X'(t) = C(t)$ pour tout $t \in I$, donc en intégrant $X(t) = X(0) + \int_0^t C(u)du = I_n + \int_0^t C(u)du$, ce qui justifie l'unicité de la solution en cas d'existence. Or X ainsi définie est une solution, donc c'est l'unique.
Comme $X(0) = I_n$ est inversible et $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(I_n, r) \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Par continuité de X, il existe un voisinage $J =]-\alpha, \alpha[$ de 0 tel que $A(J) \subset B(I_n, r)$ donc $A(t)$ inversible pour tout $t \in J$. Si $C(t) = D$ alors $X(t) = I_n + tD$. On voit que $I_n + tD$ est non inversible si et seulement si $t \neq 0$ et $\det(I_n + tD) = 0$ si et seulement si $t \neq 0$ et $\chi_{(-D)}\left(\frac{1}{t}\right) = 0$ où $\chi_{(-D)}$ est le polynôme caractéristique de $-D$, donc l'ensemble des t pour lesquels $I_n + tD$ est non inversible est une partie finie de $\mathbb{R}^*$, donc il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in]-\alpha, \alpha[$ on aie : $X(t) \neq$, ce qui confirme l'existence de $J =]-\alpha, \alpha[$, voisinage de 0 tel que $I_n + tD$ est inversible pour tout $t \in J$.

EXERCICE 369 Dérivabilité à droite de $g(t) = \|f(t)\|$

Titre : Dérivabilité à droite de $g(t) = \|f(t)\|$
ID : 289 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 275 | ID : 289
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension n avec $n \geq 1$

1. Démontrer que si pour tous réels a et b tel que $a < b$, si $h : J =]a, b[\to \mathbb{R}$ est une fonction convexe alors h est derivable à droite en tout point de J.
2. Démontrer que pour tout intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$ et tout couple $(v, w) \in E^2$, l'application $\Phi_{v,w} : I \to \mathbb{R}; t \mapsto \Phi_{v,w}(t) = \|w + tv\|$ est convexe sur l'intervalle I.
3. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to E$ une application continue sur I.
Pour tout $t \in I$, on pose $g(t) = \|f(t)\|$.

Montrer que si f est dérivable à droite en un point $t_0 \in I$ alors g est dérivable à droite au point t_0 et que :

$$|g'_d(t_0)| \leq \|f'_d(t_0)\|$$

.

Solution

1. Soit $t_0 \in I$ intérieur à I et $a, b \in I$ tel que $a < t_0 < b$. L'application $t \mapsto \tau_{t_0}(t) = \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ est croissante sur $J =]t_0, b]$, de plus le théorème de l'inégalité des trois pentes donne pour tout t tel que $a < t_0 < t \leq b$, on a :

$$m = \frac{f(a)-f(t_0)}{a-t_0} \leq \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = M,$$

ce qui montre que τ_{t_0} est bornée sur $]t_0, b]$, donc τ_{t_0} admet une limite finie quand t tend vers t_0 à droite, ce qui prouve que $f'_d(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0^+} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ existe.

2. Soit $a, b \in I$ et $t \in [0,1]$ alors $\Phi_{v,w}((1-t)a+tb) = \|((1-t)a+tb)v+w\|$ et comme on peut écrire $w = ((1-t)+t)w$, il vient : $\Phi_{v,w}((1-t)a+tb) = \|((1-t)a+tb)v+((1-t)+t)w\| = \|((1-t)(av+w)+t(bv+w)\|$ et par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\Phi_{v,w}((1-t)a+tb) \leq (1-t)\|av+w\| + t\|bv+w)\| = (1-t)\Phi_{v,w}(a) + t\Phi_{v,w}(b).$$

Donc $\Phi_{u,v}$ est convexe sur I.

3. Soit $t_0 \in I$. Par dérivébilité de f au point t_0 à droite, on a :

$$(\star) \quad f(t) = f(t_0) + (t-t_0)f'_d(t_0)(t-t_0) + (t-t_0)\varepsilon(t)$$

avec

$$\lim_{t \to t_0^+} \varepsilon(t) = 0.$$

Posons

$$A(t) = f(t_0) + (t-t_0)f'_d(t_0)(t-t_0),$$

alors la fonction définie par $F(t) = \|A(t)\|$ est convexe en vertu de la question 2) donc dérivable à droite en t_0 donc $\lim\limits_{t \to t_0^+} \frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} = \ell$ existe. Remarquons que $A(t_0) = f(t_0)$, donc, pour tout $t \in I$ tel que $t > t_0$, on a :

$$\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0} = \frac{g(t)-F(t)}{t-t_0} + \frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0},$$

Puisque $t > t_0$, on a :

$$\left|\frac{g(t)-F(t)}{t-t_0}\right| = \frac{|\|f(t)\| - \|A(t)\||}{t-t_0} \leq \left\|\frac{f(t)-A(t)}{t-t_0}\right\|.$$

Par $(\star)$ ci-dessus, on a

$$\left\|\frac{f(t)-A(t)}{t-t_0}\right\| = |\varepsilon(t)|,$$

donc

$$\lim_{t \to t_0^+} \left\|\frac{g(t)-F(t)}{t-t_0}\right\| = 0.$$

Il en découle que

$$\lim_{t \to t_0^+} \frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t \to t_0^+} \frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} = F'_d(t_0)$$

existe et que g est dérivable au point t_0 à droite.

• Soit $t_0 \in]a,b[$. Pour tout $t \in]t_0,b[$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}\right| &= \frac{1}{t-t_0}|\|f(t)\|-\|f(t_0)\||\\ &\leq \frac{\|f(t)-f(t_0)\|}{t-t_0}\\ &= \left\|\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\right\|\end{aligned}$$

et par passage à la limite quand t tend vers t_0 à droite, il vient $|g'_d(t_0)| \leq \|f'_d(t_0)\|$.

EXERCICE 370 Si $\forall x \in]a,b[, f_d'(x) \in C$ avec C fermé convexe ..

Titre : Si $\forall x \in]a,b[, f_d'(x) \in C$ avec C fermé convexe .. **Difficulté :**

ID : 290 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 276 | ID : 290

E est un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Soit $f : [a,b] \to E$ une application continue d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ayant une dérivée à droite en tout point $x \in]a,b[$. Soit C une partie fermée et convexe de E tel que : $\forall x \in]a,b[, f'_d(x) \in C$. Montrer que :

$$\frac{1}{b-a}(f(b)-f(a)) \in C$$

Solution

Soit $C_\varepsilon = \{y \in E / d(y,C) \leq \varepsilon\}$. Comme 1'application $E \to \mathbb{R}; y \mapsto d(y,C)$ est continue, il est clair que C_ε est fermé. Soient $x, y \in C_\varepsilon$. Il faut montrer que :

$$\forall \lambda \in [0,1], \quad (1-\lambda)x + \lambda y \in C_\varepsilon.$$

Pour tout $\lambda \in [0,1]$, on pose $u(\lambda) = (1-\lambda)x + \lambda y$. Il existe une suite $(x_n) \in C^{\mathbb{N}}$ et une suite $(y_n) \in C^{\mathbb{N}}$ tel que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = d(x,C) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \|y_n - y\| = d(y,C) \end{cases}.$$

P1us précisément, pour tout $\eta > 0$, il existe un entier N tel que n $\geq$ N entraîne

$$\begin{aligned} d(x,C) \leq \|x - x_n\| \leq d(x,C) + n \\ d(y,C) \leq \|y - y_n\| \leq d(y,C) + n. \end{aligned}$$

On pose $v_n(\lambda) = (1-\lambda)x_n + \lambda \cdot y_n \quad 0 \leq \lambda \leq 1$. Alors $v_n(\lambda) \in C$ car C est convexe et pour tout $n \geq N$ on a : $d[u(\lambda),C] \leq \|u(\lambda) - v_n(\lambda)\| = \|(1-\lambda)(x-x_n) + \lambda(y-y_n)\|$, donc $d[u(\lambda),C] \leq (1-\lambda)[d(x,C)+\eta] + \lambda[d(y,C)+\eta]$ donc $d[u(\lambda),C] \leq (1-\lambda)(\varepsilon+n) + \lambda(\varepsilon+n) = \varepsilon + \eta$ et ceci pour tout $\eta > 0$, donc $d[u(\lambda),C] \leq \varepsilon$. et $u(\lambda) \in C_\varepsilon$, donc C_ε est convexe.
Soient $u, v \in \mathbb{R}$ tels que $a < u < v < b$ et soit $\varepsilon > 0$; on pose

$$U_\varepsilon = \left\{x \in [u,v]; \frac{f(x)-f(u)}{x-u} \notin C_\varepsilon\right\}, \begin{cases} g(x) = \frac{f(x)-f(u)}{x-u} \text{ pour } x > u \\ g(u) = f'_d(u). \end{cases}$$

g est une application continue. Donc U_ε est ouvert. Soit c la borne inférieure de U α) alors $c > u$ car $g(u) = f'_d(u) \in C \subset C_\varepsilon$ ß) $c \notin$ U$_\varepsilon$ car U$_\varepsilon$ est ouvert.

En particulier $\frac{f(c)-f(u)}{c-u}$. C_ε γ) $c < v$, car si $c = v$, on aurait $U_\varepsilon = \{v\}$ et U_ε ne serait pas ouvert. Comme $f'_d(c)$ existe, il existe $\eta > 0$ tel que pour $c \leq x \leq c + \eta$, on ait

$$\left\| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'_d(c) \right\| \leq \varepsilon.$$

Comme $f'_d(c) \in C$, on a donc $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \in C_\varepsilon$. Alors on a pour $c \leq x \leq c + \eta$:

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} = \frac{c - u}{x - u} \frac{f(c) - f(u)}{c - u} + \frac{x - c}{x - u} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} + C_\varepsilon$$

car C_ε est convexe. Donc $\frac{f(x)-f(u)}{x-u} \in C_\varepsilon$ ce qui contredit la définition de c comme borne inférieure de U_ε. Donc U_ε est vide. En particulier $\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \in C_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \in C$ car C est fermé. Donc par continuité $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \in C$ car C est fermé.

EXERCICE 371 — Fonction tel que $\|f(t)\|^2 + \|f'(t)\|^2 > 0$ pour tout $t \in [a, b]$

Titre : Fonction tel que $\|f(t)\|^2 + \|f'(t)\|^2 > 0$ pour tout $t \in [a, b]$ — **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 291 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 277 | ID : 291

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et on considère une application $f : [a, b] \to E$ de $[a, b]$ vers E avec E un espace vectoriel réel normé, dérivable sur $[a, b]$ et vérifiant :

$$\forall t \in [a, b], \|f(t)\|^2 + \|f'(t)\|^2 > 0$$

Démontrer que l'ensemble des zéros de f est une partie finie de I.

Solution

Par l'absurde. Sinon, il existe une suite (t_n) de zéros de f tel que :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m \Rightarrow t_n \neq t_m$$

Par compacité de $[a, b]$, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $\ell \in [a, b]$ tel que $\lim_{n \to +\infty} t_{\varphi(n)} = \ell$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, f(t_{\varphi(n)}) = 0$ et f est continue, on a par passage à la limite, $f(\ell) = 0$. Et comme, par hypothèse $\|f(\ell)\| + \|f'(\ell)\| > 0$, il en découle que $f'(\ell) \neq 0$. Or $f'(\ell) = \lim_{\substack{t \to \ell \\ t \neq \ell}} \frac{1}{t-\ell} f(t)$, donc il existe un voisinage V de ℓ tel que $\forall t \in V \backslash \{\ell\}, f(t) \neq 0$. Par définition de ℓ, on peut dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on aie : $t_{\varphi(n)} \in V$ et comme l'unique zéro de f qui est dans V est ℓ, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow t_{\varphi(n)} = \ell,$$

en particulier pour $n = \varphi(N)$ et $m = \varphi(N + 1)$ on a $n \neq m$ et $t_{\varphi(n)} = t_{\varphi(m)}$, ce qui contredit le fait que les t_k sont deux à deux distincts, ce qui finit la preuve demandée.

EXERCICE 372 — Dérivabilité au point 0 de $f(t) = \det(I_n + tA)$

Titre : Dérivabilité au point 0 de $f(t) = \det(I_n + tA)$ — **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 292 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 278 | ID : 292

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto f(t) = \det(I_n + tA)$. Montrer que f est dérivable au point 0 et calculer $f'(0)$.

Solution

L'application $g : t \mapsto I_n + tA$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Si on note φ 'application

$$\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^n)^n; X \mapsto (X_1, \ldots, X_n)$$

où X_k est la colonne k de X alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $f(t) = \det(\varphi(g(t)))$. Remarquons que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(g(t)) = (E_1 + tC_1, \ldots, E_n + tC_n)$$

où E_k et C_k sont respectivement la colonne k de I_n et A, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(t) = \det(C_1, E_2 + tC_2, \ldots, E_n + tC_n) + \cdots + \det(E_1 + tC_1, \ldots, E_{n-1} + tC_{n-1}, C_n)$$

en particulier, on a :

$$f'(0) = \det(C_1, E_2, \ldots, E_n) + \cdots + \det(E_1, \ldots, E_{n-1}, C_n) = \mathrm{tr}(A).$$

EXERCICE 373 Fonction vectorielle matricielle A tel que $A(t) \in$ O_2n + 1(ℝ)

Titre : Fonction vectorielle matricielle A tel que $A(t) \in \mathbf{O}_2n + 1(\mathbb{R})$

Difficulté : ★☆☆☆☆

ID : 293 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 279 | ID : 293

Soit $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. On considère une application $A : I \to \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ dérivable sur I, tel que $\forall t \in I, A(t) \in \mathbf{O}_{2n+1}(\mathbb{R})$. Démontrer que $\forall t \in I, \det(A'(t)) = 0$.

Solution

D'après l'énoncé, on a :

$$\forall t \in I, {}^{\mathrm{t}}(A(t)) \times A(t) = I_n,$$

donc par dérivation on a :

$$\forall t \in I, {}^{\mathrm{t}}A'(t)A(t) + {}^{\mathrm{t}}A(t)A'(t) = 0,$$

il en découle que :

$$\forall t \in I, \det({}^{\mathrm{t}}A'(t)A(t)) = \det(-{}^{\mathrm{t}}A(t)A'(t)) = (-1)^{2n+1}\det({}^{\mathrm{t}}A(t)A'(t)),$$

donc :

$$\forall t \in I, \det(A(t)A'(t)) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \in I, \det(A(t))\det(A'(t)) = 0,$$

et comme $A(t)$ est inversible , on a $\det(A(t)) \neq 0$, donc $\det(A'(t)) = 0$ pour tout $t \in I$.

EXERCICE 374 Théorème du relèvement : preuve dans un cas particulier

Titre : Théorème du relèvement : preuve dans un cas particulier

Difficulté : ★☆☆☆☆

ID : 294 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 280 | ID : 294

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, |e^{iz}| = 1 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$.
2. Soit $f, g : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables sur I, à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ et telles que $\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g}$ Montrer que f et g sont proportionnelles, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $g = \lambda f$
3. Soit $h : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 sur I telle que, pour te $I, |h(t)| = 1$ Si $t_0 \in I$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ sont tels que $h(t_0) = e^{i\theta_0}$, montrer que la fonction θ définie sur I par
$$\forall t \in I, \quad \theta(t) = \theta_0 - i\int_{t_0}^{t} \frac{h'(s)}{h(s)} \mathrm{d}s$$
est de classe C^1 sur I, vérifie $h(t) = e^{i\theta(t)}$, pour tout $t \in I$ et que la fonction θ est à valeurs réelles.
4. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}^*$
   (a) Montrer que la fonction $g : I \to \mathbb{R}, t \mapsto |f(t)|$ est de classe C^1 sur I
   (b) Soient $t_0 \in I$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tels que $f(t_0) = |f(t_0)|e^{i\theta_0}$. Montrer qu'il existe une unique fonction $\theta : I \to \mathbb{R}$, de classe C^1 telles que
$$\theta(t_0) = \theta_0 \quad \text{et} \quad \forall t \in I, f(t) = |f(t)|e^{i\theta(t)}$$

Solution

1. Posons $z = x + yi$, donc $e^i z = e^{ix}e^{-y}$ et $|e^{iz}| = e^{-y}$, donc $|e^{iz}| = 1 \Rightarrow y = 0$ donc $|e^{iz}| = 1 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$.
2. La fonction $h = \frac{g}{f}$ est dérivable sur I et pour tout $t \in I$, on a $h'(t) = \frac{g'(t)f(t) - g(t)f'(t)}{f^2(t)} = 0$, donc h est constante sur I, donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $h = \lambda$ et par suite $g = \lambda f$.
3. $\forall t \in I, \quad \theta(t) = \theta_0 - i\int_{t_0}^{t} \frac{h'(t)}{h(t)} dt$. Tout d'abord θ ainsi définie est de classe C^1 sur I puisque l'application $t \mapsto \frac{h'(t)}{h(t)}$ est continue sur I.

   Pour tout $t \in I$, on a : $\theta'(t) = -i\frac{h'(t)}{h(t)}$, donc $\frac{h'}{h} = \frac{g'}{g}$ où $g(t) = e^{i\theta(t)}$ pour tout $t \in I$. D'après la question **2)**, il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $h(t) = \lambda g(t)$ et comme $h(t_0) = e^{i\theta_0}$, il vient $\lambda = e^{i(\theta_0 - \theta_0)} = 1$, donc $\forall t \in I, h(t) = e^{i\theta(t)}$.
   On a $\forall t \in I, |h(t)| = 1$, donc d'après la question 1), on a $\forall t \in I, h(t) \in \mathbb{R}$.
4. (a) $f : I \to \mathbb{C}$ de classe C^1 sur I et f ne s'annule jamais. $g(t) = |f(t)| = \sqrt{(f_1(t))^2 + (f_2(t))^2}$ où $f = f_1 + if_2$ et f_1 et f_2 réelles, donc les f_k de classe C^1, et comme $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ g est de classe C^1 sur I.
   (b) La fonction $h = \frac{f}{|f|}$ est de module 1 et de classe C^1 sur I. On est dans les conditions da la question **3)**, Comme $h(t_0) = e^{i\theta_0}$, Posons
$$\theta(t) = \theta_0 - i\int_{t_0}^{t} \frac{h'(s)}{h(s)} ds$$
   D'après la question **3)**, on a θ réelle et de classe C^1 et $h = e^{i\theta}$ donc $f(t) = |f(t)|e^{i\theta(t)}$ pour tout $t \in I$ et $\theta(t_0) = \theta_0$.

Chapitre 009 — Suites séries de fonctions I (L2)

EXERCICE 375 **Une suite de fonctions**

Titre : Une suite de fonctions
ID : 13 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 2 | ID : 13
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit (f_n) la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{\sin(nx^2)}{n^2+1}$$

1. Démontrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f à préciser.
2. La convergence est-elle uniforme ?
3. Quelle est la nature de la série de fonctions $\sum f_n$?

Solution

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en découle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
2. Uniforme car $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n^2+1}$
3. La série converge normalement sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 376 Trois exemples de suites de fonctions

Titre : Trois exemples de suites de fonctions
ID : 295 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 281 | ID : 295
Difficulté : ★★☆☆☆

Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonction (f_n).

a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{n+1}{n^2+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$

b) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{nx^2}{1+nx}, n \in \mathbb{N}^*$

c) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x}{x^2+n^2}, n \in \mathbb{N}^*$.

Solution

a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{n+1}{n^2+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$

• La convergence simple : il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2+x^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

• Convergence uniforme : Notons θ la fonction nulle(la limite simple de (f_n)(quand une suite de fonction (f_n) converge simplement sur X vers f, on dit que f est la limite simple de (f_n).) , alors : $g_n(x) = |f_n(x) - \theta(x)| = f_n(x)$, donc (g_n) est bornée et $\sup_{x\in\mathbb{R}} g_n(x) = g_n(0) = \frac{n+1}{n^2}$, qui tends vers 0 quand n tends vers $+\infty$, donc il y' a convergence uniforme sur $\mathbb{R}$

b) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{nx^2}{1+nx}, n \in \mathbb{N}^*$

• (f_n) converge simplement vers $f : [0,1] \to \mathbb{R}; x \mapsto x$ (Le départ des f_n n'est pas $\mathbb{R}$, mais l'intervalle $[0,1]$).

• $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{1+nx}$ donc $g_n(x) \leq 1$ et (g_n) est bornée. On a $\sup\limits_{x\in[0,1]} g_n(x) = g_n(1) = \frac{1}{1+n}$ (Toute fonction homographique : $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $\delta = ad - bc$ est strictement croissante sur chaque intervalle où elle est définie si $\delta > 0$ et strictement décroissante si $\delta < 0$. En l'occurrence :

$$a = 1, b = 0, c = n, d = 1$$

donc $\delta > 0$.) tends vers 0 quand n tends vers $+\infty$, donc la convergence est uniforme sur $[0,1]$.

c) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x}{x^2+n^2}, n \in \mathbb{N}^*$.
- (f_n) converge simplement vers θ, la fonction nulle de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
- $g_n(x) = |f_n(x) - (x)| = f_n(x)$, donc $g_n'(x) = \frac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2}$. Remarquons que g_n est paire, donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} g_n(x) = g_n(n) = \frac{1}{2n}$$

et par suite la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 377 Etude d'une fonction qui est la somme d'une série de fonctions

Titre : Etude d'une fonction qui est la somme d'une série de fonctions

Difficulté : ★★☆☆☆

ID : 296 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 282 | ID : 296

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+x}$.

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une application $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et que la convergence est normale sur tout intervalle de la forme $I_a = [a, +\infty[, a > 0$ et n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+x}$.

1. Fixonx $x \in \mathbb{R}_+$. Si $x = 0$ alors $f_n(0) = \frac{(-1)^n}{n}$ est le terme général d'une série convergente car alternée véifiant les conditions du CSSA.
   Si $x > 0$ alors $|f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n+x} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum f_n(x)$ est même absolument convergente.
   - Soit $a > 0$, alors $\forall x \in [a, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(x)| \leq \frac{e^{-na}}{n}$ et comme la série $\sum \frac{e^{-na}}{n}$ est convergente la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur I_a.
   - On n'a pas convergence normale sur $\mathbb{R}_+$ car $|f_n(0)| = \frac{1}{n}$ et la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.
2. On va démontrer que $\sum f_n$ est uniformèment convergente sur $\mathbb{R}_+$ et comme les f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$, il en sera de même pour f. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la suite $(|f_n(x)|)$ est décroissante car produit de deux suites décroissantes positives à savoir $\frac{1}{n+x}$ et e^{-nx}. De plus $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x)| = 0$, donc le critère spécial des séries alternées s'applique et en particulier $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1+x}$, donc $\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$ et le reste converge uniformèment sur $\mathbb{R}_+$ vers 0 donc la série $\sum f_n$ est uniformèment convergente sur $\mathbb{R}_+$.

EXERCICE 378 modes de convergence des séries de fonctions pour 7 exemples

Titre : modes de convergence des séries de fonctions pour 7 exemples

Difficulté : ★☆☆☆☆

ID : 297 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 283 | ID : 297

Dans chacun des cas suivants étudier la convergence simple, absolue, uniforme et normale de la série $\sum f_n$.

1. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}, n \in \mathbb{N}$
2. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}; x \mapsto n^2 x^n (1-x)^n, n \in \mathbb{N}$.

3. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{nx^2}{n^3+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$.
4. $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x}{n}e^{-n^2x^2}, n \in \mathbb{N}^*$.
5. $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{n+x}{n^2+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$.
6. $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$.
7. $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$.

Solution

1. Si on note (α_n) la suite définie par $\alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ \frac{1}{n^2} & \text{si} \quad n \geq 1 \end{cases}$ on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq \alpha_n$$
et comme $\sum \alpha_n$ est convergente, la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
2. On a $\forall x \in [0,1], |x(1-x)| \leq \frac{1}{4}$, donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq \alpha_n$$
où
$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \frac{n^2}{4^n}$$
notamment $\sum \alpha_n$ converge par la règle de D'Alembert(On a : $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{4} \sim \frac{1}{4}$. Comme $\frac{1}{4} < 1$, $\sum \alpha_n$ converge.) donc la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur $[0,1]$. Bien entendu comme on a la convergence normale, on a aussi la convergence uniforme, absolue et simple de la série $\sum f_n$ sur $[0,1]$.
3. • Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$, donc la série $\sum f_n(0)$ converge de somme 0.
• Si $x \neq 0$, on a quand n tends vers $+\infty$: $f_n(x) \sim \frac{x^2}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente (au facteur multiplicatif x^2 prés), donc la série $\sum f_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

• On a $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \geq |f_n(n)| = \frac{n^3}{n^3+n^2} = \frac{n}{n+1}$ qui tends vers 1, donc on n'a pas la convergence normale sur $\mathbb{R}$ si sur une partie de $\mathbb{R}$ contenant une partie infinie de $\mathbb{Z}$.

• sur $\mathbb{R}_+$, il n'y a pas convergence uniforme car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$|R_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x) \geq f_n(n+1) = \frac{n(n+1)^2}{n^3+(n+1)^2} = \alpha_n$$
et comme,quand n tends vers $+\infty$, on a $\alpha_n \sim 1$, on a $\sup_{x\geq 0} |R_n(x)|$ ne converge pas vers 0. De même sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, il n'y a pas convergence uniforme car il suffit de reprendre le raisonnement fait avec $\mathbb{R}_+$ avec R_n pour tout $n > a$. Puisque la fonction f_n est paire il n'y a pas convergence uniforme sur toute partie A de $\mathbb{R}$ contenant une infinité d'entiers relatifs.

• La série $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout compact car si K est un tel compact il existe $R > 0$ tel que $K \subset [-R,R]$ donc pour tout $x \in K$ on a $|f_n(x)| = \frac{n|x|^3}{n^3+x^2} \leq \frac{nR^3}{n^3} = \frac{R^3}{n^2}$ et la série $\sum \frac{R^3}{n^2}$ est convergente.
4. $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x}{n}e^{-n^2x^2}, n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a $|f_n(x)| = \frac{x}{n}e^{-n^2x^2}$. On considère la fonction h_n définie par $h_n(x) = xe^{-n^2x^2}$, alors h_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $h_n'(x) = (1-2n^2x^2)e^{-n^2x^2}$, donc $\max_{x\geq 0} h_n(x) = h_n\left(\frac{1}{n\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}en}$, il en découle que $\sup_{x\in[1,+\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{n^2\sqrt{2e}}$, donc la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[1,+\infty[$.

5. $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{n+x}{n^2+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$. On a $\|f_n\|_{\infty,[0,+\infty[} \geq |f_n(0)| = \frac{1}{n}$.
   - Convergence simple : Pour tout $x \geq 0$, on a $|f_n(x) = \frac{n+x}{n^2+x^2} \sim \frac{1}{n}$, donc il n'y a même pas convergence en aucun point $x \in [0,+\infty[$.

6. $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$.
   • Il s'agit d'une série alternée qui vérifie les conditions du C.S.S.A. pour tout $x \geq 0$ puisque $\alpha_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$ réalise ($\alpha_n(x)$ est décroissante et converge vers 0, donc la série $\sum f_n(x)$ est convergente et le reste vérifie $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{n^2}$ par suite $\|R_n\|_{\infty,[0,+\infty[} \leq \frac{1}{n^2}$ et on a $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.
   • Il est clair que $\|f_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = |f_n(0)| = \frac{1}{n^2}$, donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$.

7. $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$.
   • Il s'agit d'une série alternée qui vérifie les conditions du C.S.S.A. pour tout $x \geq 0$ puisque $\alpha_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ réalise ($\alpha_n(x)$ est décroissante et converge vers 0, donc la série $\sum f_n(x)$ est convergente et le reste vérifie $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{n^2}$ par suite $\|R_n\|_{\infty,[0,+\infty[} \leq \frac{1}{n^2}$ et on a $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.
   • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|f_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = |f_n(0)| = \frac{1}{n}$, donc il n'y a pas convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0,+\infty[$.
   • Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, il n'y a pas convergence normale sur A car il n'y a pas convergence absolue sur A puisque pour tout $a \in A$, on a $|f_n(a)| = \frac{1}{n+a^2} \sim \frac{1}{n}$.

EXERCICE 379 Recherche des intervalles de convergence uniforme

Titre : Recherche des intervalles de convergence uniforme
ID : 298 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 284 | ID : 298
Difficulté : ★☆☆☆☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

Sur quels intervalles de $\mathbb{R}$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle uniformèment ?

Solution

A démontrer : il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$: $f_n(x_n)$ avec $x_n = \frac{1}{\sqrt{n2^n}}$.
Il n'y a pas convernece uniforme sur tout intervalle de bornes a, b tel que $a \leq 0 \leq b$ et $a \neq b$.
Il y a convergence uniforme sur $[a,+\infty[$ et $]-\infty,-a]$ pour tout $a > 0$.

EXERCICE 380 Convergence simple et uniforme pour une suite de fonctions

Titre : Convergence simple et uniforme pour une suite de fonctions
ID : 299 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 285 | ID : 299
Difficulté : ★☆☆☆☆

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par $f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$ pour tout $x \in [0,+\infty[$

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,+\infty[$, on a $f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$. Il est aisé de voir que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle θ. Pour tut $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,+\infty[$, on a $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ puisque

$\frac{x}{1+x^n} \leq 1$ car si $0 \leq x \leq 1$, on a $\frac{x}{1+x^n} \leq x \leq 1$ et si $x > 1$ alors $x \leq x^n \leq 1 + x^n$. Ainsi $\sup_{x\in[1,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$, donc la suite (f_n) converge uniformément vers θ sur $[0, +\infty[$.

EXERCICE 381 Série de fonctions, convergence et continuité

Titre : Série de fonctions, convergence et continuité
ID : 300 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 286 | ID : 300
Difficulté : ★☆☆☆☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}; x \mapsto (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+x}$.

1. Etudier la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. Montrer que la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Solution

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
   Convergence simple sur $\mathbb{R}_+$:
   • Si $x = 0$ alors $f_n(x) = f_n(0) = \frac{(-1)^n}{n}$, donc la série $\sum f_n(0)$ est convergente car c'est une série alternée avec les conditions du critère spécial des séries alternées vérifiées ($(\frac{1}{n})$ décroissante et tends vers 0.).
   • Si $x > 0$, alors $|f_n(x)| \sim \frac{e^{-nx}}{n}$ et comme $\frac{e^{-nx}}{n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.
   • Conclusion : La série $\sum f_n$ est simplement convergente sur $[0, +\infty[$.
   Convergence normale sur $\mathbb{R}_+$:
   On a $g_n(x) = |f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n+x}$. On a $\sup_{x\in\mathbb{R}_+} g_n(x) \geq g_n(0) = \frac{1}{n}$ et la série $\sum 1n$ est divergente donc il n'y a pas convergence normale sur $[0, +\infty[$.
   Convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$:
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$, alors la suite de terme général $\alpha_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n+x}$ est décroissante et convergne vers 0, donc le reste d'ordre n de la série $\sum f_n$ est majoré en valeur absolue par le premier terme négligé, donc $|R_n(x)| \leq \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1+x}$, donc $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ et par suite $\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |R_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ et on a convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la série $\sum f_n$.
   Convergence normale sur $I_a = [a, +\infty[$, pour tout réel $a > 0$:
   Si $a \in [0, +\infty[$ alors pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a $|f_n(x)| \leq \frac{e^{-na}}{n} = \alpha_n$ et la série numérique $\sum \alpha_n$ est convergente donc la série $\sum f_n$ converge normlement sur tout intervalle de la forme $I_a, a > 0$.
2. On a démontré que $\sum f_n$ converge uniformément vers S et les f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$, donc S est continue sur $\mathbb{R}_+$.

EXERCICE 382 Suite de fonctions dont le tg est un produit

Titre : Suite de fonctions dont le tg est un produit
ID : 301 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 287 | ID : 301
Difficulté : ★☆☆☆☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f à préicser.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $f_n(2^n\pi)$. En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que (f_n) converge uniformèment vers f sur tout ségment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

Solution

1. Remarquons que pour tout $j \in \mathbb{N}$ tel que $j \geq 2$, on a $\sin\left(\frac{x}{2^j}\right) f_j(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2^{j-1}}\right) f_{j-1}(x)$, donc en faisant le produit pour j allant de 2 à n pour tout $n \geq 2$, on obtient :

$$\prod_{j=2}^{n} \sin\left(\frac{x}{2^j}\right) f_j(x) = \prod_{j=2}^{n} \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2^{j-1}}\right) f_{j-1}(x),$$

donc

$$\prod_{j=2}^{n} \sin\left(\frac{x}{2^j}\right) f_j(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{j=1}^{n-1} \sin\left(\frac{x}{2^j}\right) f_j(x).$$

Donc

$$(\star) \quad f_n(x)\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{j=2}^{n-1}\sin\left(\frac{x}{2^j}\right)\prod_{j=2}^{n-1} f_j(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\sin\left(\frac{x}{2}\right) f_1(x)\prod_{j=2}^{n-1}\sin\left(\frac{x}{2^j}\right)\prod_{j=2}^{n-1} f_j(x).$$

Comme $f_1(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, on a

$$(\star\star\star) \quad f_n(x)\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{j=2}^{n-1}\sin\left(\frac{x}{2^j}\right)\prod_{j=2}^{n-1} f_j(x) = \frac{1}{2^n}\sin(x)\prod_{j=2}^{n-1}\sin\left(\frac{x}{2^j}\right)\prod_{j=2}^{n-1} f_j(x).$$

Il en découle que si $x \neq 2^\ell k\pi$ pour tout $(\ell,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$, on a

$$f_n(x) = \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

Deux cas sont possibles :
• Il existe $(m,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ tel que $x = 2^m k\pi$. Ecrivons $k = 2^s u$ avec $u \in \mathbb{Z}$ impair et $s \in \mathbb{N}$, il vient $x = 2^{m+s}u\pi$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > m+s$, donc $j = m+s+1 \leq n$ et comme $\frac{x}{2^j} = \frac{2^{m+s}u\pi}{2^{m+s+1}} = \frac{u\pi}{2}$ on a $\cos\frac{x}{2^j} = 0$, et par suite $f_n(x) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, dans ce cas.
• Pour tout $(m,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, $x \neq 2^m k\pi$, dans ce cas on a :

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{j=2}^{n-1}\sin\left(\frac{x}{2^j}\right)\prod_{j=2}^{n-1} f_j(x) \neq 0$$

car sinon on aurait l'existeence d'un $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{x}{2^j} = \ell\pi$ ou $\frac{x}{2^j} = \frac{\pi}{2}\ell\pi$, ce qui donne , dans chacun des ses cas x sous la forme $x = 2^m k\pi$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On peut donc simplifier dans $(\star\star\star)$ et obtenir :

$$(\star\star) \quad f_n(x)\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}\sin(x)$$

ce qui donne :

$$f_n(x) = \frac{\frac{1}{2^n}\sin(x)}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

Dans ce cas on a

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

et on observe que cette formule reste valable pour $x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$ et pour $x = 0$ car on confondera la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ avec son prolongement par continuité en 0 et compte tenu de $f_n(0) = 0$. En résumé (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 \quad \text{si} & x = 0 \end{cases}$$

2. On a $f_n(2^n\pi) = -1$ et $f(2^n\pi) = 0$, donc $d_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(2^n\pi) - f(2^n\pi)| = 1$ donc la suite (d_n) ne tends pas vers 0 et la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$
3. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, alors il existe $M > 0$ tel que $[a,b] \subset [-M,M]$. Soit N un entier tel que $\frac{M}{2^N} \leq \frac{\pi}{2}$, donc pour tout $n \geq N$ on a $\frac{M}{2^n} \leq \frac{\pi}{2}$. Posons

$$h(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad A = \sup_{-\frac{\pi}{2}\leq x\leq \frac{\pi}{2}} |h(x)|.$$

Pour tout $n > N$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{|\sin(x)|}{2^n} \left|h\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \leq \frac{A}{2^n}$$

inégalité valable aussi en $x = 0$, donc on a la convergence uniforme sur $[a,b]$.

EXERCICE 383 Une série de fonctions, étude, équivalent

Titre : Une série de fonctions, étude, équivalent
ID : 302 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 288 | ID : 302
Difficulté :

On considère la fonction réelle de variable réelle définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Démontrer que f est continue sur D_f.
3. Déterminer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
4. Démontrer que : Quand x tends vers 0 à droite, on a $f(x) \sim -\ln(x)$ et quand x tends vers $+\infty$, on a $f(x) \sim \frac{\pi^2}{6x}$.

Solution

$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{n+nx^2}$ est bien définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{n}\}$. Par ailleurs, pour $x = 0$, la série $\sum f_n(0)$ est divergente car c'est la série harmonique. Donc l'ensemble de définition D_f de f réalise $D_f \subset D$ où

$$D = \mathbb{R}\setminus K \quad \text{et} \quad K = \{0\} \cup \{-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Réciproquement, pour tout $x \in D$, quand n tends vers $+\infty$, on a $f_n(x) \sim \frac{1}{xn^2}$ qui est, à un coefficient multiplicatif près, le terme général d'une série de Riemann convergente, donc $\sum f_n(x)$ est convergente. Il en découle que $D_f = D$.

2. Soit $x_0 \in D_f$:
• Deux cas sont possibles :
• **Premier cas :** $x_0 > 0$, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a < x_0$, en particulier $x_0 \in [a,+\infty[$ et pour tout $x \in [a,+\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|n + n^2x| = n + n^2x \geq n + n^2a$ donc

$$\forall x \in [a,b], |f_n(x)| \leq \frac{1}{n+n^2a} = \alpha_n$$

et comme la série numérique $\sum \alpha_n$ est convergente(puisque $\alpha_n \sim \frac{1}{an^2}$ quand $n \to +\infty$), par suite $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$. Il en découle que f est continue

au point x_0.

• **Deuxième cas :** $x_0 < 0$, alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < x_0 < b < -1$, en particulier $x_0 \in [a,b]$ et pour tout $x \in [a,b]$ on a $n + n^2 b \leq 0$ à partir d'un certain rang N puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+n^2b) = -\infty$, donc, pour tout $n \geq N$ on a $|n+n^2b| = -n-n^2b \leq -n-n^2x = |n+n^2x|$ de sorte que $\forall n \geq N, \forall x \in [a,b], |f_n(x)| \leq \frac{1}{-n-n^2b}$ et $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

• Dans tous les cas il existe un intervalle I inclus dans D tel que x_0 est intérieur à I et f est continue sur I car c'est une limite uniforme d'une série normalement, donc uniformément convergente sur I, donc f est continue au points x_0.

3. Determination des limites de $f(x)$, quand x tend vers 0 à droite et quand x tend vers $+\infty$:

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_n est décroissante sur $]0,1]$; il en découle que f est décroissante sur $]0,1]$, donc $f(x)$ admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ lorsque x tend vers 0 à droite. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f(1/n) \geq f_n(1/n) = 1/2n$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/(2n) = +\infty$, la fonction f n'est pas bornée sur $]0,1]$ de plus elle est continue sur $]0,1]$ puisque la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a > 0$, donc $f(x)$ n'admet pas de limite finie quand x tend vers 0 à droite. Donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

• Pour tout $x \in [1,+\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, donc $\sum f_n(x)$ converge normalement donc uniformément sur $[1,+\infty[$ et par suite le théorème d'interversion des limites au voisinage de $+\infty$ s'applique, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

4. Équivalents simples de $f(x)$ au voisinages respectifs de 0 à droite et de $+\infty$.

• Soit $x \in]0,+\infty[$. L'application $t \mapsto g(t) = \frac{1}{xt^2+t}$ est continue décroissante positive sur $[1,+\infty[$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$ on a $\int_k^{k+1} g(t)\mathrm{d}t \leq g(k) \leq \int_{k-1}^{k} g(t)\mathrm{d}t$ et par sommation sur $k \in [\![2,+\infty[\![$, il vient :

$$\int_2^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \leq f(x) - f_1(x) \leq \int_1^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$$

et comme $g(t) = \frac{1}{xt+t} = \frac{1}{t} - \frac{x}{xt+1}$ il vient

$$\left[\ln\frac{t}{xt+1}\right]_2^{+\infty} + \frac{1}{x+1} \leq f(x) \leq \left[\ln\frac{t}{xt+1}\right]_1^{+\infty} + \frac{1}{x+1}$$

Donc

$$-\ln(x) - \ln\frac{2}{2x+1} + \frac{1}{x+1} \leq f(x) \leq -\ln(x) - \ln\frac{2}{2x+1} + \frac{1}{x+1}$$

et comme les fonctions $x \mapsto -\ln\frac{2}{2x+1} + \frac{1}{x+1}$ et $x \mapsto -\ln\frac{2}{2x+1} + \frac{1}{x+1}$ sont bornée sur $]0,1]$ et que $\lim\limits_{x\to0^+}(-\ln(x)) = +\infty$, on a $f(x) \sim -\ln(x)$ quand x tend vers 0^+.

• On va démontrer par le théorème d'interversion des limites que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x}{n+n^2x} = \frac{\pi^2}{6}$, pour cela considérons la suite de fonctions

$$\left(h_n : x \mapsto h_n(x) = xf_n(x) = \frac{x}{n+n^2x}\right)_{n\geq1},$$

et remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a $0 \leq h_n(x) \leq \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, donc la série $\sum h_n$ est normalement donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$ et par la théorème d''interversion de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} h_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

• Il découle de tout ce qui précède que quand x tend vers $+\infty$, on a $f(x) \sim \frac{\pi^2}{6x}$.

EXERCICE 384 **Suite de fonctions vectorielles**

Titre : Suite de fonctions vectorielles
ID : 303 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 289 | ID : 303
Difficulté : ★☆☆☆☆

Dans tout ce qui suit $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère un vecteur $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| \leq 1$ et $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une application tel que $\gamma(t) \leq kt$ où $k \in [0,1]$. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_+$ vers E tel que :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}_+, f_0(t) = x_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, f_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f_n(\gamma(s))ds \end{cases}$$

1. Prouver que la suite (f_n) est bien définie.
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
3. Prouver que la suite (f_n) converge simplement vers une application $f : \mathbb{R}_+ \to E$ et que la convergence est uniforme sur tout compact K inclus dans $\mathbb{R}_+$.
4. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = f(\gamma(x))$.

Solution

1. f_0 est bien définie et elle est continue. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que f_n est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}_+$, alors l'expression donnant f_{n+1} montre que f_{n+1} est bien définie et est continue.
2. On va démontrer l'inégalité demandée par récurrence.
   • Si $n = 0$ l'inégalité est vérifiée car $f_1(t) - f_0(t) = (x_0 + \int_0^t x_0 dt) - x_0 = tx_0$, donc $\|f_1(t) - f_0(t)\| = t\|x_0\| \leq t = \frac{t^1}{1!}$ (on a utilisé le fait $\|x_0\| \leq 1$.
   • Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \|f_n(x) - f_{n-1}(x)\| \leq \frac{x^n}{n!}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $\|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| = \left|\int_0^x (f_n(\gamma(t)) - f_{n-1}(\gamma(t))dt\right|$ donc $\|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| \leq \int_0^x \|f_n(\gamma(t)) - f_{n-1}(\gamma(t)\|dt$. Par hypothèse de récurrence, pour tout $t \in [0,x]$, on a : $\|f_n(\gamma(t)) - f_{n-1}(\gamma(t)\| \leq \frac{(\gamma(t))^n}{n!}$ or $\gamma(t) \leq kt$ et $0 \leq k \leq 1$, donc $\|f_n(\gamma(t)) - f_{n-1}(\gamma(t)\| \leq \frac{t^n}{n!}$ et par suite $\|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| \leq \int_0^x \frac{t^n}{n!}dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, ce qui termine la démonstration par récurrence.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Posons $u_0(x) = f_0(x) = x_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$, On a $f_n(x) = x_0 + \sum_{k=0}^n u_k(x) = x_0 + S_n(x)$ où S_n est la somme partielle d'ordre n de la série de fonctions $\sum u_n$. D'après la question 2), on a $\|u_n(x)\| \leq \frac{x^n}{n!}$ donc la série $\sum u_n(x)$ converge absolument, et comme E est de dimension finie elle converge donc la suite $(f_n(x))$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ vers $f(x) = x_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f où $f = x_0 + u$ et $u = \sum_{n=0}^{+\infty}$ est la limite simple de la série $\sum u_n$.
   • Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}_+$, donc il existe $r > 0$ tel que $K \subset [0,r]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(x) - f_n(x) = \left(x_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)\right) - \left(x_0 + \sum_{k=0}^n u_k(x)\right) = R_n(x)$ où $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ est le reste d'ordre n de la série $\sum u_k(x)$. On a $\|R_n(x)\| \leq r_n$ où r_n est le reste d'ordre n de la série numérique $\sum \frac{r^k}{k!}$ et on voir bien que $\sup_{x\in\mathbb{R}_+} \|R_n(x)\| \leq r_n$ et $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$. Ainsi (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$.
4. Il découle de la question précédente que f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$:
$$f_{n+1}(x) = x_0 + \int_1^x f_n(\gamma(t))dt$$
Par passage à la limite on obtient $f(x) = x_0 + \int_1^x f(\gamma(x))dt$ et la justification de l'interversion de l'intégrale et la limite est donnée par le fait que la suite fonction (g_n) définie par $g_n(x) = f_n(\gamma(x))$ converge uniformément sur $[a,x]$ vers la fonction $g = f \circ \gamma$, en effet pour tout $t \in [0,x]$ on a $\|g_n(t) - g(t)\| = \|f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))\| \leq \|f_n - f\|_{\infty,[0,M]}$ où $[0,M] = \gamma([0,x])$ justifié par le fait que γ est continue et que $\gamma(0) = 0$. La convergence uniforme de (f_n) sur $[0,M]$ permet de conclure. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et réalise $f(x) = x_0 + \int_0^x f(\gamma(t))dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, donc f est dérivable et $f' = f \circ \gamma$.

EXERCICE 385 Etude d'une série de fonctions, propriétés de la somme

Titre : Etude d'une série de fonctions, propriétés de la somme
ID : 304 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 290 | ID : 304
Difficulté : ★☆☆☆☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \arctan(x+n) - \arctan(n)$.

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
4. En déduire que la convergence de $\sum f_n$ n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Solution

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
   • Si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$ et la série $\sum f_n(0)$ est convergente.
   • Si $x > 0$, la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. L'égalité des accroissements finis permet de dire qu'il existe $c \in]n, n+x[$ tel que $f_n(x) = x\frac{1}{c^2+1}$, en particulier $0 \leq f_n(x) \leq \frac{x}{n^2+1}$ et comme la série de terme général $\frac{x}{1+n^2}$ est convergente, $\sum f_n(x)$ est convergente.
2. On va démontrer qu'il y'a convergence normale sur $[0,r]$ pour tout $r > 0$. D'après ce qui précède, pour tout $x \in]0,r]$, on a $0 \leq f_n(x) \leq \frac{r}{n^2}$, encore valable si $x = 0$, et la série $\sum \frac{r}{n^2}$ est convergente, donc on a convergence normale sur $[0,r]$ pour tout réel $r > 0$, donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Les fonctions f_n sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc f admet une limite quand x tends vers $+\infty$ dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Supposons qu'elle admet une limite finie ℓ, donc $\ell = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} f(x)$. Poour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=1}^n f_n(x) \leq f(x) \leq \ell$. Il en découle que $\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^n f_k(x) \leq \ell$, or

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^n f_k(x) &= \sum_{k=1}^n \lim_{x\to+\infty} f_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{1}{k}\right),\end{aligned}$$

   donc en posant $u_n = \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k \leq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc la série à termes positifs $\sum u_n$ est convergente, ce qui n'est pas le cas car $u_n \sim \frac{1}{n}$, terme général de la série harmonique qui est divergente, donc en définitif : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
4. Si la convergence de $\sum f_n$ était uniforme le théorème d'interversion des limites serait validé, en particulier, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note comme ci-dessus $u_n = \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$ alors la série $\sum u_n$ convergente, ce qui n'est pas le cas.

EXERCICE 386 Une suite de fonctions qui converge vers $x \mapsto e^{-x}$

Titre : Une suite de fonctions qui converge vers $x \mapsto e^{-x}$
ID : 305 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 291 | ID : 305
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction definie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0;n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ si } x \geq n$$

Démontrer que la suite (f_n) converge uniformèment sur $\mathbb{R}_+$ vers f définie par $f(x) = e^{-x}$.

Solution

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N$ avec $N = [x] + 1$ (partie entière), on a :

$$f_n(x) = (1 - x/n)^n = \exp(n \ln(1 - x/n)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-x}$$

La suite (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ avec $f_n \leq f$ Etudions $\delta_n = f - f_n \geq 0$ Pour $x \in [n; +\infty[, \delta_n(x) = \mathrm{e}^{-x} \leq \mathrm{e}^{-n}$ Pour $x \in [0;n], \delta_n(x) = \mathrm{e}^{-x} - (1 - x/n)^n$ et $\delta_n'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (1 - x/n)^{n-1}$ Posons

$$\varphi_n(x) = (n-1)\ln(1 - x/n) + x$$

$$\text{On a} \qquad \varphi_n'(x) = \tfrac{n-1}{n} \tfrac{1}{x/n-1} + 1 = \tfrac{x-1}{x-n}$$

est du signe de $1 - x$ Par étude des variations de φ_n, on obtient l'existence de $x_n \in [0;n]$ tel que $\varphi_n(x) \geq 0$ pour $x \leq x_n$ et $\varphi_n(x) \leq 0$ pour $x \geq x_n$. On en deduit que pour $x \leq x_n$ $\delta_n'(x) \geq 0$ et pour $x \geq x_n, \delta_n'(x) \leq 0$. Ainsi

$$\|\delta_n\|_{\infty,[0;n]} = \delta_n(x_n) = \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = \frac{x_n}{n}\mathrm{e}^{-x_n}$$

Puisque la fonction $x \mapsto xe^{-x}$ est. bornee par un certain M sur $\mathbb{R}_+$, on obtient

$$\|\delta_n\|_{\infty,[0;n[} \leq \frac{M}{n}$$

Finalement

$$\|\delta_n\|_{\infty,[0;+\infty[} \leq \max\left(\frac{M}{n}, e^{-n}\right) \to 0$$

On peut done affirmer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers f

EXERCICE 387 Suite de fonctions qui converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$

Titre : Suite de fonctions qui converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ **Difficulté :**
ID : 306 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 292 | ID : 306

Soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

a) Etudier la limite simple de (f_n) et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) \geq \lim f_n(x)$$

b) En partant de l'encadrement suivant valable pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$$

justifier que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[0;a]$ (avec $a > 0$) c) Etablir qu'en fait, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Solution

1. $f_n(x) = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \exp(-x+o(1)) \to e^{-x} = f(x)$ On sait $\ln(1+t) \leq t$ donc par opérations : $f_n(x) \geq e^{-x}$
2. On sait que $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$, donc, $\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} \leq \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}$, donc, $e^{-x} \leq f_n(x) \leq e^{-x+\frac{x^2}{2n}} = e^{-x}e^{\frac{x^2}{2n}}$.Sur $[0,a]$ on a $e^{\frac{x^2}{2n}} \leq e^{\frac{x^2}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left|e^{\frac{a^2}{2n}} - 1\right| \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $x \in [0,a]$, on a : $|f_n(x) - f(x)| \leq e^{-x}\left(e^{x^2/2n} - 1\right) \leq e^{a^2/2n} - 1 \leq \varepsilon$, par suite, $f_n \xrightarrow[[0,a]]{\text{CVU}} f$
3. Les fonctions f_n sont décroissantes donc, $\forall x \geq a, f_n(x) \leq f_n(a)$. Soit $\varepsilon > 0$, puisque $e^{-x} \to x \to +\infty 0$, on a $\exists a \in \mathbb{R}_+, \forall x \geq a, e^{-x} < \frac{\varepsilon}{3}$. Puisque $f_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-a}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |f_n(a) - e^{-a}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Mais alors $\forall x \geq a, |f_n(x) - e^{-x}| \leq f_n(x) + e^{-x} \leq f_n(a) + e^{-x} \leq (f_n(a) - e^{-a}) + e^{-a} + e^{-x} \leq \varepsilon$. De plus, $f_n \xrightarrow[[0,a]]{\text{CVU}} f$, donc $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, \forall x \in [0,a], |f_n(x) - e^{-x}| \leq \varepsilon$. Finalement $\forall n \geq \max(N, N'), \forall x \in \mathbb{R}_+, |f_n(x) - e^{-x}| \leq \varepsilon$ et par suite $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}_+]{\text{CVU}} f$.

EXERCICE 388 Construction d'une série de fonctions qui converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Titre : Construction d'une série de fonctions qui converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Difficulté : ★☆☆☆☆

ID : 307 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 293 | ID : 307

Pour tout $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{nx}{x^2 + n^3 + 1}.$$

1. Vérifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
3. Étudier la convergence uniforme de la série $\sum f_n$, sur tout compact K inclus dans $\mathbb{R}$.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > \frac{1}{2}$, et $(g_n)_{n\geq 0})$ la suite de fonctions définie par :

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{1}{n^\alpha} f_n(x).$$

Démontrer que la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Solution

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - Si $x = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(x) = f_n(0) = 0$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0) = 0$.
   - Si $x \neq 0$ alors quand n tend vers $+\infty$, on a $f_n(x) \sim \frac{x}{n^2}$, et comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, la série $\sum f_n(x)$ est convergente.
   - **Conclusion :** La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est impaire. on se contentera d'étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{kx}{x^2+n^3+1} \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(n+1)x}{x^2+n^3+1} = (n+1)\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^3+1}$. Supposons que la série converge uniformément sur $[0,+\infty[$, donc $\alpha_n = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} R_n(x)$ existe et

$$\alpha_n \geq R_n(n) \geq (n+1)\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+k^3+1} = n(n+1)\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+k^3+1}.$$

• Pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq n+1$, on a $n \leq k-1$, donc

$$n^2 + k^3 + 1 \leq (k-1)^2 + k^3 + 1 \leq 3k^3,$$

donc

$$\alpha_n \geq \frac{n(n+1)}{3} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est décroissante continue positive sur $[1, +\infty[$, donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^3} \mathrm{d}t = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^3} \mathrm{d}t = -\left[\frac{1}{2} t^{-2}\right]_{n+1}^{+\infty} = \frac{1}{2(n+1)^2},$$

par suite

$$\alpha_n \geq \frac{n(n+1)}{3} \frac{1}{2(n+1)^2} = \frac{1}{6} \frac{n}{(n+1)} \geq \frac{1}{6} \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

Il en découle que la suite (α_n) ne converge pas vers 0, donc la convergence uniforme n'a pas lieu.

3. Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}$, alors il existe $\rho > 0$ tel que $K \subset [-\rho, \rho]$, donc pour tout $x \in K$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n(x)| \leq \frac{\rho n}{n^2+1}$ et comme la série $\sum \frac{1}{n^2+1}$ est convergente, la série $\sum f_n$ est normalement donc uniformément convergente sur K.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $f_n'(t) = \frac{t^2 - (n^3+1)}{(t^2+n^3+1)^2}$ de sorte que si on pose $c_n = \sqrt{n^3+1}$ alors $f_n(c_n) = \max_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t)|$. Or $f_n(c_n) = \frac{n\sqrt{n^3+1}}{2(n^3+1)}$, donc $g_n(c_n) = \max_{t \in \mathbb{R}} |g_n(t)| = \frac{n\sqrt{n^3+1}}{2(n^3+1)n^\alpha} \sim \frac{1}{2n^{\frac{1}{2}+\alpha}}$, et comme par hypothèse $\alpha > \frac{1}{2}$, on a $\frac{1}{2} + \alpha > 1$ et la série de Riemann $\frac{1}{2n^{\frac{1}{2}+\alpha}}$ est convergente, ce qui justifie la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum g_n$.

EXERCICE 389 Une application du théorème de convergence dominée

Titre : Une application du théorème de convergence dominée
ID : 308 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 294 | ID : 308
Difficulté : ★★☆☆☆

1. Soit $x \in]0, +\infty[$. Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = +\infty$.
2. En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} (x+k)} \mathrm{d}x = 0$$

Solution

1. Quand n tend vers $+\infty$, on a $\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \sim \frac{x}{n}$ et la série $\sum \frac{1}{n}$ est convergente. Par sommation des relations de comparaison, les sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ et $H_n(x) = x \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ sont équivalentes et comme $\lim_{n \to +\infty} H_n(x) = +\infty$, on a $\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = +\infty$.
2. Considérons la suite d'applications $(f_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}^*}$ tel que $f_n(x) = \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} (x+k)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0, +\infty[$.

• La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $I=]0,+\infty[$. En effet, pour tout $x\in I$ on a $\ln(f_n(x))=-\ln\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}{n!}=-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+x}{k}\right)=-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$. D'après la question 1) on a $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=0$.
• Il est facile de voir que les fonctions f_n et f sont continues sur $]0,+\infty[$.
• Hypothèse de domination : On a $f_1(x)=\frac{1}{x+1}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n\geq 2$, on a $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=\frac{n+1}{x+n+1}$ donc la suite $f_n(x))$ est décroissante, en particulier si on note $\varphi=f_2$ alors $\forall n\geq 2,\forall x\in I,\quad |f_n(x)|\leq\varphi_2(x)=\frac{2}{(x+1)(x+2)}$ et la fonction φ est positive, continue et intégrable sur I puisque au voisinage de 0 elle est prolongeable par continuité et au voisinage de $+\infty$, on a $f(x)\sim\frac{1}{x^2}$.
• Il découle de ce qui précède, par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(x)\mathrm{d}x=\int_I\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=0.$$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(t+k)}\mathrm{d}t=0$.

EXERCICE 390 Un équivalent pour une suite définie par intégrale

Titre : Un équivalent pour une suite définie par intégrale
ID : 309 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 295 | ID : 309
Difficulté : ★☆☆☆☆

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}\mathrm{d}x.$$

1. Justifier que (u_n) est bien définie.
2. Démontrer que, quand n tend vers $+\infty$, on a $u_n\sim\frac{c}{n^{\frac{5}{3}}}$.

Solution

1. Il s'agit de justifier que l'intégrale définissant u_n est convergente.
• Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}$.
• La fonction f_n est continue sur l'intervalle $I=[0,+\infty[$.
• Si $n=0$ alors $\forall x\in I, f_0(x)=0$, donc f_0 est intégrable sur I.
• Si $n\geq 1$ alors $\forall x\in[1,+\infty[,\quad |f_n(x)|\leq\frac{1}{x^3}$ et comme l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}$ la fonction f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc sur I.

2. Par le changement de variable $t=n^{\frac{4}{3}}x$, on a : $u_n=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{t}{n^{\frac{1}{3}}}}{1+t^3}\frac{1}{n^4}\,\mathrm{d}t$. Ainsi :

$$n^{\frac{5}{3}}u_n=\int_0^{+\infty}\frac{n^{\frac{1}{3}}\sin\frac{t}{n^{\frac{1}{3}}}}{1+t^3}\mathrm{d}t.$$

On va calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}g_n(t)\mathrm{d}t$ où $g_n(t)=\frac{n^{\frac{1}{3}}\sin\frac{t}{n^{\frac{1}{3}}}}{1+t^3}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in\mathbb{R}_+$. On va utiliser le théorème de convergence dominée.

• Pour tout $n\geq 0$, l'application $g_n:[0,+\infty[\to\mathbb{R},t\mapsto g_n(t)=\frac{n^{\frac{1}{3}}\sin\frac{t}{n^{\frac{1}{3}}}}{1+t^3}$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.

• Pour tout $n \geq 0$, l'application $g_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto g_n(t) = \frac{n^{\frac{1}{3}} \sin \frac{t}{n^{\frac{1}{3}}}}{1+t^3}$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.
• La suite $(g_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers l'application $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{t}{1+t^3}$ L'application g est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. On a :

$$\forall n \geq 0, \forall t \in [0,+\infty[, |g_n(t)| \leq \frac{n^{\frac{1}{3}} \frac{t}{n^{\frac{1}{3}}}}{1+t^3} = \frac{t}{1+t^3},$$

et l'application $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto g(t) = \frac{t}{1+t^3}$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0;+\infty[$ D'après le théorème de convergence dominée : $\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$. Notons $I = \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$. Par le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, on a

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^3}\,\mathrm{d}u$$

donc :

$$\begin{aligned}
2I &= \int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2-t+1} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arctan}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\
&= \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}
\end{aligned}$$

Il en découle que, quand n tend vers $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin nx}{1+n^4x^3}\,\mathrm{d}x \sim \frac{2\pi\sqrt{3}}{9n^{\frac{5}{3}}}$$

EXERCICE 391 Etude d'une suite de fonctions

Titre : Etude d'une suite de fonctions
ID : 310 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 296 | ID : 310
Difficulté : ★☆☆☆☆

1. Soit $\alpha \in]0,1]$. Démontrer que la fonction $u : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est concave sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}_+$, on a $0 \leq (1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$.
2. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{n}}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$ est simplement convergente vers une fonction f à préciser.
3. Démontrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Solution

1. $u(x) = (1+x)^\alpha$, alors $u''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^\alpha$, donc si $0 < \alpha \leq 1$, on a $u''(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 0$, donc u est concave sur $\mathbb{R}_+$. La courbe de u est donc au dessous de toutes les tangentes en particulier la tangente au point $(0,1)$ dont une équation est $y = 1+\alpha x$, donc $0 \leq (1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}_+$,
$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+x} = f(x).$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :
$$f(x) - f_n(x) = \frac{(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1}{(1+x)^{1+1/n}}.$$
Or, pour $\frac{1}{n} \in]0;1]$, donc d'après la question 1), pour tout $x \geq 0$, on a : $(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \leq 1 + \frac{x}{n} - 1 = \frac{x}{n}$, donc
$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{x}{(1+x)^{1+1/n}} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{x}{1+x} \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
On en déduit qu'll y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

EXERCICE 392 Un bon exercice d'application sur les suites de fonctions

Titre : Un bon exercice d'application sur les suites de fonctions
ID : 672 **Durée :** —
Difficulté : ★★☆☆☆
Niveau : L2 | N° : 653 | ID : 672

On considère la suite de fonction (f_n) définie de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = (\cos(x))^n \sin(x).$$

1. Montrer que (f_n) convergence uniformément vers la fonction nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Soient (g_n) la suite de fonction définie par $g_n = (n+1)f_n$ et γ un réel de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   (a) Montrer que sur $\left[\gamma, \frac{\pi}{2}\right]$, la suite (g_n) converge uniformément vers la fonction nulle.
   (b) La suite de fonction (g_n) converge-t-elle uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction nulle.

Solution

1. On remarque que f est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc pour tout $x \in I$ on a $|f_n(x)| = \cos^n(x)\sin(x)$, donc f_n est dérivable et
$$f_n'(x) = -n\cos^{n-1}(x)\sin^2(x) + \cos^{n+1}(x) = \cos^{n-1}(x)(-n\sin^2(x) + \cos^2(x)).$$
Il en découle que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a : $f_n'(x) = 0 \iff x = \arctan\sqrt{\frac{1}{n}} = x_n$, et que $f(x_n) = \max\limits_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |f_n(x)| = \cos^n(x_n)\sin(x_n)$. On sait que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos^2(\arctan(t)) = \frac{1}{1+t^2}$ et $\sin^2(\arctan(t)) = \frac{t^2}{1+t^2}$, ce qui pemet de dire que
$$f(x_n) = \left(\sqrt{\frac{n}{1+n}}\right)^n \sqrt{\frac{1}{1+n}}$$
donc $f_n(x_n) \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, par suite $f_n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On a donc $\sup\limits_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$ 0n donc la suite (f_n) converge uniformèment vers la fonction nulle sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2. (a) On a $\lim_{n\to+\infty}(n+1)f_n(x) = 0$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$ car en posant $\cos(x) = q$ on a $0 \leq q < 1$ et $|(n+1)\cos^n(x)\sin(x)| \leq nq^n$, et comme la série numérique $\sum nq^n$ est convergente(D'Alemebert), on a $\lim_{n\to+\infty} nq^n = 0$. Si $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}[$ alors pour tout $x \in [\gamma, \frac{\pi}{2}]$, on a $|(n+1)\cos^n(x)\sin(x)| \leq n(\cos(\gamma))^n$, par suite $\sup_{x\in[\gamma,\frac{\pi}{2}]} |(n+1)f_n(x)| \leq nq^n$ où cette fois ci $q = \cos(\gamma)$ et comme $0 < q < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} nq^n = 0$ comme ci-dessus, d'où la convergence uniforme de (g_n) vers 0 sur l'intervalle $I_\gamma = [\gamma, \frac{\pi}{2}]$.

(b) On a $|g_n(x)| = (n+1)\cos^n(x)\sin(x)$. Il en découle que $\alpha_n = \sup_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |g_n(x)| = (n+1)f_n(x_n)$, donc

$$\alpha_n = (n+1)\left(\sqrt{\frac{n}{1+n}}\right)^n \sqrt{\frac{1}{1+n}} = \sqrt{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \sim \sqrt{\frac{n}{e}}$$

et comme $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n}{e}} = +\infty$, on n'a pas la concergence uniforme de (g_n) sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ quoique on a la convergence simple vers la fonction nulle.

EXERCICE 393 Modes de convergence pour une série de fonctions

Titre : Modes de convergence pour une série de fonctions
ID : 686 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 667 | ID : 686
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit f_n la fonction définie sur $[0, \pi/2]$ par

$$f_n(x) = \sin^{2n+1} x \cos^3 x.$$

1. Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de terme général f_n.
2. Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de terme général nf_n.
3. Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de terme général nf_n sur $[0, \pi/2 - \alpha]$, lorsque α appartient à $]0, \pi/2[$.

Solution

1. Si x appartient à l'intervalle $[0, \pi/2[$, on a $|\sin x| < 1$ et donc on somme une série géométrique

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sin x \cos^3 x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin^2 x\right)^n = \frac{\sin x \cos^3 x}{1 - \sin^2 x} = \sin x \cos x$$

Si $x = \pi/2$, on a $f_n(x) = 0$, et donc

$$S(\pi/2) = 0$$

Donc, pour tout x de $[0, \pi/2]$,

$$S(x) = \sin x \cos x.$$

On a en dérivant,

$$f_n'(x) = (2n+1)\cos^4 x \sin^{2n} x - 3\cos^2 x \sin^{2n+2} x = \cos^2 x \sin^{2n} x \left((2n+1) - (2n+4)\sin^2 x\right).$$

La fonction f_n atteint son maximum en un point x_n tel que

$$\sin^2 x_n = \frac{2n+1}{2n+4} \quad \text{et} \quad \cos^2 x_n = \frac{3}{2n+4}.$$

Alors

$$\|f_n\|_\infty = \left(\frac{2n+1}{2n+4}\right)^{n+1/2} \frac{3^{3/2}}{(2n+4)^{3/2}} \leq \frac{3^{3/2}}{(2n+4)^{3/2}}$$

Or

$$\frac{3^{3/2}}{(2n+4)^{3/2}} \sim \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \frac{1}{n^{3/2}}$$

et l'on compare a une série de Riemann convergente. La série de terme général f_n converge donc normalement.

2. Remarquons tout d'abord que, si x appartient à $]-1,1[$, en utilisant la série dérivée de

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Si x appartient à l'intervalle $[0, \pi/2[$, on a $|\sin x| < 1$ et d'après ce qui précède

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n f_n(x) = \sin x \cos^3 x \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\sin^2 x\right)^n = \frac{\sin^3 x \cos^3 x}{\left(1-\sin^2 x\right)^2} = \frac{\sin^3 x}{\cos x}$$

Alors que

$$T(\pi/2) = 0$$

La fonction T n'est pas continue en $\pi/2$, alors que les fonctions nf_n le sont. Il ne peut donc y avoir convergence uniforme ou normale.

3. Sur $[0, \pi/2 - \alpha]$, on a, puisque la fonction sinus est croissante,

$$|nf_n(x)| \leq n \sin^{2n+1}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = n \cos^{2n+1} \alpha$$

et la série de terme général $n\cos^{2n+1}\alpha$ converge et a pour somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cos^{2n+1} \alpha = \cos\alpha \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\cos^2 \alpha\right)^n = \frac{\cos^3 \alpha}{\sin^4 \alpha}$$

La série de terme général nf_n est donc normalement convergente sur $[0, \pi/2 - \alpha]$.

EXERCICE 394 Modes de convergence de séries de fonctions

Titre : Modes de convergence de séries de fonctions
ID : 687 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 668 | ID : 687
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit f_n la fonction définie sur $[-1,1]$ par

$$f_n(x) = x^n\left(1-x^2\right).$$

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n).
2. Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de terme général f_n.
3. Étudier la convergence normale et uniforme de la série de terme général f_n sur $[-1,\alpha]$, lorsque α appartient à $[0,1[$.

Solution

1. Si $|x|<1$, la suite (x^n) converge vers 0 , donc la suite $(f_n(x))$ également.
Si $x=\pm 1$, la suite $(f_n(x))$ est nulle. Donc la suite f_n converge simplement vers 0 . Étudions les variations de f_n sur $[0,1]$. On a $f_n'(x) = x^{n-1}\left(n-(n+2)x^2\right)$. La fonction admet un maximum en $x_n = \sqrt{\frac{n}{n+2}}$. En raison de la parité de f_n, ce maximum est le maximum de f_n sur $[-1,1]$ et vaut $\|f_n\|_\infty = f_n\left(x_n\right) = \frac{2}{n+2}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-n/2}$. On a donc

$$\|f_n\|_\infty = \frac{2}{n+2}\exp\left(-\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right) = \frac{2}{n+2}e^{-1+\circ(1)} \sim \frac{2}{ne}$$

La suite $\left(\|f_n\|_\infty\right)$ converge vers 0 . Il en résulte que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

2. Si$|x|<1$, on somme une série géométrique et

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \left(1-x^2\right)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1-x^2}{1-x} = 1+x.$$

Si $x=\pm 1$, on obtient cette fois $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = 0$, en particulier, la fonction S n'est pas continue en 1 , alors que les fonctions f_n le sont. Il ne peut donc pas y avoir convergence uniforme ou normale sur $[-1,1]$.

3. On a encore $\sup_{x\in[-1,\alpha]} |f_n(x)| = \|f_n\|_\infty \sim \frac{2}{ne}$, et la série de terme général $\frac{1}{n}$ est la série harmonique qui diverge. Il n'y a pas de convergence normale sur $[-1,\alpha]$.
• Sur $[0,\alpha]$, comme la suite (x_n) converge vers 1 , on a, à partir d'un certain rang n_0, l'inégalité $x_n \geq \alpha$. Comme f_n est croissante sur $[0,x_n]$, on a donc $0 \leq f_n(x) \leq f_n(\alpha)$, et la série de terme général $f_n(\alpha)$ converge. Il en résulte que la série de terme général f_n converge normalement, donc uniformément sur $[0,\alpha]$.
• Sur $[-1,0]$, on a, par un calcul analogue à celui de la question 1 ,

$$R_N(x) = S(x) - S_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n\left(1-x^2\right) = x^{N+1}(1+x).$$

On en déduit $R_N'(x) = (N+1)x^N + (N+2)x^{N+1}$, et la dérivée s'annule en $y_N = -\frac{N+1}{N+2}$. On en déduit $\sup_{x\in[-1,0]} |R_N(x)| = |R_N\left(y_N\right)| = \left|y_N^{N+1}\right| \frac{1}{N+2} \leq \frac{1}{N+2}$.

Chapitre 010 — Suites séries de fonctions II (L2)

EXERCICE 395 Une somme d'idéaux de polynômes

Titre : Une somme d'idéaux de polynômes
ID : 24 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 11 | ID : 24
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit : $E_a = \{P \in E / (X-a) | P\}$. Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, si $a \neq b$ alors $E = E_a + E_b$. La somme est-elle directe ?

Solution

Soit P un polynôme quelconque, alors de $(X-a)-(X-b) = b-a$, on a : $P = \frac{1}{b-a}((X-a)P - (X-b)P)$, donc $P = \lambda(X-a)P + \mu(X-a)P$ avec $\lambda = \frac{1}{b-a}$ et $\mu = -\frac{1}{b-a}$, de plus $(X-a)P \in E_a$ et $(X-b)P \in E_b$, ce qui prouve que $E_a + E_b = E$. La somme n'est pas directe car pour $Q = (X-a)(X-b)$ et $Q_1 = Q$ et $Q_2 = -Q$ on a $Q_1 \in E_a$ et $Q_2 \in E_b$ et $Q_1 \neq 0$ et $Q_2 \neq 0$ et $Q_1 + Q_2 = 0$.

EXERCICE 396 Calcul de l'intégrale de Gauss(Wallis, CVD)

Titre : Calcul de l'intégrale de Gauss(Wallis, CVD)
ID : 311 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 297 | ID : 311
Difficulté : ★☆☆☆☆

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \mathrm{d}t$ (intégrale de Wallis) et on se propose de prouver que quand n tends vers $+\infty$ on a $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
   (a) Démontrer que $W_0 = \frac{\pi}{2}, W_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\pi 2$ et $W_{2n+1} = \frac{(2^n n!}{(2n+1)!}$.
   (b) Prouver que la suite (W_n) est décroissante et que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$ (Remarquer que $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$).
   (d) En déduire que quand n tends vers $+\infty$ on a $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
2. On se propose dans cette question de démontrer, en utilisant la question 1) et d'autres résultats que l'intégrale de Gauss $\alpha = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Pour cela on utilisera la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \sqrt{n} \\ 0 \quad \text{si} \quad t > \sqrt{n} \end{cases}$
   (a) Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers une application $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ à préciser.
   (b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, |f_n(t)| \leq e^{-t^2}$.
   (c) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} I_n$ avec $I_n = \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.
   (d) Conclure.

Solution

1. (a) On a :
   • $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.
   • Soit $n \in \mathbb{N}$, alors : $W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))(\sin^{n+1}(t) \mathrm{d}t$. Une intégration par parties donne : $W_{n+2} = [-\cos(t).\sin^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos(t)\sin^n(t)\cos(t)\mathrm{d}t$. Comme le crochet est nul, et compte tenu de $\cos_2(t) = 1 - \sin^2(t)$, on a $W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) - \sin^{n+2}(t)\mathrm{d}t = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$, ce qui donne $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ et finalement on a la relation demandée : $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.

(b) On va démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n) : \begin{cases} W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \\ \\ W_{2n+1} = \frac{(2^n n!}{(2n+1)!} \end{cases}.$$

- On a $\mathscr{P}(0)$ d'après la valeurs de $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et celle de $W_1 = 1$ trouvées ci-dessus.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$, alors $W_{2(n+1)} = W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n}$. Par hypothèse de récurrence, il vient :

$$\begin{aligned} W_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n))!(2n+1)(2n+2)}{(2^n n!)^2.2(n+1).2(n+1)}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2(n+1))!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2}\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} W_{2(n+1)+1} = W_{2n+3} &= \frac{2n+2}{2n+3}W_{2n+1} \\ &= \frac{2n+2}{2n+3}\frac{(2^n n!}{(2n+1)!} \\ &= (2n+2)^2\frac{(2^n n!}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)} \\ &= \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(2n+3)!}, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration par récurrence souhaitée.

(c) - Pour tout $t \in \left[0\frac{\pi}{2}\right]$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t)$, donc en intégrant, $W_{n+1} \leq W_n$, donc la suite (W_n) est décroissante.
- On va démontrer la relation demandée, à savoir : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ par récurrence. Pour $n = 0$ elle s'écrit $W_0W_1 = \frac{\pi}{2}$, chose vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ alors compte tenu de la relation $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$, on a : $(n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}$. La relation demandée est donc vérifiée.

(d) Comme la suite (W_n) est décroissante, on a $\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$ et comme $W_n > 0$ (en effet la fonction $t \mapsto (\sin(t))^n$ est positive et ne s'annule qu'en un point de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) on a en divisant par W_n : $\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$, donc compte tenu de la relation entre W_n et W_{n+2}, on a : $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$.

(e) De la question ci-dessus, on déduit que $W_n \sim W_{n+1}$ et comme $(n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ on a $nW_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$ quand n tends vers $+\infty$ donc on a $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ quand n tends vers $+\infty$.

2. On se propose dans cette question de démontrer, en utilisant la question 1) et d'autres résultats que l'intégrale de Gauss $\alpha = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Pour cela on utilisera la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \sqrt{n} \\ 0 \quad \text{si} \quad t > \sqrt{n} \end{cases}$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $N = [x^2] + 1$ (partie entière). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$, on a $n \geq x^2$ donc $0 \leq x \leq \sqrt{n}$, par suite $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x^2}$ (on rappelle que pour tout nombre réel a on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = e^a$, puisque $\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) \sim \frac{a}{n}$ quand n tends vers $+\infty$. Ainsi la suite (f_n) converge simplement vers f définie par $f(x) = e^{-x^2}$ pour tout $x \geq 0$.

(b) Par concavité de ln on sait que $\ln(x) \leq x-1$ pour tout réel $x > 0$. En particulier $\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right) \leq -\frac{x^2}{n}$, donc $\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2}$. Il en découle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, |f_n(t)| \leq e^{-t^2}$.

(c) Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$. On a l'hypothèse de domination des f_n par f elle même qui est intégrable car au voisinage de $+\infty$, on a $e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ donc on peut intervertir les symboles $\int$ et lim donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$, et comme $\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{n}} f_n(t)\mathrm{d}t$, on a : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

(d) On a $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n$. Par le changement de variable $\theta = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$, il vient $x = \sqrt{n}\cos\theta$, donc $I_n = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(\theta)\mathrm{d}\theta$ donc $I_n = \sqrt{n}W_{2n+1}$. et comme $W_{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}}$ on a $I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et finalement $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

EXERCICE 397 Integration terme à terme pour calculer une intégrale

Titre : Integration terme à terme pour calculer une intégrale
ID : 312 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 298 | ID : 312
Difficulté : ★★☆☆☆

On donne $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Démontrer que $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6}$.

Indication : On pourra remarquer que : $\forall t \in]0,1[, \frac{1}{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n$.

Solution

Pour tout $t \in]0,1[$, la série géométrique $\sum t^n$ est convergente de somme $\frac{1}{1-t}$. Il en découle que $\forall t \in]0,1[, f(t) = \frac{\ln(t)}{t-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ avec $f_n(t) = -t^n\ln(t)$ pour tout $t \in]0,1[$. On remarque que :

— la série $\sum f_n$ converge simplement vers f, par définition de f.

— Les f_n et f sont continues sur $]0,1[$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est integrable sur $]0,1[$ puisque si $n = 0$ $f_0(t) = 1$ et si $n \geq 1$ alors f_n est prolongeable par continuité au point 0, puisque $\lim\limits_{x\to0^+} -x^n ln(x) = \lim\limits_{x\to0^+} -x^{n-1}(xln(x)) = 0$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\int_0^1 |f_n(t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 -t^n\ln(t)\mathrm{d}t = [-\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n\mathrm{d}t$, donc

$$\int_0^1 |f_n(t)|\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2},$$

relation valable aussi pour $n = 0$ puisque $f_0(t) = 1$ donc $\int_0^1 |f_0(t)\mathrm{d}t = 1 = \frac{1}{(0+1)^2}$. Il en découle que la série $\sum \int_0^1 |f_n(t)|\mathrm{d}t$ est convergente.

On peut donc intégrer terme à terme et on a $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)}^2 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

EXERCICE 398 Une formule magique : égalité d'une série et une integrale

Titre : Une formule magique : égalité d'une série et une integrale
ID : 313 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 299 | ID : 313
Difficulté : ★☆☆☆☆

Montrer que $\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

Indication : On pourra écrire $x^{-x} = e^{-x\ln(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x\ln(x))^n}{n!}$.

Solution

On utilise l'indication suggérée. Pour tout $x \in]0,1]$, on a : $x^{-x} = e^{-x\ln(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x\ln(x))^n}{n!}$. Considérons la suite de fonction (f_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\forall x \in [0,1], f_n(x) = \begin{cases} \frac{(-x\ln(x))^n}{n!} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

et pour $n = 0$ posons $f_0(t) = 1$ pour tout $t \in [0,1]$. Considérons la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} x^x & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Autrement dit g est le prolongement par continuité de f au point 0. Alors on a :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[0,1]$, car si $n \geq 1$, alors il est clair que f_n est continue sur $]0,1]$. Par ailleurs, $\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$, donc f_n est continue en 0. Pour $n = 0$ c'est claire car f_0 est constante sur $[0,1]$.
- g est continue sur $[0,1]$ car elle est construite de la sorte : elle est le prolongement par continuité de f au point 0 et bien entendu f est clairement continue sur $]0,1]$.
- $\sum f_n \xrightarrow[[0,1]]{\text{CVU}} f$ puisque $\sum f_n \xrightarrow[[0,1]]{\text{CVN}} f$, en effet pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0,1]$ on a $|f_n(t)| = (-x\ln(x))^n$ La fonction $h : x \mapsto h(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ est continue sur $[0,1]$ donc elle est bornée, soit $M = \sup_{x\in[0,1]} h(x)$ alors $|f_n(x)| \leq \frac{M^n}{n!}$ et colle la série $\sum \alpha_n$ est convergente, on a la convergence normale de $\sum f_n$.

Ce qui précède nous permet d'intégrer terme à terme et obtenir compte tenu du fait que $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ validé par le fait que f et g coïncident sur $]0,1[$:

$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} I_n,$$

avec

$$I_n = \frac{(-1)^n}{n!} J_n \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 x^n (\ln(x))^n \mathrm{d}x.$$

Calculons l'intégrale J_n. Le changement de variable $s = -(n+1)\ln(t)$ donne :

$$\begin{cases} x = e^{-\frac{s}{n+1}} \\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{n+1} e^{-\frac{s}{n+1}} \mathrm{d}s \\ 0 \to +\infty \\ 1 \to 0 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$J_n = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{ns}{n+1}} \left(-\frac{s}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} e^{-\frac{s}{n+1}} \mathrm{d}s$$

Soit en définitif : $J_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} G_n$ avec $G_n = \int_0^{+\infty} s^n e^{-s}$. Une récurrence simple et une intégration par parties permet de prouver que $G_n = n!$, d'ailleurs il est aisé de remarquer que $G_n = \Gamma(n+1) = n!$. Donc finalement $\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ et $\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

EXERCICE 399 Deux suites définies par des intégrales

Titre : Deux suites définies par des intégrales
ID : 314 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 300 | ID : 314
Difficulté : ★★☆☆☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+\cdots+t^n}\mathrm{d}t$$

et

$$v_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+\cdots+t^n}\mathrm{d}t$$

Démontrer que la série $\sum u_n$ est divergente alors que la série $\sum v_n$ est convergente.

Solution

• Remarquons que : $u_n \geq \int_0^1 \frac{1}{1+1\cdots+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$ et comme $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge, il en est de même de $\sum u_n$.

• Commençons par remarquer que pour tout $t \in]0,1[$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$$

ce qui donne :

$$v_n = \int_0^1 \frac{(1-t)t^n}{1-t^{n+1}}\mathrm{d}t$$

On fait le changement de variable $u = t^{n+1}$. Donc on a. Il vient : $\mathrm{d}u = (n+1)t^n\mathrm{d}t$, $t = u^{\frac{1}{n+1}}$ et les bornes de la nouvelle intégrales sont toujours 0 et 1. v_n sous la forme :

$$v_n = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{1-u^{\frac{1}{n+1}}}{1-u}\mathrm{d}u$$

Rappelons l'inégalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^t \geq t+1,$$

qui est une conséquence de la convexité de $t \mapsto e^t$, qu'on peut aussi démontrer par une simple étude des variations de la fonction : $t \mapsto e^t - t$.
Il en découle que : $1-u^{\frac{1}{n+1}} = 1-e^{\frac{\ln u}{n+1}} \leq -\frac{\ln u}{n+1}$, et que par suite : $v_n \leq \frac{c}{(n+1)^2}$ avec $c = -\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\mathrm{d}u$.
On voit que c est une constante réelle positive, et la série $\sum \frac{c}{(n+1)^2}$ est convergente, ce qui permet par les critères de comparaison, de conclure que la série $\sum v_n$ est convergente.
Remarque : On peut démontrer que la valeur de la constante c est $c = \frac{\pi^2}{6}$ en utilisant une intégration terme à terme de la série de fonction de terme général : $g_n(u) = u^n \ln(t)$, provenant du fait que, pour tout $u \in]0,1[$, on a : $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$, donc $\frac{\ln u}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \ln t$, voir aussi l'exercice 2 ci-dessus.)

EXERCICE 400 Un bon exercice sur une suite définie par une integrale

Titre : Un bon exercice sur une suite définie par une integrale
ID : 315 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 301 | ID : 315
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t-1}e^{-nt}\mathrm{d}t$.

1. Montrer l'existence de l'intégrale définissant S_n.

2. Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, on pose : $T(a,b) = \int_0^{+\infty} t^a e^{-bt} \mathrm{d}t$. Simplifier l'expression de $T(a,b)$.
3. Montrer que pour tout naturel n, on a : $S_0 = p! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+1}} + S_n$.
4. Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} S_n = 0$.
5. Montrer que $S_0 = p! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+1}}$.
6. Retrouver ce résultat en effectuant une intégration terme à terme et l'expression intégrale de S_0.

Solution

1. la fonction $u : t \mapsto \frac{t^p}{e^t-1} e^{-nt}$ est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité au point 0 à droite puisque au voisinage de 0 à droite $u(t) \sim t^{p-1}$. Par ailleurs $\lim_{t\to+\infty} t^2 u(t) = 0$ puisque au voisinage de $+\infty$, on a $u(t) \sim e^{-t} t^p$. Donc u est intégrable sur $]0,+\infty[$ et l'intégrale définissant S_n est bien définie.
2. Par le changement de variable $bt = u$, on a : $T(a,b) = \frac{1}{b^{a+1}} \int_0^{+\infty} u^a e^{-u} \mathrm{d}u = \frac{1}{b^{a+1}} \Gamma(a+1) = \frac{a!}{b^{a+1}}$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $S_{k-1} - S_k = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t-1} (e^{-(k-1)t} - e^{-kt}) \mathrm{d}t$, donc $S_{k-1} - S_k = \int_0^{+\infty} t^p e^{-(k-1)t} \mathrm{d}t = T(p,k-1) = \frac{p!}{k^p}$. Par télescopage, il vient : $S_0 = S_n + \sum_{k=1}^{n} (S_{k-1} - S_k)$, donc $S_0 = S_n + p! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+1}}$
4. Par le théorème de convergence dominée : on pose $f_n(t) = \frac{t^p}{e^t-1} e^{-nt}$ on remarque que $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$ pour tout $t > 0$. Les fonctions f_n sont continues sur $]0,+\infty[$ et on a l'hypothèse de domination $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$ où $\varphi(t) = \frac{t^p}{e^t-1}$ qui est positive continue et intégrable sur $]0,+\infty[$. Le théorème de convergence dominée permet de dire que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t = 0$.
5. Par passage à la limite dans la relation $S_0 = p! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+1}} + S_n$, on obtient : $S_0 = p! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+1}}$.
6. On a $S_0 = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t-1} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^p e^{-t}}{1-e^{-t}} \mathrm{d}t$. Comme $0 < e^{-1} < 1$ on a : $\frac{1}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}$ donc $S_0 = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^p e^{-(n+1)t} \right) \mathrm{d}t$. En posant $g_n(t) = t^p e^{-(n+1)t}$ la série de fonctions $\sum g_n$ converge simplement vers g définie par $g(t) = \frac{t^p}{e^t-1}$ et les g_p et g sont continues sur $]0,+\infty[$. Les fonction g_p sont positives intégrables et $\int_0^{+\infty} g_n(t) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^p e^{-(n+1)t} \mathrm{d}t$ avec le changement de variable $s = (n+1)t$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g_n(t) \mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{s^p}{(n+1)^p} e^{-s} \frac{1}{n+1} \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{(n+1)^{p+1}} \Gamma(p+1) \\ &= \frac{p!}{(n+1)^{p+1}} \end{aligned}$$

Comme $p+1 > 1$ la série de Riemann $\sum \frac{1}{(p+1)^n}$ est convergente, donc la série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)| \mathrm{d}t$ est convergente, ce qui valide l'intégration terme à terme et donne :

$$S_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p!}{(n+1)^{p+1}} = p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$$

EXERCICE 401 Interversion des symoboles $\sum$ et $\int$

Titre : Interversion des symoboles $\sum$ et $\int$ **Difficulté :**

ID : 316 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 302 | ID : 316

On pose

$$u_n(x) = (-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x \text{ pour } x \in]0,1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

a) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

b) Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $]0,1]$.
c) En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

Solution

a) On a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = -x^2\ln x \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = -\frac{x^2\ln x}{1+x^2}$
b) Pour tout $x \in]0,1]$ on peut dire que $\sum u_n(x)$ est un série alternée qui satisfait les conditions su critère spécial des séries alternée puisque :

- Pour $x = 1$ on a $|u_n(x)| = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Pour $0 < x < 1$, la suite $-x^{2n+2}\ln x$ est positive décroissante et converge ver 0.
- Il en découle que le reste d'ordre n vérifie : $\forall x \in]0,1]$, $\quad |R_n(x)| \leq -\ln(x)x^{2n+2} = g_n(x)$.
- On a $g_n'(x) = -(2n+2)x^{2n+1}\ln x - x^{2n+1} = -x^{2n+1}(2(n+1)+\ln x)$ donc $g_n'(x)$ est de même signe que $-\ln x - 2(n+1)$, donc si on note $x_n = e^{-2(n+1)}$ on a : $\begin{cases} g_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_n \\ g_n'(x) > 0 \Leftrightarrow x < x_n \\ g_n'(x) < 0 \Leftrightarrow x > x_n \end{cases}$. Il en découle que $\max_{x\in[0,1]} g_n(x) = g_n(x_n) = \frac{1}{2e(n+1)}$ donc $\|R_n(x)\|_{\infty,[0,1]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

c) Considérons la série de fonctions $\sum u_n$.

- Elle converge uniformément vers u définie par $u(x) = -\frac{x^2\ln x}{1+x^2}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction u_n ainsi que u sont continues sur $]0,1]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$fonctions u_n sont intégrables sur $]0,1]$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Soit $I_n = \int_0^1 |u_n(t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 (-\ln(t))t^{2n+2}\mathrm{d}t$. Une intégration par parties donne :

$$I_n = \frac{1}{2n+3}[-\ln(t)t^{2n+3}] + \frac{1}{2n+3}\int_0^1 t^{2n+2}\mathrm{d}t = \frac{1}{(2n+3)^2}$$

est le terme général d'une série convergente, donc on peut intégrer terme à terme et on obtient

$$\begin{aligned} -\int_0^1 \frac{t^2\ln t}{1+t^2} = \int_0^1 u(t)\mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 u_n(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 |u_n(t)|\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)^2} \end{aligned}$$

Or $\int_0^1 \frac{t^2\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln t\mathrm{d}t = -1$, donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t &= -1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}\\ &= -1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}\end{aligned}$$

EXERCICE 402 Utilisation de la formule de Stirling pour calculer une limite

Titre : Utilisation de la formule de Stirling pour calculer une limite
ID : 317 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 303 | ID : 317
Difficulté : ★☆☆☆☆

Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$$

a) Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$.
b) Déterminer la limite de sa somme en $+\infty$. On pourra exploiter la formule de Stirling

Solution

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ si on pose $q = \frac{x^2}{1+x^2}$, la suite définie par $\alpha_n = \ln\left(1+\frac{q}{n}\right)$ est positive décroissante et converge vers 0, donc la série $\sum u_n$ avec $u_n = (-1)^n\alpha_n$ est une série alternée qui satisfait les conditions de critère spécial des séries alternées, donc $\sum u_n(x)$ est convergente et le reste d'ordre n vérifie $|R_n(x)| \leq \ln\left(1+\frac{q}{n}\right)$ et comme $0 \leq q < 1$ on a $|R_n(x)| \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ et par suite $\|R_n\|_{\infty,\mathbb{R}} \leq \frac{1}{n}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\|R_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = 0$, ce qui prouve la convergence uniforme de la série $\sum u_n$.
b) Comme $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

on a en vertu du théorème d'interversion des limites et en notant u sa somme :

$$\ell = \lim_{x\to+\infty} u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

• Calculons ℓ, pour cela remarquons que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2N}$ où $S_{2N} = \sum_{n=1}^{2N}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)(-1)^n$ est la somme partielle d'ordre $2N$ de la série numérique définissant ℓ. On a :

$$\sum_{n=1}^{2N}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)(-1)^n = \sum_{p=1}^{N}\ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right) - \ln\left(\frac{2p}{2p-1}\right) = \ln\left(\frac{(2N+1)((2N)!)^2}{(2^N N!)^4}\right).$$

Par la formule de Stirling : $\ell = \ln\frac{2}{\pi}$.

EXERCICE 403 Des études sur la fonction ζ de Riemann

Titre : Des études sur la fonction ζ de Riemann
ID : 318 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 304 | ID : 318
Difficulté : ★☆☆☆☆

Si $x > 1$, on pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1. Quelle est la limite de $\zeta(x)$ quand $x \to +\infty$?
2. Pour quels réels x la série $\sum \frac{\zeta(n)}{n} x^n$ converge-t-elle ?
3. On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{n} x^n.$$

Montrer que F est continue sur $[-1,1[$ et de classe C^1 sur $]-1,1[$

4. Démontrer que :

$$F(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{p}{p-x}\right) - \frac{x}{p} \right)$$

Solution

1. La série définissant $\zeta(x)$ est normalement convergente sur $[2,+\infty[$ par exemple, le théorème d'interversion des limites s'applique, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ 0 & \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$.
2. On a là une série entière et d'après la question 1) ci-dessus on a $\zeta(n) \sim 1$ quand $n \to +\infty$, donc $\frac{\zeta(n)}{n} \sim \frac{1}{n}$ et la série entière en question a pour rayon de convergence $R = 1$, donc elle diverge grossièrmemnt si $|x| > 1$ et converge absolument si $|x| < 1$. Il reste les cas particulier de $x = 1$ ou $x = -1$. Si $x = 1$, on a la série à termes positifs $\sum \frac{\zeta(n)}{n}$ qui diverge en vertu de l'équivalent $\frac{\zeta(n)}{n} \sim \frac{1}{n}$. Si $x = -1$, on a une série alternée et la suite $\left(\frac{\zeta(n)}{n}\right)$ est décroissante et converge vers 0, le CSSA permet de dire qu'il y' a convergence, donc la série converge si et seulement si $x \in [-1,1[$.
3. Comme il s'agit d'une série entière elle est de classe C^∞ sur $]-1,1[$. Par ailleurs le lemme d'Abel radial permet de dire qu'elle est continue au point -1.
4. Une idée est d'utiliser une famille sommable on écrivant $F(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{x^n}{np^n}$,donc considérons la suite double $u_{n,p}(x) = \frac{x^n}{np^n}$. On peut écrire $F(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \sum\limits_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}(x)$

   • Fixons $p \in \mathbb{N}^*$ et considèrons la série $\sum\limits_{n\geq 2} u_{n,p}(x)$ don le terme général est $a_n = \frac{\left(\frac{x}{p}\right)^n}{n}$ donc pour $x \in]-1,1[$, la série $\sum a_n$ est absolument convergente(série entière). On sait que pour tout $y \in]-1,1[$, on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{y^n}{n} = -\ln(1-y) - y$$

   Car si on pose $g(y) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{y^n}{n}$ alors $g'(y) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} y^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} y^n = \frac{y}{1-y} = \frac{y-1+1}{1-y} = -1 - \frac{1}{y-1}$. En integrant on a alors $g(y) = -y - \ln(1-y) + c$ mais $c = 0$ car $g(0) = 0$, donc $g(y) = -y - \ln(1-y)$.
   • Il en découle que pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_{n,p}(x) = -\frac{x}{p} - \ln\left(1 - \frac{x}{p}\right) = \ln\frac{p}{p-x} - \frac{x}{p} = v_p$$

La série $\sum v_p$ est absolument convergente car, on a :

$$v_p = -\frac{x}{p} - \ln\left(1 - \frac{x}{p}\right) \sim -\frac{x^2}{2p^2}$$

qui est le terme d'une série absolument convergente. Il en découle que la famille $(u_{n,p}(x))$ est sommable, donc par Fubini, on a

$$F(x) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{n=2}^{+\infty} u_{n,p}(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \ln \frac{p}{p-x} - \frac{x}{p}$$

EXERCICE 404 Fonction définie par une série, étude.

Titre : Fonction définie par une série, étude.
ID : 319 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 305 | ID : 319
Difficulté :

On se donne deux nombres réels p et q tel que $\sup(p,q) > 1$ et on considère la série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n(x) = \frac{x}{n^p + x^2 n^q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on note sa somme $f(x)$ pour tout x tel que la série $\sum f_n(x)$ est convergente.

1. Prouver que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, pour toutes valeurs de p et q.
2. Donner une condition suffisante et nécessaire sur p et q pour que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que si $p < q$ alors $\sum f_n$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $I_a = [a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.
4. Démontrer que si $p > 1$ alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. En déduire que dans ce cas f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
5. Prouver que si $p \leq 1$ alors f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Solution

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, si $x = 0$ alors $f_n(x) = 0$ et la série $\sum f_n(0)$ est convergente. Si $x \neq 0$, alors $|f_n(x)| \sim \frac{\alpha}{n^m}$ où $m = \max(p,q)$ et $\alpha = \begin{cases} |x| & \text{si} \quad p > q \\ \frac{1}{|x|} & \text{si} \quad p < q \\ \frac{|x|}{1+x^2} & \text{si} \quad p = q \end{cases}$. Dans tous les cas comme $m > 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^m}$ est convergente, donc $\sum |f_n(x)|$ est convergente donc $\sum f_n$ est absolument convergente, donc simplement convergente sur $\mathbb{R}$.
   Remarque : on pourrait se restreindre à $\mathbb{R}_+$ car les f_n sont impaires.
2. On va calculer $\alpha_n = \|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}}$, pour cela remarquons que $|f_n|$ est paire donc $\alpha_n = \sup_{x \geq 0} f_n(x)$. Or f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n'(x) = \frac{n^p - n^q x^2}{(n^p + n^q x^2)^2}$. Il en découle que si on note $x_n = n^{\frac{p-q}{2}}$, alors $\alpha_n = f_n(x_n) = \frac{1}{2} \frac{1}{n^{\frac{p+q}{2}}}$. Il en découle que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $p + q > 2$.c
3. On a vu dans la question précédente que si on pose $x_n = n^{\frac{p-q}{2}}$ alors f_n est strictement croissante sur $[0, x_n]$ et strictement décroissante sur $[x_n, +\infty[$. Si on suppose de plus que $q < p$ alors $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$, donc si $a > 0$, en posant $N = \lfloor a \rfloor + 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ alors f_n est strictement décroissante sur $[a, +\infty[$ de sorte que $\sup_{x \in I_a} |f_n(x)| = f_n(a)$ et comme $\sum f_n(a)$ est convergente, la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur I_a.
4. Supposons que $p > 1$. Tout d'abord on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que f_n est impaire, donc il suffit d'étudier les divers modes de convergence

sur $[0,+\infty[$. On a $|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{n^p}$. Si K est une partie compacte de $\mathbb{R}$ alors K est bornée, donc il existe une constante $M>0$ tel que $\forall x \in K, |x| \leq M$ et par suite $\forall x \in K, |f_n(x)| \leq \frac{M}{n^p}$ et comme $p>1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^p}$ est convergente donc $\sum f_n$ est normalement convergente sur K, donc uniformément convergente sur K. Comme chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$, la limits uniforme f sur K est continue sur K, donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

5. Supposons que $p \leq 1$. Comme $\sup(p,q)>1$ on a $p<q$. D'après la question 3) la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc elle y converge uniformément et puisque les f_n sont continues(fonctions rationnelles), la somme f est continue sur $[a,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$ et par imparité sur $\mathbb{R}^*$.

EXERCICE 405 Des études concernant ζ de Riemann

Titre : Des études concernant ζ de Riemann
ID : 320 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 306 | ID : 320
Difficulté :

On considère la fonction ζ de Riemann définie par $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$.

1. Prouver que l'ensemble de définition de ζ est $D=]1,+\infty[$.
2. Démontrer que la série de fonctions définissant ζ converge normalement sur tout intervalle de la forme $D_a=[a,+\infty[$ avec $a>0$. En déduire que ζ est continue sur D.
3. Démontrer que : $\forall x \in]1,+\infty[, 1+\frac{2^{1-x}}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{x}{x-1}$.
4. En déduire que :
   (a) Au voisinage de 1 à droite : $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$.
   (b) Au voisinage de $+\infty$: $\zeta(x) \sim \frac{x}{x-1}$.
5. Démontrer que la série définissant ζ ne converge pas uniformément sur $]1,+\infty[$.
6. On considère la fonction η définie par $\eta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$.
   (a) Prouver que l'ensemble de définition de η est $]0,+\infty[$.
   (b) Démontrer que la série définissant η est uniformément convergente sur tout intervalle de la forme $I_a=[a,+\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $a>0$.
   (c) Prouver que η est continue sur $]0,+\infty[$.
   (d) Démontrer que : $\forall x \in]1,+\infty[, \zeta(x)=\frac{2^x}{2-2^x}\eta(x)$.

Solution

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série numérique $\sum \frac{1}{n^x}$ est convergente si et seulement si $x>1$ (série de Riemann). Il en découle que l'ensemble de définition de ζ est $D=]1,+\infty[$.
2. Pour tout $x \in D_a$, on a $0<\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$ et la série $\sum \frac{1}{n^a}$ est convergente, donc la série $\sum \frac{1}{n^x}$ est normalement, donc uniformément convergente vers $\zeta(x)$ donc ζ est continue sur D.
3. Soit $x \in]1,+\infty[$ et considérons la fonction φ définie par $\varphi(t)=\frac{1}{t^x}$ pour tout $t>0$. La fonction φ est décroissante donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$, on a :

$$\int_k^{k+1} \varphi(t)\mathrm{d}t \leq \varphi(k) \leq \int_{k-1}^{k} \varphi(t)\mathrm{d}t$$

Par sommation pour $k \in [\![2,+\infty[\![$, il vient :

$$\int_2^{+\infty} t^{-x}\mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \varphi(k) \leq \int_1^{+\infty} t^{-x}\mathrm{d}t$$

Compte tenu du fait que $\sum_{k=2}^{+\infty} \varphi(k) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = \zeta(x) - 1$, on a :

$$1 + \left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_2^{+\infty} \leq \zeta(x) \leq 1 + \left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_1^{+\infty}$$

Comme $x > 1$, on a $\lim_{t\to+\infty} t^{1-x} = 0$ donc :

$$1 + \frac{2^{1-x}}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$$

4. Recherche des équivalents simples de ζ au voisinage de 0 à droite et de $+\infty$:
   (a) De la double inégalité ci-dessus, on déduit :
   $$\forall x \in]1, +\infty[, x - 1 + 2^{1-x} \leq (x-1)\zeta(x) \leq x$$
   et comme $\lim_{x\to1^+}(x - 1 + 2^{1-x}) = \lim_{x\to1^+} x = 1$, on a $\lim_{x\to1^+}(x-1)\zeta(x) = 1$, donc au voisinage de 1 à droite, $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$.
   (b) On déduit aussi de la double inégalité ci-dessus :
   $$\forall x \in]1, +\infty[, \frac{x-1}{x} + \frac{2^{1-x}}{x} \leq \frac{x-1}{x}\zeta(x) \leq 1$$
   et comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} + \frac{2^{1-x}}{x} = 1$, on a $\frac{x-1}{x}\zeta(x) \sim 1$ quand x tends vers $+\infty$, donc $\zeta(x) \sim \frac{x}{x-1}$ quand x tends vers $+\infty$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De l'inégalité
   $$\frac{1}{k^x} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^x} \mathrm{d}t,$$
   vrai pour tout $k \geq n+1$ et tout $x > 0$, on déduit par sommation :
   $$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^x} \mathrm{d}t = \int_{n+1}^{+\infty} t^{-x} \mathrm{d}t,$$
   donc
   $$R_n(x) \geq g_n(x) = \frac{1}{(x-1)(n+1)^{x-1}}.$$
   Il en découle que si $R_n(x)$ est majoré sur $]1, +\infty[$, alors
   $$\sup_{x>1} R_n(x) \geq g_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{\sqrt[n]{n+1}} = \beta_n.$$
   Or $\beta_n \sim n$, donc $\beta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui contredit $R_n(x)$ majorée, donc il n'en est rien et $R_n(x)$ n'est pas majoré donc pas de convergence uniforme sur $]1, +\infty[$ de la série définissant ζ.
6. La fonction ζ de Riemann alternée :
   (a) Pour tout $x > 0$ la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\geq1}$ est décroissante et converge vers 0. Par le critère spécial des séries alternée, la série définissant $\eta(x)$ est convergente. Par ailleurs, si $x = 0$ alors $f_n(x) = (-1)^n$ ne tends pas vers 0 quand n tends vers $+\infty$ et si $x < 0$ alors $|f_n(x)| = n^{-x}$ tends vers $+\infty$ quad n tends vers $+\infty$, donc pour $x \leq 0$, la série définissant η diverge grossièrment. En conclusion l'ensemble de définition de η est $]0, +\infty[$.
   (b) Le critère spécial des série alternée permet la majoration de la valeur absolue du reste d'ordre n par la valeur absolue du premier terme négligé, autrement dit on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I_a, |R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{(n+1)^a}$$
   Il en découle que :
   $$\alpha_n = \sup_{x\in I_a} |R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^a}$$
   et par suite $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et on a convergence uniforme sur I_a de la série définissant η.

(c) De la question précédente on déduit que η est continue sur I_a pour tout $a > 0$, donc η est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(d) Soit $x > 1$ alors la série définissant η est absolument convergente donc elle est associativement et commutativement sommable et on peut en particulier faire une sommation par apquets selon les entiers pairs d'une part et les entiers impairs d'autre part, ce qui donne : $\eta(x) = S_0 - S_1$ avec $S_0 = \sum_{n\in 2\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^x}$ et $S_1 = \sum_{n\in 2\mathbb{N}+1} \frac{1}{n^x}$ or $\zeta(x) = S_0 + S_1$ donc $S_1 = \zeta(x) - S_0$ et $\eta(x) = 2S_0 - zeta(x)$ or $S_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^x} = 2^{-x}\zeta(x)$ donc $\eta(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$, ce qui fournit $\zeta(x) = \frac{2^x}{2^x-1}\eta(x)$.

EXERCICE 406 Etudes concernat la fonction Γ d'Euler

Titre : Etudes concernat la fonction Γ d'Euler
ID : 321 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 307 | ID : 321
Difficulté : ★☆☆☆☆

On considère la fonction Γ définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de Γ
2. Montrer que Γ est continue sur tout segment $[a, b]$ contenu dans D.
3. Montrer que Γ est de classe C^1 puis C^2 sur tout segment $[a, b] \subset D$. En déduire que Γ est de classe C^2 sur D et déterminer Γ' et Γ''
4. Montrer que Γ est une fonction convexe.
5. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$
6. Calculer $\Gamma(1)$, et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(n + 1) = n!$
7. Déterminer un équivalent de $\Gamma(x)$ lorsque x tend vers 0. En déduire la limite de Γ en 0.
8. Donner la limite de Γ en $+\infty$, ainsi que celle de $x \mapsto \frac{\Gamma(x)}{x}$

Solution

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}, t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $h(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$, et h est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x - 1 > -1$, c'est-à-dire si $x > 0$. De plus $\lim_{t\to+\infty} t^2\left(t^{x-1}e^{-t}\right) = 0$, ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}, h(x,t) \underset{t\to+\infty}{o}\left(1/t^2\right)$. La fonction h est intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$
2. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x > 0, t \mapsto e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t > 0, x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On cherche à dominer $|h(x,t)|$ indépendamment de $x \in [a, b]$. Le terme e^{-t} ne dépend pas de x. Il faut déterminer un majorant de $x \mapsto t^{x-1}$. En le mettant sous la forme $e^{(x-1)\ln t}$, le maximum est atteint en a lorsque $t \leqslant 1$ (car $\ln t$ est négatif) et en b lorsque $t > 1$ On pose alors
$$\varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{si} \quad t \in]0,1] \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$$
φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ (elle est même continue car les deux morceaux se raccordent en 1). Elle est intégrable sur $10, 1]$ et $[1, +\infty[$ (voir question précédente). Ainsi Γ est continue sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Donc Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ Pour tout $x \in [a, b], t \mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Pour tout $\in \mathbb{R}_+^*, x \longmapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = (\ln t)t^{x-1}e^{-t}$. En utilisant la fonction φ précédente, on a
$$\forall x \in [a,b], \forall t > 0, \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant |\ln t|\varphi(t) = \psi(t)$$

La fonction ψ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et $t^2\psi(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ par croissances comparées. Donc ψ est intégrable sur $[1,+\infty[$. De plus, on a $\psi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{|\ln t|}{t^{1-a}}$. Puisque $1-a<1$, la fonction ψ est intégrable sur $]0,1]$. Le théorème de dérivation montre que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Pour montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^2$, on utilise la même méthode sur $\frac{\partial h}{\partial x}$ avec $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = (\ln t)^2 h(x,t)$. La domination est réalisée par la fonction $t \mapsto (\ln t)^2\varphi(t)$, et son intégrabilité se prouve de la même manière. Alors Γ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$. Tout cela permet de conclure que Γ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x>0$

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1} e^{-t} dt \text{ et } \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt$$

4. Pour $x>0, \Gamma''(x)$ est égale à l'intégrale d'une fonction positive et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc Γ'' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et Γ est (strictement) convexe.
5. Soit $x>0$. On se donne $A>\varepsilon>0$. On a

$$\int_\varepsilon^A t^x e^{-t} dt = \left[t^x e^{-t}\right]_\varepsilon^A + x\int_\varepsilon^A t^{x-1} e^{-t} dt$$

Puisque $x>0, \varepsilon^x e^{-\varepsilon}$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0 et $A^x e^{-A}$ vers 0 en $+\infty$ On obtient, lorsque ε tend vers 0 et A vers $+\infty, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

6. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ et $\Gamma(n+1) = n!$ se montre par récurrence, à l'aide de la relation de la question précédente.
7. Pour $x>0$, on a $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$. Puisque Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\Gamma(1)\neq 0$, on a $\Gamma(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \Gamma(1) = 1$, donc $\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$.
8. La fonction Γ étant convexe, elle admet une limite en $+\infty$, or $\Gamma(n+1) = n!$ pour n entier. Donc $\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$. Pour $x>1$, on a : $\frac{\Gamma(x)}{x} = \frac{x-1}{x}\Gamma(x-1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$

EXERCICE 407 Un contre exemple pour l'interversion des limites

Titre : Un contre exemple pour l'interversion des limites
Difficulté : ★☆☆☆☆
ID : 322 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 308 | ID : 322

Dans cet exercice, on admet la formule de Sterling : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, quand n tends vers $+\infty$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note : $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}t$.
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(t) = \frac{t^n e^{-t}}{n!}$

1. Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}, I_n = n!$.
2. Etudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions (f_n). On note $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, quand celle-ci existe.
3. Comparer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$
4. Que peut-on en conclure ?

Solution

1. Par récurrence : $I_0 = 1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, une integration par parties permet d'avoir $I_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t = [-e^{-t}t^{n+1}]_0^{+\infty} + (n+1)I_n = (n+1)I_n$, donc $I_n = n!$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. Pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, la suite numérique $\left(\frac{t^n}{n!}\right)$ converge vers 0. La suite de fontions (f_n) converge

simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle. La fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a $f_n'(t) = (n-t)t^{n-1}\frac{e^{-t}}{n}$ L'étude des variations de f_n donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un maximum pour f_n valant $f_n(n) = \frac{n^n e^{-n}}{n!}$. La fonction f_n est positive, si bien que $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = \frac{n^n e^{-n}}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ (formule de Stirling donnée ci-dessus). La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{I_{n+1}}{n!} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = 1$. En revanche $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$
4. La convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ n'est pas suffisante pour permuter limite et intégrale.

EXERCICE 408 Fonction de classe C^1 sous forme d'une série

Titre : Fonction de classe C^1 sous forme d'une série
ID : 323 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 309 | ID : 323
Difficulté : ★☆☆☆☆

Montrer que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \sin nx}$$

est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

Solution

On définit la suite d'applications $(f_n)_{n\geq 2}$ par,

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{n^2 + \sin nx}$$

D'une part, la série numérique $\sum_{n\geq 2}(f_n)(0)$ est convergente. D'autre part,

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = \frac{-n\cos nx}{(n^2+\sin nx)^2}$$

Ainsi,

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n'(x)| = \frac{n}{(n^2-1)^2}$$

Or

$$\frac{n}{(n^2-1)^2} \sim \frac{1}{n^3}$$

La série $\sum_{n\geq 2} f_n'$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier supérieur ou égal à 2, f_n' est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-n\cos nx}{(n^2+\sin nx)^2}$

EXERCICE 409 Definition, continuité et dérivabilité d'une fonction série

Titre : Definition, continuité et dérivabilité d'une fonction série
ID : 324 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 310 | ID : 324
Difficulté : ★☆☆☆☆

Etudier l'ensemble de définition, la continuité et la dérivabilité de la fonction

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$$

Solution

On définit la suite d'applications $(f_n)_{n\geq 1}$ par

$$\forall n\geq 1,\forall x\in\mathbb{R},\quad f_n(x)=\frac{1}{x^2+n^2}$$

Pour tout entier n supérieur à 1, l'application f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec,

$$\forall n\geq 1,\forall x\in\mathbb{R},\quad f_n'(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+n^2\right)^2}$$

Soit a un réel strictement positif.

$$\forall x\in[-a,a],\quad \left|f_n'(x)\right|\leq\frac{2a}{n^4}$$

La série $\sum_{n\geq 1}f_n'$ est normalement convergente sur l'intervalle $[-a,a]$. En remarquant que la série $\sum_{n\geq 1}f_n(0)$ est convergente, on en déduit que l'application f est définie et de classe C^1 sur tout intervalle de la forme $]-a,a[$ où a est un réel strictement positif. L'application f est définie et de classe C^1 sur $\bigcup_{a>0}]-a,a[=\mathbb{R}$ avec,

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-2x}{\left(x^2+n^2\right)^2}$$

EXERCICE 410 Fonction série dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Titre : Fonction série dérivable sur $\mathbb{R}^*$ **Difficulté :**

ID : 325 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 311 | ID : 325

Montrer que la fonction

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{n}\left(1+nx^2\right)}$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Solution

On définit la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ par

$$\forall n\geq 1,\forall x\in\mathbb{R},\quad f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{n}\left(1+nx^2\right)}$$

Remarquons que

$$\forall n\geq 1,\quad f_n(0)=0$$

Donc f est définie en 0 avec $f(0)=0$. D'autre part, pour tout réel x non nul,

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{n}\left(1+nx^2\right)}\sim\frac{1}{xn^{\frac{3}{2}}}$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geq 1}f_n(x)$ est convergente et que f est définie sur $\mathbb{R}$. On peut remarquer que l'application f est impaire. Pour montrer sa dérivabilité sur $\mathbb{R}^*$, il suffit de montrer sa dérivabilité

sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$$\forall n \geq 1, \forall x > 0, \quad f_n'(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1 - nx^2}{(1+nx^2)^2}$$

Donc,

$$\forall n \geq 1, \forall x > 0, \quad |f_n'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1+nx^2}{(1+nx^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+nx^2}$$

Soit a un réel strictement positif.

$$\forall n \geq 1, \forall x \in]a, +\infty\left[, \quad |f_n'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+na^2}\right.$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+na^2} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}a^2}$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ est normalement convergente sur l'intervalle $]a, +\infty[$ et que l'application f est dérivable sur cet intervalle. L'application f est ainsi dérivable sur l'ouvert $\bigcup_{a>0}]a, +\infty[= \mathbb{R}^{+*}$ avec :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}.$$

L'application f étant impaire, elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de fonction dérivée paire. D'où,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$$

EXERCICE 411 — En lien avec la fonction Γ d'Eueer

Titre : En lien avec la fonction Γ d'Eueer
ID : 326 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 312 | ID : 326
Difficulté : ★☆☆☆☆

1. Montrer que $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est integrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$ On note alors $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$
2. Montrer que, pour $t > 0$, $\frac{1}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}$
3. En déduire que pour tout $x > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t-1}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{(n+1)^{x+1}}$

Solution

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et h_x la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h_x(t) = t^{x-1}e^{-t}$. La fonction h_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par croissances comparées, on a $h_x(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et h_x est intégrable sur $[1, +\infty[$. De plus, $h_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ et $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x - 1 > -1$. Finalement, h_x est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$.
2. Si $t > 0$, alors $|e^{-t}| < 1$ et $\frac{1}{e^t-1} = \frac{1}{e^t}\frac{1}{1-e^{-t}} = \frac{1}{e^t}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto t^x e^{-(n+1)t}$ est continue, positive et intégrable sur $[0, +\infty[$ (même démonstration que dans la première question). La série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$, et pour tout $t > 0$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \frac{t^x}{e^t-1}$. La fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $]0, +\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt = \int_0^{+\infty} t^x e^{-(n+1)t}dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{n+1}\right)^x e^{-u}\frac{du}{n+1}$ car $u \mapsto$

$u/(n+1)$ est bijective et de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$ et f_n est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui autorise le changement de variable. On obtient

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt = \frac{1}{(n+1)^{x+1}}\Gamma(x+1)$$

Comme $x+1 > 1$, la série $\sum \frac{1}{(n+1)^{x+1}}$ converge. Le théorème d'intégration terme à terme entraîne $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t-1}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{n^{x+1}} = \Gamma(x+1)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{x+1}}$

EXERCICE 412 Une technique pour determiner une fonction definie par intégrale

Titre : Une technique pour determiner une fonction definie par intégrale

Difficulté : ★☆☆☆☆

ID : 327 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 313 | ID : 327

$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-t^2+itx)}dt$

1. Existence de f ?
2. Continuité de f ?
3. Dérivabilité de f ?
4. En intégrant par partie, montrer que f vérifie : $xf(x) + f'(x) = 0$
5. Trouver f sachant que $f(0) = \sqrt{\pi}$

Solution

$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-t^2+itx)}dt$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto u_x(t) = e^{(-t^2+itx)}$ est continue et vérifie $|u(t)| = |e^{(-t^2+itx)}| = e^{-t^2}$ avec $\varphi : t \mapsto \varphi(t) = e^{-t^2}$ est integrable sur $\mathbb{R}$ car φ est continue sur $\mathbb{R}$ et quand t tend vers $+\infty$, on a $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc u_x est intégrable et $f(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Si on pose $g(x,t) = e^{(-t^2+itx)}$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, l'application g est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc ses applications partielles $g(x,.) : t \mapsto e^{(-t^2+itx)}$ et $g(.,t) : x \mapsto e^{(-t^2+itx)}$ sont continue respectivement pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$. L'hypothèse de domination est satiusfaite car on a vu dans la question précédente que $|g(x,t)| = \varphi(t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ et φ est positive continue intégrable. Le théorème de continuité d'une fonction définie par une intégrale s'applique et f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. L'application g ci-dessus est de classe C^1 par rapport à x et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = itg(x,t)$ de sorte que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t) = |t|e^{-t^2}$ qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Comme g est de classe C^1 par rapport à (x,t), on a toutes les autres hypothèses necessaires pour appliquer le théorème de dérivabilités des fonctions définie par une intégrale. Il vient f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} ite^{(-t^2+itx)}dt$$

4.
5.

EXERCICE 413 Technique pour expliciter une fonction définie par intégrale

Titre : Technique pour expliciter une fonction définie par intégrale
ID : 328 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 314 | ID : 328
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \mathrm{d}t$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner $f'(x)$ sous forme intégrale.
3. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \arctan(x)$.

Solution

1. On vérifie les condtions du théorème de la continuité des fonctions définies par une intégrale avec paramètre, pour cela on pose $f(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[$:
   • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application partielle $t \mapsto f(x,t)$ est contiue par morceaux(continue même) sur $]0,+\infty[$.
   • Pour tout $t \in]0,+\infty[$, l'application partielle $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   • Domination(locale) : Soit $M > 0$, compte tenu de l'inégalité $|\sin(\theta)| \leq |\theta|$, valable pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\forall (x,t) \in [-M,M] \times]0,+\infty[, |f(x,t)| \leq |x| e^{-t} \leq M e^{-t} = \varphi(t)$$
   et $t \mapsto \varphi(t) = M e^{-t}$ est positive continue(par morceaux) et intégrable sur $]0,+\infty[$. Il découle de toutes ces vérifications que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. De la même manière on doit vérifier les conditions du théorème de dérivabilité des fonctions définies par une intégrale avec paramètre :
   • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application partielle $t \mapsto f(x,t)$ est contiue par morceaux(continue même) sur $]0,+\infty[$.
   • Pour tout $t \in]0,+\infty[$, l'application partielle $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \cos(xt) e^{-t}$, en particulier l'application partielle $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue(par morceaux) sur $]0,+\infty[$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   • Domination(locale) : On a $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-t} = \psi(t)$ et ψ ainsi définie est positive continue(par morceaux) et intégrable sur $]0,+\infty[$. Il découle de toutes ces vérifications que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :
   $$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[, F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} \, \mathrm{d}t$$
3. Démontrer On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\begin{aligned} F'(x) &= \mathcal{R}e\left(\int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t} \, \mathrm{d}t \right) \\ &= \mathcal{R}e\left[\frac{1}{-1+ix} e^{(-1+ix)t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$
   Donc $F(x) = \arctan(x) + c$ et comme $F(0) = 0$, on a $c = 0$, donc $F(x) = \arctan(x)$.

EXERCICE 414 Etude d'une fonction définie par une série

Titre : Etude d'une fonction définie par une série
ID : 329 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 315 | ID : 329
Difficulté : ★★☆☆☆

Montrer que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}\sin(nx)$ est définie sur $[0,+\infty[$ et qu'elle est continue sur $]0,+\infty[$. Expliciter $S(x)$. La fonction S est elle continue en 0 ?

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons $u_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$. Chaque fonction u_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(0) = 0$ donc la série $S(x) = \sum e^{-nx}\sin(nx)$ converge en $x = 0$ et $S(0) = 0$. Soit $a \geq 0$ quelconque. $\forall x \in [a,+\infty[, |u_n(x)| = |e^{-nx}\sin(nx)| \leq e^{-nx} \leq e^{-na}$, donc $\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \sup_{x\in[a,+\infty]} |u_n(x)| \leq e^{-na} = (e^{-a})^n$.La série .$\sum e^{-na}$ converge (série géométrique de raison $e^{-a} < 1$). Par majoration la série $\sum \|u_n\|_{\infty,[a,+\infty]}$ converge aussi, et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur l'intervalle $[a,+\infty[$. Elle converge donc absolument et simplement en tout point de $[a,+\infty[$, donc elle converge simplement sur $]0,++\infty[$.

• Chaque fonction u_n est continue sur $]0,+\infty[$, La convergence normale sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, pour tout $a > 0$ entraîne la convergence uniforme sur cer intervalle. Chaque u_n étant continue, la somme S de la série est également continue sur tout intervalle $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $]0,+\infty[$.

• Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}\sin(nx) \\
&= \mathrm{Im}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}e^{inx}\Big) \\
&= \mathrm{Im}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x}e^{ix})^n\Big) \\
&= \mathrm{Im}\Big(\frac{1}{1-e^{-x_e(x)}}\Big)\,\mathrm{Im}\Big(\frac{1-e^{-x}e^{-ix}}{(1-e^{-x}e^{ix})(1-e^{-x}\sin x.}\Big) \\
&= \mathrm{Im}\Big(\frac{1-e^{-x}e^{-ix}}{1-2e^{-x}\cos x+e^{-2x}}\Big) \\
&= \frac{e^{-x}\sin x}{1-2e^{-x}\cos x+e^{-2x}}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x > 0, \quad S(x) = \frac{e^{-x}\sin x}{1-2e^{-x}\cos x+e^{-2x}}$.

• $\forall x > 0, S(x) = \frac{e^{-x}\sin x}{1-2e^{-x}\cos x+e^{-2x}}$.
Quand $x \to 0$ on a : $e^{-x}\sin x \sim x$ et

$$\begin{aligned}
1-2e^{-x}\cos x+e^{-2x} &= 1-2\left(1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)+(1-2x+2x^2+o(x^2)) \\
&= 1-2+2x+o(x^2)+1-2x+2x^2+o(x^2) \\
&= 2x^2+o(x^2) \sim 2x^2
\end{aligned}$$

quand $x \to 0$, donc $S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2x^2} \sim \frac{1}{2x}$, par suite on a $\lim_{x\to 0^+} S(x) = +\infty$, or $S(0) = 0$, donc S n'est pas continue en 0.

EXERCICE 415 Premier théorème de Dini

Titre : Premier théorème de Dini
ID : 330 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 316 | ID : 330

Difficulté : ★☆☆☆☆

1. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties compactes de $\mathbb{R}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} K_n \neq \emptyset \\ K_{n+1} \subset K_n \end{cases}.$$
Démontrer que $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq f_{n+1}$ et (f_n) converge simplement vers f, application de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ et que les f_n et f sont continues sur $[a,b]$. On se propose de prouver que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur $[a,b]$. Pour cela, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $g_n = f - f_n$.
   (a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} g_n \geq 0 \\ g_{n+1} \leq g_n \end{cases}$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application g_n est bornée sur $[a,b]$. On note alors $\alpha_n = \sup_{x\in[a,b]} g_n(x)$.
   (c) Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell \geq 0$. On suppose désoramis que $\ell > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $K_n = \{x \in [a,b] / g_n(x) \geq \frac{\ell}{2}\}$.
   (d) Démontrer que $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ et en déduire une contradiction puis conclure.

Solution

1. $K_n \neq \emptyset$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc il existe une suite (x_n) d'éléments de E tel que $x_n \in K_n$. Comme K_0 est compact et $(x_n) \in K_0^{\mathbb{N}}$, il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})$ de la suite (x_n) qui converge vers $\ell \in K_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ alors $x_{\varphi(n)} \in K_{\varphi(n)}$ et comme $n \leq \varphi(n)$, on a $K_{\varphi(n)} \subset K_n$, donc pour tout $p \geq n$, on a $x_{\varphi(p)} \in K_n$ donc $\ell \in K_n$. Ainsi $\ell \in K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\ell \in K$ et finalement $K \neq \emptyset$.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq f_{n+1}$ et (f_n) converge simplement vers f, application de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ et que les f_n et f sont continues sur $[a,b]$. On se propose de prouver que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur $[a,b]$. Pour cela, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $g_n = f - f_n$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ alors pour tout $x \in [a,b]$, on a $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$ et comme la suite $(f_n(x))$ est croissante et convergente vers $f(x)$, on a $f(x) \geq f_n(x)$ c'est-à-dire $g_n(x) \geq 0$. Par ailleurs $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ donne $f(x) - f_{n+1}(x) \leq f(x) - f_n(x)$ ce qui signifie que $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$.
   (b) Comme g_n est continue sur le compact $[a,b]$, elle est bornée sur $[a,b]$. En particulier on a l'existence de : $\alpha_n = \sup_{x\in[a,b]} g_n(x)$.
   (c) La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive décroissante puisque d'après la question on a $\forall x \in [a,b], g_n(x) \geq 0$, donc, $\alpha_n = \sup_{x\in[a,b]} g_n(x)$, et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b], \quad g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$, donc $\alpha_{n+1} = \sup_{x\in[a,b]} g_{n+1}(x) \leq \sup_{x\in[a,b]} g_n(x) = \alpha_n$. On note donc $\ell = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n$. On suppose désormais que $\ell > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $K_n = \{x \in [a,b] / g_n(x) \geq \frac{\ell}{2}\}$.
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $K_n \neq \emptyset$ car sinon, on aurait l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K_{n_0} = \emptyset$, ce qui signifie que :
$$\forall x \in [a,b], \quad g_{n_0}(x) < \frac{\ell}{2}.$$
Il en découle que pour cet entier n_0, on a $\alpha_{n_0} = \sup_{x\in[a,b]} g_n(x) \leq \frac{\ell}{2}$ et comme la suite (α_n) est décroissante on aurait $\forall n \geq n_0, \quad \alpha_n \leq \frac{\ell}{2}$ et par passage à la limite $\ell \leq \frac{\ell}{2}$, donc $\ell \leq 0$, ce qui est faux car on a supposé $\ell > 0$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $K_n \neq \emptyset$ et comme la suite (K_n) est une suite décroissante de compacts (K_n est compact car bornée puisque inclus dans $[a,b]$ est fermé car $K_n = g_n^{-1}([\ell/2, +\infty[)$ et g_n est continue) il découle de la question 1) que $K = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.
• Soit alors $\lambda \in K$ alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n(\lambda) \geq \frac{\ell}{2}$ et par passage à le limite et compte tenu

de $g_n = f - f_n$ on a $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(\lambda) \geq \frac{\ell}{2}$ donc $\ell = 0$, ce qui est une contradiction. Conclusion le fait que $\ell > 0$ est faux donc $\ell = 0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} = 0$, donc (f_n) converge vers f uniformément sur $[a,b]$.

EXERCICE 416 Deux questions pour appliquer la théoréme de convergence dominée

Titre : Deux questions pour appliquer la théoréme de convergence dominée
Difficulté : ★☆☆☆☆
ID : 331 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 317 | ID : 331

En utilisant le théorème de convergence dominée calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t}(\sin(t))^n \mathrm{d}t$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^n+e^t}\mathrm{d}t$

Solution

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t}(\sin(t))^n \mathrm{d}t$. Notons $f_n(t) = e^{-t}(\sin(t))^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,+\infty[$. Alors (f_n) converge simplement vers f tel que $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $|f_n(t)| \leq e^{-t} = \varphi(t)$ qui est intégrable. Les f_n et f sont continues par morceaux, ce qui permet de conclure $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 0\mathrm{d}t = 0$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^n+e^t}\mathrm{d}t$. Ici on pose $f_n(t) = \frac{\arctan(t)}{t^n+e^t}$ on a (f_n) converge simplement vers f définie par $f(t) = \begin{cases} \frac{\arctan(t)}{e^t} & \text{si} \quad t < 1 \\ 0 & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$ dominées par $\varphi(t) = \frac{\pi}{2}e^{-t}$ qui est bien intégrable.

EXERCICE 417 Deuxième théorème de Dini

Titre : Deuxième théorème de Dini
Difficulté : ★☆☆☆☆
ID : 332 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 318 | ID : 332

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suites d'applications de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que :

(1) les applications f_n et f sont continues sur $[a,b]$;
(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est croissante sur $[a,b]$;
(3) la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $[a,b]$ vers f.

Démontrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f.

Solution

- Avant de commencer notons que l'on a aussi f est croissante sur $[a,b]$ car si $x,y \in [a,b]$ tel que $x \leq y$ alors $f_n(x) \leq f_n(y)$ et par passage à la limite $f(x) \leq f(y)$.
- Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue sur le compact $[a,b]$ donc elle est uniformément continue sur

$[a,b]$ par le théorème de Heine. Il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{N} < \delta$ et $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ la subdivision de $[a,b]$ définie par :

$$\forall k \in [\![0, N]\!], \quad a_k = a + k\frac{b-a}{N}.$$

Pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a_k) = f(a_k)$, donc il existe un entier naturel N_k tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_k \Rightarrow |f_n(a_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit

$$\widetilde{N} = \max(N, \max_{0\leq k\leq N}(N_k)).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_0$, si $x \in [a,b]$ alors il existe $k \in [\![0, N-1]\!]$ tel que $x \in [a_k, a_{k+1}]$. Alors :

• On a :

$$\begin{aligned} f(x) - f_n(x) &\leq f(a_{k+1}) - f_n(a_k) \\ &= f(a_{k+1}) - f(a_k) + f(a_k) - f_n(a_k) \\ &\leq |f(a_{k+1}) - f(a_k)| + |f(a_k) - f_n(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

car :
• D'une part comme $|a_{k+1} - a_k| = \frac{b-a}{N} < \delta$ on a $|f(a_{k+1}) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
• D'autre part puisque $n \geq \widetilde{N} \geq N_k$ on a $|f(a_k) - f_n(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

• De la même manière :

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &\leq f_n(a_{k+1}) - f(a_k) \\ &= f_n(a_{k+1}) - f(a_{k+1}) + f(a_{k+1}) - (f(a_k) \\ &\leq |f_n(a_{k+1}) - f(a_{k+1})| + |f(a_{k+1}) - (f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

pour les mêmes raisons que ci-dessus.
• Il découle de ce qui précède que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \widetilde{N} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq \widetilde{N} \Rightarrow \forall x \in [a,b], |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

donc (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

EXERCICE 418 Une suite de fonctions

Titre : Une suite de fonctions
ID : 333 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 319 | ID : 333
Difficulté : ★☆☆☆☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = nx\sin(x)e^{-nx}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction f nulle sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la fonction $t \mapsto u(t) = te^{-t}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. En déduire que (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[1, +\infty[$

3. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est dérivable sur $[0,1]$ et calculer $f_n'(x)$, pour tout $x \in [0,1]$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \left[1, \frac{1}{n}\right]$, on a $f_n'(x) > 0$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$. En écrivant $f_n'(x)$ sous la forme $f_n'(x) = g_n(x)h_n(x)$ avec

$$h_n(x) = \tan(x) - \frac{x}{nx-1}$$

   et g_n est une fonction à préciser et en calculant $f_n'\left(\frac{2}{n}\right)$ étudier les variations de f_n sur $[0,1]$.
   (d) Démontrer que (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.
4. Déduire de ce qui précède que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

Solution

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ alors $|f_n(x)| \leq nxe^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.
2. La fonction u est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $\forall t \in [1,+\infty[, u'(t) = (1-t)e^{-t}$, donc $u' \leq 0$ sur $[0,1[$, par suite u est décroissante sur $[1,+\infty[$.
3. (a) Comme produit de fonctions dérivables, f_n est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$f_n'(x) = n(\sin(x) + x\cos(x) - nx\sin(x))e^{-nx} = n(x\cos(x) + (1-nx)\sin(x))e^{-nx}$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ les quantités $\sin(x); (1-nx); x\cos(x)$ et e^{-nx} sont strictement positives, par suite :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \quad f_n'(x) > 0.$$

   (c) Pour tout $x \in \left]\frac{1}{n}, 1\right]$, on a :

$$f_n'(x) = n(1-nx)\cos(x)\left(\tan(x) - \frac{x}{nx-1}\right) = g_n(x)h_n(x)$$

   avec

$$\forall x \in x \in \left]\frac{1}{n}, 1\right], \quad \begin{cases} g_n(x) = n(nx-1)\cos(x) \\ h_n(x) = \tan(x) - \frac{x}{nx-1} \end{cases}$$

   On remarque que $g_n(x) < 0$ pour tout $x \in \left]\frac{1}{n}, 1\right]$, donc le signe de $f_n'(x)$ est celui contraire de $h_n(x)$ sur $\left]\frac{1}{n}, 1\right]$, et comme $h_n'(x) = \tan^2 x + \frac{1}{(nx-1)^2}$ on a $h_n'(x) > 0$ et h_n est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{n}, 1\right]$ avec $\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}^+} h_n(x) = -\infty$ et $h_n\left(\frac{2}{n}\right) = \tan\left(\frac{2}{n}\right) - \frac{2}{n} > 0$, donc et compte tenu de ce qui précède il existe un unique $\alpha_n \in [0,1]$ tel que $f_n'(\alpha_n) = 0$ et $f_n' > 0$ sur $[0,\alpha_n[$ et $f_n' < 0$ sur $]\lambda_n, 1]$ et $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{2}{n}$.
   (d) Il découle de ce qui précède que $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n(\alpha_n)$ et comme $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{2}{n}$, on a $f_n(x_n) = n\alpha_n \sin(x_n)e^{-\lambda_n} \leq n\frac{2}{n}\sin\left(\frac{2}{n}\right)e^{-n\frac{1}{n}} \leq 2\sin\left(\frac{2}{n}\right)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, ce qui justifie la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite (f_n) vers la fonction nulle.
4. On a $\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x)| \leq \sup(\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|, \sup_{x\in[1,+\infty[} |f_n(x)|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

EXERCICE 419 Un équivalent d'une suite définie par intégrale

Titre : Un équivalent d'une suite définie par intégrale
ID : 334 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 320 | ID : 334
Difficulté : ★☆☆☆☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^n} \mathrm{d}t$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. Démontrer que quand n tend vers $+\infty$, on a $I_n \sim \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$.

Solution

1. Pour tout $\in \mathbb{N}$ et tout $x \in [1,+\infty[$ posons $f_n(x) = e^{-x^n}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[1,+\infty[$ et la suite (f_n) converge simplement sur $]1,+\infty[$ vers la fonction nulle car pour tout $x > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-x^n} = 0$. Par ailleurs $\forall x \in]1,+\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq e^{-x}$ et $x \mapsto e^{-x}$ est continue intégrable sur $]1,+\infty[$. Par le théorème de convergence dominée, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$
2. Par le changement de variable $t = x^n$, donc $x = t^{\frac{1}{n}}$, et $dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$, donc $I_n = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}t^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}J_n$ où $J_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}t^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}t$. En considérant la suite de fonctions (g_n) définie par $g_n(t) = \frac{e^{-t}}{t}t^{\frac{1}{n}}$, on voit qu'elle vérifie les conditions du théorème de convergence dominée, la fonction dominante étant $\psi(t) = e^{-t}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$, ce qui fournit : $I_n \sim \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$, quand $n \to +\infty$.

EXERCICE 420 Convergence dominée sommes partielles

Titre : Convergence dominée sommes partielles
ID : 555 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 536 | ID : 555
Difficulté : ★★☆☆☆

En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in [0,1[$, posons $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-x)^k$. Alors

— La suite de fonctionc $(S_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers f avec $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
— f_n et f sont continues sur $[0,1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
— Domination, on a $\forall x \in [0,1[, |S_n(x)| = \frac{|1-(-x)^{n+1}|}{1+x} \leq 2$ et l'application $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = 2$ est continue et intégrable sur $[0,1[$.

Le théoréme de convergence dominée donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)\mathrm{d}x$. On a $\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k x^k \mathrm{d}x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$ et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{x+1}$. Il en découle que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$. Par le changement d'indice $n = k+1$ et le calcul de l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln(2)$, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$

EXERCICE 421 Convergence uniforme sans avoir la convergence normale

Titre : Convergence uniforme sans avoir la convergence normale
ID : 670 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 651 | ID : 670
Difficulté : ★★☆☆☆

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application f_n définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}.$$

1. Tracer l'allure du graphe de f_n.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, fixé. La série $\sum f_n(x)$ est-elle convergente ?
3. Démontrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant 1, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leqslant \varepsilon_n.$$

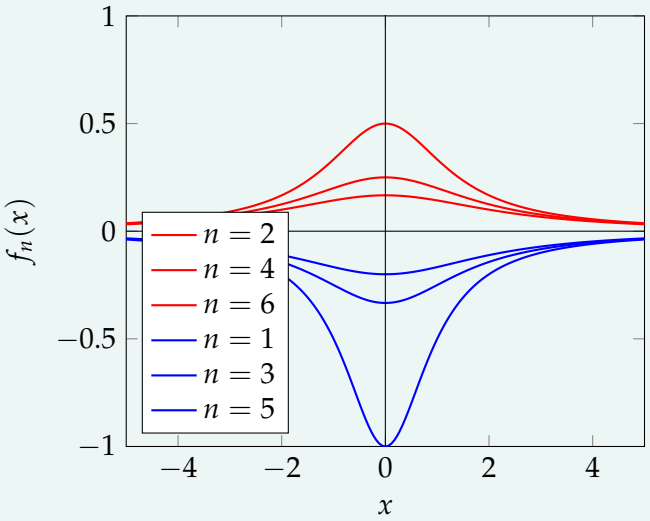
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$M_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|.$$

Déduire M_n de l'étude des variations de f_n. La série $\sum M_n$ est-elle convergente ?

Solution

1. Pour n pair, la fonction f_n est paire et positive. Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas) et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et admet une tangente horizontale en $t = 0$ (où elle atteint son maximum, égal à $1/n$).



Pour n impair, la fonction f_n est négative, mais l'allure globale de $-f_n$ est exactement celle de f_{2k}.

2. La série $\sum f_n(x)$ est alternée et $|f_n(x)|$ tend vers 0 en décroissant. D'après le Critète spécial des séries alternées, la série $\sum f_n(x)$ est convergente. La somme

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

est donc définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et l'application S est évidemment paire.

3. Puisque les hypothèses du Critère spécial des séries alternées sont vérifiées,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant 1, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leqslant |f_{n+1}(x)| \leqslant |f_{n+1}(0)| = \frac{1}{n+1}.$$

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in \mathbb{R}$ et qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Autrement dit, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et comme les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la somme S est aussi une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

4. D'après l'étude des variations de f_n, la fonction $|f_n|$ atteint son maximum en 0 , donc

$$M_n = |f_n(0)| = \frac{1}{n}.$$

La série $\sum M_n$ est divergente (série harmonique). L La série de fonctions $\sum f_n$ ne converge donc pas normalement sur $\mathbb{R}$ (bien qu'elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$).

EXERCICE 422 Integrale de Dirichlet

Titre : Integrale de Dirichlet
ID : 693 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 674 | ID : 693
Difficulté :

On pose, pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\, dt$$

1. Montrer que F est continue sur $[0;+\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$.
2. Montrer que F est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $F''(x)$.
3. En déduire la valeur de $F(0)$ puis la valeur de l'intégrale convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$

Solution

1. On va utiliser le théorème de continuité des foncions définies par une intégrale avec paramètre pour $F(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t)dt$ où $g : \mathbb{R}_+ \times]0,+\infty[\to \mathbb{R}; (x,t) \mapsto e^{-xt}\frac{1-\cos(t)}{t^2}$.
   • Il est clair que g est continue sur $\mathbb{R}_+ \times]0,+\infty[$.
   • Pour tout v $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times]0,+\infty[$, on a $|g(x,t)| \leq \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \varphi(t)$ et la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0;+\infty[$ car :
   • Au voisinage de $+\infty$, on a $\varphi(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
   • Au voisinage de 0, on a $\varphi(t) \sim \frac{1}{2}$.
   - Il en découle que donc F est continue.
   - On a $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$, et φ est continue sur $]0,+\infty[$, donc φ est bornée donc, pour tout $x > 0$, on a $|F(x)| \leq \|\varphi\|_\infty \int_0^x e^{-xt}\, dt = \frac{\|\varphi\|_\infty}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

2. Les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ existent sur $\mathbb{R}_+^* \times 10;+\infty[$. $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$. Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$

$$\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[, \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq 2e^{-at} = \psi(t).$$

La fonction ψ est intégrable sur $]0,+\infty[$. Par domination sur tout segment, F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et

$$F''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}(1-\cos(t))dt = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

3. D'après l'expression de $F'(x)$ trouvée dans la question 2) ci-dessus, il existe une constante C réelle tel que $\forall x \in]0,+\infty[, F'(x) = C + \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$, et comme $\lim_{x\to+\infty} F'(x) = 0$, on a $C = 0$, donc $\forall x \in]0,+\infty[, F'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$. De la même façon compte tenu de $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$, on a : $\forall x \in]0,+\infty[, F(x) = x\ln(x) - x\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}$. Par continuité, on obtient $F(0) = \frac{\pi}{2}$.
Une intégration par parties, l'expression entre crochets étant convergente aux bornes, on a : $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 423 une série convergente avec le TCD

Titre : une série convergente avec le TCD
ID : 722 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 688 | ID : 722
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \int_0^n x^{x+1}\mathrm{d}x$.

1. Montrer qu'il existe $c, \alpha > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{c}{n^\alpha}$
2. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?
3. Donner un équivalent simple de u_n

Solution

1. Le changement de variable $nx = u$ donne $u_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \left(\frac{u}{n}\right)^{1+\frac{u}{n}}\mathrm{d}u$, donc $u_n = \frac{1}{n^2}\int_0^1 \left(\frac{u}{n}\right)^{\frac{u}{n}} u\mathrm{d}u$. Il en découle que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}\int_0^1 u\mathrm{d}u$ car $\left(\frac{u}{n}\right)^{\frac{u}{n}} \leq 1$, donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n^2}$
2. Par comparaison avec la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^2}$, la série $\sum u_n$ est une série à termes positifs et convergente.
3. On peut conjecturer que $u_n \sim \frac{\lambda}{n^2}$ avec λ réel positif, on va donc essayer de calculer $\lim_{n\to+\infty} n^1 u_n$.
On a $n^2 u_n = \int_0^1 f_n(u)\mathrm{d}u$ avec $f_n(u) = u\left(\frac{u}{n}\right)^{\frac{u}{n}}$. On va appliquer le théorème de convergence dominée, on a (f_n) converge simplement sur $]0,1[$ vers $u \mapsto u$ et $|f_n(u)| \leq u$, intégrable donc $\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = \frac{1}{2}$ et $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$

Chapitre 011 — Séries entières (L2)

EXERCICE 424 Exemples d'études de séries entières

Titre : Exemples d'études de séries entières
ID : 335 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 321 | ID : 335
Difficulté : ★☆☆☆☆

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\text{a)} \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n \quad \text{b)} \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-n^2} z^n \quad \text{c)} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n} \quad \text{d)} \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$$

2. Déterminer le rayon de convergence de :

$$\text{a) } \sum_{n\geqslant 0} n!z^n \quad \text{b) } \sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} z^n \quad \text{c) } \sum_{n\geqslant 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n \quad \text{d) } \sum_{n\geqslant 0} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \right) z^n$$

3. Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\text{a) } \sum_{n\geqslant 0} z^{n^2} \quad \text{b) } \sum_{n\geqslant 0} \sin(n) z^n \quad \text{c) } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$$

Solution

1. (a) $a_n = \frac{n^2+1}{3^n}$, on a $a_n \sim \frac{n^2}{3^n} = b_n$ et $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3}$, donc par la régle de D'Alembert et le fait que $a_n \sim b_n$, on a : $R = 3$

   (b) Utilisons la règle de D'Alembert $a_n = n^2 e^{-n^2}$, donc $\frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-2n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

   (c) On cherche d'abord le rayon de convergence de $\sum a_n t^n$ avec $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$. On a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ puisque $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ donc $\ln(n+1) \sim \ln(n)$. Donc $\sum a_n z^2$ converge absolument si $|z|^2 < 1$ et diverge grossièrment si $|z|^2 > 1$ donc la rayon de convergence de la série entière initiale est $R = 1$.

   (d) $a_n = \frac{n^n}{n!}$, donc $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n+1} \sim \frac{e}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $R = +\infty$.

   (e)

2. (a) $a_n = n!$, donc $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $R = +\infty$.

   (b) $a_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, donc $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!}\left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^2 = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \sim \frac{4n^2}{n^2} = 4$, donc $R = \frac{1}{2}$.

   (c) $a_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$ donc $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} \sim 9$, donc $R = \frac{1}{9}$.

   (d) $a_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$ Donc $a_n = \exp\left(\frac{1}{n+1}\ln(n+1)\right) - \exp\left(\frac{1}{n}\ln(n)\right)$

   $\frac{1}{n+1}\ln(n+1) = \frac{1}{n+1}\left(\ln(n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n)\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\ln(n)}{n+1} + \frac{\ln(n)}{n(n+1)} + o\left(\frac{\ln(n)}{n(n+1)}\right)\right)$

3. (a)

   (b)

   (c)

EXERCICE 425 Deux séries entière, un contre-exemple

Titre : Deux séries entière, un contre-exemple
ID : 336 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 322 | ID : 336
Difficulté : ★☆☆☆☆

a) Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$$\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n \text{ et } \sum \sin(e^{-n}) x^n$$

b) Une série entière converge-t-elle normalement sur son disque ouvert de convergence ?

Solution

(a) Déterminons les rayons de convergences respectifs des série entières proposées :
• Pour la première série entière, on a $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, donc son rayon de convergence vaut 1.

• Pour la deuxiéme série, on a : $\sin(e^{-n}) \sim e^{-n}$ et comme $\frac{e^{-n-1}}{e^{-n}} = e^{-1}$, son rayon de convergence vaut e.

(b) Non, et voici un contre exemple : La série entière $\sum z^n$ dont le rayon de convergence est $R = 1$ et si on note Δ le disque ouvert de convergence de la série entière $\sum z^n$, c'est-à-dire $\Delta = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n(z) = z^n$ pour tout $z \in \Delta$, alors $\|f_n\|_{\infty,\Delta} = 1$, ne converge pas vers 0. Cependant le cours précise que toute série entière converge normalement sur tout compact inclus dans son disque ouvert de convergence.

EXERCICE 426 Série entière dont les coefficients sont les termes d'une suite récurrentes

Titre : Série entière dont les coefficients sont les termes d'une suite récurrentes
Difficulté : ★☆☆☆☆
ID : 337 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 323 | ID : 337

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ où (a_n) est la suite déterminée par

$$a_0 = \alpha,\ a_1 = \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Solution

La suite (a_n) est une suite définie par récurrence linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique $t^2 - 2t + 1 = 0$ admet la solution double $r = 1$, donc le terme général de (u_n) est donné par $a_n = (\lambda + n\mu)r^n = \lambda + \mu n$, et comme $a_0 = \alpha$ et $a_1 = \beta$, il vient : $a_n = \alpha + n(\beta - \alpha)$.
• Si $\alpha \neq \beta$ alors $a_n \sim (\alpha - \beta)n$, donc $R = 1$.
• Si $\alpha = \beta$ alors $a_n = \alpha$ et deux cas sont possibles soit $\alpha \neq 0$ alors $R = 1$ et soit $\alpha = 0$ alors $R = +\infty$.
En résumé :
• Si $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ alors $R = 1$
• Si $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ alors $R = +\infty$

EXERCICE 427 Les séries entières $\sum d(n)z^n$ et $\sum s(n)z^n$

Titre : Les séries entières $\sum d(n)z^n$ et $\sum s(n)z^n$
Difficulté : ★☆☆☆☆
ID : 338 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 324 | ID : 338

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n \geqslant 1} d(n)z^n \text{ et } \sum_{n \geqslant 1} s(n)z^n$$

où $d(n)$ et $s(n)$ désignent respectivement le nombre de diviseurs supérieurs à 1 de l'entier n et la somme de ceux-ci.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a $1 \leq d(n) \leq n$ puisque 1 est un diviseur de n et si d est un diviseur de n alors $1 \leq d \leq n$ donc $d \in [\![1, n]\!]$. Donc le rayon de convergence R de $\sum d(n)z^n$ vérifie :

$$R_b \leq R \leq R_a$$

où R_a et R_b sont les rayons de convergence respectifs des séries entières $a = \sum a_n z^n$ et $b = \sum b_n z^n$

avec, pour tout $n \in N^*$, $\begin{cases} a_n = 1 \\ b_n = n \end{cases}$ de sorte que, par la règle de D'Alembert, $R_a = R_b = 1$, donc $R = 1$.
Notons R' le rayon de convergence de la série $\sum s(n)z^n$. On a aussi :

$$a'_n = n \leq s(n) \leq \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = b'_n$$

Donc $R'_b \leq R' \leq R'_a$ où R'_a et R'_b sont les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a'_n z^n$ et $\sum b'_n z^n$, lesquels sont donnés par la règle de D'Alembert, donc $R'_a = R'_b = 1$, donc $R' = 1$.

EXERCICE 428 Série entière dont les coefficiensts sont les termes d'une suite récurrente

Titre : Série entière dont les coefficiensts sont les termes d'une suite récurrente

Difficulté : ★☆☆☆☆

ID : 339 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 325 | ID : 339

On considère un nombre réel strictement positif a et soit (a_n) la suite réelle définie par $a_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum a_n x^n$.
2. Donner un équivalent de a_n et retrouver le résultat de la question 1).
3. On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la fonction associée à la série entière en question. Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tends vers R à gauche.

Solution

1. Remarquons que l'inégalité de concavité de ln :

$$(\star) \quad \forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$$

permet de voir que (a_n) est décroissante : En effet on a $a_0 > 0$ et si pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $a_n > 0$ alors $a_{n+1} = \ln(1 + a_n) > 0$ puisque $1 + a_n > 1$. Puis par $(\star)$ ci-dessus : $a_{n+1} \leq a_n$ donc (a_n) est positive décroissante donc elle converge et sa limite ℓ est solution de l'équation $\ln(1 + x) = x$, donc $\ell = 0$. Il en découle que $a_{n+1} = \ln(1 + a_n) \sim a_n$ et par la règle de D'Alembert $R = 1$.

2. On a $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)} = \frac{1}{a_n}\left(1 + \frac{a_n}{2} + o(a_n)\right)$ Il en découle que :

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{a_n}{2} + o(a_n)$$

Il en découle que :

$$d_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \sim \frac{1}{2}$$

Par sommation des relation de comparaison et compte tenu de la divergence de la série $\sum \frac{1}{2}$, du fait que $\frac{1}{a_n} \sim \frac{1}{a_{n+1}}$ et que $\frac{1}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il vient : $\frac{1}{a_n} \sim \frac{n}{2}$, donc finalement $a_n \sim \frac{2}{n}$. On retrouve que le rayon de convergence de la série est égal à 1 comme celui de la série entière $\sum \frac{1}{n} z^n$.

3. D'après la question précédente, il existe une suite (b_n) tel que $a_n = \frac{2}{n} + \frac{2b_n}{n}$ avec $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $n \geq N \Rightarrow |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.
   • Soit $x \in [0, 1[$, on a $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{2}{n} x^n$.

• Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, on a $f(x) = -2\ln(1-x) + g(x)$, avec

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n = g_N(x) + r_N(x)$$

avec

$$g_N(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n x^n \quad \text{et} \quad r_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n x^n.$$

Finalement, on a :

$$f(x) = 2\ln|1-x| + g_N(x) + r_N(x)$$

Il en découle que pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} |f(x) - 2\ln|1-x| &\leq |g_N(x)| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2}{n} x^n \\ &\leq |g_N(x)| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} x^n \\ &= |g_N(x)| + \frac{\varepsilon}{2} 2\ln|1-x| \end{aligned}$$

• Comme $\lim_{x\to 1^-} \frac{g_N(x)}{\ln|1-x|} = 0$, il existe $c \in [0,1[$ tel que :

$$\forall x \in]c,1[, \quad \frac{g_N(x)}{\ln|1-x|} < \frac{\varepsilon}{2},$$

donc :

$$\forall x \in]c,1[, \quad |f(x) - 2\ln|1-x|| < \frac{\varepsilon}{2}\ln|1-x| + \frac{\varepsilon}{2}\ln|1-x| = \varepsilon 2\ln|1-x|$$

ce qui exprime que $f(x) - 2\ln|1-x| = o(2\ln|1-x|)$ au voisinage de 1 à gauche, donc que : au voisinage de 1 à gauche $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \sim -2\ln(1-x)$.

EXERCICE 429 Une série entière dont le rayon de convergence est non évident

Titre : Une série entière dont le rayon de convergence est non évident

Difficulté : ★☆☆☆☆

ID : 340 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 326 | ID : 340

On considère la série entière $\sum a_n z^n$ où $a_n = \frac{1}{\sin(n\pi\sqrt{3})}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On note R son rayon de convergence

1. Prouver que $R \leq 1$.
2. (a) Prouver que : $\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}|t| \leq |\sin(t)| \leq |t|$.
   (b) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un et un seule entier naturel k_n tel que $(n\sqrt{3} - k_n)\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
   (c) En déduire l'existence d'une suite (b_n) tel que $|a_n| \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b_n = O(n)$ quand n tends vers $+\infty$.
   (d) En déduire que $R = 1$.

Solution

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|a_n| \geq 1$, on a $R \leq 1$.
2. (a) Comme $t \mapsto \sin(t)$ est impaire, il suffit de prouver que $\forall t \in [0, \pi/2]$, $\frac{2}{\pi}t \leq \sin t \leq t$, qui est une conséquence du fait que $t \mapsto \sin t$ est concave sur $[0, \pi/2]$, donc sa courbe est au dessous de la corde joignant les points $(0,0)$ et $(\pi/2, 1)$, et au dessus de la tangente au point $(0,0)$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et notons $x_n = -\frac{1}{2} + n\sqrt{3}$ et $y_n = \frac{1}{2} + n\sqrt{3}$. comme $y_n - x_n = 1$ il existe au moins un entier naturel k tel que $x_n \leq k \leq y_n$ car sinon, on aurait $p < x_n < y_n < p+1$, pour un certain entier naturel p, ce qui donne $y_n - x_n < 1$, ce qui est absurde. Par ailleurs s'il existe $k, k' \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \leq k < k' \leq y_n$, on aurait $y_n - x_n > k' - k \geq 1$, ce qui est absurde. Ainsi il existe un et un seul entier naturel k_n tel que $x_n \leq k_n \leq y_n$, ce qui veut dire $(n\sqrt{3} - k_n)\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n = (n\sqrt{3} - k_n)\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc d'après la question 2)a), on a :

$$\frac{2}{\pi}|n\sqrt{3} - k_n|\pi \leq |\sin(n\sqrt{3} - k_n)\pi| \leq |n\sqrt{3} - k_n|\pi$$

   • Comme $k_n \in \mathbb{N}$ et que la fonction $t \mapsto |\sin t|$ est $\pi-$ périodique, on a

$$|\sin(n\sqrt{3} - k_n)\pi| = |\sin(n\sqrt{\pi})| = \frac{1}{|a_n|}.$$

   • Il en découle que :

$$\frac{1}{|n\sqrt{3} - k_n|\pi} \leq |a_n| \leq \frac{\pi}{2|n\sqrt{3} - k_n|\pi}$$

   • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|a_n| \leq \frac{1}{2|n\sqrt{3}-k_n|} = \frac{n\sqrt{3}+k_n}{2|3n^2-k_n^2|}$. Remarquons que $2|3n^2 - k_n^2|$ est un entier naturel non nul car sinon on aurait $\sqrt{3}$ rationnel, donc $|a_n| \leq n\sqrt{3} + k_n$. Or k_n réalise $k_n \leq \frac{1}{2} + n\sqrt{3}$, donc $|a_n| \leq 2n\sqrt{3} + \frac{1}{2} = b_n$ et on a $b_n = O(n)$, ce qu'il fallait démontrer.

   (d) On a $|a_n| \leq b_n$ comme $b_n = O(n)$, on a aussi $a_n = O(n)$, et comme le rayon de la série entière $\sum nx^n$ est 1, on a $R \geq 1$, or on a déjà $R \leq 1$, donc $R = 1$.

EXERCICE 430 — Série entière dont les coefficients utilisent H_n(série harmonique)

Titre : Série entière dont les coefficients utilisent H_n(série harmonique)
Difficulté : ★☆☆☆☆
ID : 341 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 327 | ID : 341

1. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes. On suppose que la série $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R. Déterminer les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n \ln(n) z^n$ et $\sum a_n H_n z^n$ où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Donner un équivalent simple de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$ quand x tend vers 1 à gauche.

Solution

Notons que $\sum \ln n x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$. On sait

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

donc le terme générale

$$\ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

est borné par un certain M. Par suite

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} x^n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} M x^n = \frac{Mx}{1-x} = O\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

quand $x \to 1^-$. Or par produit de Cauchy

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n \underset{x \to 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

EXERCICE 431 — Exercice utilisant une série entière

Titre : Exercice utilisant une série entière
ID : 342 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 328 | ID : 342
Difficulté : ★☆☆☆☆

1. Soit une série entière de coefficient $a_n, n \geq 0$ de rayon de convergence R avec $R > 0$. Montrer que la série entière de coefficient $\frac{a_n}{n!}$ est de rayon de convergence infini.
2. Pour tout nombre réel t on pose :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x > r$, la fonction φ définie par

$$\varphi(t) = f(t) e^{-xt}$$

soit intégrable sur $[0, +\infty[$ et exprimer cette intégrale sous la forme de série entière en $\frac{1}{x}$.

Solution

1. Soit z un nombre complexe. Soit t un nombre réel tel que $t > \frac{|z|}{R}$. Alors $\frac{|z|}{t} < R$. Donc, puisque la série de coefficient a_n est de rayon R, la suite $(|a_n z^n|/t^n)$ est bornée. Si M est un majorant de cette suite, on a alors

$$\frac{|a_n|}{n!}|z|^n = \frac{|a_n z^n|}{t^n} \frac{t^n |z|^n}{n!} \leq M \frac{t^n |z|^n}{n!}$$

et comme la série de terme général $\left(\frac{t^n |z|^n}{n!}\right)$ converge, puisque c'est la série de l'exponentielle, il en résulte que la série de terme général $\frac{a_n z^n}{n!}$ converge. C'est donc une série de rayon infini. En particulier la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$.

2. Lorsque x est strictement positif, étudions l'intégrale

$$I_n(x) = \int_0^\infty t^n e^{-xt} dt$$

En intégrant par parties, on obtient

$$I_n(x) = \frac{n}{x} I_{n-1}(x)$$

avec

$$I_0(x) = \frac{1}{x}$$

et l'on en déduit que

$$I_n(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Alors la série de terme général

$$\frac{a_n I_n(x)}{n!} = \frac{a_n}{x^{n+1}}$$

converge lorsque $\frac{1}{x} > R$ D'autre part la série de terme général $a_n t^n e^{-xt}/n!$ converge simplement sur $[0, \infty[$ vers la fonction continue φ. Il résulte alors du théorème de sommation terme à terme que, lorsque $x > r = 1/R$, la fonction φ est intégrable sur $[0, \infty[$ et que $\int_0^\infty f(t)e^{-tx} = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!} I_n(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n \left(\frac{1}{x}\right)^{n+1}$

EXERCICE 432 Série entière et polynômes

Titre : Série entière et polynômes
ID : 343 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 329 | ID : 343
Difficulté : ★☆☆☆☆

1. Montrer que, pour tout entier naturel p, il existe un polynôme R_p tel que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^p x^n = \frac{R_p(x)}{(1-x)^{p+1}}$$

Que vaut $R_p(1)$?

2. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels admettant un développement asymptotique de la forme $a_n = P(n) + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où P est un polynôme de degré p
   (a) Trouver le rayon de convergence R de la série entière de coefficient a_n
   (b) Pour $x \in]-R, R[$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$. Montrer que S admet en R une limite infinie et en $-R$ une limite finie.

Solution

1. La série entière de coefficient n^p est de rayon 1 .Pour $x \in]-1,1[$, notons $S_p(x) = \sum_{n=0}^\infty n^p x^n$ et montrons par récurrence sur p la propriété demandée.
   • Si $p = 0$, on a $S_p(x) = \frac{1}{1-x}$ et la propriété est vraie en prenant $P_0 = 1$
   • Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que la propriété vraie à l'ordre p. Alors en dérivant $S_p(x) = \frac{R_p(x)}{(1-x)^{p+1}}$ on obtient $S_p'(x) = \frac{(1-x)R_p'(x)+(p+1)R_p(x)}{(1-x)^{p+2}}$ Si l'on pose

$$R_{p+1}(x) = x\left[(1-x)R_p'(x) + (p+1)R_p(x)\right]$$

on obtient un polynôme tel que :

$$S_{p+1}(x) = xS'_p(x) = \frac{R_{p+1}(x)}{(1-x)^{p+2}}$$

La propriété est donc vraie à l'ordre $p+1$. Il en résulte qu'elle est vraie pour tout entier naturel p De plus

$$R_{p+1}(1) = (p+1)R_p(1)$$

avec

$$R_0(1) = 1$$

On en déduit donc que

$$R_p(1) = p!$$

2. (a) Si le terme de plus haut degré de $P(X)$ est λX^p, on a alors

$$a_n \sim \lambda n^p$$

et la série entière de coefficient a_n a même rayon de convergence que la série entière de coefficient n^p. On a donc $R = 1$

(b) Etude en 1 et en -1.

• Etude en 1 : Soit ε le signe de λ. La suite $(\varepsilon a_n/n^p)$ converge vers $|\lambda|$, donc, à partir d'un certain rang n_0

$$\frac{\varepsilon a_n}{n^p} \geq \frac{|\lambda|}{2}$$

soit

$$\varepsilon a_n \geq \tfrac{|\lambda|}{2} n^p$$

Alors, si x appartient à $[0,[1$

$$\varepsilon S(x) = \varepsilon \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n + \sum_{n=n_0}^{\infty} \varepsilon a_n x^n \geq \varepsilon \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n + \frac{|\lambda|}{2} \sum_{n=n_0}^{\infty} n^p x^n$$

Donc

$$\varepsilon S(x) \geq \varepsilon \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n + \frac{|\lambda|}{2} \frac{R_p(x)}{(1-x)^{p+1}} - \frac{|\lambda|}{2} \sum_{n=0}^{n_0-1} n^p x^n$$

Quand x tend vers 1, le membre de droite tend vers $+\infty$. Donc $S(x)$ tend vers l'infini avec le signe de λ

• Etude en -1 : En écrivant, pour $n \geq 1$

$$a_n = P(n) + \frac{\alpha}{n} + \frac{u_n}{n^2}$$

où $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite bornée, on a, si x appartient à $]-1,[1$

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P(n)x^n + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^2} x^n$$

La somme $\sum_{n=1}^{\infty} P(n)x^n$ est une combinaison linéaire des sommes $S_k(x)$, pour k compris entre 0 et p. Donc d'après la question 1), il existe un polynôme Q tel que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n)x^n = \frac{Q(x)}{(1-x)^{p+1}}$$

Alors

$$S(x) = a_0 + \frac{Q(x)}{(1-x)^{p+1}} - \alpha \ln(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^2} x^n$$

Puisque (u_n) est bornée, la série de terme général u_n/n^2 converge absolument et il résulte du théorème d'Abel que

$$\lim_{x\to -1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^2}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n^2}$$

Alors S admet une limite quant x tend vers -1, et

$$\lim_{x\to -1}S(x)=a_0+\frac{Q(1)}{2^{p+1}}-\alpha\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n^2}$$

EXERCICE 433 Série entière coefficients avec partie entière

Titre : Série entière coefficients avec partie entière
ID : 344 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 330 | ID : 344
Difficulté :

Pour tout nombre réel x, on note $E(x)$ la partie entière de x. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$a_n=\frac{\sqrt{n}-E(\sqrt{n})}{n},$$

et on considère la série entière $a=\sum a_n x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière a.
2. On note :
$$\begin{cases}\mathscr{C}=\{z\in\mathbb{C}/\sum a_n z^n \text{ converge}\}\\ \mathscr{A}=\{z\in\mathbb{C}/\sum a_n z^n \text{ converge absolument}\}\end{cases}$$
Déterminer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{A}$.

Solution

1. Étudions tout d'abord la série entière de coefficient
$$b_n=\sqrt{n}-\mathrm{E}(\sqrt{n})$$
C'est la série dérivée de la série de terme général a_n. Elle a donc même rayon de convergence. On a
$$0\le\sqrt{n}-\mathrm{E}(\sqrt{n})\le 1$$
Donc, par comparaison à la série géométrique de terme général z^n, on a $R\ge 1$ Si l'on pose
$$n=p^2+2p=(p+1)^2-1$$
avec p entier, on a
$$p^2\le n<(p+1)^2$$
donc
$$\mathrm{E}(\sqrt{n})=p$$
$$b_{p^2+2p}=\sqrt{p^2+2p}-p=\frac{2p}{\sqrt{p^2+2p}+p}$$
La suite précédente converge vers 1. Il en résulte que la série de coefficient b_n est grossièrement divergente et que $R\le 1$. Finalement $R=1$.
2. On a $E(\sqrt{n})=p$ si et seulement si $p^2\le n\le p^2+2p$, c'est-à-dire $n=p^2+k$ avec $0\le k\le 2p$, et dans ce cas
$$a_n=\frac{\sqrt{p^2+k}-p}{p^2+k}=\frac{k}{(p^2+k)\left(\sqrt{p^2+k}+p\right)}$$

et, puisque

$$(p^2+k)\left(\sqrt{p^2+k}+p\right) = n(\sqrt{n}+p) \leq (p+1)^2(2p+1)$$

on obtient

$$\sum_{n=p^2}^{p^2+2p} a_n = \sum_{k=0}^{2p} \frac{k}{(p^2+k)\left(\sqrt{p^2+k}+p\right)} \geq \sum_{k=0}^{2p} \frac{k}{(p+1)^2(2p+1)}$$

La somme de droite fait apparaître la somme des premiers entiers d'où,

$$\sum_{n=p^2}^{p^2+2p} a_n \geq \frac{1}{(p+1)^2(2p+1)} \frac{2p(2p+1)}{2} = \frac{p}{(p+1)^2}$$

Comme $\frac{p}{(p+1)^2} \sim \frac{1}{p}$, la série de terme général $p/(p+1)^2$ diverge, et donc la série de terme général $c_p = \sum_{n=p^2}^{p^2+2p} a_n$ diverge également. Alors, puisque $\sum_{n=1}^{p^2+2p} a_n = \sum_{k=1}^{p} c_k$, la suite $\left(\sum_{n=1}^{p^2+2p} a_n\right)_p$ admet $+\infty$ pour limite, et comme la suite $\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)_{N\geq 1}$ est croissante puisque les nombres a_n sont positifs, on en déduit qu'elle admet aussi $+\infty$ pour limite et donc que la série de terme général a_n diverge. Il reste à étudier la série de terme général $a_n z^n$ lorsque $|z| = 1$ et $z \neq 1$. On regroupe là aussi les termes de la série par paquets et, pour s vérifiant $0 \leq s \leq 2p$, on étudie

$$d_{s,p} = \sum_{n=p^2}^{p^2+s} a_n z^n = z^{p^2} \sum_{k=0}^{s} a_{p^2+k} z^k$$

Si $p \geq 1$, étudions tout d'abord la fonction f_p définie sur $[0, 2p]$ par $f_p(t) = \frac{\sqrt{p^2+t}-p}{p^2+t}$.
On a $f_p'(t) = \frac{3p^2-t}{2(p^2+t)^2(2p+\sqrt{p^2+t})} > 0$, et f_p est strictement croissante. Alors, si k appartient à $[0, 2p-1]$, on aura $a_{p^2+k+1} - a_{p^2+k} = f_p(k+1) - f_p(k) > 0$. En utilisant la sommation d'Abel, on peut alors écrire,

$$d_{s,p} = z^{p^2}\left(a_{p^2}\sum_{k=0}^{s} z^k + \sum_{k=1}^{s}\left(\left(a_{p^2+k} - a_{p^2+k-1}\right)\sum_{r=k}^{s} z^r\right)\right)$$

et puisque

$$\left|\sum_{r=k}^{s} z^r\right| = \left|\frac{1-z^{s-k+1}}{1-z}\right| \leq \frac{2}{|1-z|}$$

on obtient

$$|d_{s,p}| \leq \frac{2}{|1-z|}\left(a_{p^2} + \sum_{k=1}^{s}\left(a_{p^2+k} - a_{p^2+k-1}\right)\right) = \frac{2a_{p^2+s}}{|1-z|}$$

or

$$a_{p^2+s} = \frac{s}{(p^2+s)\left(\sqrt{p^2+s}+p\right)} \leq \frac{s}{2p^3} \leq \frac{1}{p^2}$$

donc

$$|d_{s,p}| \leq \frac{2}{p^2|1-z|}$$

En particulier la série de terme général d_{2p} converge. Soit S sa somme, et N un entier supérieur à 1. Si l'on pose $= E(\sqrt{N})$ et $s = N - p^2$, on a alors

$$\left|S - \sum_{n=1}^{N} a_n z^n\right| = \left|S - \sum_{s=1}^{p-1} d_{2s,s}\right| + |d_{s,p}| \leq \left|S - \sum_{s=1}^{p-1} d_{2s,s}\right| + \frac{2}{p^2|1-z|}$$

Quand $N \to +\infty$, il en est de même de p et le membre de droite tend vers 0. Alors la série de terme général $a_n z^n$ converge vers S. En résumé

$$\mathscr{A} = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\} \quad \text{et} \quad \mathscr{C} = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1\} \backslash \{1\}$$

EXERCICE 434 Série entière et divers domaines de convergence

Titre : Série entière et divers domaines de convergence
ID : 345 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 331 | ID : 345
Difficulté : ★☆☆☆☆

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{n!}$$

et on considère la série entière $a = \sum a_n x^n$.

1. Determiner le rayon de convergence de la série entière a.
2. Determiner $\mathscr{C}_a = \{x \in \mathbb{R} / \sum a_n x^n \textbf{ CV}\}$ et $\mathscr{A}_a = \{x \in \mathbb{R} / \sum a_n x^n \textbf{ ACV}\}$. On pourra utiliser la formule de Stirling : quand n tends vers $+\infty$, on a $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Solution

1. Au voisinage de 0 on a $\ln(1+u) = u + o(u)$, donc : on en déduit $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \exp\left((n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp(1+o(1))$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$, donc le rayon de convergence de la série entière a ets $R = \frac{1}{e}$.
2. Si $|x| = \frac{1}{e}$ on a , grâce à la formule de Stirling,

$$|a_n x^n| \sim \frac{n^{n+1}}{e^n}\left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi}}$$

et cette expression ne converge pas vers 0. La série diverge grossièrement dans ce cas. Donc $\mathscr{A}_a = \mathscr{C}_a =]-1/e, 1/e[$.

EXERCICE 435 Quelques comportement au bord de l'intervalle ouvert de convergence

Titre : Quelques comportement au bord de l'intervalle ouvert de convergence
ID : 346 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 332 | ID : 346
Difficulté : ★☆☆☆☆

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et on considère la série entière $a = \sum a_n x^n$ et la fonction associée : $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Étudier la convergence de $\sum a_n x^n$ aux points $x = -R$ et $x = R$.
3. (a) Soit $M > 0$. Montrer que :

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \exists \delta > 0, \forall x \in]1-\delta, 1[, \quad \sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \geq M.$$

   (b) En déduire la limite de $f(x)$ quand x tends vers 1 à gauche.
4. On considère la série entière $\sum b_n x^n$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, b_n = \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right) x^n,$$

et soit $g : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} b_n x^n$ la fonction qui lui est associée.
   (a) Démontrer que la série $\sum b_n x^n$ converge normalement sur $[0,1]$.
   (b) En déduire que $\lim_{x\to 1^-}(1-x)f(x) = 0$

Solution

1. Quand $n \to +\infty$, on a : $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. Par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière de coefficient général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est égal à 1, donc celui de la série concernée vaut 1 aussi.
2. Étude au bord :
   • Au point -1 : La suite $\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$ est décroissante et converge vers 0 (car $0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\pi}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ et sin est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$), le critère spécial des séries alternées permet de conclure que la série $\sum a_n x^n$ converge pour $x = -1$.
   • Au point 1 : La série $\sum_n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente car $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente donc $\sum a_n x^n$ diverge pour $x = 1$.
3. (a) La série $\sum_n \sin(1/\sqrt{n})$, qui est à termes positifs, est divergente. Il existe donc un entier $N \geq 1$ tel que $\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq M + 1$. De plus, cet entier N étant fixé, la fonction $h : x \mapsto \sum_{n=1}^{N} \sin(1/\sqrt{n}) x^n$ est continue en 1, donc il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1]$ on aie : $h(x) \geq h(1) - 1$, ce qui prouve le résultat demandé.
   (b) Il s'agit d'une série à termes positifs, donc la suite des sommes partielles est majorée par la somme, donc, $\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in]1-\delta, 1[, f(x) \geq M$, ce qui veut dire que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$
4. (a) Il est clair que, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) x^n\right| \leq \left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right|$$

   En utilisant l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right| \leq \frac{C}{n^{3/2}}$$

   La série (numérique) de terme général $n^{-3/2}$ étant convergente, ceci prouve la convergence normale de la série définissant g sur $[0,1]$
   (b) Un calcul aisé montre que $(1-x)f(x) = \sin(1) + g(x)$ Or, g étant continue en 1, on trouve $\lim_{x \to 1}(1-x)f(x) = \sin(1) + g(1) = \sin(1) + \sum_{n=2}^{+\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right] = 0$

EXERCICE 436 — Expression intégrale des coefficients d'une série entière, application

Titre : Expression intégrale des coefficients d'une série entière, application
Difficulté : ★☆☆☆☆
ID : 347 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 333 | ID : 347

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, on pose : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

1. Soit $r \in]0, R[$. Montrer que :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta.$$

2. En déduire que si $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ alors, $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$.
3. **Application :** Supposons f bornée sur $\mathbb{C}$, développable en série entière de rayon de convergence infini. Montrer qu'alors f est constante.

Solution

1. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à $R > 0$. Nous en déduisons qu'alors pour tout réel $r \in [0, R[$, la série de terme général $a_n r^n$ est absolument convergente. Nous en déduisons que pour $p \in \mathbb{N}$ la série $\sum f_n$ où $f_n(t) = a_n r^n e^{i(n-p)t}$ est normalement donc uniformément convergente. Nous pouvons donc écrire :

$$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{i(n-p)t} \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} a_n r^n e^{i(n-p)t} \mathrm{d}t \right)$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it} e^{-ipt} \mathrm{d}t = 2\pi r^p a_p$$

Si $r \in]0, R[$, alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_p = \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} f(re^{it} e^{-int} \mathrm{d}t.$$

2. Posons $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, alors

$$\left| \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-ipt} \mathrm{d}t \right| \leq 2\pi M(r)$$

donc

$$\left| 2\pi r^p a_p \right| \leq 2\pi M(r),$$

c'est-à-dire

$$|a_p| \leq \frac{M(r)}{r^p}.$$

3. Si f est développable en série entière à l'origine, de rayon de convergence infini et si f est bornée alors il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout réel strictement positif r on ait

$$\forall p \in \mathbb{N}, |a_p| \leq \frac{M}{r^p}$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $\lim_{p \to +\infty} \frac{M}{r^p} = 0$ donc pour $p \in \mathbb{N}^*$ nous avons $a_p = 0$ et f est constante.

EXERCICE 437 un peu de Tauber série entière $\sum u_nx^n$ tel que $u_n = o(1/n)$

Titre : un peu de Tauber série entière $\sum u_nx^n$ tel que $u_n = o(1/n)$ **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 348 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 334 | ID : 348

Soit $\sum u_n x^n, (n \geq 0)$ une série entière de rayon de convergence 1, de somme $f(x)$ sur $]-1, 1[$. On suppose que : $\lim_{x \to 1^-} f(x) = S$, et que $\lim_{n \to +\infty} nu_n = 0$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*, x \in [0, 1[$ et $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer que :

$$|S_n - f(x)| \leq (1-x) \left(\sum_{k=0}^{n} |ku_k| \right) + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} |ku_k| x^k$$

2. En déduire que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(S_n - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right) = 0$$

3. Montrer alors que la série $\sum u_n$ converge et a pour somme S

Solution

1. $S_n - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(u_k \left(1-x^k\right)\right) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k x^k$. On a : $1-x^k = (1-x)\sum_{i=0}^{k-1} x^j$, donc, pour $x \in [0,1[$, on a $0 \leq 1-x^k \leq k(1-x)$. Pour tout $k > n$,on a $1 < \frac{k}{n}$. Finalement, $|S_n - f(x)| \leq (1-x)\left(\sum_{k=0}^{n} |ku_k|\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{+\infty} |ku_k| x^k$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. La suite de terme général nu_n converge vers 0, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$ on ait :
$$n \geq N \Rightarrow |nu_n| \leq \frac{e\varepsilon}{2}.$$
Pour $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq 1-\frac{1}{n} < 1$ donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^k = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ puis pour $n \geq N$,
$$\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{+\infty} |ku_k| \left(1-\frac{1}{n}\right)^k \leq \frac{e\varepsilon}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$
On a :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k|u_k| = 0$$
Il s'agit de la moyenne de Césaro que nous pouvons prouver de la manière suivante : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé convergente vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$ on ait
$$n \geq N \Rightarrow \|x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k\right\| \leq \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1} x_k\right\| + \frac{(n-N+1)\varepsilon}{2n}$$
donc
$$\lim_{n\to+\infty} \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1} x_k\right\| + \frac{(n-N)\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2}.$$
Il existe donc $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, n > \max(N, N_1) \Rightarrow \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1} x_k\right\| + \frac{(n-N)\varepsilon}{2n} \leq \varepsilon.$$
Nous avons donc $\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k\right\| \leq \varepsilon$ puis $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k\,|x_k| = 0$.
Nous obtenons finalement $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} |ku_k| + \frac{e\varepsilon}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{\varepsilon}{2}$.
Il existe alors $N \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait pour tout entier n au moins égal à N : $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} |ku_k| + \frac{e\varepsilon}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \leq \varepsilon$ puis pour $n \geq N$, $\left|S_n - f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| \leq \varepsilon$,. c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty}\left(S_n - f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = 0$.
3. f possède une limite à gauche, égale à S, en 1 donc $\lim_{n\to+\infty} f\left(1-\frac{1}{n}\right) = S$ puis $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$ c'est-à-dire série $\sum u_n$ converge et a pour somme S.

EXERCICE 438 Série entière et développement asymptotique

Titre : Série entière et développement asymptotique
ID : 349 **Durée :** —
Difficulté :
Niveau : L2 | N° : 335 | ID : 349

On étudie la série entière $\sum a_n x^n$ avec :

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n}\right).$$

Préciser le convergence, le domaine de définition de la somme puis en donner un équivalent en 1

Solution

On note R le rayon de convergence cherché et S sa somme. Comme $a_n \sim (-1)^n/\sqrt{n}$, on constate que $a_n \times 1^n$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini (donc $R \geqslant 1$), et que la série de terme général $|a_n|^n$ | diverge (donc $R \leqslant 1$), et on conclut que Un développement limité permet de savoir si la série entière converge pour $z = 1$ ou $z = -1$:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n} - \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{3}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$
$$a_n(-1)^n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{3(-1)^n}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Comme les séries de termes généraux $(-1)^n/\sqrt{n}, 3(-1)/(2n)$ et $\mathrm{O}\left(1/n^{3/2}\right)$ sont convergentes alors que celles de termes généraux $3/(2n)$ et $1/\sqrt{n}$ sont divergentes, on en déduit que la série $\sum a_n z^n$ diverge en 1 et -1. Par suite, l'ensemble de définition de la somme est $]-1,1[$.
Voici comment on devine l'équivalent en 1 de la somme. En multipliant le développement limité de a_n par x^n et en sommant, on obtient, sans aucun souci de justification, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2n} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) x^n = S_1(x) + S_2(x) + S_3(x)$, avec des notations évidentes des sommes S_k pour $1 \leqslant k \leqslant 3$. Comme les sommes $S_1(x)$ et $S_3(x)$ convergent pour $x = 1$, et comme $S_2(x) = -\frac{3}{2}\ln(1-x)$ tend vers l'infini quand x tend vers 1, on va montrer que

$$S(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} S_2(x) = -\frac{3}{2}\ln(1-x)$$

On calcule pour cela la différence $S(x) - S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n - \frac{3}{2n}\right) x^n$. On pose $b_n = a_n - \frac{3}{2n}$: d'après le développement limité calculé plus haut, la série de terme général b_n converge. Par suite, la somme $B(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ est continue en 1 d'après le *théorème de convergence radiale d'Abel*(Voir les rappels en bas). En particulier, B est bornée au voisinage de 1, donc est négligeable devant $\ln(1-x)$, ce qui établit l'équivalent annoncé.
Théorème de convergence radial d'Abel : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et soit z_0 un complexe tel que $|z_0| = R$ et la série numérique $\sum a_n z_0^n$ est convergente, alors la série entières $\sum a_n z^n$ converge uniformèment sur la segmant $[0, z_0]$. Voir l'exercice suivant.

EXERCICE 439 Théorème de convergence radial d'Abel

Titre : Théorème de convergence radial d'Abel
ID : 350 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 336 | ID : 350
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et soit z_0 un complexe tel que $|z_0| = R$ et la série numérique $\sum a_n z_0^n$ est convergente, alors la série entières $\sum a_n z^n$ converge uniformèment sur la segmant $[0, z_0]$. On pourra remarquer qu'en postant $z = tz_0$, on peut se ramener à $R = 1$ et le segment $[0,1]$

Solution

En posant $z = tz_0$ on se ramène à $R = 1$ et la variable réelle $x \in [0,1]$. On suppose donc que la série $\sum a_n x^n$ est convergente avec $\sum a_n x^n$ tel que $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de rayon de convergence 1. On se propose de prouver que la série entière $\sum a_n x^n$ converge uniformèment sur $[0,1]$. Soit $\varepsilon > 0$.

Si on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n$, on a $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$, donc il exite $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $n > N \Rightarrow |R_n| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pour tout $n > N$ et tout $x \in [0,1]$, notons $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$, alors $r_n(x) = \lim_{p\to+\infty} r_{n,p}(x)$ où $r_{n,p}(x) = \sum_{k=n}^{p} a_k x^k$ pour tout $p > n$. On observant que $a_k = R_{k-1} - R_k$, on a $r_{n,p}(x) = \sum_{k=n}^{p} (R_{k-1} - R_k)x^k = \sum_{k=n-1}^{p-1} R_k x^{k+1} - \sum_{k=n}^{p} R_k x^k = \sum_{k=n}^{p-1} R_k(x^{k+1} - x^k) + R_{n-1}x^n - R_p x^p$, donc $|r_{n,p}(x)| \leq \sum_{k=n}^{p-1} |R_k|(x^k - x^{k+1}) + |R_{n-1}| + |R_p| \leq 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}\sum_{k=n}^{p-1}(x^k - x^{k+1}) = 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}(x^n - x^p) \leq \varepsilon$. On a donc prouvé que :

$$\forall x \in [0,1], \forall n, p > N, |r_{n,p}(x)| \leq \varepsilon$$

Donc en tendant p vers $+\infty$, il vient :

$$\forall x \in [0,1], \forall n > N, |r_n(x)| \leq \varepsilon$$

Il en découle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} |r_n(x)| \leq \varepsilon$$

ce qui explique la convergence uniforme de la série $\sum a_n x^n$ sur $[0,1]$.

EXERCICE 440 — Des études avec séries entières

Titre : Des études avec séries entières
ID : 351 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 337 | ID : 351
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue tel que : $\forall t \in [0,1] \quad \varphi(t) > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t^n+\varphi(t)} dt$.

1. Calculer de façon triés simple le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. On se propose de donner un équivalent simple de a_n et de déduire le résultat trouvé dans 1).
   (a) Démontrer que
   $$\lim_{n\to+\infty} n a_n = \ln \frac{1+\varphi(0)}{\varphi(0)}.$$
   (b) Retrouver le résultat de la question 1) ci-dessus.

Solution

1. Notons respectivement m et M le minimum et le maximum de φ sur $[0,1]$. Alors, pour tout $t \in [0,1]$, on a $\frac{t^n}{M+1} \leq \frac{t^n}{t^n+\varphi(t)} \leq \frac{t^n}{m}$, donc en intégrant, il vient :
   $$\frac{1}{1+M}\int_0^1 t^n dt \leq a_n \leq \frac{1}{m}\int_0^1 t^n dt,$$
   donc
   $$\alpha_n = \frac{1}{(M+1)(n+1)} \leq a_n \leq \frac{1}{m(n+1)} = \beta_n.$$
   Les séries entières $\sum \alpha_n x^n$ et $\sum \beta^n x^n$ ont toutes les deux $R_\alpha = \mathbb{R}_\beta = 1$ comme rayon de convergence, donc le rayon de convergence de la série entière $a = \sum a_n x^n$ est $R_a = 1$.
2. (a) Le changement de variable défini par $t^n = u$ permet de dire que $a_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{u+\varphi(u^{\frac{1}{n}})} du$.
   • Posons $f_n(u) = \frac{u^{\frac{1}{n}}}{u+\varphi(u^{\frac{1}{n}})}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et calculons $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(u) du$ en utilisant le

théorème de convergence dominée. Pour cela remarquons que :
• la suite (f_n) converge simplement vers f définie par $f(u) = \frac{1}{u+\varphi(0)}$.
• les fonctions f_n et f sont continues sur $[0,1]$.
• Pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$, on a $|f_n(t)| \leq g(t) = \frac{1}{u+m}$ avec $m = \min_{t\in[0,1]} \varphi(t)$ et on observe que g ainsi définie est continue et intégrable sur $[0,1]$.
• Le théorème de convergence dominée s'applique et donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{1}{u+\varphi(0)}\mathrm{d}u = \ln\frac{1+\varphi(0)}{\varphi(0)},$$

ce qui permet de dire que quand n tend vers $+\infty$, on a $a_n \sim \frac{1}{n}\ln\frac{1+\varphi(0)}{\varphi(0)}$ ou autrement que :

$$\lim_{n\to+\infty} na_n = \ln\frac{1+\varphi(0)}{\varphi(0)}.$$

(b) Comme $a_n \sim \frac{c}{n}$ avec $c = \ln\frac{1+\varphi(0)}{\varphi(0)} > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, donc $R_a = 1$.

EXERCICE 441 Action d'une suite sur une série entière

Titre : Action d'une suite sur une série entière
ID : 352 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 338 | ID : 352
Difficulté : ★☆☆☆☆

1. On considère une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R.
   (a) Démontrer que pour tout nombre réel non nul q le rayon de convergence de la série entière $\sum q^n a_n x^n$ est $R_q = \frac{R}{|q|}$
   (b) Démontrer que pour tout nombre réel α, le rayon de convergence de la série entière $\sum n^\alpha a_n x^n$ est $R_\alpha = R$.
2. Soit (α_n) une suite de complexes non nuls tel que $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\right| = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
   (a) Démontrer que pour toute série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R, le rayon de convergence de $\sum \mu_n a_n x^n$ est $R_\alpha = \frac{R}{\ell}$.
   (b) Retrouver le résultat établit dans 1)b) ci-dessus avec $\mu_n = n^\alpha$

Solution

1. On suppose que R est le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$.
   (a) La série $\sum a_n q^n x^n = \sum a_n (qx)^n$ converge absolument si $|qx| < R$, c'est-à-dire $|x| < \frac{R}{|q|}$ et diverge grossièrement si $|qx| > R$, c'est-à-dire $|x| > \frac{R}{|q|}$, donc le rayon de convergence de la série $\sum q^n a_n x^n$ est $R_q = \frac{R}{|q|}$.
   (b) Si $\alpha = 0$, c'est la même série entière. Si $\alpha > 0$ on a $a_n = \mathbf{O}(n^\alpha a_n)$, donc $R \geq R_\alpha$; réciproquement soit $0 < \rho < R$ et soit r tel que $\rho < r < R$, alors $|n^\alpha a_n \rho^n| = n^\alpha (\frac{\rho}{r})^n |a_n r^n|$, et comme $r < R$, la suite $(a_n r^n)$ est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que $|a_n r^n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et alors $|n^\alpha a_n \rho^n| = M n^\alpha q^n$ où $q = \frac{\rho}{r}$ réalise $0 < q < 1$ et comme par la règle de D'Alembert, le rayon de convergence de la séries $\sum n^\alpha z^n$ est 1 on a $\sum \alpha^n q^n$ est convergente, donc $\sum \alpha^n a_n \rho^n$ est convergente. Il en découle que $R_\alpha \geq R$, donc $R = R_\alpha$.
   Si $\alpha < 0$, posons $\beta = -\alpha$, comme $\beta > 0$, les séries $\sum \alpha^n a_n x^n$ et $\sum \beta^n \alpha^n a_n x^n$ ont le même rayon de convergence et comme $n^\alpha n^\beta = 1$, donc $R_\alpha = R$.
2. Une généralisation du cas ci-dessus de la question 1)b) :
   (a) Si $\ell = 0$, on va démontrer que pour tout $x > 0$ la suite $(\mu_n a_n x^n)$ est bornée. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}| < \varepsilon$, donc il existe une constante

$C > 0$ tel que $\forall n \geq N, |\mu_n| \leq C\varepsilon^n$, donc $\forall n \geq N, |\mu_n a_n x^n| \leq C|a_n|(\varepsilon x)^n$. Si on choisi ε tel que $\varepsilon x < R$, par exemple $\varepsilon = \frac{R}{2x}$, on obtient : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |\mu_n a_n x^n| \leq C|a_n| \left(\frac{R}{2}\right)^n$ et comme la série $\sum a_n \left(\frac{R}{2}\right)^n$ est absolument convergente on déduit que la série $\sum \mu_n a_n x^n$ est absolument convergente et ceci pour tout $x > 0$, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum \mu_n a_n x^n$ est $+\infty$.

Si $\ell > 0$, soit $\varepsilon \in]0, \ell[$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N \left|\frac{|\mu_{n+1}|}{\mu_n}\right| - \ell| < \varepsilon$, donc $\forall n \geq N, (\ell - \varepsilon)|\mu_n| \leq |\mu_{n+1}| \leq (\ell + \varepsilon)|\mu_n|$, par suite il existe deux constantes c_1 et c_2 strictement positives tel que $\forall n \geq N, c_1(\ell - \varepsilon)^n \leq |\mu_n| \leq c_2(\ell + \varepsilon)^n$. Il en découle que $\forall n \geq N, c_1(\ell - \varepsilon)^n |a_n| \leq |\mu_n a_n| \leq c_2(\ell + \varepsilon)^n |a_n|$. Compte tenu de la question 1)a) le rayon de convergence des séries entières de coefficients respectifs $(\ell - \varepsilon)^n |a_n|$ et $(\ell + \varepsilon)^n |a_n|$ sont $\frac{R}{\ell - \varepsilon}$ et $\frac{R}{\ell + \varepsilon}$ et par comparaison des rayons de convergences en fonction de la comparaison des coefficients on déduit que le rayon de convergence R_μ vérifie : $\forall \varepsilon > 0, \frac{R}{\ell + \varepsilon} \leq R_\mu \leq \frac{R}{\ell - \varepsilon}$. Il en découle que $R_\mu = \frac{R}{\ell}$.

(b) Si on pose $\mu_n = \alpha^n$ avec α un nombre réel, il est clair que dans ce cas on a : $\left|\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $R_\mu = R$, ce qui confirme le résultat trouvé dans la question 1)b).

EXERCICE 442 Série entière $\sum a_n x^n$ et $\sum (-1)^n a_n x^n$ avec a_n une intégrale

Titre : Série entière $\sum a_n x^n$ et $\sum (-1)^n a_n x^n$ avec a_n une intégrale
Difficulté :
ID : 353 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 339 | ID : 353

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} \mathrm{d}t$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la séries entière $\sum a_n x^n$.
2. Étudier la convergence de $\sum a_n R^n$ et celle de $\sum (-1)^n a_n R^n$.

Solution

1. Le changement de variable $u = t^n$ donne $a_n = \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} u^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}u$, donc $a_n = \frac{c_n}{c}$ avec $c_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} u^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}u$. Si on note $f_n(u) = \frac{e^{-u}}{u} u^{\frac{1}{n}}$ pour tout $u \in I = [1, +\infty[$, la suite de fonctions (f_n) réalise :
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I.
   - la suite (f_n) converge simplement vers f définie par $f(u) = \frac{e^{-u}}{u}$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $u \in I$, on a $|f_n(t)| \leq f(t)$ et f est continue intégrable sur I, puisque au voisinage de $+\infty$, on a $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

   Le théorème de convergence dominée permet de dire que :
   $$c = \lim_{n \to +\infty} c_n = \int_1^{+\infty} f_n(u) \mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} f(u) \mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} \mathrm{d}u.$$
   Finalement, quand $n \to +\infty$, on a : $a_n \sim \frac{c}{n}$, donc $R = 1$ est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
2. Comme $a_n \sim \frac{c}{n}$, la série $\sum a_n$ est divergente. Par ailleurs la série $\sum (-1)^n a_n$ est une série alternée avec les conditions du critère spécial des séries alternée, à savoir :
   - (a_n) est positive.
   - (a_n) est décroissante puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [1, +\infty[, e^{-t^n} \geq e^{-t^{n+1}}$, donc en intégrant, on a $a_n \geq a_{n+1}$.
   - $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$, puisqu'on vient de voir que $a_n \sim \frac{c}{n}$.

Ainsi la série alternée $\sum(-1)^n a_n$ est convergente et la fonction série entière :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \left(\int_1^{+\infty} e^{-t^n} \mathrm{d}t \right)$$

est bien définie sur $[-1,1[$.

EXERCICE 443 Serie entière $\sum \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})x^n$

Titre : Serie entière $\sum \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})x^n$ **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 354 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 340 | ID : 354

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la séries entière $\sum a_n x^n$.
2. Étudier la convergence de $\sum a_n R^n$ et celle de $\sum(-1)^n a_n R^n$.

Solution

1. Quand n tend vers $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+n+1} &= n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= n\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{8}\frac{1}{n^2}+\mathbf{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= n+\frac{1}{2}+\frac{3}{8n}+\mathbf{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Il en découle que, quand n tend vers $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned}
a_n &= \cos(n\sqrt{n^2+n+1}) \\
&= \cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8n}+\mathbf{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8n}+\mathbf{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= -(-1)^n \sin\left(\frac{3\pi}{8n}+\mathbf{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{3\pi}{8}+\mathbf{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Il en découle que $a_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{3\pi}{8}$, par conséquent $|a_n| \sim \frac{1}{n}\frac{3\pi}{8}$ et par suite le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est $R=1$.

2. On a $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{3\pi}{8}+\mathbf{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est la somme du terme d'une série alternée convergente et celui d'une série absolument convergente, donc $\sum a_n$ est convergente. Par ailleurs, on a $(-1)^n a_n = -\frac{1}{n}\frac{3\pi}{8}+\mathbf{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $(-1)^n a_n \sim -\frac{3\pi}{8n}$, donc $\sum(-1)^n a_n$ est divergente.

EXERCICE 444 Rang et dimension de sous-espaces vectoriels

Titre : Rang et dimension de sous-espaces vectoriels
ID : 674 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 655 | ID : 674
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie non nulle n et f et g deux endomorphismes de E tel que $f \circ g = \theta$ et $f + g \in \mathbf{GL}(E)$. Démontrer que $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$.

Une question qu'on peut ajouter :
Donner des exemples de tels endomorphismes.

Solution

Rédaction de la référence :
$f \circ g = 0$ donne (1) : $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(f)$, d'où (2) $\mathrm{rg}\,(g) \leq n - \mathrm{rg}\,(f)$. $f + g \in \mathbf{GL}(E)$ donne $(f+g)(E) = E$. Avec $(f+g)(E) \subset f(E) + g(E)$, il vient $f(E) + g(E) = E$. Alors $\dim(f(E)) + \dim(g(E)) = \dim(f(E) + g(E)) + \dim(f(E) \cap g(E))$, ce qui donne : (3) $\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) = n + \dim(f(E) \cap g(E)) \geq n$. Avec (2) et (3), il vient $\mathrm{rg}f + \mathrm{rg}g = n$, c'est-à-dire $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\ker(g))$. L'inclusion (1) et l'égalité des dimensions donne enfin $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$.

Ma rédaction personnelle :
Comme $f + g \in \mathbf{GL}(E)$, on a $(f+g)(E) = E$, donc $E \subset f(E) + g(E)$. Il en découle que $n \leq \dim(f(E) + g(E)) = \mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) - d$ où $d = \dim(f(E) \cap g(E))$. Donc $n \leq \mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g)$. Comme $f \circ g = \theta$, on a $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(f)$, donc $\mathrm{rg}\,(g) \leq n - \mathrm{rg}\,(f)$. Il s'ensuit que $rg(f) + \mathrm{rg}\,(g) \leq n \leq rg(f) + \mathrm{rg}\,(g)$, d'où l'égalité $\mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g) = n$, qui donne $\mathrm{rg}\,(f) = n - \mathrm{rg}\,(g) = \dim(\ker(g))$, donc $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(g)$ sont de même dimension et l'un inclus dans l'autre, donc $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$.

EXERCICE 445 Série entiere et équivalent au voisnage de $+\infty$

Titre : Série entiere et équivalent au voisnage de $+\infty$
ID : 685 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 666 | ID : 685
Difficulté : ★★☆☆☆

1. Montrer que la série entière de terme général $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.
2. Pour tout x réel, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{e}} e^{ex}.$$

Montrer que lorsque x tend vers $+\infty$, on a

$$f(x) \sim g(x).$$

Solution

1. Pour tout entier naturel n, posons

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{n!},$$

et cherchons un équivalent de a_n. On a tout d'abord

$$n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = n - \frac{1}{2} + \circ(1)$$

Donc

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n-\frac{1}{2}+\circ(1)} \sim \frac{e^n}{\sqrt{e}}$$

Il en résulte que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{n!} \sim \frac{e^n}{\sqrt{e}} \frac{1}{n!}.$$

La série entière de coefficient $e^n/n!$ est la série de l'exponentielle. Elle a donc un rayon de convergence infini. Alors la série entière de coefficient a_n a aussi un rayon de convergence infini. Posons

$$b_n = \frac{e^n}{\sqrt{e}} \frac{1}{n!}.$$

Pour tout x réel, on a alors

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

2. Pour tout $n \geq 0$, posons

$$\varepsilon_n = a_n/b_n - 1$$

On a donc

$$a_n = b_n + b_n \varepsilon_n$$

et, puisque $a_n \sim b_n$, la suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 . Alors, pour $x > 0$, on obtient en sommant

$$f(x) = g(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon_n x^n.$$

Montrer que $f(x) \sim g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ revient alors à montrer que la quantité

$$u(x) = \frac{1}{g(x)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon_n x^n$$

tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $n \geq N$ implique

$$|\varepsilon_n| < \varepsilon/2.$$

Alors, pour $x > 0$, on obtient

$$\frac{1}{g(x)} \left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon_n x^n \right| \leq \frac{\varepsilon}{2g(x)} \sum_{n=N}^{\infty} b_n x^n + \frac{1}{g(x)} \sum_{n=0}^{N-1} b_n \left|\varepsilon_n\right| x^n \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{g(x)} \sum_{n=0}^{N-1} b_n \left|\varepsilon_n\right| x^n.$$

Mais, puisque les fonctions polynômes sont négligeables devant g en $+\infty$, on a alors

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{g(x)} \sum_{n=0}^{N-1} b_n \left|\varepsilon_n\right| x^n = 0$$

Donc il existe $\alpha > 0$ tel que $x > \alpha$ implique

$$\frac{1}{g(x)} \sum_{n=0}^{N-1} b_n \left|\varepsilon_n\right| x^n < \frac{\varepsilon}{2}$$

Alors

$$|u(x)| = \frac{1}{g(x)} \left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varepsilon_n x^n \right| < \varepsilon,$$

ce qui montre que $u(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, d'où l'on déduit l'équivalence

$$f(x) \sim g(x)$$

au voisinage de $+\infty$.

EXERCICE 446 Rayon de convergence et somme d'une série entière

Titre : Rayon de convergence et somme d'une série entière
ID : 688 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 669 | ID : 688
Difficulté :

Soit la série entière de terme général

$$a_n = \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n t}{1+t} \mathrm{d}t$$

Déterminer le rayon de convergence R de cette série et écrire sa somme sous forme d'intégrale lorsque x appartient à l'intervalle $[-R, R]$.

Solution

• Étudions tout d'abord la série entière de coefficient na_n. Elle a même rayon de convergence que la série de coefficient a_n puisque c'est sa série dérivée. Si l'on pose, pour x dans $]-1,1$ et t dans $[0,\pi]$,

$$f_n(t) = \frac{\sin^n t}{1+t} x^n,$$

on a

$$|f_n(t)| \leq |x|^n$$

et la série de fonctions continues f_n converge normalement sur $[0,\pi/2]$. On peut donc intervertir les sommations et il en résulte que la série entière de terme général $na_n x^n$ converge. Sa somme vaut

$$S(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+t)(1-x\sin t)} \mathrm{d}t.$$

On a donc $R \geq 1$.
• Étudions ce qui se passe lorsque $x = 1$. On a dans ce cas $f_n(t) = \frac{\sin^n t}{1+t}$; et cette série de fonctions a pour somme $f(t) = \frac{1}{(1+t)(1-\sin t)}$.
Comme f_n est positive, si la série de terme général a_n convergeait, elle aurait comme somme $\pi/2$ $\int_0 f(t)dt$, mais, au voisinage de $\pi/2$,

$$f(t) = \frac{1}{(1+t)(1-\cos(\pi/2-t))} \sim \frac{1}{1+\pi/2} \frac{2}{(\pi/2-t)^2}$$

Donc f n'est pas intégrable et la série diverge. Il en résulte que $R \leq 1$. Finalement $R = 1$. - On reprend l'étude précédente avec la fonction définie, pour x fixé dans $[-1,1]$ et t dans $[0,\pi/2]$, par

$$g_n(t) = \frac{\sin^n t}{n(1+t)} x^n$$

Lorsque x appartient à $[-1,1]$, on a

$$|g_n(t)| \leq \frac{\sin^n t}{n(1+t)} = h_n(t)$$

La fonction h_n est continue et positive sur $[\,0,\pi/2\,[$ et la série de fonctions h_n converge vers

$$h(t) = \frac{-\ln(1-\sin t)}{1+t}$$

Au voisinage de $\pi/2$, on a

$$\sin t = \cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 (1+\varepsilon(t))$$

où $\varepsilon(t)$ tend vers 0 en $\pi/2$. Alors

$$\ln(1-\sin t) = 2\ln\left(\frac{\pi}{2}-t\right) + \ln\frac{1+\varepsilon(t)}{2}$$

et

$$\frac{\ln(1-\sin t)}{2\ln\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} = 1 + \frac{\ln\frac{1+\varepsilon(t)}{2}}{2\ln\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}$$

Cette expression tend vers 1 en $\pi/2$ et il en résulte que

$$\ln(1-\sin t) \sim 2\ln\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$$

et

$$h(t) \sim -\frac{2}{1+\pi/2}\ln\left(\frac{\pi}{2}-t\right).$$

Comme l'intégrale $\int_0^1 \ln t dt$ converge, il en résulte que h est intégrable sur $[\,0,\pi/2[$. Alors, d'après le théorème de convergence dominée, on peut permuter les sommations et l'on en déduit que pour tout x de $[-1,1]$, on a :

$$S(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{-\ln(1-x\sin t)}{(1+t)} \mathrm{d}t.$$

EXERCICE 447 — DSE de $\exp(\exp(x))$

Titre : DSE de $\exp(\exp(x))$ — **Difficulté :** ★★☆☆☆
ID : 694 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 675 | ID : 694

Démontrer que la fonction $x \mapsto f(x) = \exp(\exp(x))$ est développable en série entière et préciser son rayon de convergence.

Solution

On écrit $\exp(\exp(x)) = \sum \frac{e^{nx}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(nx)^m}{n!m!}$, ensuite utiliser les familles sommables. On démontre que la famille $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ tel que $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, u_{n,m} = \frac{(nx)^m}{n!m!}$ est sommable. Pour ce faire il suffit de prouver que si $x \in \mathbb{R}$, la famille $(|(u_{n,m}|)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, or dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} |u_{n,m}| = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(n|x|)^m}{m!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{n|x|}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(e^{|x|})^n}{n!} = e^{e^x}$. La théorème de sommation par paquets des familles à termes positifs permet de conclure.

EXERCICE 448 Fontion discontinue admettant les dérivées partielles

Titre : Fontion discontinue admettant les dérivées partielles
ID : 404 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 390 | ID : 404
Difficulté : ★☆☆☆☆

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ tel que , pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on aie :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Prouver que f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$
2. Prouver que f est discontinue au point $(0,0)$

Solution

1. La suite $u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ tends vers $(0,0)$ quand n tends vers $+\infty$ mais $f(u_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{2\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$ ne converge pas vers $f(0,0) = 0$, donc f n'est pas continue au point $(0,0)$.
2. On a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Par symétrie des rôles, on a aussi $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Donc f admet des dérivées partielles en $(0,0)$, cependant f n'est pas différentiable au point $(0,0)$ car elle est discontinue en $(0,0)$.

EXERCICE 449 Etude de continuité et différentiabilité selon un paramètre

Titre : Etude de continuité et différentiabilité selon un paramètre
ID : 405 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 391 | ID : 405
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ tel que :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^a \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Démontrer les assertions suivantes :

(1) f est continue si et seulement si $a > 0$

(2) f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $a > \frac{1}{2}$.

(3) f est de classe C^1 si et seulement si $a > 1$.

Solution

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, X = (x,y) \mapsto f(X) = \begin{cases} (x^2+y^2)^a \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad X \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{si} \quad X = (0,0) \end{cases}.$$

(1) Continuité de f :
• Supposons que $a > 1$. Remarquons que si pour tout $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, on note $\|X\| =$

$\sqrt{x^2+y^2}$ alors

$$(\star) \quad f(X) = \|X\|^{2a} \sin \frac{1}{\|X\|}.$$

Il en découle que on a $|f(X)| \leq \|X\|^{2a}$, inégalité valable aussi si $X = (0,0)$, Comme $\lim\limits_{X\to(0,0)} \|X\|^{2a} = 0$ (vrai car $a > 0$), la fonction f est continue au point $(0,0)$.

• Si $a = 0$ alors, pour tout $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, on a $f(X) = \sin \frac{1}{\|X\|}$ de sorte que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $X_n = (x_n, 0)$ avec $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ alors $f(X_n) = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(X_n) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(X_n) \neq f((0,0))$ alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = (0,0)$. La caractérisation séquentielle de la continuité permet de conclure que f n'est pas continue au point $(0,0)$.

• Si $a < 0$, posons $a = -\alpha$ avec $\alpha > 0$. Pour X_n défini ci-dessus on a $f(X_n) = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui justifie la discontinuité de f au point $(0,0)$. On a ainsi prouvé que : La fonction f est continue au point $(0,0)$ si et seulement si $a > 0$. Or la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$ est équivalente à sa continuité au point $(0,0)$ car sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, on a f est obtenue à partir de fonction usuelles continues et des opérations et composition des applications continues tel que $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ qui est polynomiale , $t \mapsto \sqrt{t}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ continue sur $\mathbb{R}^*$, la fonction sin continue sur $\mathbb{R}$ et $t \mapsto t^b$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $a > 0$.

(2) Différentiabilité de f :

• Si $a > \frac{1}{2}$ alors en notant pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$h(x) = \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \frac{f(x,0)}{x} = \frac{x^{2a}}{x} \sin \frac{1}{|x|},$$

on a $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\neq0}} h(x) = 0$ car $|h(x)| \leq |x|^{2a-1}$, et comme $a > \frac{1}{2}$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\neq0}} |x|^{2a-1} = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\neq0}} h(x) = 0$, ce qui donne $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, et par symétrie des rôles pour x et y, on a aussi $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Ainsi : $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Cela ne suffit pas pour déclarer que f est différentiable au point $(0,0)$. Pour le prouver il faut montrer que si pour tout $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$g(X) = f(x,y) - f(0,0) - x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

alors $g(X) = o(\|X\|)$ quand X tend vers $(0,0)$ et $X \neq (0,0)$. On a $\frac{|g(X)|}{\|X\|} \leq \|X\|^{2a-1}$ et comme $2a-1 > 0$, on a $\lim\limits_{X\to(0,0)} \frac{|g(X)|}{\|X\|} = 0$, d'où le résultat désiré. Donc f est différentiable au point $(0,0)$.

• Si $a = \frac{1}{2}$ alors f n'est pas différentiable car $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas ; en effet, en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$h(x) = \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = |x| \sin \frac{1}{|x|},$$

la fonction h n'admet pas de limite quand x tend vers 0 car pour $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ et $x'_n = \frac{1}{\frac{\pi}{6}+2n\pi}$ on a bien (x_n) et (x'_n) convergent vers 0 quand n tend vers $+\infty$, mais $h(x_n) = 1$ et $h(x'_n) = \frac{1}{2}$ donc $(h(x_n))$ et $(h(x'_n))$ tendent vers des limites différentes.

• Si $a < \frac{1}{2}$ alors f n'est pas différentiable car $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas ; en effet, en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$h(x) = \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = |x| \sin \frac{1}{|x|},$$

la fonction h n'admet pas de limite quand x tend vers 0 car pour $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ on a $h(x_n) = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^{1-2a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $1-2a > 0$.

Compte tenu du fait que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ puisque elles est obtenue par les opérations usuelles et la composition à partir de fonctions de classe C^∞, on a en vertu de l'étude ci-dessus : f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si f est différentiable au point $(0,0)$ si et seulement si $a > \frac{1}{2}$.

(3) f de classe C^1 si et seulement si $a > 1$:
Avant de commencer, notons que f est même de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ car les fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, X \mapsto x^2+y^2$, $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}; t \mapsto \sqrt{t}$, $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}; t \mapsto \frac{1}{t}$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto \sin(t)$, $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}; t \mapsto t^{2a}$ sont toutes de classe C^∞ et la composée de deux telles fonctions est aussi de classe C^∞. Donc f est de classe C^1 si et seulement sises dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues au point $(0,0)$, et par symétrie des rôles cela est équivalent à $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue au point $(0,0)$. On va donc s'intéresser à la limite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} h(x)$ avec

$$h(x) = \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = |x|\sin\frac{1}{|x|}.$$

• Si $a > 1$ alors $|h(x)| \leq \|X\|^{a-1} \underset{X\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue au point $(0,0)$ et par symétrie des rôles, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est aussi continue au point $(0,0)$.

• Si $a = 1$ alors $h(x) = \sin\frac{1}{|x|}$ de sorte que pour $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ on a $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais $h(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et comme $1 \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}$ est discontinue au point $(0,0)$, donc f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

• Si $a < 1$, alors pour $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ on a $h(x_n) = \left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^{1-a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue au point $(0,0)$.

EXERCICE 450 Contre-exemple à propos des dérivées suivant tout vecteur

Titre : Contre-exemple à propos des dérivées suivant tout vecteur
Difficulté : ★☆☆☆☆
ID : 406 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 392 | ID : 406

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{si} \quad y = 0 \\ 0 & \text{si} \quad y \neq 0 \end{cases}$.
Démontrer que :

1. f est continue au point $(0,0)$
2. f est dérivable au point $(0,0)$ suivant tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$
3. f n'est pas différentiable au point $(0,0)$.

Solution

1. On adopte la norme de $\mathbb{R}^2$ provenant de son produit scalaire usuel. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|f(x,y)| \leq |x| \leq \|(x,y)|$, donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Il en découle que f est continue au point $(0,0)$.
2. Remarquons que $f(0,0) = 0$. Soit $u = (a,b)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ différent de $(0,0)$. Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ donc $f(tu) = f(ta,0) = ta$ pour tout réel $t \neq 0$, ce qui montre que f est dérivable en $(0,0)$ suivant u et que $D_u f(0,0) = a$. Si $b \neq 0$, on a $f(tu) = f(ta,tb) = 0$ pour tout réel $t \neq 0$, d'où l'on déduit que f est dérivable en $(0,0)$ suivant u et que $D_u f(0,0) = 0$.
3. Supposons f différentiable en $(0,0)$. Notons (e_1,e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit $e = e_1 + e_2 = (1,1)$. On a $df(0,0)(e) = D_e f(0,0) = 0$. Par ailleurs, $df(0,0)(e_1) + df(0,0)(e_2) =$

$D_{e_1}f(0,0) + D_{e_2}f(0,0) = 1 + 0 = 1$, ce qui contredit la linéarité de $df(0,0)$. Donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

EXERCICE 451 Discontinue et admet dérivée suivant tout vecteur

Titre : Discontinue et admet dérivée suivant tout vecteur
Difficulté : ★☆☆☆☆
ID : 407 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 393 | ID : 407

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Démontrer que :

1. f est discontinue au point $(0,0)$
2. f est dérivable au point $(0,0)$ suivant tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$

Solution

1. On a $f(0,0) = 0$. Pour tout réel $x > 0, 0 < x^2/2 < x^2$ donc $f\left(x, x^2/2\right) = 1$, ce qui montre que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x, \frac{x^2}{2}\right) = 1 \neq 0 = f(0,0)$, or

$$\lim_{x\to 0}\left(x, \frac{x^2}{2}\right) = (0,0),$$

donc la fonction f est discontinue en $(0,0)$.

2. Soit $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$
   • Si $a = 0$ alors $\forall t \in \mathbb{R}, f(tu) = f(0,tb) = 0$.
   • Si $a \neq 0$ et $b = 0$ alors $\forall t \in \mathbb{R}, f(tu) = f(ta,tb) = 0$
   • Si $ab \neq 0$ alors $\forall t \in \mathbb{R}, |t| < \frac{|b|}{a^2} \Rightarrow f(tu) = 0$.
   Il en découle que $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(tu)}{t} = 0$. Donc f est dérivable en $(0,0)$ suivant le vecteur u et $D_u f(0,0) = 0$.

EXERCICE 452 Contre-exemple ; Théorème de Shwarz

Titre : Contre-exemple ; Théorème de Shwarz
Difficulté : ★☆☆☆☆
ID : 408 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 394 | ID : 408

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad x = y = 0 \end{cases}$.

1. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
2. Comment expliquer ce résultat ?

Solution

Dans tout ce qui suit on note $U = \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
1. Il est aisé de voir que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$ et que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$. Pour

tout $(x,y) \in U$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(y(x^2-y^2)+2x^2y)(x^2+y^2)-2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

en particulier : $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -\frac{y^5}{y^4} = -y$, donc $\frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = -1$, ce qui justifie $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1$
De la même façon, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x(x^2-y^2)-2y^2x)(x^2+y^2)-2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{x^5}{x^4} = x$, donc $\frac{1}{x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = 1$, ce qui justifie $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$

2. On a trouvé $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, chose qu'on explique par le fait que f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car si c'était le cas le théorème de Schwarz aurait donné l'égalité des dérivées partielle d'ordre 2 ci-dessus.

EXERCICE 453 Différentiable et dérivée partielle discontinue

Titre : Différentiable et dérivée partielle discontinue
ID : 409 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 395 | ID : 409
Difficulté :

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ tel que , pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on aie :

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Prouver que f est différentiable au point $(0,0)$
2. Prouver que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n' est pas continue au point $(0,0)$

Solution

1. On a $\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, par symétrie des rôles on a aussi $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, notons $\Delta(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - (x-0)\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - (y-0)\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, on a $\Delta(x,y) = xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Si on note $X = (x,y)$ et $\|X\| = \sqrt{x^2+y^2}$, on a $|\Delta(X) \leq \|X\|^2$ donc $\Delta(X) = o(\|X\|)$, ce qui justifie que f est differentiable au point $(0,0)$ et $df(0,0) = \theta$ où θ est l'application nulle de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X) = y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \left(\frac{3}{n}, \frac{4}{n}\right)$, on a $\lim_{n\to+\infty} U_n = (0,0)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(U_n) = \underbrace{\frac{4}{n} \sin \frac{n}{5}}_{\alpha_n} + \underbrace{\frac{36}{125} \cos \frac{n}{5}}_{\beta_n}$$

On a $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ et la suite (β_n) diverge donc $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(U_n)\right)_{n\geq 1}$ diverge et par suite et par symétrie des rôles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas continues au point $(0,0)$.

EXERCICE 454 Exemples d'études d'extremums

Titre : Exemples d'études d'extremums
ID : 410 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 396 | ID : 410
Difficulté : ★☆☆☆☆

Déterminer les extremums locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$
3. $f(x,y) = x^3 + y^3$
4. $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$
5. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Solution

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$, donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y - 3$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y - 6$, donc (x,y) est un point critique si et seulement si $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$ si et seulement si $(x,y) = (0,3)$. La hessienne de f au point (x,y) est $H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ puisque $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$. En particulier la hessienne au point critique $(0,3)$ est $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a $rt - s^2 = 4 - 1 = 3 > 0$ et $r = 2 > 0$, donc f admet un minimum local stricte au point $(0,3)$. Notons qu'il s'agit en fait d'un minimum strict absolu car c'est le seul extrémum et que la valeur de f en ce point et $f(0,3) = -9$.
2. On a $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$, la même méthode donne $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y - 2x - 2$, donc $(1,1)$ unique point critique et la hessienne en ce point est $H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, on $rt - s^2 = 8 - 4 = 4 > 0$ et $r > 0$, encore un minimum strict absolu.
3. On a $f(x,y) = x^3 + y^3$, donc $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$ et $(0,0)$ est le seul point critique. La hessienne de f au point $(0,0)$ est la matrice nulle, elle ne permet pas de conclure mais on remarque que si $X_n = (\frac{1}{n}, 0)$ alors $f(X_n) = \frac{1}{n^3} > 0$ et si $Y_n = (-\frac{1}{n}, 0)$ alors $f(Y_n) = -\frac{1}{n^3} < 0$. On a donc un point selle au point $(0,0)$.
4. $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$ de classe C^∞ car polynomiale. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-y) + 3(x+y)^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2(x-y) + 3(x+y)^2$, donc $(0,0)$ est le seul point critique, la hessienne au point $(0,0)$ est $H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, donc $rt - s^2 = 0$ et cela ne permet pas de conclure. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a pour $X_n = (\frac{1}{n}, 0)$ $f(X_n) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} > 0$ et pour $Y_n = (-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n})$, on a $f(Y_n) = -\frac{8}{n^3} < 0$, donc $f(0,0)$ est un point selle.
5. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x$, donc (x,y) est un point critique si et seulement si $\begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$ si et seulement si $(x,y) = (0,0)$ ou $(x,y) = (1,1)$ donc on a deux points critiques. On a $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y$. Il en découle que :
   • Pour la point critique $(0,0)$, on a $r = 0, s = -3, t = 0$ donc $rt - s^2 = -9 < 0$, donc on a un point selle.
   • Pour le point critique $(1,1)$, on a $r = 6, s = -3, t = 6$, donc $rt - s^2 = 27 > 0$ et $r > 0$, donc on a un minimum local strict au point $(1,1)$ de valeur $f(1,1) = -1$.

EXERCICE 455 Recherche d'extrémums sur un fermé

Titre : Recherche d'extrémums sur un fermé
ID : 411 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 397 | ID : 411
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 9\}$. Trouver les extremums sur D de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}+y^2-1$.

Solution

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 9\}$ et $\forall (x,y) \in D, f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}+y^2-1$.
Soit $\Omega = \text{Int}(D)$ l'intérieur de D, donc $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 < 9\}$, qui est le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 3. La fonction f est de classe C^2 sur Ω et pour tout $(x,y) \in \Omega$, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+2\right) y \end{cases}$$

Il en découle que pour tout $(x,y) \in \Omega$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq 0$ par suite aucun point critique sur l'ouvert Ω pour f.

- Comme D est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, c'est un compact, donc f possède un maximum et un minimum sur D. Comme il n'y a pas d'extremum local sur l'intérieur de D, les extremums sont atteints sur la frontière de D à savoir $\text{Fr}(D) = \{0\} \cup C(0,3)$ où $C(0,3) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 = 9\}$ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 3.
- On a $f(0,0) = -1 \leq f(x,y)$ pour tout (x,y) de D, donc $f(0,0)$ est un minimum global de f atteint au point $(0,0)$.
- Sur le cercle $C((0,0),3)$, si $(x,y) \in C((0,0),3)$ alors $f(x,y) = y^2+2$. Il e, découle que
- $\max\limits_{(x,y)\in C((0,0),3)} f(x,y) = \max\limits_{-3\leq y\leq 3}(y^2+2) = \max\limits_{0\leq y\leq 3}(y^2+2) = 11$ atteint aux points $(0,\pm 3)$.
- $\min\limits_{(x,y)\in C((0,0),3)} f(x,y) = \min\limits_{-3\leq y\leq 3}(y^2+2) = \min\limits_{0\leq y\leq 3}(y^2+2) = 2$ atteint aux points $(0,\pm 3)$, et comme on a déjà vu que $f(0,0) = -1$, on donne le resumé suivant : f ademt un minimum absolu sur D au point $(0,0)$ de valeur -1, et un maximum absolu aux points $(0,\pm 3)$ de valeur 11.

EXERCICE 456 Recherche d'extremums

Titre : Recherche d'extremums
ID : 412 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 398 | ID : 412
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $f(x,y) = xe^y + ye^x$. Étudier si f a des extremums .

Solution

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert. Les éventuels extrema de f vérifient les conditions nécessaires :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y + ye^x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y + e^x = 0 \end{cases}$$

La première équation donne : $e^{y-x} = -y$ et la seconde : $e^{y-x} = -\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$. On a donc $xy = 1$ - On peut remplacer y par $\frac{1}{x}$ dans la deuxième équation, c'est-à-dire chercher x tel que $g(x) = 0$ avec le tableau de variation de la fonction g définie par $g(x) = xe^{1/x} + e^x$. - Mais il est plus rapide d'écrire les équations du système sous la forme :

$$e^{y-x} + y = 0 \quad \text{et} \quad e^{x-y} + x = 0$$

d'où par soustraction :

$$2\,\mathrm{sh}(y-x)+(y-x)=0.$$

La fonction $\varphi : t \mapsto 2\,\mathrm{sh}\,t + t$ est dérivable, et pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(t) = 2\,\mathrm{ch}\,t + 1 > 0$$

Ainsi φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective. Comme $\varphi(0) = 0$, on a :

$$\varphi(t) = 0 \iff t = 0.$$

On doit donc avoir $x = y$. Par suite $y = -\mathrm{e}^{y-x} = -1$ et $x = \frac{1}{y} = -1$. On vérifie ensuite aisément que ce point vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,-1) = \frac{\partial f}{\partial y}(-1,-1) = 0.$$

Le seul point critique de f est donc $(x,y) = (-1,-1)$.
Attention ! Le fait que $(-1,-1)$ soit un point critique n'implique pas que fy admette un extremum. Nous avons juste restreint le problème à un seul point : si f a un extremum, c'est en $(-1,-1)$.
- Étude du point critique
Pour déterminer si f admet ou non un extremum local en $(-1,-1)$, on effectue un DL de f, dans le but de trouver un équivalent simple de $f(x,y) - f(-1,-1)$ en $(-1,-1)$. Dans ce développement, le terme d'ordre 1 correspond à la différentielle de f en $(-1,-1)$, nulle puisqu'on a un point critique. Il faut donc faire un DL à l'ordre 2 au moins.
On a $f(-1,-1) = -2\mathrm{e}^{-1}$, donc pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
f(h-1,k-1) + 2\mathrm{e}^{-1} =& (h-1)\mathrm{e}^{k-1} + (k-1)\mathrm{e}^{h-1} + 2\mathrm{e}^{-1} \\
=& (h-1)\mathrm{e}^{-1}\left(1 + k + \frac{k^2}{2} + o_0\left(k^2\right)\right) \\
&+ (k-1)\mathrm{e}^{-1}\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + o_0\left(h^2\right)\right) + 2\mathrm{e}^{-1} \\
=& \mathrm{e}^{-1}\left(hk - \frac{k^2}{2} + hk - \frac{h^2}{2}\right) + o_{(0,0)}\left(h^2+k^2\right) \\
& \underset{(h,k)\to(0,0)}{\sim} hk\mathrm{e}^{-1} - \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}(h-k)^2.
\end{aligned}$$

L'équivalent trouvé n 'est pas de signe constant au voisinage de $(-1,-1)$: en prenant $h = k$, $f(h-1,h-1) - f(-1,-1)$ a même signe que $h^2\mathrm{e}^{-1}$ au voisinage de 0 , donc est strictement positif. Cependant, si on prend $h = 0$, $f(-1,k-1) - f(-1,-1)$ a même signe que $-\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}k^2$ au voisinage de 0 , donc est strictement négatif. f n'admet donc pas d'extremum en $(-1,-1)$.

EXERCICE 457 Différentiabilité des normes non euclidienns

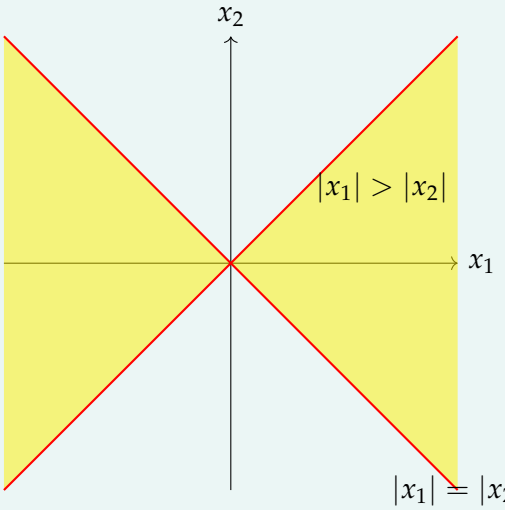
Titre : Différentiabilité des normes non euclidienns
Difficulté : ★☆☆☆☆
ID : 413 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 399 | ID : 413

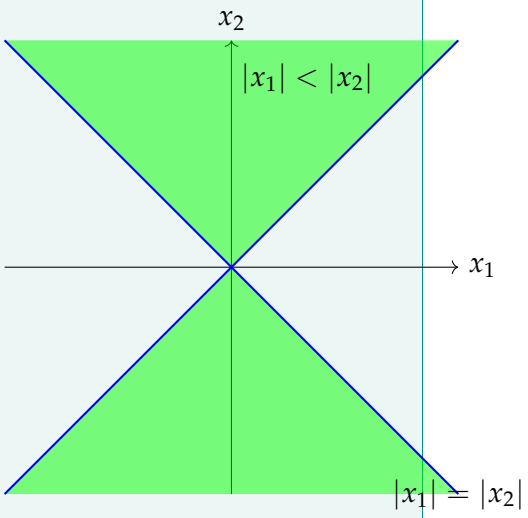
1. Pour tout $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(X) = \|X\|_1 = |x_1| + |x_2|$ et $g(X) = \|X\|_\infty = \sup(|x_1|, |x_2|)$. Étudier la différentiabilité de f et g sur $\mathbb{R}^2$ en précisant la partie de $\mathbb{R}^2$ des points où f (rep. g) est différentiable.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Démontrer que la norme euclidienne associée est différentiable sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et préciser sa différentielle en tout point de U.
   (a) En utilisant les composées d'applications différentiables

(b) En calculant les dérivées partielles.

Solution

1. On nous demamnde d'étudier la différentiablité de f et g, on voit que celle de g est plus simple et on prouvera que l'étude de f se ramène à celle de g.
• Etudions d'abord g définie par $g(X) = \sup(|x_1|, |x_2|)$, et commençons par l'étuidier sur l'ouvert $\Omega_1 = \{X \in \mathbb{R}^2 / |x_1| > |x_2|\}$, représenté ci-dessous par la zone colorée en jaune. On voit que pour tout $X \in \Omega_1$, on a $g(X) = |x_1|$. Or $X \mapsto x_1$ étaont linéaire est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et $t \mapsto |t|$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et comme on a $\forall X = (x_1, x_2) \in \Omega_1, x_1 \in \mathbb{R}^*$, la fonction g est de classe C^∞ sur Ω_1.





Par symétrique des rôle on peut dire aussi que g est de classe C^∞ sur l'ouvert $\Omega_2 = \{X \in \mathbb{R}^2 / |x_1| < |x_2|\}$. On peut donc faire une synthèse et dire que g est de classe C^∞ sur l'ouvert $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.
Etude aux points de $\mathbb{R}^2 \backslash \Omega$:
Soit $A = (a, a) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a > 0$. On a :

$$\begin{aligned} D_{e_1} g(A) &= \lim_{t \to 0+} \frac{g(a+t, a) - g(a, a)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0+} \frac{\sup(|a+t|, |a|) - \sup(|a|, |a|)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0+} \frac{(a+t) - a}{t} = 1 \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} D_{-e_1} g(A) &= \lim_{t \to 0+} \frac{g(a-t, a) - g(a, a)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0+} \frac{\sup(|a-t|, |a|) - \sup(|a|, |a|)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0+} \frac{a - a}{t} = 0 \end{aligned}$$

Donc $D_{e_1} g(A) \neq D_{-e_1} g(A)$.
La même démarche est valable pour les autres cas à savoir $A = (a, a)$ et $a \leq 0$, puis $A = (a, -a)$ pour les cas respectifs $a \leq 0$ puis $a \geq 0$.

Remarque :

Généralement si $n \geq 2$ la fonction $X \mapsto \|X\|_\infty$ est differentiable sur l'ouvert :

$$\Omega = \{X \in \mathbb{R}^n / \exists i \in [\![1, n]\!], \forall k \in [\![1, n]\!] \backslash \{i\}, |x_i| > |x_k|\}$$

On voit que $\Omega = \underset{i\in[\![1,n]\!]}{\cup} \Omega_i$ avec la définition suivante de Ω_i, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\Omega_i = \{X \in \mathbb{R}^n / \forall k \in [\![1,n]\!]\backslash\{i\}, |x_i| > |x_k|\}$$

On peut démontrer aussi que g n'est differentiable en aucun point de $\mathbb{R}^n\backslash\Omega$. En effet :
• Sur Ω_i, on a $\forall x \in \Omega_i, g(X) = |x_i| = |\pi_i(X)|$ où $\pi_i(X) = x_i$. On voit que π_i est differentiable sur Ω_i car c'est la restriction d'une application linéaire. Or si $X \in \Omega_i$ alors forcément $x_i \neq 0$ car sinon on aurait $|x_k| = 0, \forall k \in [\![1,n]\!]$, chose fausse puisque $X \in \Omega_i$. Par ailleurs $t \mapsto |t|$ est differentiable sur l'ouvert $\mathbb{R}^*$. Par composition g est differentiable sur Ω_i, donc sur Ω.
• Si $A = (a_k) \in \mathbb{R}^n\backslash\Omega$ alors $\exists p, q \in [\![1,n]\!]$ tel que $p \neq q$ et $\|A\|_\infty = |a_p| = |a_q|$.
• Si $a_p \neq 0$ on observe que pour tout nombre réel non nul t on a

$$\begin{cases} |a_p + t| = |a_p| + |t| & \text{si} \quad ta_p > 0 \\ |a_p + t| < |a_p| & \text{si} \quad ta_p < 0 \end{cases}$$

l en decoule que :
- Si $ta_p > 0$ alors $g(A + te_p) - g(A) = |t|$.
- Si $ta_p < 0$ alors $g(A + te_p) - g(A) = |a_q| - |a_p| = 0$, car on a supposé que $|a_p| = |a_q|$. Il en découle que les limites de $\frac{g(A+te_p)-g(A)}{t}$ quand t tends vers 0 à droite et à gauche respectivement valent l'une ± 1 et l'autre 0, donc g n'admet pas de dérivée suivant e_p au point A, par suite g n'est pas differentiable au point A.
• Si $a_p = 0$ alors $A = 0$ dans ce cas on a $\frac{g(A+te_1)-g(A)}{t} = \frac{|t|}{t}$ n'admet pas de limite quand t tend vers 0, donc g n'est pas differentiable au point A.

• Etude de f : Pour tout vecteur $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, si on note $u(X) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ alors $\|X\|_1 = \|u(X)\|_\infty$, en effet les expressions intervenant dans cette égalité sont invariantes par les symétries axiales S_{Ox_1}, S_{Ox_2} et S_Δ, où Δ est la première bissectrice, on se ramène au cas où $0 \leq x_1 \leq x_2$, pour lequel on a $\|X\|_1 = x_1 + x_2$ et $\|u(X)\|_\infty = \sup(x_1 + x_2, x_2 - x_1) = x_1 + x_2$, donc $\|X\|_1 = \|u(X)\|_\infty$. Il en découle que $\forall X \in \mathbb{R}^n, f(X) = g(u(X))$ et comme u est un isomorphisme et on est en dimension finie alors u ainsi que sa bijection réciproque u^{-1} sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout point $X \in \mathbb{R}^2$, on a f est différentiable au point X si et seulement si g est différentiable au point $u(X)$ si et seulement si $u(X) \in \Omega$ où Ω est l'ouvert $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / |x_1| \neq |x_2|\}$. Il en découle que f n'est pas différentiable au point X si et seulement si $|x_1 + x_2| = |x_1 - x_2|$ si et seulement si $(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2$ si et seulement si $x_1 x_2 = 0$ si et seulement si $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$.

2. (a) **Première méthode : Composition** On a $f(X) = \sqrt{\Phi(u(X))}$ avec, pour tout $u : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^2, X \mapsto u(X) = (X, X)$; $\Phi : (\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R}; (X, Y) \mapsto \Phi(X, Y) = \langle X, Y\rangle$ et $s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, t \mapsto s(t) = \sqrt{t}$. On voit que :
• u est differentiable sur $\mathbb{R}^n$ car elle est linéaire et on est en dimension finie, donc elle est à fortiori differentiable sur U. On a pour tout $X_0 \in U$ et tout $H \in \mathbb{R}^n$:

$$du((X_0))(H) = u(H) = (H, H)$$

• Φ est differentiable sur $(\mathbb{R}^n)^2$ car elle est bilinéaire et on est en dimension finie, donc à fortiori sur U^2. On a pour tout $(X_0, Y_0) \in U^2$ et tout $(H, K) \in (\mathbb{R}^n)^2$:

$$\mathrm{d}\Phi(X_0, Y_0)(H, K) = \Phi(X_0, K) + \Phi(H, Y_0) = \langle X_0, K\rangle + \langle H, Y_0\rangle.$$

• s est differentiable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $h \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{d}s(x_0)(h) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}h$

• On a $f = s \circ \Phi \circ u$ donc si $X_0 \in U$ et $H \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned} df(X_0)(H) &= [\mathrm{d}s((\Phi \circ u)(X_0)) \circ \mathrm{d}(\Phi \circ u)(X_0)](H) \\ &= \mathrm{d}s(\langle u(X_0), u(X_0)\rangle(\mathrm{d}\Phi(X_0, X_0))(H)) \\ &= \mathrm{d}s(\|X_0\|^2)(2\langle X_0, H\rangle) = \frac{1}{2\|x_0\|}2\langle X_0, H\rangle \\ &= \frac{\langle X_0, H\rangle}{\|X_0\|} \end{aligned}$$

(b) **Deuxième méthode : Utilisation des dérivées partielles** Puisque'on sait déjà que f est differentiable en tout point de U alors pour tout $X \in U$ et tout $H \in \mathbb{R}^n$ tel que $H = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$, on a

$$\mathrm{d}f(X)(H) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$$

Comme $f(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, on a $\frac{\partial f}{\partial x_i} = (X) = \frac{x_i}{\|X\|}$, donc

$$\mathrm{d}f(X)(H) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{x_i}{\|X\|} = \frac{1}{\|X\|}\sum_{i=1}^{n} h_i x_i = \frac{\langle X, H\rangle}{\|X\|}$$

On voit bien que les deux méthode aboutissent au même résultat.

EXERCICE 458 Différentiabilité de $M \mapsto M^2$ (matrices)

Titre : Différentiabilité de $M \mapsto M^2$ (matrices) **Difficulté :**
ID : 414 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 400 | ID : 414

1. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$.
Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer la différentielle de f en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $g : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $g(M) = \mathrm{tr}(M^3)$.
Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer la différentielle de g en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. **Généralisation :** Répondre aux même questions avec $f(M) = M^p$ et $g(M) = \mathrm{tr}(M^p)$ où $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$

Solution

1. f est de classe C^1 car les composantes de f relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont polynômiales en les composantes $(m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de M. Plus précisément ces composantes sont $(f_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ définies comme suit $\forall i, j \in [\![1, n]\!], f_{i,j}(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}m_{k,j}$.
• Si $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $f(M+H) = (M+H)^2 = M^2 + MH + HM + H^2$ donc $f(M+H) = f(M) + L_M(H) + \varphi(H)$ avec $L_M(H) = MH + HM$, on voit bien que L_M est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si on adopte une norme matricielle on a $\|\varphi(H)\| = \|H^2\| \leq \|H\|^2$, donc $\varphi(H) = o(\|H\|)$ quand H tend vers 0. Cela permet de dire que la différentielle de f au point M est $df(M)$ définie par $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), df(M)(H) = MH + HM$.
2. g est de classe C^1 car elle est polynômiale en les composantes de la matrice M. Pour tous $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $(M+H)^3 = M^3 + M^2H + MHM + H^2M + H^2M + HMH + MH^2 + H^3$, donc $f(M+H) = f(M) + 3\,\mathrm{tr}(M^2H) + 3\,\mathrm{tr}(MH^2) + \mathrm{tr}(H^3)$. L'application $H \mapsto 3\,\mathrm{tr}(M^2H)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ et comme tr est continue linéaire il existe une constante k tel que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |\mathrm{tr}(X)| \leq k\|X\|$ où $\|.\|$ est une norme matricielle fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sorte que

$|3\,\mathrm{tr}(MH^2)+\mathrm{tr}(H^3)| \leq 3k\|M\|\|H\|^3+k\|H\|^3$ donc on a bien $g(M+H)=g(M)+L(H)+o(\|H\|)$ quand H tend vers 0 avec $L(H)=3\,\mathrm{tr}(M^2H)$ est linéaire dons la différentielle de g en tout point M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $d(g)(M)$ tel que $\forall H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), dg(M)(H)=3\,\mathrm{tr}(M^2H)$

3. Les applications f et g sont même de classe C^∞ car pour f ses composantes $f_{i,j}$ relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont polynômiales en les coordonnées de M et g est polynômiale en les coordonnées de M. On trouve comme ci-dessus, pour tout $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les différentielles :
$$df(M)(H)=\sum_{j=0}^{p-1}M^jHM^{p-1-j}$$
et
$$dg(M)(H)=p\,\mathrm{tr}(M^{p-1}H)$$

EXERCICE 459 Un exemple de fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$

Titre : Un exemple de fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ — **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 415 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 401 | ID : 415

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ tel que , pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on aie :
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. Prouver que f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$
2. Prouver que f n'est pas différentiable au point $(0,0)$
3. Étudier la continuité de f au point $(0,0)$.

Solution

1. Pour tout $x\in^*_R$, On a $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0$, donc $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ et par symétrie des rôles on a aussi $\frac{\partial f}{\partial y}=0$.
2. Si f est différentiable au point $(0,0)$ sa différentielle serait définie par : $\forall(h,k)\in\mathbb{R}^2, df(0,0)(h,k)=h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ et par définition de la différentiabilité on aurait $f(h,k)=f(0,0)+df(0,0)(h,k)+o(\|(h,k)\|)$ ce qui veut dire que $f(h,k)=o(\sqrt{h^2+k^2})$ quand (h,k) tend vers $(0,0)$, donc que $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk}{h^2+k^2}=0$ et ce n'est pas vrai car pour $u_n=\left(\frac{1}{}/n,1/n\right)$ on a $\varphi(1/n,1/n)=\frac{1}{2}$ où $\varphi(h,k)=\frac{hk}{h^2+k^2}$ pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
3. On a $\|f(x,y)|\leq\frac{\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|}=\|(x,y)\|\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$, donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$, donc f est continue au point $(0,0)$.

EXERCICE 460 Etude de $f(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$

Titre : Etude de $f(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$ — **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 416 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 402 | ID : 416

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$

1. Quel est l'ensemble de définition D de f ?
2. f est elle de classe C^1 sur D ?
3. Soit $a = (0,1)$ et $n = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Calculer en fonction de α et β, le nombre réel $\partial_n f(a)$, le nombre dérivé de f au point a suivant n.

Solution

1. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$, donc $x + \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$. De plus $x + \sqrt{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow x = y = 0$, par suite $x + \sqrt{x^2+y^2} > 0 \Leftrightarrow (x,y) \neq (0,0)$ donc l'ensemble de définition de f est $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$
2. L'application $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est de classe C^1 sur D car polynômiale en x et y, l'application $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Par composition et opérations usuelles de fonctions de classe C^1, on en déduit que f est de classe C^1 sur D.
3. La dérivée de f au point $a = (0,1)$ suivant le vecteur $n = (\alpha, \beta)$ est par définition $\partial_n(a) = \varphi'_{a,n}(t)$ où la fonction $\varphi_{a,n}$ est définie par :

$$\varphi_{a,n}(t) = f(a+tn) = f(t\alpha, 1+t\beta) = \ln(\alpha t + \sqrt{\alpha^2 t^2 + (1+\beta t)^2})$$

On voit bien que φ est bien définie sur un voisinage de 0, chose confirmée par $a = (0,1) \in D$ et comme D est un ouvert il contient un voisinage de a.

On a pour t voisin de 0 : $\varphi'_{a,n}(t) = \frac{u'(t)}{u(t)}$ où pour tout t voisin de 0, on a $u(t) = \alpha t + \sqrt{\alpha^2 t^2 + (1+\beta t)^2}$, par suite on e tout de suite : $u(0) = 1$ et $u'(t) = \alpha + \frac{2\alpha^2 t + 2(1+\beta t)\beta}{2(\sqrt{\alpha^2 t^2 + (1+\beta t)^2})}$, de sorte que $u'(0) = \alpha + \beta$. Il en découle que $\partial_n(a) = \alpha + \beta$.

EXERCICE 461 Equations aux dérivées partielles

Titre : Equations aux dérivées partielles
ID : 417 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 403 | ID : 417
Difficulté : ★☆☆☆☆

1. Trouver les applications $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = 0$
2. Trouver les applications $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de : $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$
   On pourra pose $\varphi(u,v) = \frac{1}{2}(u+v, u-v)$ et $G = F \circ \varphi$).

Solution

sera donnée aprs

EXERCICE 462 Fonction à deux variables à partir d'une à une seule

Titre : Fonction à deux variables à partir d'une à une seule
ID : 418 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 404 | ID : 418
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable et soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si} \quad x \neq y \\ f'(x) & \text{si} \quad x = y \end{cases}.$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ si et seulement si F est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que si f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ alors F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Solution

1. On va démontrer deux implications :
   • Si F est continue sur $\mathbb{R}^2$ alors f' est continue sur $\mathbb{R}$ puisque $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = F(t,t)$, donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   • Réciproquement, supposons que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et notons $\Delta = \{(x,x)/x \in \mathbb{R}\}$.
   • Sur $\mathbb{R}^2\backslash\Delta$, la fonction F est continue comme rapport de deux fonctions continues dont celle du dénominateur ne s'annule jamais sur U.
   • Si $a \in \mathbb{R}$, on va prouver que F est continue au point (a,a). Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f' est continue au point a, donc il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$|x-a| < \eta \Rightarrow |f'(t) - f'(a)| < \varepsilon$$

   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|(x,y)-(a,a)\|_\infty < \eta$. Si $x \neq y$, par exemple $x < y$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x,y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)$, donc $|F(x,y) - F(a,a)| = |f'(c) - f'(a)|$ et comme $x < c < y$ et $x, y \in]a-\eta, a+\eta[$, on a $[c-a| < \eta$, donc $|f'(c) - f'(a)| < \varepsilon$, donc $|F(x,y) - F(a,a)| < \varepsilon$. Ce raisonnement s'adapte aussi au cas $y < x$. Si $x = y$ alors $F(x,y) - F(a,a) = f'(x) - f'(a)$ et comme $|x-a| < \eta$, on a $|f'(x) - f'(a)| < \varepsilon$, donc $|F(x,y) - F(a,a)| < \varepsilon$. On a donc prouvé que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)-(a,a)\|_\infty < \eta \Rightarrow |F(x,y) - F(a,a)| < \varepsilon.$$

   Il en découle que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Supposons que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Comme $f'(x) = F(x,x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, par composition, f' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
   • Récproquement, si on supposeque f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, comme $F(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ pour tout $(x,y) \in U = \mathbb{R}^2\backslash\Delta$, on a F est de classe C^2 donc de de classe C^1 sur U.
   • Il reste à démontrer que les dérivées partielles d'ordre 2 de F existent et sont continues en tout point (a,a) de Δ.
   Pour tout $(x,y) \in U$, on a $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{f'(x)(x-y)-f(x)+f(y)}{(x-y)^2}$ et $\frac{\partial F}{\partial x}(a,a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{F(x,a)-F(a,a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)}{x-a}$.

EXERCICE 463 Equation aux dérivées partielles et changement de variable

Titre : Equation aux dérivées partielles et changement de variable
Difficulté : ★☆☆☆☆
ID : 419 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 405 | ID : 419

Pour tout $(s,u) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $u(r,s) = (r^2+s^2, 2rs)$. Soit $U = \{(r,s) \in \mathbb{R}^2/r > s > 0\}$

1. Justifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$
2. Prouver que u est injective et de classe C^1 sur U et qu'elle induit une bijection notée aussi u de U vers $V = u(U)$.
3. Déterminer $V = u(U)$ et soit $v : V \to \mathbb{R}^2$ définie par $v(x,y) = u^{-1}(x,y)$. Démontrer que v est de classe C^1 sur V.
4. Soit f une application de classe C^2 de V vers $\mathbb{R}$. On note (x,y) la variable décrivant V et $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ les premières dérivées partielles de f, et ainsi de suite pour les dérivées partielles d'ordre 2. Soit $g : V \to \mathbb{R}$ tel que $g(r,s) = f(u(r,s))$ pour tout $(r,s) \in U$.
   Exprimer les dérivées partielles : $\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial r \partial s}$ au point $(r,s) \in U$ en fonction en fonction des dérivées partielles de de f au point $(x,y) = u((r,s)) \in V$

Solution

sera donnée aprs

1. $U=\{(r,s)\in\mathbb{R}^2/r>s>0\}=(]0,+\infty[)^2\cap V$, avec $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x>y\}$. On a V est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car c'est l'image réciproque de $]0,+\infty[$ par l'application $(x,y)\mapsto x-y$ qui est continue car linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, donc U intersection de deux ouverts est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $(r_k,s_k)\in U, k\in\{1,2\}$ tel que $u((r_1,s_1))=u((r_2,s_2))$, donc $\begin{cases} r_1^2+s_1^2=r_2^2+s_2^2 \\ r_1s_1=r_2s_2 \end{cases}$. Il en découle que $r_1^2+s_1^2+2r_1s_1=r_2^2+s_2^2+2r_2s_2$, donc $(r_1+s_1)^2=(r_2+s_2)^2$ et comme $r_k+s_k>0$, on a $r_1+s_1=r_2+s_2$ et par suite on a

$$\begin{cases} r_1+s_1 &= r_2+s_2 \\ r_1s_1 &= r_2s_2 \\ r_1 &< s_1 \\ r_2 &< s_2 \end{cases}$$

   Il en découle que pour tout $k\in\{1,2\}$ on a r_k et s_k sont deux solutions distinctes d'une équation du deuxième degré $t^2-\sigma t+p=0$ avec $r_k<s_k$. Par unicité on a $r_1=r_2$ et $s_1=s_2$, d'où u est injective donc induit une bijection de U vers $V=u(U)$.
3. On rappelle que si a et b sont deux nombres réels alors le système $\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$ admet au moins une solution si et seulement si l'équation du deuxième degré $t^2-at+b=0$ en admet une si et seulement si le disciminent $\Delta_{a,b}=a^2-4b$ est positif ou nul. Plus précisément si $\Delta_{a,b}=0$, c'est-à-dire $a^2=4b$, le système admet une unique solution à savoir $(\frac{a}{2},\frac{a}{2})$, et si $\Delta_{a,b}>0$, c'est-à-dire $a^2-4b>$, le système admet exactement deux solutions (x,y) et (y,x), de plus $x\neq y$ et on peut adopter une notation tel que $x<y$, avec $x=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$ et $y=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$. Partant de ce rappel, si $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, alors $(x,y)\in V$ si et seulement si il existe $\exists(r,s)\in\mathbb{U}$, $\begin{cases} r^2+s^2=x \\ rs=y \end{cases}$ si et seulement si $\exists(r,s)\in\mathbb{U}$, $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$ et $\begin{cases} r^2+s^2=x \\ r^2s^2=y^2 \end{cases}$, si et seulement si on a les conditions $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$ et $x^2-4y^2>0$, (strictement car $r<s$), par suite

$$V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x>0 \text{ et } y>0 \text{ et } x^2-4y^2>0\}$$

   Pour tout $(x,y)\in V$, on a l'expression explicite de $u^{-1}(x,y)$ à savoir

$$u^{-1}(x,y)=\left(\sqrt{\frac{x^2-\sqrt{x^2-4y^2}}{2}},\sqrt{\frac{x^2+\sqrt{x^2-4y^2}}{2}}\right)$$

   La fonction u^{-1} est de classe C^1 sur V car elle est obtenue à partir de fonctions usuelles de classe C^1 et des operations usuelles, les expression sous les radicaux étant toutes strictement positives.
4. On a selon le principe de dérivation en chaîne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r,s) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u(r,s))\frac{\partial x}{\partial r}(r,s)+\frac{\partial f}{\partial y}(u(r,s))\frac{\partial y}{\partial r}(r,s) \\ &= 2r\frac{\partial f}{\partial x}(u(r,s))+s\frac{\partial f}{\partial y}(u(r,s)) \end{aligned}$$

   On a, en dérivant par rapport à r les membres de l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,s) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)(r,s)\\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left(2r\frac{\partial f}{\partial x}(u(r,s))\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(s\frac{\partial f}{\partial y}(u(r,s))\right)\\ &= 2\frac{\partial f}{\partial x}(u(r,s))+2r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(u(r,s))\right)+s\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(u(r,s))\right)\end{aligned}$$

En dérivant en chaîne et en vertu de la formule ci-dessus qui donne $\frac{\partial g}{\partial r}(r,s)$, on obtient de la même manière :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(u(r,s))\right) = 2r\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u(r,s))+s\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(u(r,s))$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(u(r,s))\right) = 2r\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(u(r,s))+s\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u(r,s))$$

On en déduit :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,s) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(u(r,s))+4r^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u(r,s))+4rs\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(u(r,s))+s^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u(r,s))$$

On a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial s}(r,s) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u(r,s))\frac{\partial x}{\partial s}(r,s)+\frac{\partial f}{\partial y}(u(r,s))\frac{\partial y}{\partial s}(r,s)\\ &= 2s\frac{\partial f}{\partial x}(u(r,s))+r\frac{\partial f}{\partial y}(u(r,s))\end{aligned}$$

Il en découle que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial s}(r,s) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial g}{\partial s}(r,s)\right)\\ &= 2s\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(u(r,s))\right)+\frac{\partial f}{\partial y}(u(r,s))+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(u(r,s))\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial s}(r,s) = \frac{\partial f}{\partial y}(u(r,s))+2s\left(2r\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u(r,s))+s\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(u(r,s))\right)+r\left(2r\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(u(r,s))+s\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u(r,s))\right)$$

et finalement :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial s}(r,s) = \frac{\partial f}{\partial y}(u(r,s))+4rs\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u(r,s))+2(r^2+s^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(u(r,s))+rs\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u(r,s)).$$

EXERCICE 464 Equation aux dérivées partielles

Titre : Equation aux dérivées partielles
ID : 420 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 406 | ID : 420

Difficulté :

Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > |x|\}$. Trouver toutes les applications $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U tel que :

$$\forall (x,y) \in U \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}$$

en utilisant le changement de variables défini par : $\begin{cases} u = x + y \\ v = y - x \end{cases}$

Solution

On pose comme indiqué $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ et $g(u,v) = f(x,y)$. Selon la règle de dérivation en chaîne on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$$

et en dérivant une seconde fois

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) - 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)$$

De même

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$$

donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u,v) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)$$

L'équation devient

$$-4\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{uv}}$$

donc $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = -\frac{1}{2\sqrt{u}}\sqrt{v} + \varphi(u)$, donc $g(u,v) = -u\sqrt{v} + \Phi(u) + \Psi(v)$, avec Φ et Ψ des applications de classe C^2 donc la solution de l'équation proposée est

$$f(x,y) = -(x+y)\sqrt{x-y} + \Phi(x+y) + \Psi(x-y)$$

EXERCICE 465 Résolution d'une EDP avec changement de variable

Titre : Résolution d'une EDP avec changement de variable
ID : 421 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 407 | ID : 421
Difficulté :

En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = 2x + 3y \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Solution

Comme indiqué posons $\begin{cases} u = x+y \\ v = 2x+3y \end{cases}$ et $f(x,y) = g(u,v)$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + 2\frac{\partial g}{\partial v}(u,v).$$

De même

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + 3\frac{\partial g}{\partial v}(u,v).$$

Il en découle que

$$3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0 \Leftrightarrow g(u,v) = \Psi(v),$$

où Ψ est une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Ainsi les solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0,$$

sont

$$f(x,y) = \Psi(2x+3y).$$

EXERCICE 466 — Equation aux dérivées partielles $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$

Titre : Equation aux dérivées partielles $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$ **Difficulté :** ★☆☆☆☆

ID : 422 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 408 | ID : 422

En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Solution

On adopte le changement de variable $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, chose possible car $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, ce qui autorise la relation $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ et on a aussi $r = \sqrt{x^2+y^2}$. On pose $f(x,y) = g(r,\theta)$. La règle de dérivation en chaîne donne

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\frac{\partial \theta}{\partial y} \end{cases},$$

donc, compte tenu de

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = r^2\sin\theta, \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin\theta}{r}, \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r},$$

il vient :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos\theta\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin\theta\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \end{cases}$$

Il en découle que $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow r\frac{\partial g}{\partial r}=r \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial r}=1 \Leftrightarrow g(r,\theta)=r+\Psi(\theta)$, avec Ψ de classe C^1 sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Finalement les solutions de l'équation proposée sont

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\Psi\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

EXERCICE 467 Equation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$

Titre : Equation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ **Difficulté :**
ID : 423 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 409 | ID : 423

Soit $c>0$. En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u=x+ct \\ v=x-ct \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f:(x,t)\mapsto f(x,t)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Solution

Posons $\begin{cases} u=x+ct \\ v=x-ct \end{cases}$ et $f(x,t)=g(u,v)$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)=\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial t}=c\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)-c\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)\\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)+2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)\end{aligned}$$

Donc

$$(1)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)=\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)+2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(c\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)-c\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)\\ &= c\frac{\partial}{\partial u}\left(c\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)-c\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)-c\frac{\partial}{\partial v}\left(c\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)-c\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)\\ &= c^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)+c^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)-2c^2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)\end{aligned}$$

Il en découle :

$$(2)\quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)=\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)-2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)$$

De (1) et (2), on déduit que l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)$$

est équivalente à

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) - 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v)$$

c'est-à-dire à $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0$, donc $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \varphi(u)$, puis $g(u,v) = \Phi(u) + \Psi(v)$ avec Φ et Ψ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, donc $f(x,t) = \Phi(x+ct) + \Psi(x-ct)$, avec Φ et Ψ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 468 Fonctions homogènes : Une étude

Titre : Fonctions homogènes : Une étude
ID : 424 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 410 | ID : 424
Difficulté :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$(1) \quad (\forall t \in \mathbb{R}_+^*)(\forall (x,y) \in U) \quad (tx,ty) \in U$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est homogène de degré α si :

$$(1) \quad (\forall t \in \mathbb{R}_+^*)(\forall (x,y) \in U) \quad f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$$

1. On suppose que f est de classe C^1 sur U, homogène de degré α. Démontrer que les applications $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont homogènes de degré β à déterminer en fonction de α.
2. On suppose que f est de classe C^1 sur U, homogène de degré α.
   (a) Prouver que : $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$ (Égalité d'Euler).
   (b) Démontrer que, réciproquement, si f est de classe C^1 vérifiant l'égalité d'Euler alors f est homogène de degré α.
3. Dans cette question, on pose : $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < y < x\}$
   (a) Verifier que U est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$ vérifiant la condition (1) ci-dessus.
   (b) Soit b un nombre réel donné. Déterminer toutes les applications : $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1, homogènes tel que :
   $$\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{b}{x^2+y^2}$$

Solution

1. De $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$, on déduit $\frac{\partial}{\partial x} f(tx,ty) = \frac{\partial}{\partial x} t^\alpha f(x,y)$, donc $t\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) = t^\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) = t^{\alpha-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, vraie pour tout $t > 0$ et tout $(x,y) \in U$. Il en découle que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est homogène de degré $\beta = \alpha - 1$. Par symétrie des rôle c'est le cas aussi pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.
2. (a) Soit $(x,y) \in U$ fixé. Pour tout $t > 0$, on a $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$. En dérivant par rapport à t, il vient $x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = \alpha t^{\alpha-1} f(x,y)$ et si on prend $t = 1$, on a $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$, d'où l'égalité d'Euler, $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$.
   (b) Réciproquement supposons que f est de classe C^1 sur U et que $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$, pour tout $(x,y) \in U$. Fixons $(x,y) \in U$ et soit φ l'application de $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = f(tx,ty) - t^\alpha f(x,y)$, alors φ est dérivable et $\varphi'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) -$

$\alpha t^{\alpha-1} f(x,y)$, or $x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = \frac{1}{t}\left(tx\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + ty\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\right) = \frac{1}{t}\alpha f(tx,ty)$, il en découle que $\varphi'(t) = \frac{\alpha}{t}\varphi(t)$, donc φ et comme $\varphi(1) = 0$, on peut dire que φ est l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{\alpha}{t}y \\ y(1) = 0 \end{cases}$, donc $\varphi(t) = \lambda t^\alpha$ et $\varphi(1) = \lambda = 0$, donc φ est nulle

3. (a) U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme intersection de deux ouverts $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < y\}$ et $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x - y > 0\}$, ce sont les images réciproques de l'ouvert $]0,+\infty[$ de $\mathbb{R}$ respectivement par les applications continues $(x,y) \mapsto y$ et $(x,y) \mapsto x - y$ car linéaires en dimension finie . Supposons que $(x,y) \in U$ et soit $t > 0$ alors $0 < ty < tx$, donc $(tx,ty) \in U$.

   (b)

EXERCICE 469 Quotient de Rayleigh : Gradient et points critiques

Titre : Quotient de Rayleigh : Gradient et points critiques
ID : 425 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 411 | ID : 425
Difficulté : ★☆☆☆☆

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle et f la fonction définie sur l'ouvert $U = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ par $f(X) = \frac{\langle AX,X\rangle}{\langle X,X\rangle}$

1. Justifier que f est de classe C^∞ sur U.
2. Déterminer $\nabla f(X)$ pour tout $X \in U$.
3. Démontrer que les points critique de f sont les vecteurs propres de A.

Solution

sera donnée aprs

EXERCICE 470 Différentiabilité d'une application définie par intégrale

Titre : Différentiabilité d'une application définie par intégrale
ID : 426 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 412 | ID : 426
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $f : I \times J \to \mathbb{R}$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe et est continue sur $I \times J$. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 tel que $\varphi(I) \subset J$. On donne $a \in I$ et l'on définit

$$F : I \times J \to \mathbb{R}; (x,y) \mapsto F(x,y) = \int_a^{\varphi(x)} f(t,y)\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que F est continûment différentiable sur $I \times J$ et préciser sa différentielle.
2. Démontrer que si $I = J$ alors
$$G : I \to \mathbb{R}; x \mapsto G(x) = F(x,x)$$
est dérivable sur I et donner sa dérivée.

Solution

sera donnée aprs

EXERCICE 471 Projection orthogonale et différentiabilité

Titre : Projection orthogonale et différentiabilité
ID : 427 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 413 | ID : 427
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \neq E$ et π_F la projection orthogonale de E sur F. On pose pour tout $x \in E$:

$$f(x) = \|x - \pi_F(x)\|.$$

1. Montrer que $x \mapsto \pi_F(x)$ est $1-$lipschitzienne et que pour tout $x, y \in E\backslash F$, on a :
$$\langle \pi_F(x) - \pi_F(y), x - \pi_F(x)\rangle \leq \langle \pi_F(x) - \pi_F(y), x - y\rangle \leq \|x - y\|^2$$
2. Soit $U = E\backslash F$. Justifier que U est une partie ouverte de E et démontrer que f est différentiable sur U et préciser sa différentielle en tout point $a \in U$.

Solution

sera donnée aprs

EXERCICE 472 Application $f : E \to E$ tel que $\forall (x,h) \in E^2, \langle df(x)(h), h\rangle \geq \|h\|^2$

Titre : Application $f : E \to E$ tel que $\forall (x,h) \in E^2, \langle df(x)(h), h\rangle \geq \|h\|^2$
ID : 428 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 414 | ID : 428
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $f : E \to E$ une application de classe C^1 sur E et vérifiant :

$$\forall (x,h) \in E^2, \langle df(x)(h), h\rangle \geq \|h\|^2$$

1. Soit $(x, y) \in E^2$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on pose $\gamma(t) = (1 - t)x + ty$ et $\varphi(t) = \langle \gamma(t), y - x\rangle$. Vérifier que φ est dérivable sur $[0, 1]$ et calculer $\varphi'(t)$, pour tout $t \in [0, 1]$. En déduire que :
$$\forall (x, y) \in E^2, \|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\|$$
2. Montrer que $f(E)$ est dense dans E , puis que f est bijective.
3. Démontrer que f^{-1} est continue sur E.

Solution

sera donnée après

EXERCICE 473 Différentiabilité et convexité

Titre : Différentiabilité et convexité
ID : 429 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 415 | ID : 429
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique. On identifie tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ à la matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée par les coordonnées de x relativement à la base canonique. Soit U un ouvert convexe de E. Une application $u : U \to \mathbb{R}$ est dite convexe si :

$$\forall (x, y) \in U^2, \forall t \in [0, 1], u((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)u(x) + tu(y).$$

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur U.

1. Montrer que f est convexe dans U si et seulement si :

$$\forall (x, x_0) \in U^2, f(x) \geq f(x_0) + df(x_0)(x - x_0)$$

2. On suppose maintenant que f est de classe C^2 sur U et pour tout $(h, k) \in E^2$, de coordonnées respectives $(h_i)_{1\leq n}$ et $(k_i)_{1\leq i\leq n}$, on pose :

$$\Phi(a)(h,k) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i k_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = {}^tHAK$$

où H et K sont les colonnes de coordonées respectives de h et k et A est la matrice $A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1\leq i,j\leq n}$.

(a) Montrer que si f est convexe sur U alors :

$$\forall (x, h) \in U \times E, \Phi(x)(h, h) \geq 0$$

(b) Montrer que réciproquement, si :

$$\forall (x, h) \in U \times E, \Phi(x)(h, h) \geq 0$$

alors f est convexe sur U.

3. Montrer que si f est convexe sur U alors pour tout $a \in U$, si $df(a) = \theta$ (θ étant l'application nulle de E vers $\mathbb{R}$.) alors f admet un minmum absolu eu poin a.

Solution

1. Supposons que f est convexe sur U et soit $(x, x_0) \in U^2$. Par convexité de f pour tout $t \in]0, 1]$, on a $f((1-t)x_0 + tx)) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x)$. Notons que $(1-t)x_0 + tx \in U$ par convexité de U. On a
$f((1-t)x_0 + tx) = f(x_0 + t(x - x_0)) = f(x_0) + tdf(x_0)(x - x_0) + t\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$, donc $f(x_0) + tdf(x_0)(x - x_0) + t\varepsilon(t) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x)$ donc $tf(x) \geq tf(x_0) + tdf(x_0)(x - x_0) + t\varepsilon(t)$ et comme $t > 0$, en divisant par t, il vient : $\forall t \in]0, 1], f(x) \geq f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(t)$. Quand t tends vers 0 à droite, il vient $f(x) \geq f(x_0) + df(x_0)(x - x_0)$.
• Réciproquement, supposons que pour tout$x_0, x \in U$ on a $f(x) \geq f(x_0) + df(x_0)(x - x_0)$. Soit $(x, y) \in U^2$, $t \in [0, 1]$ et $z = (1-t)x + ty$. On a $f(x) \geq f(z) + df(z)(x - z) = f(z) + tdf(z)(x - y)$, donc $f(z) \leq f(x) + tdf(x)(y - x)$ or $df(y - x) \leq f(y) - f(x)$, donc $f(z) \leq f(x) + t(f(y) - f(x))$, donc $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$ et par suite f est convexe.

2. (a) Supposons que f est convexe sur U Soit $x \in U$ et $h \in E$. Par la formule de Taylor à l'ordre 2, il existe V un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in V\backslash\{0\}, \quad f(x + th) = f(x) + tdf(x)(h) + \frac{1}{2}t^2\Phi(x)(h, h) + t^2\varepsilon(h)$$

avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. D'après la question 1) ci dessus et par convexité de f on a $f(x + th) - f(x) - tdf(x)(h) \geq 0$, donc $\frac{1}{2}t^2\Phi(h, h) + t^2\varepsilon(h) \geq 0$ pour tout $t \in V\backslash\{0\}$. Il en découle que pour tout $t \in V\backslash\{0\}$, on a $\Phi(h, h) + 2\varepsilon(h) \geq 0$ et par passage à le limite quand $t \to 0$, on a $\Phi(h, h) \geq 0$ pour tout $h \in E$.

(b) Supposons que $\forall (x, h) \in U \times E, \Phi(x)(h, h) \geq 0$. Soit $x, y \in U$ et soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}; t \mapsto g(t) = f((1-t)x + ty) = f(x + t(y - x))$. Comme f est de classe C^2 sur U, on peut dire que g est de classe C^2 sur $[0, 1]$. La formule de Taylor-Lagrange donne

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(c)$$

avec $0 < c < 1$, or $g(t) = f((1-t)x + ty) = f(x + t(y - x))$ donne $g'(t) = df((1-t)x +$

$ty)(y-x) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}((1-t)x+ty)$, par suite en posant $h = y-x = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$, on a :

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{i=1}^{n} h_i \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}((1-t)x+ty) \\ &= \sum h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}((1-t)x+ty) \\ &= \Phi((1-t)x+ty)(y-x, y-x). \end{aligned}$$

Donc $g''(c) = \Phi((1-c)x+cy)(y-x, y-x)$ et $g''(c) \geq 0$, donc on a démontré que $\forall (x,y) \in U^2, f(y) \geq f(x) + df(x)(y-x)$, ce qui donne d'après 1) que f est convexe sur U.

3. Si f est convexe alors pour tout $(a,x) \in U$, on a $f(x) \geq f(a) + df(a)(x-a)$, donc si $df(a) = \theta$ alors $\forall x \in U, f(x) \geq f(a) + \theta(x-a) = f(a)$, donc $f(a)$ est un minimum absolu de f sur U.

EXERCICE 474 Liste d'application pour étudier si de classe C^1

Titre : Liste d'application pour étudier si de classe C^1 **Difficulté :**
ID : 430 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 416 | ID : 430

Les applications f suivantes sont-elles de classe C^1 ? :

1. $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), f(0,0) = 0$
2. $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ si $x^2+y^2 \neq 0, 0$ sinon,
3. $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $x^2+y^2 \neq 0, 0$ sinon
4. $f(x,y) = \frac{x\sin(y)-y\sin(x)}{x^2+y^2}$ si $x^2+y^2 \neq 0, 0$ sinon
5. $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|}$ si $x^2+y^2 \neq 0, 0$ sinon,
6. $f(x,y) = \exp\left[\frac{1}{x^2+y^2-1}\right]$ si $x^2+y^2 < 1, 0$ sinon
7. $f(x,y) = y^2 \sin\frac{x}{y}$, pour $y \neq 0, 0$ si $y = 0$
8. $f(x,y) = 1-x^2-y^2$ si $x^2+y^2 < 1, 0$ sinon
9. $f(x,y) = (x+y)\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ si $x^2+y^2 \neq 0, 0$ sinon
10. $f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ si $x^2+y^2 \neq 0, 0$ sinon (α est un réel)

Solution

1. $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), f(0,0) = 0$ Pour $x \neq 0, \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc $\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$ De même $\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$ f possède des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$. Pour $(x,y) \neq (0,0), \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ Cette dérivée partielle n'a pas de limite en $(0,0)$. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ mais pas sur $\mathbb{R}^2$ sur lequel elle est cependant continue $\frac{f(x,y)-f(0,0)-x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$ donc f est différentiable en 0; f est dif- férentiable sur $\mathbb{R}^2$.

2. $f(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, f(0,0)=0$ Pour $x\neq 0, \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=1$ donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=1$$

et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$. De même $\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$.

f possède des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$. Pour $(x,y)\neq(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ Soit $t\in\mathbb{R}$. Choisissons $y=tx$ (on fait le choix d'une direction). $\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{1+3t^2-2t^3}{\left(1+t^2\right)^2}$ Ill n'y a donc pas de limite en $(0,0)$ car celles-ci different selon les directions. f n'est donc de classe C^1 que sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

On a $\frac{f(x,y)-f(0,0)-x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=-xy\frac{x+y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ En posant $y=tx$ nous obtenons $-xy\frac{x+y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{t+t^2}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ $(x,y)\longmapsto -xy\frac{x+y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ n'a donc pas de limite en $(0,0)$ et f n'est donc pas différentiable en 0. D'après ce que nous avons vu plus haut, f ne peut être de classe C^1.

3. $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, f(0,0)=0$ f est continue en $(0,0)$ car $|f(x,y)|\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$ $f(x,0)-f(0,0)=0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ de même $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ Pour $(x,y)\neq(0,0), \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^3}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ En posant $y=tx$ nous obtenons pour $x\neq 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{t^3}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ Nous n'avons donc pas de limite en $(0,0)$ et f n'est donc pas différentiable en 0. Nous aurions pu aussi calculer $\frac{f(x,y)-f(0,0)-x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xy}{x^2+y^2}$ En posant $y=tx$ nous obtenons $\frac{f(x,y)-f(0,0)-x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{t}{1+t^2}$ Nous n'avons donc pas de limite en $(0,0)$ et f n'est donc pas différentiable en 0 D'après ce que nous avons vu plus haut, f ne peut être de classe C^1.

4. $f(x,y)=\frac{x\sin(y)-y\sin(x)}{x^2+y^2}, f(0,0)=0$ $f(x,0)-f(0,0)=0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$; de même $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

Pour $(x,y)\neq(0,0)$ nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\left(y^2-x^2\right)\sin(y)-\left(x^2+y^2\right)y\cos(x)+2xy\sin(x)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$\sin(x)=x+x^2\varepsilon_1(x), \cos(x)=1+x\varepsilon_2(x)$ où ε_1 et ε_2 sont des applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues, nulles en 0 . $\left(y^2-x^2\right)\sin(y)-\left(x^2+y^2\right)y\cos(x)+2xy\sin(x)=y^2\left(y^2-x^2\right)\varepsilon_1(y)-xy\left(x^2+y^2\right)\varepsilon_2(x)+2x^3y\varepsilon_1(x)$ Nous en déduisons que si

$$g(x,y)=\left|\left(y^2-x^2\right)\sin(y)-\left(x^2+y^2\right)y\cos(x)+2xy\sin(x)\right|$$

alors

$$g(x,y)\leq\left(x^2+y^2\right)^2\left[|\epsilon_1(y)|+\frac{1}{2}|\varepsilon_2(x)|+|\varepsilon_1(x)|\right]$$

puis

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0.$$

De même

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

f est donc de classe C^1.

5. $f(x,y)=\frac{\sin(xy)}{|x|+|y|}$, $f(0,0)=0\, f(x+h,0)-f(x,0)=0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=0$; de même $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)=0$
Pour x et y non nuls nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y\cos(xy)(|x|+|y|)-\varepsilon\sin(xy)}{(|x|+|y|)^2}$$

où $\varepsilon=\operatorname{sgn}(x)$ $y\cos(xy)(|x|+|y|)-\varepsilon\sin(xy)=y|y|+|x|xy^2\eta_1(xy)+|y|xy^2-|x|xy^2\eta_2(xy)$ où η_1 et η_2 sont des applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues, nulles en 0 . $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|xy^2\eta_1(xy)+|y|xy^2-|x|xy^2\eta_2(xy)}{(|x|+|y|)^2}=0$ $(x,y)\longmapsto\frac{|y|y}{(|x|+|y|)^2}$ n'a pas de limite en $(0,0)$ donc f n'est pas de classe C^1 Pour $a\neq 0$, on a $\lim_{(x,y)\to(a,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ car en se limitant à une boule centrée en $(a,0)$ de rayon au plus égal à $\frac{|a|}{2}$, x reste non nul. f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ $(x,y)\longmapsto\frac{f(x,y)-f(0,0)-x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$n'apasde limite en $(0,0)$ donc n'est pas différentiable et n'est donc évidemment pas de classe C^1

6. $f(x,y)=\exp\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right)$ si $x^2+y^2<1,0$ sinon.
Remarquons que si on pose $X=(x,y)$ et $\|X\|=\sqrt{x^2+y^2}$ alors on a :

$$f(X)=\begin{cases}\exp\left(\frac{1}{\|X\|^2-1}\right) & \text{si} \quad \|X\|<1\\ 0 & \text{si} \quad \|X\|>1\end{cases}$$

Posons :

$$\begin{cases}\Omega_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2<1\}\\ \Omega_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2>1\}\\ \Gamma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2=1\}\end{cases}$$

Il est clair que $U=\Omega_1\cup\Omega_2$. La fonction f est de classe C^1 sur Ω_1 car elle exprimée à l'aide de fonctions usuelles de classe C^1 à partir de la composition et des opérations usuelle toutes valides. Para ailleurs f est nulle sur Ω_1 donc f est de classe C^1 sur Ω_1. Soit $A=(a,b)\in\Gamma$. Pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{a\}$ posons : $h(x)=\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$. On va démontrer que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}h(x)=0$, ce qui signifie que $\frac{\partial f}{\partial x}(A)=0$. Puisque $f(a,b)=0$, on a $h(x)=\frac{f(x,b)}{x-a}$ et deux cas sont possibles : soit $x^2+b^2\geq 1$ alors $h(x)=0$; soit $x^2+b^2<1$, ce qui veut dire $|x|<|a|$, alors $h(x)=\frac{1}{x-a}\exp\left(\frac{1}{x^2-a^2}\right)$.En posant $t=x-a$ on a $t<0$ et $x+a=t+2a$ donc $h(x)=g(t)=\frac{1}{t}\exp\left(\frac{1}{t(t+2a)}\right)\underset{t\to 0^-}{\longrightarrow}0$, ce qui justifie que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}h(x)=0$ et que, tenant compte de la symétrie des rôles en x et y, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(A)=\frac{\partial f}{\partial y}(A)=0$.
Nous avons done finalement

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X)=\begin{cases}-\frac{2x}{(1-\|X\|^2)^2}\exp\left(\frac{1}{\|X\|^2-1}\right) & \text{si} \quad x^2+y^2<1\\ 0 & \text{si} \quad x^2+y^2\geq 1\end{cases}$$

Soit (a,b) un élément du cercle unité. Soit A_1 le disque ouvert centré en $(0,0)$ de rayon 1. Soit A_2 le complémentaire de A_1. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ (z,y)\in\Lambda_2}}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$. Nous savons que pour tout réel $\alpha,\lim_{t\to-\infty}|t|^\alpha\exp(-t)=0$ Nous obtenons alors

$$\lim_{\substack{(x,y,y)\in(a,b)\\ (x,y)\in\Lambda_1}}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$$

puis

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$$

En faisant de même avec $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ nous en déduisons que f est de classe C^1 car sur chacun des ouverts définis par $x^2+y^2-1<0$ ou $x^2+y^2-1>0$, f est de classe C^1.

7. $f(x,y) = y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right)$ pour $y\neq 0$ et 0 sinon. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, |f(x,y)|\leqslant y^2$ donc $\lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y)=0$. f est continue sur $\mathbb{R}^2$

• Pour $y\neq 0$, on a $\frac{1}{y}(f(x,y)-f(x,0)) = y\sin\left(\frac{x}{y}\right)$ donc $\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}(f(x,y)-f(x,0))=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=0$.

• $f(x+y,0)-f(x,0)=0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=0$

• Pour $y\neq 0$ nous avons $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos\left(\frac{x}{y}\right)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right)$ $\lim_{(x,y)\to(a,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0, \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ mais $(x,y)\longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ n'a pas de limite en $(a,0)$ pour $a\neq 0$.f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}^*\times\{0\}$ $\forall (a,h,k)\in\mathbb{R}^3, |f(a+h,k)-f(a,0)|\leqslant k^2$.$f$ est donc différentiable en $(a,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$ d'après ce que nous avons vu plus haut. L'une des dérivées partielles n'est pas continue mais d'après ce qui a été démontré cela suffit à ce que f soit différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

8. $f(x,y)=\begin{cases} 1-x^2-y^2 & \text{si} \quad x^2+y^2<1 \\ 0 \quad \text{sinon}\end{cases}$. Notons A_1 le disque unité ouvert et A_2 son complémentaire. Soit (a,b) un point du cercle unité Il est immédiat que $\lim_{\substack{(x,y,y)\to(x,b)\\(z,w)\in A_1}} f(x,y)=0$ et $\lim_{(z,y,y)\in(a_2,b)} f(x,y)=0$.$f$ est donc continue sur $\mathbb{R}^2$. Pour $h\neq 0$ et $a\neq 0$, $\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = \begin{cases} -h-2a & \text{s } (a+h,b)\in A_1 \\ 0 & \text{s } (a+h,b)\in A_2\end{cases}$ Choisissons $|h|\leq |a|$. Notons $\varepsilon=\text{sgn}(a)\in\{-1,1\}$. Nous obtenons alors dans ces conditions

$$\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = \begin{cases} -h-2a) & \text{si } \varepsilon h<0 \\ 0 & \text{si } \varepsilon h>0\end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon h\to 0^-}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=-2a, \lim_{\varepsilon h\to 0^+}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=0$$

Nous en déduisons $\lim_{h\to 0}\frac{f(h,b)-f(0,b)}{h}=0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,b)=0$ La dérivée partielle selon x en (a,b) avec $a\neq 0$ n'existe pas. De même $\frac{\partial f}{\partial y}(a,0)=0$. La dérivée partielle selon x en (a,b) avec $b\neq 0$ n'existe pas. Pour $a^2+b^2<1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=-2a$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=-2b$.$f$ est donc de classe C^1 sur le complémentaire du cercle unité ; les dérivées partielles ne sont pas continues sur le cercle unité. $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,\pm 1)$ mais pas $\frac{\partial f}{\partial y}$ de même $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(\pm 1,0)$ mais pas $\frac{\partial f}{\partial x}$

9. $f(x,y)=(x+y)\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ si $x^2+y^2\neq 0, 0$ sinon. Pour $x\neq 0$,

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = |x|\sin\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

Nous obtenons immédiatement

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$$

puis

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$$

De même $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ Pour $(x,t)\neq(0,0)$ nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\frac{x(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\sqrt{x^2+y^2}) \\ &\quad -\frac{x(x+y)}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\end{aligned}$$

On a : $|x(x+y)| \leqslant \sqrt{2}\left(x^2+y^2\right)$, donc

$$\left|\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\frac{x(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\sqrt{x^2+y^2})\right| \leq (1+\sqrt{2})\sqrt{x^2+y^2}$$

Donc :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\frac{x(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\sqrt{x^2+y^2}) = 0$$

En revanche $(x,y) \longmapsto \frac{x(x+y)}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ n'a pas de limite en $(0,0)$ f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(f(x,y)-f(0,0)-x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(f(x,y)-f(0,0)-x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = 0$$

f est donc différentiable en $(0,0)$

10. $f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ si $x^2+y^2 \neq 0, 0$ sinon ; où α est un réel.
∴ Supposons $\alpha > 1$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Supposons $y = tx$ Pour $(y,x) \neq (0,0), f(x,tx) = \frac{t}{(1+t^2)^\alpha}x^{2^{1-\alpha}}$ Pour $t > 0, \lim_{x\to 0} f(x,tx) = +\infty$, pour $t < 0, \lim_{x\to 0} f(x,tx) = -\infty$ et pour $t = 0$ $\lim_{x\to 0} f(x,tx) = 0$ f n'est pas continue en $(0,0)$
∴ Supposons $\alpha = 1$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Supposons $y = tx$. Pour $(y,x) \neq (0,0)$ $f(x,tx) = \frac{t}{1+t^2} \cdot f$ n'a donc pas de limite en $(0,0)$ et f n'est pas continue en $(0,0)$
∴ Supposons $\alpha < 1$.$|f(x,y)| \leqslant \left(x^2+y^2\right)^{1-\alpha}$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.$f$ est continue en $(0,0)$. Pour $x \neq 0, f(x,0) = 0$ et pour $y \neq 0, f(0,y) = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$
Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\left((1-2\alpha)x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{1+\alpha}}$
• Pour $\alpha < \frac{1}{2}$, on a $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}(1-2\alpha)$. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$. f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
• Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,tx) = \frac{t^3}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'a pas de limite en $(0,0)$ Pour $\alpha > \frac{1}{2}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,tx) = x^{2\frac{1}{2}-\alpha}\frac{t\left(1-2\alpha+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^{1+\alpha}}$ Pour $t\left(1-2\alpha+t^2\right) \neq 0, (x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,tx)$ n'est pas borné au voisinage de $(0,0)$ f n'est pas continue en $(0,0)$ donc n'est pas de classe C^1.

EXERCICE 475 — Etude de $g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \text{ pour } x \neq y \\ f'(x) \text{ pour } x = y \end{cases}$

Titre : Etude de $g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \text{ pour } x \neq y \\ f'(x) \text{ pour } x = y \end{cases}$

Difficulté : ★☆☆☆☆

ID : 431 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 417 | ID : 431

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{pour} \quad x \neq y \\ f'(x) & \text{pour} \quad x = y \end{cases}$$

1. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. On suppose que f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Solution

Dans tout ce qui suit on note $\Delta = \{(x,x)/x \in \mathbb{R}\}$ et $\Omega = \mathbb{R}^2\backslash\Delta$. Par symétrie des rôles, on s'intéressera à l'étude de la dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial x}$, la méthode utilisée sera la même pour la dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial y}$.

1. On commence par l'implication directe :
   • Si on suppose que g est continue sur $\mathbb{R}^2$, puisque on a $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x,x)$, on déduit que f' est continue sur $\mathbb{R}$, donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   • Réciproquement, si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, il est facile de voire que g est continue sur Ω, puisque les applications $(x,y) \mapsto f(x) - f(y)$ et $(x,y) \mapsto x - y$ sont continues sur Ω et la dernière n'est s'y annule jamais. Il reste à démontrer que g est continue au point (a,a) pour tout $a \in \mathbb{R}$. Pour cela soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$, comme f' est continue au point a, il existe $\eta > 0$ tel que :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, |t-a| < \eta \Rightarrow |f'(t) - f'(a)| < \varepsilon.$$
   Soit $(x,y) \in \Omega$. Comme f' est continue sur le segment de bornes x et y, on a :
   $$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\mathrm{d}t,$$
   donc :
   $$g(x,y) - f'(a) = \frac{1}{y-x}\int_x^y \left(f'(t) - f'(a)\right)\mathrm{d}t.$$
   Il en découle que
   $$\begin{cases} |x-a| \leq \eta \\ |y-a| \leq \eta \end{cases} \Rightarrow |g(x,y) - f'(a)| \leq \frac{1}{|y-x|}\left|\int_x^y \varepsilon \mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon$$
   • Si $x \in \mathbb{R}$ et $(|x-a| \leq \eta$, alors :
   $$|g(x,x) - f'(a)| = |f'(x) - f'(a)| \leq \varepsilon.$$
   Il en découle que g est donc continue en $(a,a) \in \mathbb{R}^2$. Tout ce qui précède montre que donc g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Là encore on a deux implication à démontrer :
   • Supposons que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = g(x,x)$, donc f' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
   • Réciproquement, supposns que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Vu l'expression de $g(x,y)$ pour $(x,y) \in \Omega$, il est clair que g est de classe C^1 sur Ω et pour tout $(x,y) \in \Omega$, on a :
   $$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{f(y) - f(x) - (y-x)f'(x)}{(x-y)^2}.$$
   Par ailleurs, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a,a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x,a) - f(a,a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)}{(x-a)^2} \end{aligned}$$
   Comme f est de classe C^2, la formule de Taylor-Young au voisinage de a donne :
   $$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + (x-a)^2h(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} h(x) = 0$$
   Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(a,a) = \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{2}f''(a) + h(x)\right) = \frac{1}{2}f''(a)$.

En résumé, on vient de prouver que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{f(y)-f(x)-(y-x)f'(x)}{(y-x)^2} & \text{si} \quad x\neq y\\ \frac{1}{2}f''(x) & \text{si} \quad x=y\end{cases}$$

f étant de classe $\mathcal{C}^2$ nous avons en vertu de la formule de Taylor avec reste intégral : pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ la relation :

$$f(y)-f(x)=(y-x)f'(x)+\int_x^y (y-t)f''(t)dt.$$

Il vient donc, pour $x\neq y$:

$$\frac{(x-y)f'(x)+f(y)-f(x)}{(x-y)^2}-\frac{1}{2}f''(a)=\frac{1}{(x-y)^2}\int_x^y (y-t)\left(f''(t)-f''(a)\right)dt$$

donc

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-f''(a)\right|\leq\frac{1}{(x-y)^2}\sup_{t\in[x,y]}|f''(t)-f''(a)|\int_x^y |y-t|\mathrm{d}t.$$

Soit $\varepsilon>0$. Comme f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, f'' est continue au point a, par suite il existe $\eta>0$ tel que :

$$\forall t\in\mathbb{R}, |t-a|<\eta\Rightarrow|f''(t)-f''(a)|\leq 2\varepsilon.$$

- Si $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\Delta$ et $\begin{cases}|x-a|\leq\eta\\|y-a|\leq\eta\end{cases}$ alors :

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\frac{1}{2}f''(a)\right|\leq\frac{2\varepsilon}{(x-y)^2}\int_x^y|y-t|\mathrm{d}t=\varepsilon.$$

- Si $x\in\mathbb{R}$ on sait que $\frac{\partial g}{\partial x}(x,x)=\frac{1}{2}f''(x)$, par suite :

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,x)-\frac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right|=\frac{1}{2}\left|f'(x)-f'(a)\right|<\varepsilon.$$

Ainsi on a démontré que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\begin{cases}|x-a|<\eta\\|y-a|<\eta\end{cases}\Rightarrow\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right|<\varepsilon,$$

ce qui prouve la continuité de $\frac{\partial g}{\partial x}$ au point (a,a) pour tout $a\in\mathbb{R}$ et finalement on a $\frac{\partial g}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
Le même travail est valable pour $\frac{\partial g}{\partial y}$ par symétrie des rôles. Donc g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 476 — EDP $2x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]+\frac{\partial f}{\partial y}-1=0$

Titre : EDP $2x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]+\frac{\partial f}{\partial y}-1=0$ **Difficulté :** ★☆☆☆☆

ID : 432 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 418 | ID : 432

Soit l'application ϕ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\phi(u,v)=(u^2-v^2,2uv)$.

1. ϕ est-elle différentiable ? Quelle est sa matrice jacobienne ? En quels points le déterminant jacobien est-il nul ?

2. Déterminer en fonction de x, y et du signe de y, les antécédents par ϕ d'un couple quelconque (x,y) de $\mathbb{R}^2$.
3. En déduire que la restriction $\tilde{\phi}$ de ϕ à l'ensemble Δ tel que :

$$\Delta = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / v > 0 \text{ ou } (v = 0 \text{ et } u \geq 0)\right\}$$

est une bijection de Δ sur $\mathbb{R}^2$.
Montrer que $\tilde{\phi}^{-1}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

4. Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et soit $F = f \circ \tilde{\phi}$. Exprimer $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$ à l'aide de u, v et des dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

5. Quelles sont les solutions de classe C^2 de l'équation aux dérivées partielles :

$$2x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] + \frac{\partial f}{\partial y} - 1 = 0 \ ?$$

Solution

1. Oui, ϕ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ car ses composantes $\phi_1 : (u,v) \mapsto u^2 - v^2$ et $\phi_2 : (u,v) \mapsto 2uv$ sont polynomiales en u et v, donc différentiables sur $\mathbb{R}^2$. La matrice jacobienne de ϕ au point (u,v) est

$$J_\phi(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}$$

On a $\det(J_f(u,v) = 4u^2 + 4v^2$, donc il est nul si et seulement si $(u,v) = (0,0)$.

2. Un couple (u,v) est un antécédant de (x,y) si et seulement si $\phi(u,v) = (x,y)$ si et seulement si $\begin{cases} u^2 - v^2 = x \\ 2uv = y \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} u^2 - v^2 = x \\ u^2(-v^2) = -\frac{y^2}{4} \\ s(uv) = s(y) \end{cases}$ en notant $s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t > 0 \\ -1 & \text{si} \quad t < 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$

et cela est équivalent à u^2 et $-v^2$ sont solutions de l'équation $t^2 - xt - \frac{y^2}{4} = 0$ et $s(uv) = s(y)$, donc à $\begin{cases} u^2 = \frac{x + \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}}{2} \\ -v^2 = \frac{x - \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}}{2} \\ s(uv) = s(y) \end{cases}$.

3.
4.
5.

EXERCICE 477 Continuité et différentiabilité d'une application à deux variables

Titre : Continuité et différentiabilité d'une application à deux variables
Difficulté : ★☆☆☆☆
ID : 433 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 419 | ID : 433

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x} e^{-\frac{|y|}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

1. Etudier la continuité de f.
2. Etudier la différentiabilité de f.

Solution

1. Posons $g(t) = t\exp(-t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$; alors g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = (1-t)\exp(-t)$, donc $\forall t \in \mathbb{R}_+, 0 \leq g(t) \leq \frac{1}{e}$.
Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ on a :

$$f(x,y) = x\,\mathrm{sgn}(y)\frac{|y|}{x^2}\exp\left(-\frac{|y|}{x^2}\right) = x\,\mathrm{sgn}(y)g\left(\frac{|y|}{x^2}\right),$$

donc $|f(x,y)| \leq \frac{|x|}{e}$; donc pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y) = 0$. Il en découle que f est continue au point $(0,b)$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$. On a $\frac{f(x,b)-f(0,b)}{x} = \frac{b}{x^2}\exp\left(-\frac{|b|}{x^2}\right)$. On sait que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a : $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha e^{-t} = 0$ donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,b)-f(0,b)}{x} = 0,$$

ce qui veut dire que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,b) = 0$. Nous avons donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2}\left(\frac{2|y|}{x^2}-1\right)\exp\left(-\frac{|y|}{x^2}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Soient $b \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $y \neq b$. On a : $\frac{f(0,y)-f(0,b)}{y-b} = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$.
Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2$. On a :

$$\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = \frac{1}{x}e^{-\frac{|y|}{x^2}},$$

donc

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = \frac{1}{x},$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 0$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \frac{1}{x}.$$

Nous avons donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(1-\frac{|y|}{x^2}\right)\exp\left(-\frac{|y|}{x^2}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Soit $b \in \mathbb{R}^*$. Il est immédiat que

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,b)$$

et de même

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,b).$$

Soient $t \in \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$.
- On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,tx^2) = t(2|t|-1)e^{-t}$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'a pas de limite en $(0,0)$.
- On a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,tx^2) = \frac{1}{x}(1-|t|)e^{-t}$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,tx) = \frac{1}{x}\left(1-\frac{|t|}{|x|}\right)\exp\left(-\frac{|t|}{|x|}\right),$$

donc $\lim_{x\to 0}\frac{\partial f}{\partial y}(x,tx)=0$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ n'a pas de limite en $(0,0)$.
• f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et est donc differentiable sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
• Pour $x^2+y^2\neq 0$, posons

$$\Delta(x,y)=f(x,y)-f(0,0)-x\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)-y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

On sait que f est differentiable au point $(0,0)$ si et seulement si $\Delta(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$, quand $(x,y)\to(0,0)$; or

$$\frac{\Delta(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Posons $y=tx^2$ avec $t\neq 0$, on a $\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{t\,\mathrm{sgn}(x)}{\sqrt{1+t^2x^2}}\exp(-|t|)$. Il n'y a pas de limite nulle lorsque x tend vers 0 donc f n'est pas differentiable en $(0,0)$.

EXERCICE 478 — Exemple d'application réelle à deux variables réelles

Titre : Exemple d'application réelle à deux variables réelles
ID : 434 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 420 | ID : 434
Difficulté : ★☆☆☆☆

On considère :

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R},(x,y)\longmapsto\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Étudier :

1. La continuité de f.
2. L'existence des dérivées partielles d'ordre 1 de f.
3. La continuité des dérivées partielles d'ordre 1 de f.

Solution

• Remarquons d'abord que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2=0\Leftrightarrow(x,y)=(0,0)$.
1) Continuité de f :
• D'après les théorèmes généraux, f est continue sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.
• Continuité au point $(0,0)$. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on note $\|(x,y)\|=\sup(|x|,|y|)$.
• On a : $|f(x,y)|\leq|x|\leq\|(x,y)\|\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$ (voir commentaire en bas)
[a]
, donc :

$$f(x,y)\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0=f(0,0),$$

ce qui montre que f est continue au point $(0,0)$.
• On conclut : f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2) Existence des dérivées partielles premières :
• D'après les théorèmes généraux, les deux dérivées partielles premières de f existent sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et on a :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\},\quad\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{3x^2\left(x^2+y^2\right)-x^3 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^4+3x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{2x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{cases}$$

• L'application partielle $f(\cdot,0):\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},x\longmapsto x$ est dérivable en 0 et
[b] on a : $(f(\cdot,0))'(0)=1$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$.

• L'application partielle $f(0,\cdot):\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, y\longmapsto 0$ est dérivable en 0 et $(f(0,\cdot))'(0)=0$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

• On conclut : f admet en tout point de $\mathbb{R}^2$, des dérivées partielles premières et on a, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}-\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

3) Continuité des dérivées partielles premières :

• D'après les théorèmes généraux, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. (voir le commentaire en bas de la page)[c]

• On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=0\underset{y\to 0}{\longrightarrow}0\neq\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

• On a : $\frac{\partial f}{\partial y}(x,x)=-\frac{2x^4}{x^4}=-2\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-2\neq\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

• On conclut : $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ et ne sont pas continues en $(0,0)$.

---

a. $|x^3|=|x|x^2\leq|x|(x^2+y^2)\leq\|(x,y)\|^3$

b. La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ est, sous réserve d'existence, $(f(\cdot,0))'(0)$

c. On pouvait aussi remarquer, dès le début, que, d'après les théorèmes généraux, f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2-\{(0.0)\}$

EXERCICE 479 Différentiabilité d'une fonction rationnelle à deux variables

Titre : Différentiabilité d'une fonction rationnelle à deux variables **Difficulté :**

ID : 435 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 421 | ID : 435

Soit

$$U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x^2+y^2-z^2\neq 0\}$$

et on considère l'application

$$f:U\to\mathbb{R};(x,y,z)\in U\mapsto f(x,y,z)=\frac{x^4+y^4-z^4}{x^2+y^2-z^2}.$$

1. Justifier que U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrer que f est continue sur U.
3. Montrer que $(0,0,0)$ est un point adhérent à U.
4. Est ce que f admet une limite quand (x,y,z) tend vers $(0,0,0)$?

Solution

1. L'application $v:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R};(x,y,z)\mapsto x^2+y^2-z^2$ est continue car elle est polynomiale en les variables x,y et z. Comme $\mathbb{R}^*$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}$ et que $U=v^{-1}(\mathbb{R}^*)$ on a U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^3$.
2. $f=\frac{u}{v}$ avec u et v polynomiales et v ne s'annule jamais sur U, donc f est continue sur U.
3. La suite $u_n=(\frac{1}{n},0,0)$ est une suite d'éléments de U qui converge vers $(0,0,0)$, donc $(0,0,0)\in\text{Adh}(U)$.
4. Pour $x_t=(t,t,\sqrt{2t^2+\alpha t^4})$ avec $t>0$ et $\alpha>0$, on a $x_t\in U$ et $f(x_t)=\frac{2t^4-(2t^2+\alpha t^4)^2}{2t^2-2t^2-\alpha t^4}\sim$

$\frac{2}{\alpha}$ quand t tends vers 0. En particulier si on considère les suites $u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \sqrt{\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\right)$ et $v_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \sqrt{\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^4}}\right)$ on a (u_n) et (v_n) convergent vers $(0,0,0)$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$, donc f n'admet pas de limite quand (x,y,z) tend vers $(0,0,0)$.

EXERCICE 480 — Etude de $f;\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = \frac{x}{1+\|x\|}$

Titre : Etude de $f;\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = \frac{x}{1+\|x\|}$ **Difficulté :** ★☆☆☆☆

ID : 436 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 422 | ID : 436

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $f(x) = \frac{x}{1+\|x\|}$ où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne.

1. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et caclculer sa différentielle (distinguer le cas $x = 0$).
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.
3. En utilisant le théorème des accroissements finis démontrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$.

Solution

1. On va prouver que f est différentiable au point 0 et sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.
   • Pour $x_0 = 0$, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, on a $f(0+h) = f(h) = \frac{h}{1+\|h\|} = f(0) + h + \|h\|\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) = -\frac{h}{1+\|h\|}$, en particulier $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$, donc f est différentiable au point 0 et $df(0)(h) = h$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.
   • Sur U, l'application $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = \|x\|$ est différentiable sur Ω car pour tout $x \in \Omega$, on a $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, donc $\varphi = r \circ \Phi \circ L$, avec $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; (x,y) \mapsto \langle x, y\rangle$, $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; x \mapsto (x,x)$ et $r : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}; x \mapsto \sqrt{x}$. On sait que Φ et L sont différentiables car on est en dimension finie et Φ est bilinéaire et L est linéaire. L'application $r : x \mapsto \sqrt{x}$ est différentiable sur $\mathbb{R}_+^*$ car r est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Il en découle que φ est différentiable sur $\Omega = \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. On a $f = \Psi(g \circ \varphi, T)$, avec $\Psi(\lambda, x) = \lambda x$ pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $T(x) = x$ et $g(t) = \frac{1}{1+t}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*$.
   L'application Ψ est bilinéaire et on vient de prouver que φ est différentiable sur $\Omega = \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, g est différentiable sur $\mathbb{R}_+^*$ et T est linéaire donc différentiable sur $\mathbb{R}^n$, d'où f est différentiable sur Ω.
   • **Différentielle de f en tout point $x \in \mathbb{R}^n$:** On a vu que $\forall h \in \mathbb{R}^n, df(0)(h) = h$, autrement dit $df(0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.
   Soit $x \in \Omega = \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, avec $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ où $\mathscr{E} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$; alors :

$$f(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i}{1 + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}}.$$

   Donc pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -\frac{x_j x}{\|x\|(1+\|x\|)^2} + \frac{e_j}{1+\|x\|}.$$

Donc pour tout $h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i \in \mathbb{R}^n$, on a : $df(x)(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ donc

$$df(x)(h) = -\frac{\langle x,h\rangle x}{\|x\|(1+\|x\|)^2} + \frac{h}{1+\|x\|}.$$

Résumé : On a alors

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \begin{cases} df(0)(h) = h \\ \forall x \in \Omega = \mathbb{R}^n\backslash\{0\}, df(x)(h) = -\frac{\langle x,h\rangle x}{\|x\|(1+\|x\|)^2} + \frac{h}{1+\|x\|} \end{cases}.$$

2. Sur $\Omega = \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, la fonction f est de classe C^1 car on a vu que $f = \Psi(g \circ \varphi, T)$ avec Ψ une application bilinéaire en dimension finie et les applications g, φ, T sont toutes de classe C^1 sur leur ensembles de départs respectifs. Pour prouver que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et comme f est différentiable en 0, la seule chose à démontrer est que les dérivées partielles de f sont continues au point 0. Soit $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{R}^n$. On a déjà vu que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ et tout $x \in \Omega$, on a $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -\frac{x_j x}{\|x\|(1+\|x\|)^2} + \frac{e_j}{1+\|x\|}$, donc $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \psi(x) + \frac{e_j}{1+\|x\|}$ où $\psi(x) = -\frac{x_j x}{\|x\|(1+\|x\|)^2}$. On a donc $\|\psi(x)\| \leq \frac{\|x\|^2}{\|x\|(1+\|x\|)^2} = \frac{\|x\|}{(1+\|x\|)^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\lim_{x\to 0} \psi(x) = 0$, et comme par ailleurs, $\lim_{x\to 0} \frac{e_j}{1+\|x\|} = e_j$, on a bien $\lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0)$, ce qui garantie la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ au point 0.
3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et considérons l'application $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ définie par $\gamma(t) = f((1-t)x + ty)$. Alors γ est de classe C^1 sur $[0,1]$ et $\gamma'(t) = df(\gamma(t))(y-x)$, donc $f(y) - f(x) = \gamma(1) - \gamma(0) = \int_0^1 \gamma'(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 df(\gamma(t))(h)\mathrm{d}t$ où $h = y - x$.
On va prouver que pour tout $x, h \in \mathbb{R}^n$, on a $(\star) \quad \|df(x)(h)\| \leq \|h\|$.
On a $(\star)$ si $x = 0$, car $df(0)(h) = h$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.
Si $x \neq 0$, rappelons que : $df(x)(h) = -\frac{\langle x,h\rangle x}{\|x\|(1+\|x\|)^2} + \frac{h}{1+\|x\|}$, donc en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz d'une part et l'inégalité triangulaire d'autre part, on obtient : $\|df(x)(h)\| \leq \frac{\|x\|.\|h\|.\|x\|}{\|x\|(1+\|x\|)^2} + \frac{\|h\|}{1+\|x\|} \leq \frac{\|h\|.\|x\|}{1+\|x\|} + \frac{\|h\|}{1+\|x\|} = \|h\|$. D'où $(\star)$ ci-dessus est vraie. Compte tenu de $(\star)$ ci-dessus, on a $\|f(y) - f(x)\| \leq \int_0^1 \|y - x\|\mathrm{d}t = \|y - x\|$.

EXERCICE 481 Inégalité des accroissements finis pour une norme euclidienne

Titre : Inégalité des accroissements finis pour une norme euclidienne

Difficulté : ★☆☆☆☆

ID : 437 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 423 | ID : 437

Soit n un entier naturel non nul. $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, pour tout $x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbb{R}^n$. On note $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire, donc $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2}$.
On considère deux nombre réels a et b tel que $a < b$, et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ des applications continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ et on suppose que l'on a la condition :

$$(\star) \quad \forall t \in]a,b[, \|f'(t)\| \leq g'(t)$$

1. Soient $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ des applications continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$
   (a) On suppose que :
   $$(\star) \quad \forall t \in]a,b[, u'(t) \leq v'(t),$$

Démontrer que :

$$u(b) - u(a) \leq v(b) - v(a).$$

(b) On suppose que :

$$(\star)' \quad \forall t \in]a,b[, |u'(t)| \leq v'(t).$$

Démontrer que :

$$|u(b) - u(a)| \leq v(b) - v(a).$$

2. On suppose que $\forall t \in [a,b], g(t) = Mt + M'$ où M, M' sont des constante réelles et $M \geq 0$. En considérant la fonction h définie sur $[a,b]$ par $h(t) = \langle f(t), A\rangle$ où $A = f(b) - f(a)$, démontrer que $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b-a)$.
3. On retourne au cas général. En considérant la fonction h ci-dessus, démontrer que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

Solution

1. Soient $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ des applications continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$
   (a) Soit $w = v - u$, alors w est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Le théorème des accroissements finis permet de dire qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $w(b) - w(a) = w'(x)(b-a)$. On a $w'(c) = v'(c) - u'(c) \geq 0$, donc $w(b) - w(a) \geq 0$, ce qui veut dire :

$$u(b) - u(a) \leq v(b) - v(a).$$

   (b) La condition

$$(\star)' \quad \forall t \in]a,b[, |u'(t)| \leq v'(t).$$

   veut dire

$$(-v)'(t) \leq u'(t) \leq v'(t).$$

   Il en découle d'après la question précédente, on a :

$$(-v)(b) - (-v)(a) \leq u(b) - u(a) \leq v(b) - v(a),$$

   donc

$$-(v(b) - v(a)) \leq u(b) - u(a) \leq v(b) - v(a)$$

   et finalement :

$$|u(b) - u(a)| \leq v(b) - v(a).$$

2. La fonction h définie sur $[a,b]$ par $h(t) = \langle f(t), A\rangle$ où $A = f(b) - f(a)$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et $\forall t \in]a,b[, h'(t) = \langle f'(t), A\rangle$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\forall t \in]a,b[, |h'(t)| \leq \|f'(t)\|\|A\|$. Si on tient compte des hypothèses de l'énoncé, on a $\|f'(t)\| \leq g'(t) = M$, donc $\forall t \in]a,b[, |h'(t)| \leq M\|A\|$. En appliquant la question **1)a)** pour $u(t) = h(t)$ et $v(t) = \|A\|(Mt + M')$, on obtient on a

$$|h(b) - h(a)| \leq M\|A\|(b-a)$$

   et comme $|h(b) - h(a)| = \|A\|^2$, on obtient :

$$(\star\star) \quad \|A\|^2 \leq M\|A\|(b-a)$$

   • Si $f(b) = f(a)$, l'inégalité demandée est réalisée.
   • Si $f(a) \neq f(b)$, on a $\|A\| \neq 0$, donc l'inégalité $(\star\star)$ ci-dessus, donne : $\|A\| \leq M(b-a)$, donc finalement $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b-a)$.
3. On considère la fonction h ci-dessus, cette fois l'inégalité de Cauch-Scwarz donne : $|h'(t)| \leq \|A\|g'(t)$. En appliquant la question **1)b)** pour $u(t) = h(t)$ et $v(t) = \|A\|g(t)$, on obtient $h(b) - h(a)| \leq \|A\|(g(b) - g(a))$, donc $(\star\star)' \quad \|A\|^2 \leq \|A\|(g(b) - g(a))$. On termine en discutant deux cas : soit $f(a) = f(b)$ et l'inégalité demandée est réalisée, soit $f(a) \neq f(b)$, alors $\|A\| > 0$ et $(\star\star)'$ donne : $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$.

EXERCICE 482 Quteient de Rayleight

Titre : Quteient de Rayleight
ID : 551 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 532 | ID : 551
Difficulté : ★★★☆☆

n designe un entier naturel tel que $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique, on note $U = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique et f l'application définie de l'ouvert U vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall X \in U, f(X) = \frac{\langle AX, X\rangle}{\langle X, X\rangle} = \frac{{}^tXAX}{\|X\|^2}.$$

On note

$$\lambda_1 = \min_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (\lambda) \text{ et } \lambda_n = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (\lambda).$$

On peut alors noter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tel que

$$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$$

la liste des valeurs propres de A rangées dans l'ordre croissant et comptées avec leur multiplicités.,

1. Démontrer que $f(U) = [\lambda_1, \lambda_n]$.
2. Démontrer que f est de classe C^∞ sur U.
3. Démontrer que pour tout $X \in U$, on a

$$\nabla f(X) = \frac{2}{\|X\|^2}(AX - f(X)X).$$

En déduire que les points critiques de f sont exactement les vecteurs propres de A.

4. Soit $X \in U$ un point critique de f. Démontrer que la hessienne de f au point X est :

$$\mathfrak{H}f(X) = \frac{2}{\|X\|^2}(A - f(X)I_n).$$

En déduire que poour tout vecteur propre X de A tel que $AX = \lambda X$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \neq \lambda_1$ et $\lambda \neq \lambda_n$, on a X est un point selle de f.

Solution

1. Comme A est réelle symétrique, A est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathscr{V} = (V_1, \ldots, V_n)$. Soit $X \in U$ tel que $X = \sum_{k=1}^{n} x_i V_i$, donc $AX = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k V_k$ où λ_k est la valeur propre associée à V_k, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Il en découle que $f(X) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ et comme $\lambda_1 \leq \lambda_k \leq \lambda_n$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\lambda_1 \leq f(X) \leq \lambda_n$, donc $f(U) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$. Remarquons que si $S^1 = \{X \in \mathbb{R}^n / \|X\| = 1\}$ alors $f(S^1) = f(U)$ puisque pour tout $x \in U$, on a $f(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$. Il est aisé de voir que f est continue sur U, et comme S^1 est un compact de $\mathbb{R}^n$, on peut dire que $f(S^1)$ est un compact de $\mathbb{R}$, or U est connexe par arcs car $n \geq 2$, donc $f(U)$ est un intervalle, donc finalement $f(U)$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, donc un segment et on observe que $\lambda_1, \lambda_n \in f(U)$ en effet pour toute valeur propre λ de A on a $f(x) = \lambda$ pour tout vecteur propre x associé à λ. Ainsi $f(S^1) = [\lambda_1, \lambda_n]$.
2. Les applications $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ et $x \mapsto \langle x, x\rangle$ sont polynômiales en les coordonnées de x et la deuxième ne s'annule jamais sur U, donc leur rapport $x \mapsto f(x)$ est de classe C^∞ sur U.
3. Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $h \neq 0$, on pose : $f(h) = \frac{\langle Ah, h\rangle}{\langle h, h\rangle}$. Comme f est de classe C^2, on a pour tout $x \in U$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x + h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + o(\|h\|),$$

en particulier pour tout veteur non nul v et tout nombre réel t, on a :

$$(\star) \quad f(x+tv) = f(x) + t\langle \nabla f(x), v\rangle + o(t),$$

$$\begin{aligned} f(x+tv) = \langle A(x+tv), x+tv\rangle &= \langle Ax + tAv, x+tv\rangle \\ &= \langle Ax, x\rangle + 2t\langle Ax, v\rangle + o(t) \end{aligned}$$

D'un autre côté :

$$\langle x+tv, x+tv\rangle = \|x\|^2 + 2t\langle x, v\rangle + o(t)$$

Il en découle que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle x+tv, x+tv\rangle} &= \frac{1}{\|x\|^2}\left(1 + 2\frac{\langle x, v\rangle}{\|x\|^2}t + o(t)\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\|x\|^2}\left(1 - 2\frac{\langle x, v\rangle}{\|x\|^2}t + o(t)\right) \end{aligned}$$

Il en découle que :

$$\begin{aligned} f(x+tv) &= \frac{1}{\|x\|^2}\left(\langle Ax, x\rangle + 2t\langle Ax, v\rangle + o(t)\right)\left(1 - 2\frac{\langle x, v\rangle}{\|x\|^2}t + o(t)\right) \\ &= \frac{1}{\|x\|^2}\left(\langle Ax, x\rangle + \left(2\langle Ax, v\rangle - 2\langle Ax, x\rangle\frac{\langle x, v\rangle}{\|x\|^2}\right)t + o(t)\right) \\ &= f(x) + \langle \frac{2(Ax - f(x)x)}{\|x\|^2}, v\rangle t + o(t) \end{aligned}$$

Donc :

$$(\star\star) \quad f(x+tv) = f(x) + \langle \frac{2(Ax - f(x)x)}{\|x\|^2}, v\rangle t + o(t)$$

L'unicité du developpement limité et les relations $(\star)$ et $(\star\star)$ permettent de dire que :

$$\nabla f(x) = \frac{2(Ax - f(x)x)}{\|x\|^2}$$

• Déducition : Si x est un vecteur propre de A alors $Ax = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, donc $f(x) = \lambda$ et par suite $\nabla f(x) = 0$.
Réciproquement, si $x \in U$ tel que $\nabla f(x) = 0$ alors d'après l'expression de $\nabla f(x)$ on a $Ax = \lambda x$ avec $f(x) = \lambda$, donc x est un vecteur propre de f. On vient de prouver que les points critiques de f sont exactement les vecteurs propres de A.

4. On utilise la même méthode que pour la question précédente sauf qu'on va pousser les développements à l'ordre deux. Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $h \neq 0$, on pose : $f(h) = \frac{\langle Ah, h\rangle}{\langle h, h\rangle}$.
Comme f est de classe C^2, la formule de Taylor-Young à l'ordre deux s'écrit ;

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(x).h, h\rangle + o(\|h^2\|)$$

En particulier pour tout $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(x+tv) = f(x) + \langle \nabla f(x), v\rangle t + \frac{1}{2}\langle Hf(x).v, v\rangle t^2 + o(\|h^2\|)$$

Si de plus x est un point critique de f, on a :

$$(\star)' \quad f(x+tv) = f(x) + \frac{1}{2}\langle Hf(x).v, v\rangle t^2 + o(\|h^2\|)$$

$$\begin{aligned} f(x+tv) = \langle A(x+tv), x+tv\rangle &= \langle Ax+tAv, x+tv\rangle \\ &= \langle Ax, x\rangle + 2t\langle Ax, v\rangle + t^2\langle Av, v\rangle \end{aligned}$$

D'un autre côté :

$$\langle x+tv, x+tv\rangle = \|x\|^2 + 2t\langle x, v\rangle + t^2\|v\|^2$$

Il en découle que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle x+tv, x+tv\rangle} &= \frac{1}{\|x\|^2}\left(1 + 2\frac{\langle x, v\rangle}{\|x\|^2}t + \frac{\|v\|^2}{\|x\|^2}t^2\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\|x\|^2}\left(1 - 2\frac{\langle x, v\rangle}{\|x\|^2}t - \frac{\|v\|^2}{\|x\|^2}t^2 + 4\frac{\langle x, v\rangle^2}{\|x\|^4}t^2 + o(t^2)\right) \\ &= \frac{1}{\|x\|^2}\left(1 - 2\frac{\langle x, v\rangle}{\|x\|^2}t + \left[4\frac{\langle x, v\rangle^2}{\|x\|^4} - \frac{\|v\|^2}{\|x\|^2}\right]t^2 + o(t^2)\right) \end{aligned}$$

Il en découle que :

$$\begin{aligned} f(x+tv) &= \frac{1}{\|x\|^2}\left(\langle Ax, x\rangle + 2t\langle Ax, v\rangle + t^2\langle Av, v\rangle\right)\left(1 - 2\frac{\langle x, v\rangle}{\|x\|^2}t + \left[4\frac{\langle x, v\rangle^2}{\|x\|^4} - \frac{\|v\|^2}{\|x\|^2}\right]t^2 + o(t^2)\right) \\ &= \frac{1}{\|x\|^2}\left(\langle Ax, x\rangle + \left(2\langle Ax, v\rangle - 2\langle Ax, x\rangle\frac{\langle x, v\rangle}{\|x\|^2}\right)t + M_{x,v}t^2 + o(t^2)\right) \end{aligned}$$

avec

$$M_{x,v} = f(x)\left[4\frac{\langle x, v\rangle^2}{\|x\|^4} - \frac{\|v\|^2}{\|x\|^2}\right] + \frac{\langle Av, v\rangle}{\|x\|^2} - 4\frac{\langle x, v\rangle}{\|x\|^4}\langle Ax, v\rangle$$

Donc :

$$\begin{aligned} f(x+tv) &= f(x) + \left(2\frac{\langle Ax, v\rangle}{\|x\|^2} - 2f(x)\frac{\langle x, v\rangle}{\|x\|^2}\right)t + \left(f(x)\left[4\frac{\langle x, v\rangle^2}{\|x\|^4} - \frac{\|v\|^2}{\|x\|^2}\right] + \frac{\langle Av, v\rangle}{\|x\|^2} - 4\frac{\langle x, v\rangle}{\|x\|^4}\langle Ax, v\rangle\right)t^2 + o(t^2) \\ &= f(x) + \langle\frac{2}{\|x\|^2}Ax - \frac{2f(x)}{\|x\|^2}x, v\rangle t + \left[\frac{4\langle x, v\rangle}{\|x\|^4}\langle f(x)x - Ax, v\rangle + \frac{\langle Av, v\rangle}{\|x\|^2} - f(x)\frac{\langle v, v\rangle}{\|x\|^2}\right]t^2 + o(t^2) \\ &= f(x) + \langle\frac{2}{\|x\|^2}Ax - \frac{2f(x)}{\|x\|^2}x, v\rangle t + \left[\frac{4\langle x, v\rangle}{\|x\|^4}\langle f(x)x - Ax, v\rangle + \frac{\langle Av - f(x)v, v\rangle}{\|x\|^2}\right]t^2 + o(t^2) \\ &= f(x) + \langle\frac{2(Ax - f(x)x)}{\|x\|^2}, v\rangle t + \left[\frac{1}{2}\frac{\langle 2(A - f(x)I_n).v, v\rangle}{\|x\|^2} - 2\langle x, v\rangle\frac{\langle 2(Ax - f(x)x), v\rangle}{\|x\|^4} + \right]t^2 + o \end{aligned}$$

Si x est un point critique de f alors c'est un vecteur propre associé à une valeur propre de A, donc $Ax = \lambda x$ et $f(x) = \lambda$, donc $f(x)x - Ax = 0$ et par suite

$$(\star\star)' \quad f(x+tv) = f(x) + \frac{1}{2}\langle\frac{2(A - f(x)I_n)}{\|x\|^2}.v, v\rangle t^2 + o(t^2)$$

Compte tenu de $(\star)'$ et $(\star\star)'$ et l'unicité du développement limité, on déduit que :

$$Hf(x) = \frac{2(A - f(x)I_n)}{\|x\|^2}$$

• Déduction : La matrice A est diagonalisable dans une base orthonormée, donc $A = PD^tP$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. donc $A - f(x)I_n = PD'^tP$ avec, en notant $\lambda = f(x)$, qui est la valeur propre associée au vecteur propre x, la matrice $D' = \text{diag}(\lambda_1 - \lambda, \ldots, \lambda_n - \lambda)$. Si on suppose que $\lambda \neq \lambda_1$ et $\lambda \neq \lambda_n$ alors $\lambda_1 < \lambda < \lambda_n$ et la hessienne possède au moins une valeur propre strictement négative et une autre strictement positive, par suite le point critique x est un point selle.

EXERCICE 483 Systéme différentiel linéaire à trois inconnues

Titre : Systéme différentiel linéaire à trois inconnues
ID : 438 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 424 | ID : 438
Difficulté :

Résoudre le système différentiel :

$$(E) \quad \begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z \end{cases}$$

avec la condition initiale : $x(0) = 3, y(0) = 1, z(0) = 1$.
Dissiner la projection sur le plan xOy de la courbe intégrale associée à la solution trouvée.

Solution

Il s'agit du système différentielle homogène $(EH) \quad Y' = AY$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ -1 & X+1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Conclusion :

$$\chi_A = (X+1)(X-2)(X+2)$$

donc A est diagonalisable et on trouve une base de vecteurs propres (V_1, V_2, V_3) dont les vecteurs sont associés respectivement à $-2, -1, 1$, on a :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ce qui fournit la solution générale :

$$\begin{cases} x(t) = \beta e^{-x} + \gamma e^{2x} \\ y(x) = \alpha e^{-2x} - \beta e^{-x} + \gamma e^{2x} \\ z(x) = -\alpha e^{-2x} - \beta e^{-x} + \gamma e^{2x} \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
Compte te nu des conditions initiales données, on trouve $\alpha = 0$, $\beta = 1$ et $\gamma = 2$, ce qui fournit :

$$\begin{cases} x(t) = e^{-x} + 2e^{2x} \\ y(x) = -e^{-x} + 2e^{2x} \\ z(x) = -e^{-x} + 2e^{2x} \end{cases}$$

EXERCICE 484 Système différentiel linéaire avec second membre : exemple

Titre : Système différentiel linéaire avec second membre : exemple
ID : 439 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 425 | ID : 439
Difficulté :

Résoudre le système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} x' = x - y + z + e^t \\ y' = -x + y + z \\ z' = -x - y + 3z + e^{3t} \end{cases}$$

Solution

Le système se traduit en l'équation différentielle linéaire :

$$(E) \qquad Y' = AY + B(t)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Commençons par résoudre l'équation différentielle linéaire homogène associée :

$$(EH) \qquad Y' = AY.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 1 & 1 & X-3 \end{vmatrix}$$

En effectuant les opérations $L_k \leftarrow L_k - L_3$ pour $k \in \{1,2\}$, il vient :

$$\chi_A(X) = (X-2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-2)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ X-2 & 1 & X-3 \end{vmatrix}$$

Finalement, il vient :

$$\chi_A = (X-1)(X-2)^2,$$

donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ dont des vecteurs propres associés sont $\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc la forme générale de la solution de l'équation homogène est $Y(t) = \alpha_1 e^t \Gamma_1 + \alpha_2 e^{2t} \Gamma_2 + \alpha_3 e^{2t} \Gamma_3$. Soit Y une solution de l'équation (E) et $\lambda(t) = e^{-tA} Y(t)$ alors Λ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et comme Y est solution de (E), on a $\Lambda'(t) = e^{-tA} B(t)$. En projetant la relation ci-dessus $\Lambda'(t) = e^{-tA}.B(t)$ dans la base $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$, il vient, en notant $b_k(t)$ les composantes de $B(t)$ relativement à Γ :

$$\Gamma'(t) = e^{-tA} \sum_{k=1}^{3} b_k(t) \Gamma_k = \sum_{k=1}^{3} b_k(t) e^{-tA} \Gamma_k$$

et comme :

$$e^{-tA}.\Gamma_k = \lambda_k e^{-\lambda_k t}$$

on a :

$$\Gamma'(t) = \sum_{k=1}^{3} b_k(t) e^{-t\lambda_k} \Gamma_k$$

Les composantes $b_k(t)$ sont donnée par la relation :

$$\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

où P est la matrice de passage de la base canonique à la base B de sorte que :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et par suite on obtient :

$$\begin{aligned} \Lambda'(t) &= (e^t - e^{3t})e^{-t}\Gamma_1 + e^{3t}e^{-2t}\Gamma_2 + (e^{3t} - e^t)e^{-2t}\Gamma_3 \\ &= (1 - e^{2t})\Gamma_1 + e^t\Gamma_2 + (e^t - e^{-t})\Gamma_3 \end{aligned}$$

En intégrant, il vient :

$$\Lambda(t) = \left(\alpha_1 + t - \frac{e^{2t}}{2}\right)\Gamma_1 + \left(\alpha_2 + e^t\right)\Gamma_2 + (\alpha_3 + e^t + e^{-t})\Gamma_3$$

avec $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$.
Il en découle que la solution générale de (E) est :

$$Y(t) = \left(\alpha_1 e^t + te^t - \frac{e^{3t}}{2}\right)\Gamma_1 + \left(\alpha_2 e^{2t} + e^{3t}\right)\Gamma_2 + (\alpha_3 e^{2t} + e^{3t} + e^t)\Gamma_3$$

avec $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$.ce qui donne en définitif :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{2t} + te^t + \frac{1}{2}e^{3t} \\ y(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_3 e^{2t} + te^t + e^t + \frac{1}{2}e^{3t} \\ z(t) = \alpha_1 e^t + (\alpha_2 + \alpha_3)e^{2t} + te^t + e^t + \frac{3}{2}e^{3t} \end{cases}$$

avec $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$.

EXERCICE 485 Solution d'équation différentielle tel que $X(t+T) = \alpha X(t)$

Titre : Solution d'équation différentielle tel que $X(t+T) = \alpha X(t)$ **Difficulté :**
ID : 440 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 426 | ID : 440

Soit T un nombre réel strictement positif et $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une application continue $T-$périodique. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad Y' = A(t)Y.$$

Démontrer que (E) admet une solution non nulle X tel qu'il existe un nombre complexe α tel que : $(\forall t \in \mathbb{R}) \quad X(t+T) = \alpha X(t)$

Solution

Si on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E), on sait que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Si f est une solution de (E) alors l'application $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}; t \mapsto f(t+T)$ est aussi solution de (E) car $\tilde{f}$ est de classe C^1 et $\tilde{f}'(t) = f'(t+T) = A(t+T)f(t+T) = A(t)f(t+T) = A(t)\tilde{f}(t)$. Ceci permet de dire que l'application : $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}; f \mapsto \tilde{f}$ est un endomorphisme de $\mathcal{S}$. Comme $\mathcal{S}$ est un

espace vectoriel complexe de dimension finie non nulle, l'endomorphisme φ admet au moins une valeur propre α. Soit X un vecteur propre associé à α, donc X et une solution non nulle de (E) et : $\forall t \in \mathbb{R}, X(t+T) = \alpha X(t)$.

EXERCICE 486 Equations différentielles et matrices symétriques

Titre : Equations différentielles et matrices symétriques
ID : 441 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 427 | ID : 441
Difficulté : ★☆☆☆☆

a est un nombre réel strictement positif, on pose : $I_a =]-a, a[$.
Soit $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $X : I_a \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable tel que :

$$\begin{cases} (\forall t \in I_a) \quad X'(t)X(t) = A \\ X(0) = I_n \end{cases}.$$

1. Démontrer que : $(\forall t \in I_a) \quad X(t)A = AX(t)$
2. Démontrer que si A est symétrique alors $X(t)$ est symétrique pour tout $t \in I_a$.

Solution

1. Comme A est inversible et $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t)X(t) = A$, on peut dire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $X(t)$ est inversible.
Considérons l'application $Y :]-a, a[\to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); t \mapsto Y(t) = X(t)A - AX(t)$. Puisque X est dérivable sur l'intervalle $]-a, a[$, on en déduit, en vertu des opérations sur les applications dérivables que Y est dérivable sur $]-a, a[$ et que :
$$\begin{aligned} Y' &= (XA - AX)' \\ &= X'A - AX' \\ &= \left(AX^{-1}\right)A - AA\left(AX^{-1}\right) \\ &= AX^{-1}(AX - XA)X^{-1} \\ &= -AX^{-1}YX^{-1}. \end{aligned}$$
Le problème de Cauchy linéaire :
$$Y' = -AX^{-1}YX^{-1}, \quad Y(0) = 0$$
d'inconnue $Y :]-a; a[\longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ supposée dérivable, admet une solution et une seule.
Comme Y et l'application constante nulle conviennent, on a donc $Y = 0$, d'où : $XA - AX = 0$, c'est-à-dire :
$$\forall t \in]-a, a[, \quad X(t)A = AX(t).$$

2. Considérons le problème de Cauchy non linéaire :
$$(C) \quad Z' = AZ^{-1}, \quad Z(0) = \mathrm{I}_n,$$
d'inconnue Z, à valeurs dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Puisque l'application : $]-a, a[\times \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); (t, Z) \mapsto AZ^{-1}$ est de classe C^1 sur l'ouvert $]-a, a[\times \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, il en découle que le problème de Cauchy (C) admet une solution maximale et une seule. Comme X est solution de (C), la solution maximale est un prolongement de X. Considérons l'application
$$U :]-a, a[\to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); t \mapsto U(t) = {}^tX(t).$$
Puisque X est dérivable sur $]-a, a[$, en vertu des opérations sur les applications dérivables , U est aussi dérivable sur $]-a, a[$, et on a :
$$\begin{aligned} U'U &= ({}^tX)'{}^tX = {}^t(AX^{-1}){}^tX \\ &= {}^tX^{-1t}A{}^tX = {}^tX^{-1t}(XA) = {}^tX = -1^t(AX) \\ &= {}^tX^{-1t}X{}^tA = {}^tA = A. \end{aligned}$$

De plus : $U(0) = {}^tX(0) = {}^tI_n = I_n$ et $\forall t \in]-a,a[, U(t) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}$. Ainsi, X et U sont solutions de (C) sur $]-a,a[$, d'où : $\forall t \in]-a,a[, \quad U(t) = X(t)$, c'est-à-dire : $\forall t \in]-a,a[, {}^tX(t) = X(t)$. On conclut que, pour tout $t \in]-a,a[$, la matrice $X(t)$ est symétrique.

EXERCICE 487 Systéme linéaire avec matrice variable

Titre : Systéme linéaire avec matrice variable
ID : 442 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 428 | ID : 442
Difficulté : ★☆☆☆☆

On considère le système différentiel :

$$(E) \quad \begin{cases} x' = y + t \\ y' = \frac{1}{t^2}x - \frac{1}{t}y + t^2 \end{cases}$$

et soit (EH) le système homogène associé.

1. I désigne l'un des intervalles $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$. Déterminer les solutions φ sur I de (EH) de la forme : $\begin{pmatrix} \alpha t^a \\ \beta t^b \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$.
2. En déduire la solution généale de (EH)
3. Résoudre (E)

Solution

sera donnée après

EXERCICE 488 Systéme linéaire homogène

Titre : Systéme linéaire homogène
ID : 443 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 429 | ID : 443
Difficulté : ★☆☆☆☆

On considère le système différentiel

$$(E) : \quad \begin{cases} x' &= -x + 4z + t \\ y' &= -4x + 3y + 4z - t \\ z' &= 3z \end{cases}$$

1. Résoudre le système homogène associé :
   (a) En résolvant ses équations de proche en proche.
   (b) En diagonalisant la matrice associée.
2. Résoudre (E).

Solution

1. (a) La dernière équation : $z' = 3z$ admet pour solution générale $z(t) = \lambda e^{3t}$avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Il en découle que la première équation s'écrit : $(\mathscr{E}_1) : \quad x' = -x + 4\lambda e^{3t}$, qu'on va résoudre avec la méthode de la variation de la constante en posant $x(t) = \alpha(t)e^{-t}$ avec $\alpha'(t) = 4\lambda e^{3t}e^{t} = 4\lambda e^{4t}$, donc $\alpha(t) = \lambda e^{4t} + \mu$ et la solution générale de $(\mathscr{E}_1)$ est $x(t) = \lambda e^{3t} + \mu e^{-t}$. Il en découle que la seconde équation homogène s'écrit :

$$(\mathscr{E}_2) \quad y' = 3y - 4(\lambda e^{3t} + \mu e^{-t}) + 4\lambda e^{3t} = 3y - \mu e^{-t}$$

qu'on va résoudre par la méthode de variation de la constante, la solution générale est $y(t) = \beta(t)e^{3t}$ avec $\beta'(t) = -\mu e^{-t}e^{-3t} = -4\mu e^{-4t}$, donc $\beta(t) = \mu e^{-4t} + \gamma$, avec $\gamma \in \mathbb{R}$. Il en découle que $y(t) = \mu e^{-t} + \gamma e^{3t}$ et que finalement la solution générale du système homogène est

$$\begin{cases} x(t) = \lambda e^{3t} + \mu e^{-t} \\ y(t) = \mu e^{-t} + \gamma e^{3t} \\ z(t) = \lambda e^{3t} \end{cases}, \text{ avec } (\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

(b) La matrice associée est $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ de polynôme caractéristique $\chi_A = (X+1)(X-3)^2$, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 3\}$ et la base de vecteurs propres $\mathscr{V} = (V_1, V_2, V_3)$ avec

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 + e_2, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2, V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_3,$$

donc la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, notée $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ à $\mathscr{V} = (V_1, V_2, V_3)$ ainsi que son inverse P^{-1}, sont :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il en découle que la solution générale du systéme homogène est

$$Y(t) = \mu e^{-t}V_1 + \beta e^{3t}V_2 + \lambda e^{3t}V_3 = \mu e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{cases} x(t) = \lambda e^{3t} + \mu e^{-t} \\ y(t) = \mu e^{-t} + \beta e^{3t} \\ z(t) = \lambda e^{3t} \end{cases}, \text{ avec } (\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

qui est exactement la solution trouvée dans le 1)a).

2. Résolution du système complet . La méthode des variations des constantes permet de dire que la solution générale du systéme différentielle complet est

$$Y(t) = \alpha_1(t)e^{-t}V_1 + \alpha_2(t)e^{3t}V_2 + \alpha_3(t)e^{3t}V_3$$

avec

$$\alpha_1'(t)e^{-t}V_1 + \alpha_2'(t)e^{3t}V_2 + \alpha_3'(t)e^{3t}V_3 = B(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}$$

On va donc écrire $B(t)$ dans la base $\mathscr{V}$ et chercher les $\alpha_k(t)$. Posons $B(t) = b_1(t)V_1 + b_2(t)V_2 + b_3(t)V_3$ alors par les formules de changement de base on a

$$\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il en découle que $\alpha_1'(t) = te^t, \alpha_2'(t) = -2te^{3t}, \alpha_3'(t) = 0$, donc

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= c_1 + (t-1)e^t \\ \alpha_2(t) &= c_2 + (\tfrac{2}{3}t + \tfrac{2}{9})e^{-3t} \\ \alpha_3(t) &= c_3 \end{aligned}$$

donc

$$Y(t) = (c_1 e^{-t} + t - 1)V_1 + (c_2 e^{3t} + \frac{2}{3}t + \frac{2}{9})V_2 + c_3 e^{3t} V_3$$

avec $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Explicitement

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + t - 1 + c_3 e^{3t} \\ y(t) = c_1 e^{-t} + \frac{5}{3}t - \frac{7}{9} + c_2 e^{3t} \\ z(t) = c_3 e^{3t} \end{cases}, \text{ avec } (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$$

EXERCICE 489 Système linéaire avec second membre

Titre : Système linéaire avec second membre
ID : 444 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 430 | ID : 444
Difficulté :

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' &= 5x - 10y + 4z + e^t \\ y' &= 2x - 7y + 4z - 1 \\ z' &= 2x - 10y + 7z \end{cases}$$

Solution

Le systéme peut s'écrire $Y' = AY + B(t)$, avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 4 \\ 2 & -7 & 4 \\ 2 & -10 & 7 \end{pmatrix}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matrice A est diagonalisable, avec $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 3\}$ et une base de vecteurs propres est $\mathscr{V} = (V_1, V_2, V_3)$ avec :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il en découle que la solution générale de l'équation différentielle homogène associée est

$$Y(t) = \alpha e^{-t} V_1 + \beta e^{3t} V_2 + \gamma e^{3t} V_3, \text{ avec }, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

La matrice de passage P de la base canonique $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ à la base $\mathscr{V}$, et son inverse P^{-1} sont :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

D'après la méthode de variation des constantes, la solution générale de l'équation différentielle complète est

$$Y(t) = \alpha_1(t)e^{-t} + \alpha_2(t)e^{3t} + \alpha_3(t)e^{3t}$$

avec les conditions :

$$\alpha_1'(t) = b_1(t)e^t, \alpha_2'(t) = b_2(t)e^{-3t}, \alpha_3'(t) = b_3(t)e^{-3t}$$

et

$$B(t) = b_1(t)V_1 + b_2(t)V_2 + b_3(t)V_3,$$

donc par les formules de changement de base on a :

$$\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^t - \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}e^t + \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\begin{cases} \alpha_1'(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{5}{2}e^t \\ \alpha_2'(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-3t} \\ \alpha_3'(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{5}{2}e^{-3t} \end{cases},$$

Par suite :

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = -\frac{1}{4}e^{2t} - \frac{5}{2}e^t + c_1 \\ \alpha_2(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-3t} + c_2 \\ \alpha_3(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{5}{6}e^{-3t} + c_3 \end{cases} \quad \text{avec } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Il en découle que la solution générale du système complet est :

$$Y(t) = \left(-\frac{1}{4}e^t - \frac{5}{2} + c_1e^{-t}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{4}e^t - \frac{1}{2} + c_2e^{3t}\right)\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{4}e^t - \frac{5}{6} + c_3e^{3t}\right)\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{cases} x(t) = -e^t - \frac{10}{3} + c_1e^{-t} + (5c_2 - 2c_3)e^{3t} \\ y(t) = -\frac{1}{2}e^t - 3 + c_1e^{-t} + c_2e^{3t} \\ z(t) = -\frac{1}{2}e^t - \frac{10}{3} + c_1e^{-t} + c_3e^{3t} \end{cases}, \text{ avec }, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

EXERCICE 490 Etude qualitative d'une équation différentielle du second ordre

Titre : Etude qualitative d'une équation différentielle du second ordre

Difficulté : ★☆☆☆☆

ID : 445 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 431 | ID : 445

p et q sont deux application de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + py' + qy = 0.$$

1. Soit y une solution non identiquement nulle de (E).
   (a) Montrer que les fonctions y et y' ne s'annulent pas simultanément.
   (b) Montrer que les zéros de y sont en nombre fini.
2. Soient y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de (E) ; on suppose que y_1 admet au moins deux zéros et on note a et b deux zéros consécutifs.
   (a) Montrer que y_2 admet au moins un zéro dans l'intervalle ouvert $]a,b[$ (Penser au wronskien).
   (b) La fonction y_2 peut elle avoir plusieurs zéros dans $]a,b[$?

Solution

1. Soit y une solution de l'équation différentielle (E).
   (a) Si $y(0) = y'(0) = 0$ alors y est la fonction nulle θ sont solutions du problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + py' + qy = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$, or ce problème d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, et compte tenu de la continuité de p et q sur l'intervalle $[0,1]$, admet une unique solution, donc $y = \theta$.
   (b) Par l'absurde. Si y admet une infinité de zéro dans $[0,1]$ alors il existe une suite $(x_n) \in$

$[0,1]^{\mathbb{N}}$ tel que les x_n sont deux à deux distincts et $y(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par compacité de $[0,1]$, il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que la suite $(x_{\varphi(n)}$ converge vers $\ell \in [0,1]$. Par continuité, on a aussi $y(\ell) = 0$. Remarquons que $I = \{k \in \mathbb{N} / x_\varphi(k) = \ell\}$ est un ensemble fini de cardinal 0 ou 1 car les x_n sont deux à deux distincts et φ est injective. Ainsi il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow x_{\varphi(n)} \neq \ell$. Par suite la suite $(\delta_n)_{n \geq p}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p, \quad \delta_n = \frac{y(x_{\varphi(n)}) - y(\ell)}{x_{\varphi(n)} - \ell}$$

est bien définie. On remarque que $\delta_n = 0$ pour tout $n \geq p$ et que puisque y est dérivable au point ℓ, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \delta_n = y'(\ell)$, donc, $y(\ell) = y'(\ell) = 0$ donc d'après 1)a), on a $y = \theta$, chose fause, donc y n'a qu'un nombre fini de zéros dans $[0,1]$.

2. y_1 et y_2 deux solutions indépendantes de (E).
   (a) Supposons que y_2 ne s'annule jamais sur $]a,b[$, on sait déjà que $y_2(a) \neq 0$ car sinon le wronskien $W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$ serait nul en a et y_1 et y_2 seraient dépendantes, ce qui n'est pas le cas, de même on a aussi $y_2(b) \neq 0$ pour la même raison. Ainsi avec l'hypothèse y_2 ne s'annule jamais sur $]a,b[$, on a y_2 ne s'annule jamais sur $[a,b]$. La fonction $z = \frac{y_1}{y_2}$ réalise $z'(t) = -\frac{W(t)}{y_2^2(t)}$, et comme y_1 et y_2 sont indépendantes, on a $W(t)$ ne s'annule jamais sur $[a,b]$ et comme W est continue alors W garde un signe constant sur $[a,b]$, par suite z est strictement monotone sur $[a,b]$, or $z(a) = z(b) = 0$, absurde, donc y_2 admet au moins un zéro dans $]a,b[$.
   (b) Si y_2 admet deux zéros a' et b' tel que $a < a' < b' < b$ alors y_1 en admet au moins un compris entre a' et b', chose impossible car a et b sont deux zéros consécutifs de y_1. Il en découle que y_2 admet un unique zéros entre a et b.

EXERCICE 491 — Wronskien, étude qualitative, second ordre

Titre : Wronskien, étude qualitative, second ordre
ID : 446 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 432 | ID : 446
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue sur $\mathbb{R}$ et paire et on considère l'équation différentielle :

$$(E_\lambda) \quad y'' + (\lambda - q(t))y = 0$$

1. Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz adapté à (E_λ).
2. En déduire qu'une solution φ de (E_λ) est impaire si, et seulement si $\varphi(0) = 0$
3. Prouver, par exemple, à l'aide du wronskien que (E_λ) ne peut admettre un système fondamental de solutions constitué de fonctions de même parité.

Solution

1. Puisque q est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de Cauchy-Lipschitz dit que pour tout $(t_0, y_0, y_1) \in \mathbb{R}^3$, l'équation différentielle (E_λ) admet une et une seule solution y tel que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$.
2. Soit φ une solution impaire de E_λ, il est connu et facile à démontrer que $\varphi(0) = 0$. Réciproquement si φ est une solution de E_λ tel que $\varphi(0) = 0$, démontrons que φ est impaire, pour cela soit ψ définie par $\psi(t) = \varphi(-t) + \varphi(t)$, on va démontrer que ψ est nulle et d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il suffit de prouver que ψ est une solution de (E_λ) et que $\psi(0) = \psi'(0) = 0$.

• Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\psi'(t) = -\varphi'(-t) + \varphi'(t)$ et $\psi''(t) = \varphi''(-t) + \varphi''(t)$, donc

$$\begin{aligned}\psi''(t) + q(t)\psi(t) &= \varphi''(t) + \varphi''(-t) + q(t)(\varphi(t) + \varphi(-t)) \\ &= (\varphi''(t) + q(t)\varphi(t)) + (\varphi''(-t) + q(-t)\varphi''(-t)) \\ &\quad \text{On a utilisé le fait que } q \text{ est paire.} \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc ψ est une solution de (E_λ).
• On a $\psi(0) = \varphi(0) + \varphi(0) = 0$ et $\psi'(0) = \varphi'(0) - \varphi'(0) = 0$, donc $\psi(0) = \psi'(0) = 0$
• Il en découle que $\psi = 0$, donc que φ est impaire.

3. Si φ_1 et φ_2 sont deux solutions impaires de E_λ alors d'après la question précédente, on a $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$, donc le wronskien

$$W(t) = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_2(t)\varphi_1'(t),$$

réalise $W(0) = 0$, donc la famille (φ_1, φ_2) est liée.

EXERCICE 492 Equation différentielle à solutions bornées

Titre : Equation différentielle à solutions bornées
ID : 447 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 433 | ID : 447
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit p une application de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ continue et intégrable et on considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + (p(t) + 1)y = 0$$

1. Soit φ une solution de (E). Prouver que φ est une solution de l'équation différentielle :

$$(F) \quad z'' + z = g(t)$$

où g est à determiner.

2. En déduire que toute solution de (E) est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Solution

sera donnée après

EXERCICE 493 Solutions polynômiales, application

Titre : Solutions polynômiales, application
ID : 448 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 434 | ID : 448
Difficulté : ★☆☆☆☆

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad (x^2 - 1)y' + xy = x^3 - x$$

1. Déterminer une fonction polynomiale p solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre (E) sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[,]-1, 1[,]1, +\infty[$.
3. Expliquer pourquoi la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est p.

Solution

sera donnée après

EXERCICE 494 Zéros des solutions d'équations différentielles

Titre : Zéros des solutions d'équations différentielles
ID : 449 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 435 | ID : 449
Difficulté : ★☆☆☆☆

On considère un intervalle I non trivial de $\mathbb{R}$, des applications a, b de I vers $\mathbb{R}$ et l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' = a(t)y' + b(t)y$$

1. Démontrer que si (I, ϕ) est une solution maximale de (E) alors les zéros de ϕ sont isolés.
2. Montrer que si (I, ϕ) et (J, ψ) sont deux solutions maximales de (E) alors soit elles sont proportionnelles soit pour tous zéros x_1, x_2 de ϕ, il existe un zéro x_0 de ψ tel que $x_1 < x_0 < x_2$

Solution

sera donnée après

EXERCICE 495 Au moins un zéro, au plus un zéro, selon le cas

Titre : Au moins un zéro, au plus un zéro, selon le cas
ID : 450 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 436 | ID : 450
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application strictement positive et continue sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que toute solution de l'équation différentielle :

$$(E1) \quad y'' + p(t)y = 0$$

admet au moins un zéro sur $\mathbb{R}$

2. Démontrer que toute solution non identiquement nulle de l'équation différentielle :

$$(E_2) \quad y'' - p(t)y) = 0$$

admet au plus un zéro sur $\mathbb{R}$.

Solution

$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue strictement positive.

1. Soit φ une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $(E), y'' + p(t)y = 0$. Si φ n'admet aucun zéro, alors par continuité et compte tenu du théorème des valeurs intermédiares, φ garderait un signe constant sur $\mathbb{R}$. Quitte à remplacer φ par $-\varphi$, on peut supposer que $\varphi > 0$ sur $\mathbb{R}$; donc $\varphi'' = -p\varphi < 0$ sur $\mathbb{R}$ et on en déduit d'une part que φ est concave sur $\mathbb{R}$ et d'autre part que φ' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, en particulier, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi'(c) \neq 0$. Par concavité, on a :

$$(1), \ \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) \leq \varphi(c) + \varphi'(c)(t - c)$$

• Si $\varphi'(c) < 0$ alors $\lim_{t \to +\infty} (\varphi(c) + \varphi'(c)(t - c) = -\infty$, donc $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = -\infty$, ce qui contredit que $\varphi > 0$ sur $\mathbb{R}$.
• Si $\varphi'(c) > 0$ alors $\lim_{t \to -\infty} (\varphi(c) + \varphi'(c)(t - c) = -\infty$, donc $\lim_{t \to -\infty} \varphi(t) = -\infty$, ce qui contredit

que $\varphi > 0$ sur $\mathbb{R}$.
Dans tous les cas on a une contradiction, donc φ ne peut être strictement positive ni strictement negative sur $\mathbb{R}$, donc φ admet au moins un zéro sur $\mathbb{R}$.

2. Soit φ une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $(E), y'' - p(t)y = 0$ et supposons que φ possède au moins deux zéros distincts a et b tel que $a < b$. Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Considérons la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \int_c^x p(t)\mathrm{d}t$, alors $P(c) = 0$, $P' = p$ et $P > 0$ sur l'intervalle $]c, +\infty[$ car $p > 0$ sur cet intervalle(sur $\mathbb{R}$ même).
On a $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi''(t) = p(t)\varphi(t)$, donc $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t)\varphi''(t) = p(t)\varphi(t)\varphi'(t)$ et en l'intégrant de c à b, il vient : $\int_c^b \varphi'(t)\varphi''(t)\mathrm{d}t = \int_c^b p(t)\varphi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$ et compte tenu de $\varphi'(c) = 0$ et une intégration par parties, il vient :

$$\frac{1}{2}\varphi'^2(b) = \left[P(t)\varphi(t)\varphi'(t)\right]_c^b - \int_c^b P(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi(t)\varphi'(t))\mathrm{d}t$$

Le crochet est nul car $\varphi(b) = \varphi'(c) = 0$ et comme : $\varphi''(t) = p(t)\varphi(t)$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\varphi'^2(b) = -\int_c^b P(t)(\varphi'^2(t) + p(t)\varphi^2(t))\mathrm{d}t$$

Le membre à droite de l'égalité ci-dessus est positif car $P(t) > 0$ pour tout $t \in [c, b]$ et $\varphi'^2(t) + p(t)\varphi^2(t) \geq 0$ pour tout $t \in [c, b]$, donc $\varphi'(b) = 0$ or on a déjà $\varphi(b) = 0$, donc φ est une solution de (E) qui satisfait la condition initiale $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz : $\varphi = 0$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur φ qu'elle n'est pas identiquement nulle. Donc toute solution non identiquement nulle de (E) admet au plus un zéro.

EXERCICE 496 Equation diffrentielle avec determinant

Titre : Equation diffrentielle avec determinant
ID : 451 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 437 | ID : 451
Difficulté :

Trouver les $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle :

$$\begin{vmatrix} y' & y'' & y \\ y'' & y & y' \\ y & y' & y'' \end{vmatrix} = 0$$

Solution

Remarquons que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + jb + j^2c)(a + j^2b + jc).$$

Ainsi, en tenant compte de $y'' + j^2y' + jy = \overline{y'' + jy' + j^2y}$, l'équation est équivalente à :

$$(y'' + y' + y)(y'' + jy' + j^2y) = 0$$

Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une solution maximale de l'équation différentielle en question. Supposons qu'il existe $x_0, x_2 \in I$ tel que $\begin{cases} (y'' + y' + y)(x_0) \neq 0 \\ (y'' + jy' + j^2y)(x_2) \neq 0 \end{cases}$ et supposons en plus que $x_2 > x_0$. Alors $(y'' + y' + y)(x_2) = 0$ et par suite, il existe $x_1 \in]x_0, x_2]$ tel que :

$$\begin{cases} (y'' + y' + y)(x_1) = 0 \\ \forall x \in [x_0, x_1[, (y'' + y' + y)(x) \neq 0 \end{cases}$$

On a donc $\forall x \in [x_0, x_1[, (y'' + jy' + j^2y)(x) = 0$, d'où, par continuité, $(y'' + jy' + j^2y)(x_1) = 0$. Il vient $y'(x_1) + (1+j)y(x_1) = 0$ puis $y(x_1) = y'(x_1) = 0$. Comme y est solution de $y'' + jy' + j^2y = 0$ sur $[x_0, x_1]$, l'unicité de la solution du problème de Cauchy montre que y est nulle sur $[x_0, x_2]$ et alors $(y'' + y' + y)(x_0) = 0$, ce qui est absurde. Ainsi toute solution de (E) est soit solution de :

$$(E_1) : \quad y'' + y' + y = 0$$

soit solution de

$$(E_2) : \quad y'' + jy' + j^2y = 0$$

Ces deux équations sont faciles à résoudre à savoir les $x \mapsto \alpha \exp(jx) + \overline{\alpha}\exp(-jx)$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) pour la première et les $x \mapsto \beta \exp(x)$ ($\beta \in \mathbb{R}$) pour la seconde.

EXERCICE 497 Etude qualitative, zéros d'équations différentielles

Titre : Etude qualitative, zéros d'équations différentielles
ID : 452 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 438 | ID : 452
Difficulté : ★★★☆☆

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et a et b deux applications de I vers $\mathbb{R}$, continues sur I. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

et soit φ une solution non identiquement nulle de (E).

1. Montrer que pour tout sous intervalle compact K de I, l'ensemble :

$$Z_{\varphi,K} = \{t \in K / \varphi(t) = 0\}$$

est fini. Que peut-on en déduire pour l'ensemble Z_φ des zéros de φ sur I ?

2. On suppose que φ s'annule au moins deux fois sur I et on considère α, β deux zéros consécutifs de φ (on expliquera pourquoi cela a un sens). Montrer que, si ψ est une autre solution sur I de (E), non proportionnelle à φ, alors $\psi(\alpha)\psi(\beta) \neq 0$ et que ψ s'annule une seule fois sur $]\alpha, \beta[$.

3. On considère deux équations différentielles :

$$(E_f) \quad y'' + f(t)y = 0$$

et

$$(E_g) \quad y'' + g(t)y = 0$$

avec $f, g : I \to \mathbb{R}$ continues tel que $f \geq g$. Montrer que, si v est une solution de (E_g) dont α et β sont deux zéros consécutifs et u une solution de (E_f) tel que $u(\alpha)u(\beta) \neq 0$ alors u admet un zéro dans $]\alpha, \beta[$.

Solution

1. Supposons que $Z_{\varphi,K}$ est infini. Par compacité de K, il existe une suite $(t_n) \in K^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{K}$, avec la condition $\forall n \in \mathbb{N}, t_n \neq \ell$. Comme φ est continue, on a $\varphi(t_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(\ell)$, donc $\varphi(\ell) = 0$. Comme φ est dérivable, on a $\frac{\varphi(t_n)-\varphi(\ell)}{t_n-\ell} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi'(\ell)$, donc $\varphi'(\ell) = 0$ et φ est une solution de l'équation différentielle (E) réalisant $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. Par le théorème de Cauchy-Lipscitz, on a φ est identiquement nulle sur I, ce qui conterdit l'hypothèse sur φ, donc $Z_{\varphi,K}$ est fini.
• On en déduit que tous les points de Z_φ sont isolés, en effet si $\xi \in Z_\varphi$, il existe un segment $[u, v]$ tel que $u < \xi < v$ et $[u, v] \subset I$. Or, les zéros de φ appartenant au compact $[u, v]$ constituent un nesemble fini, donc il existe u', v' tel que $u < u' < \xi < v' < v$ et $[u', v'] \cap Z_\varphi = \{\xi\}$, donc ξ

est un point isolé de Z_φ.

2. C'est possible car les zéros de φ sont isolés et φ admet au moins deux zéros.
   • Si on suppose que $\psi(\alpha)=0$, le wroonskien $W_{\varphi,\psi}(t)=\begin{vmatrix}\varphi(t) & \psi(t)\\ \varphi'(t) & \psi'(t)\end{vmatrix}$ réalise $W_{\varphi,\psi}(\alpha)=0$, donc la famille (φ,ψ) est liée, et comme φ est non nulle, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\psi=\lambda\varphi$, donc ψ et φ sont proportionnelles.
   • C'est la même chose si on suppose que $\psi(\beta)=0$.
   • Ainsi avec l'hypothèse ψ et φ sont non proportionnelles, on a fprcément $\psi(\alpha)\neq 0$ et $\psi(\beta)\neq 0$, donc $\psi(\alpha)\psi(\beta)\neq 0$.
   • Supposons que ψ ne s'annulle jamais sur $]\alpha,\beta[$, donc elle ne s'annule jamais sur $[\alpha,\beta]$, ce qui permet de définir la fonction $g(t)=\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}$ sur le segment $J=[\alpha,\beta]$. On a g est dérivable sur J et pour tout $t\in J$, on a $g'(t)=-\frac{W_{\varphi,\psi}(t)}{\psi^2(t)}$. Comme φ et ψ ne sont pas proportionnelles, le wronskien de φ et ψ ne s'anuule jamais et par continuité, il est soit strictement postif, soit strictement négatif sur J, par suite la fonction g est strictement monotone sur J. Or $g(\alpha)=g(\beta)=0$, c'est absurde. En conclusion, ψ posséde un et un seul zéro dans $]\alpha,\beta[$

3. v est une solution de (E_g) et $v(\alpha)=v(\beta)=0$ et v ne s'annule jamais sur $]\lambda,\beta[$. Par continuité, on a soit $v>0$ soit $v<0$ sur $]\alpha,\beta[$. Puisque $-v$ est aussi une solution de (E_g) dont α et β sont des zéros consécutifs, on peut sans nuire à la généralité supposer que $v>0$ sur $]\alpha,\beta[$.
   • On a $v'(\alpha)=\lim\limits_{\substack{t\to\alpha\\ t>\alpha}}\frac{v(t)}{t-\alpha}$, donc $v'(\alpha)\geq 0$ et comme v n'est pas identiquement nulle, le théorème de Cauchy-Lipschitz garatie que $v'(\alpha)\neq 0$, par suite $v'(\alpha)>0$.
   • Par le le même proncipe on a aussi $v'(\beta)<0$.
   • Supposons que u n'admet aucun zéro sur $]\alpha,\beta[$. Comme $u(\alpha)u(\beta)\neq 0$, on a par continuité, u est strictement positive ou strictement négative sur le segment $[\alpha,\beta]$. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $u>0$ sur $[\alpha,\beta]$.
   • La fonction $t\mapsto W(t)=\begin{vmatrix}u(t) & v(t)\\ u'(t) & v'(t)\end{vmatrix}$ est dérivable sur $[\alpha,\beta]$ et $\forall t\in[\alpha,\beta], W'(t)=u''(t)v(t)-v''(t)u(t)=(f(t)-g(t))u(t)v(t)$, par suite $W(t)\geq 0$ pour tout $t\in[\alpha,\beta]$ car u et v sont postives et on a supposé que $f\geq g$. Ainsi W est croissante sur $[\alpha,\beta]$ donc $W(\alpha)\geq W(\beta)$, or $W(\alpha)=u(\alpha)v'(\mathfrak{t})>0$ et $W(\beta)=u(\beta)v'(\beta)<0$, c'est absurde, donc u admet au moins un zéro dans l'intervalle $]\alpha,\beta[$.

EXERCICE 498 Application des equa diff au calcul d'intégrales

Titre : Application des equa diff au calcul d'intégrales
ID : 453 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 439 | ID : 453
Difficulté : ★☆☆☆☆

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose :

$$u(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(tx)\mathrm{d}t, v(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\sin(tx)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que u et v sont solutions de classe C^1 d'un système différentiel de premier ordre.
2. En déduire les valeurs de $u(x)$ et $v(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Solution

1) $u(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(tx)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}U(x,t)\mathrm{d}t$ avec $U(x,t)=\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(tx)$ pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.
• $(x,t)\mapsto U(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et $\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[, |U(x,t)|\leq\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}=\varphi(t)$ et φ est

continue integrable sur $]0,+\infty[$ car en 0, on a $\varphi(t) \sim \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$ et au voisinage de $+\infty$, on a $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc u est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

• $x \mapsto U(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\frac{\partial U}{\partial x}(x,t) = -\sqrt{t}e^{-t}\sin(tx)$, donc $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$, $\left|\frac{\partial U}{\partial x}(x,t)\right| \leq \sqrt{t}e^{-t} = \psi(t)$ et ψ est continue intégrable sur $]0,+\infty[$, donc par les théorèmes concernant les fonctions définies par une intégrale avec paramètre et compte tenu du fait que v se traite de la même manière que u, on a u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u'(x) = -\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\sin(xt)e^{-t}\mathrm{d}t \\ v'(x) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\cos(xt)e^{-t}\mathrm{d}t \end{cases}$$

• Pour tout réel non nul, x, une intégration par parties donne

$$u'(x) = \left[\sqrt{t}\frac{1}{x}\cos(xt)e^{-t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)\cos(xt)e^{-t}\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire que

$$xu'(x) = -\frac{1}{2}u(x) + v'(x)$$

• De la même façon

$$v'(x) = \left[\sqrt{t}e^{-t}\frac{1}{x}\sin(xt)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)\sin(xt)e^{-t}\mathrm{d}t$$

$$xv'(x) = -\frac{1}{2}v(x) + u'(x)$$

Il en découle que (u,v) est une solution du système différentiel :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} 2xX' - 2Y' + X = 0 \\ -2X' + 2xY' + Y = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 499 — Equation différentielle avec $t \mapsto A(t)$ périodique

Titre : Equation différentielle avec $t \mapsto A(t)$ périodique
ID : 454 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 440 | ID : 454
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une application continue et $2\pi-$périodique. On considère l'équation différentielle linéaire homogène suivante :

$$(E) \quad x' = A(t)x.$$

Soit φ_1 et φ_2 deux solutions linéairement indépendantes de (E) et $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ la matrice dont les colonnes sont celles des coordonnées de φ_1 et φ_2 dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$.

1. (a) Vérifier que $t \mapsto \varphi_1(x+2\pi)$ et $t \mapsto \varphi_2(x+2\pi)$ sont encore deux solutions de (E).
   (b) En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversible telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t+2\pi) = M(t)P.$$

2. Déduire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $P : t \mapsto P(t) = M(t)e^{tB}$ soit $2\pi-$périodique.

Solution

1)a) Pour tout $k \in \{1,2\}$, notons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi_k(t) = \varphi_k(t+2\pi)$. Comme A est $2pi-$périodique, il est facile de voir que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\psi_k'(t) = \varphi_k'(t+2\pi) = A(t+2\pi)\varphi_k(t+2\pi) = A(t)\varphi_k(t)$, donc ψ_k est une solution de (E).

b) Soit $\mathscr{S}_{(E)}$ l'ensemble des solutions de (E). Comme A est continue, on sait que $\dim(\mathscr{S}_{(E)}) = 2$, donc (φ_1, φ_2) est une base de $\mathscr{S}_{(E)}$ et par suite il existe $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ tel que $\psi_1 = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ et $\psi_2 = \mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2$, ce qui se traduit pmatriciellement par $M(t+2\pi) = M(t)P$ où $P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix}$. Comme les deux solutions φ_1 et φ_2 sont linéairement indépendantes on a en vertu du **1)a)**, les solutions ψ_1 et ψ_2 sont linéairment indépendantes aussi, donc P est inversible.

2) Toute matrice complexe inversible est l'exponentielle d'une matrice donc il exisre $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $\exp(C) = P$, en posant $B = -\frac{1}{2\pi}C$, on a $P = \exp(-2\pi B)$. On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t+2\pi) = M(t+2\pi)\exp(t+2\pi)B = M(t)\exp(-2\pi B)\exp((t+2\pi)B) = M(t)\exp(tB) = P(t).$$

EXERCICE 500 — Equation différentielle non linéaire

Titre : Equation différentielle non linéaire
ID : 455 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 441 | ID : 455
Difficulté : ★☆☆☆☆

On considère l'équation différentielle : $(E) \quad y' = y^3 + t^3$. Pour tout $a \in [0, +\infty[$, on note (I_a, φ_a) la solution maximale de (E) tel que $\varphi_a(0) = a$.

1. Démontrer que φ_a est strictement croissante sur I_a
2. Démontrer que I_a est majoré, soit alors $b = \sup(I_a)$
3. Prouver que : $\lim\limits_{t \to b^-} \varphi_a(t) = +\infty$

Solution

pas encore disponible.

EXERCICE 501 — Etude qualitative d'une equa diff non linéaire

Titre : Etude qualitative d'une equa diff non linéaire
ID : 456 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 442 | ID : 456
Difficulté : ★☆☆☆☆

On considère le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{C}) \quad \begin{cases} y' = y^2 + t^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. Justifier l'existence d'une solution maximale (I, φ) pour $(\mathcal{C})$
2. Démontrer que φ est impaire
3. Étudier la monotonie et la concavité de φ
4. Démontrer que l'intervalle I est borné
5. Dresser le tableau de variations de φ et donner une allure de sa courbe représentative

6. Généralisation du 4) : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et h une fonction continue positive sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}_+$ de $\mathbb{R}$. Démontrer que si (J, g) est une solution maximale du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = y^n + h(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

alors l'intervalle J est majoré.

Solution

pas encore disponible.

EXERCICE 502 Equa diff non linéaire avaec radical

Titre : Equa diff non linéaire avaec radical
ID : 457 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 443 | ID : 457
Difficulté : ★☆☆☆☆

Montrer que si (J, φ) est une solution maximale de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = \sqrt{y^2 + t^2}$$

sur un intervalle J contenu dans $]0, +\infty[$ alors $J =]0, +\infty[$

Solution

à venir

EXERCICE 503 Solutions maximales d'une équa diff non linéaire

Titre : Solutions maximales d'une équa diff non linéaire
ID : 458 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 444 | ID : 458
Difficulté : ★☆☆☆☆

On considère l'équation différentielle : $(E) \quad y' = y^3 + t^3$. Pour tout $a \in [0, +\infty[$, on note (I_a, φ_a) la solution maximale de (E) tel que $\varphi_a(0) = a$.

1. Démontrer que φ_a est strictement croissante sur I_a
2. Démontrer que I_a est majoré, soit alors $b = \sup(I_a)$
3. Prouver que : $\lim\limits_{t \to b^-} \varphi_a(t) = +\infty$

Solution

à venir

EXERCICE 504 Solution developpable en série entière d'une équation diff

Titre : Solution developpable en série entière d'une équation diff
ID : 487 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 469 | ID : 487
Difficulté : ★★☆☆☆

1. Déterminer les séries entières solutions au voisinage de 0 de l'équation différentielle $(E) \quad y'' + 2xy' + 2y = 0$.
2. Exprimer parmi celles-ci, celles dont la somme est une fonction paire.

Solution

1. Analyse : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S. La fonction S est de classe C^∞ sur $]-R;R[$ et pour tout $x \in]-R;R[$, on a :

$$S''(x) + 2xS'(x) + 2S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(n+1)a_n\right) x^n$$

Par conséquent, S est solution de l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + 2y = 0$$

si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{-2}{n+2} a_n$$

ce qui donne

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{p!} a_0 \text{ et } a_{2p+1} = \frac{(-1)^p 2^p}{(2p+1)\dots 3} a_1 = \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!} a_1$$

Synthèse : Soit $\sum a_n x^n$ la série entière déterminée par les coefficients précédemment proposés. Une telle série entière est de rayon de convergence $R = +\infty$ car $a_{2p} = \mathrm{O}(1/p!)$ et $a_{2p+1} = \mathrm{O}\left(4^p/p!\right)$. De plus par les calculs ci-dessus elle est solution de l'équation différentielle proposée sur $\mathbb{R}$.

2. Les solutions paires sont obtenue pour $a_{2p+1} = 0$. Cela donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = a_0 \mathrm{e}^{-x^2}$$

EXERCICE 505 Etude qualitative d'une équation différentielle du second ordre

Titre : Etude qualitative d'une équation différentielle du second ordre

Difficulté : ★★☆☆☆

ID : 488 **Durée :** —

Niveau : L2 | N° : 470 | ID : 488

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'' + \cos^2(t) y = 0$$

1. Justifier l'existence d'une solution u de (E) telle que $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.
2. Démontrer l'existence de deux réels α, β vérifiant

$$\alpha < 0 < \beta, u'(\alpha) > 0 \text{ et } u'(\beta) < 0$$

En déduire que u possède au moins un zéro dans $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

3. Justifier l'existence de réels

$$\gamma = \max\{t < 0 \mid u(t) = 0\} \text{ et } \delta = \min\{t > 0 \mid u(t) = 0\}$$

4. Soit v une solution de (E) linéairement indépendante de u. En étudiant les variations de

$$W = uv' - u'v$$

montrer que v possède au moins un zéro dans $]\gamma;\delta[$.

5. Soit w une solution non nulle de (E). Démontrer que w admet une infinité de zéros. On pourra introduire pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$w_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto w(t - n\pi)$$

Solution

1. (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \cos^2(t)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de Cauchy-Lipschitz garantie l'existence d'une solution unique sur $\mathbb{R}$, avec les conditions initiales proposées.

2. Puisque la fonction u est continue et $u(0) = 1$, la fonction u est strictement positive sur un voisinage de 0, donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < 0 < \beta$ et $\forall t \in [\alpha, \beta], u(t) > 0$, et comme u solution l'équation différentielle (E), on a $\forall t \in [\alpha, \beta], u''(t) = -u(t)\cos^2(t)$, donc $\forall t \in [\alpha, \beta], u''(t) \leq 0$. On peut choisir α, β tel que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ de sorte que $\forall t \in [\alpha, \beta], u''(t) < 0$. Il en découle que la fonction u' est strictement décroissant sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ et comme $u'(0) = 0$ on a $u'(\alpha) > 0$ et $u'(\beta) < 0$.
   • On raisonne par l'absurde : Supposons que la fonction u ne s'annule par sur $\mathbb{R}_+$. La fonction u est alors positive et u'' est négative sur $\mathbb{R}_+$. La fonction u' étant donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a
   $$\forall t \geq \beta, u'(t) \leq u'(\beta)$$
   En intégrant
   $$\forall x \geq \beta, u(x) - u(\beta) \leq u'(\beta)(x - \beta)$$
   Or cette affirmation est incompatible avec un passage à la limite quand $x \to +\infty$. On en déduit que u s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+$(et cette annulation est nécessairement sur $\mathbb{R}_+^*$) De même, on justifie que u s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_-^*$ (et on peut même montrer que la fonction u est paire...)

3. Considérons l'ensemble
   $$A = \{t > 0 \mid u(t) = 0\}$$
   C'est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne inférieure δ. Par la caractérisation séquentielle d'une borne inférieure, il existe une suite $(t_n) \in A^{\mathbb{N}}$, telle que
   $$t_n \to \delta$$
   Puisque $u(t_n) = 0$, on obtient à la limite $u(\delta) = 0$. Evidemment $\delta \geq 0$ et $\delta \neq 0$ donc $\delta \in A$ et ainsi δ est un minimum de A. De même on obtient γ.

4. Grâce à l'équation différentielle
   $$W' = u''v - uv'' = 0$$
   Le wronskien W est donc constant mais peu importe... puisque les solutions u et v sont indépendantes, le wronskien ne s'annule pas et il est donc de signe constant. Or
   $$W(\gamma) = u'(\gamma)v(\gamma) \text{ et } W(\delta) = u'(\delta)v(\delta)$$
   Puisque u est strictement positive sur $]\gamma; \delta[$, u'' est strictement négative et u' strictement décroissante sur ce même intervalle. On en déduit
   $$u'(\gamma) > 0 \text{ et } u'(\delta) < 0$$
   ce qui entraîne que $v(\gamma)$ et $v(\delta)$ sont de signes stricts contraires. On en déduit que v s'annule sur $]\gamma; \delta[$.

5. Plus généralement, qu'une solution de (E) soit colinéaire à u ou non, on peut affirmer que celle-ci possède un zéro dans $[\gamma; \delta]$. Or on vérifie que les fonctions w_n sont solutions de (E) et donc chacune possède au moins un zéro dans $[\gamma; \delta]$. On en déduit que la fonction w possède au moins un zéro dans chaque intervalle $[\gamma + n\pi; \delta + n\pi]$ ce qui assure l'existence d'une infinité de zéros.

EXERCICE 506 Condition pour avoir une solution periodique

Titre : Condition pour avoir une solution periodique
ID : 567 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 548 | ID : 567
Difficulté : ★★★☆☆

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ une fonction 2π-périodique. Existe-t-il $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, une fonction 2π-périodique et solution de

$$y'' + y = f ?$$

Solution

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = f$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ car f l'est. Par application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de l'équation $y'' + y = f$ est

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t.$$

Cette solution est 2π-périodique si, et seulement si,

$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t.$$

i.e. $\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En développant le sinus et en exploitant la liberté de la famille (sin, cos) ainsi que la 2π-périodicité de f, cela équivaut à la condition

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin t \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t \,\mathrm{d}t = 0.$$

EXERCICE 507 Solution developpable en série entière d'une équation différentielle

Titre : Solution developpable en série entière d'une équation différentielle
ID : 689 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 670 | ID : 689
Difficulté : ★★☆☆☆

Chercher les fonctions y développables en série entière au voisinage de 0 , solutions de l'équation différentielle

$$\left(2+x^2\right)y'' - xy' + y = 0.$$

Solution

On cherche une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

On a donc

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Posons

$$\mathscr{E}(x) = \left(2+x^2\right)y''(x) - xy'(x) + y(x)$$

On a alors

$$\mathscr{E}(x)=\sum_{n=2}^{\infty}2n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

ou encore

$$\mathscr{E}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

Finalement

$$\mathscr{E}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[2(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n-1)^2a_n\right]x^n.$$

Comme la série entière $\mathscr{E}(x)$ doit être nulle, on doit avoir la nullité de ses coefficients, donc, pour tout entier $n\geq 0$,

$$2(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n-1)^2a_n=0.$$

En particulier, si $n=1$, on en tire $a_3=0$, et tous les coefficients de rang impair supérieur à à 3 seront nuls également. On a donc comme partie impaire de la série

$$y_I(x)=a_1x.$$

Pour les coefficients de rang pair, on a, si $p\geq 0$,

$$a_{2p+2}=-\frac{(2p-1)^2}{4(p+1)(2p+1)}a_{2p}$$

Tous les coefficients se calculent en fonction de a_0 et ils ne sont pas nuls si $a_0\neq 0$. Donc si R est le rayon de convergence de la série des termes de rang pair,

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{\left|a_{2p}\right|}{\left|a_{2p+2}\right|}=\lim_{p\to+\infty}\frac{2(2p+2)(2p+1)}{(2p-1)^2}=2=R^2.$$

La série obtenue est de rayon $\sqrt{2}$, et les calculs précédents sont valables dans l'intervalle $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$. De la relation $(\star)$ on tire immédiatement par récurrence, que, pour $p\geq 0$, on a

$$a_{2p}=(-1)^p\frac{(2p-3)^2}{4p(2p-1)}\frac{(2p-5)^2}{4(p-1)(2p-3)}\cdots\frac{1}{4.2.3}\frac{1}{4.1.1}a_0.$$

ce que l'on peut écrire, après simplification et mise en facteur,

$$a_{2p}=\frac{(-1)^p}{2^{2p}}\frac{(2p-3)(2p-5)\cdots 1}{p!(2p-1)}a_0,$$

ou encore

$$a_{2p}=-\frac{1}{2^pp!(2p-1)}\left(\frac{1}{2}-p+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{1}{2}a_0.$$

Alors

$$y_P(x)=a_0-a_0\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{2^pp!(2p-1)}\left(\frac{1}{2}-p+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{1}{2}x^{2p}$$

Reste à calculer la somme de cette série. Si x appartient à $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[\backslash\{0\}$ posons

$$z(x)=\frac{y_P(x)-a_0}{x}.$$

(Cette fonction est impaire et se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0 . Elle est définie sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$).
On a

$$z(x) = -a_0 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p p!(2p-1)} \left(\frac{1}{2} - p + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{1}{2} x^{2p-1}$$

On a alors

$$\begin{aligned} z'(x) &= -a_0 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p p!} \left(\frac{1}{2} - p + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{1}{2} x^{2p-2} \\ &= -\frac{a_0}{x^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p p!} \left(\frac{1}{2} - p + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{1}{2} x^{2p} \\ &= -\frac{a_0}{x^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{1}{2} - p + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2}\right)^p \\ &= -\frac{a_0}{x^2} \left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{2}} - 1\right) \end{aligned}$$

Donc, pour x non nul dans l'intervalle $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, on a

$$z'(x) = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{2}}\right) a_0$$

Il reste à trouver la primitive de z nulle en 0 . En effectuant le changement de variable $x = \sqrt{2}\,\mathrm{sh}\, t$ qui est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, on a

$$t = \mathrm{argsh}\, \frac{x}{\sqrt{2}} = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{2}}\right) = \ln\left(x + \sqrt{2 + x^2}\right) - \frac{1}{2}\ln 2$$

On a alors

$$dx = \sqrt{2}\,\mathrm{ch}\, t dt$$

D'autre part

$$1 + \frac{x^2}{2} = 1 + \mathrm{sh}^2 t = \mathrm{ch}^2 t$$

et comme ch t est positif

$$\sqrt{1 + \frac{x^2}{2}} = \mathrm{ch}\, t$$

Alors

$$\int \frac{\sqrt{1 + \frac{x^2}{2}}}{x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\mathrm{ch}^2 t}{\mathrm{sh}^2 t} dt$$

En remarquant que

$$\left(\frac{\mathrm{ch}\, t}{\mathrm{sh}\, t}\right)' = \frac{\mathrm{sh}^2 t - \mathrm{ch}^2 t}{\mathrm{sh}^2 t} = 1 - \frac{\mathrm{ch}^2 t}{\mathrm{sh}^2 t}$$

on en déduit

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\mathrm{ch}^2 t}{\mathrm{sh}^2 t} dt dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(t - \frac{\mathrm{ch}\, t}{\mathrm{sh}\, t}\right)$$

d'où

$$\int \frac{\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}}{x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right) - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}}{\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)$$

Finalement

$$z(x) = \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}x}\sqrt{2+x^2} + K\right)a_0$$

où K est une constante dont la valeur est déterminée par le fait que z se prolonge par 0 en 0 . Cette constante vaut

$$K = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right) - \frac{\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}-1}{x}\right] = \frac{\ln\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Alors

$$y_P(x) = xz(x) + a_0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x\ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+x^2} + Kx\right)a_0$$

et

$$y(x) = \left(-x\ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right) + \sqrt{2+x^2}\right)\frac{a_0}{\sqrt{2}} + (Ka_0+a_1)\,x$$

Donc, si l'on pose,

$$A = \frac{a_0}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad B = a_1 + Ka_0$$

on trouve

$$y(x) = A\left(-x\ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right) + \sqrt{2+x^2}\right) + Bx$$

EXERCICE 508 Comportement de solutions d'équations diff

Titre : Comportement de solutions d'équations diff
ID : 700 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 681 | ID : 700
Difficulté : ★★★☆☆

Soit $p : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ et on considère l'équation différentielle (E) : $y'' + p(t)y = 0$. On considère une solution f de (E).

1. Prouver que si f est bornée alors $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.
2. Montrer que (E) admet des solutions bornées.

Solution

1. On a $f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)\mathrm{d}t$, et comme f est une solution de (E), on a $f''(t) = -p(t)f(t)$, ce qui donne $f'(x) = f'(0) - \int_0^x p(t)f(t)\mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto p(t)f(t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car f est bornée et p est integrable sur $[0,+\infty[$, précisément si $M = \|f\|_{\infty,[0,+\infty[}$, on a $\forall t \geq 0, |f(t)p(t)| \leq M|p(t)|$. Donc $f'(x)$ admet une limite en $+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = f'(0) - \int_0^{+\infty} f(t)p(t)\mathrm{d}t$.
2. Si φ et ψ sont deux solutions bornées de (E) le wronskien est $W(t) = \varphi(t)\psi'(t) - \psi(t)\varphi'(t)$ donc $|W(t)| \leq M_1|\psi'(t)| + M_2|\varphi'(t)|$ et comme d'après la question 1) on a $\lim_{x\to+\infty} \varphi'(x) =$

$\lim_{x\to+\infty}\psi'(x)=0$, on a $W(x)=W(0)e^{\int_0^x p(t)\mathrm{d}t}$, donc $0=\lim_{x\to+\infty}W(x)=W(0)e^{\int_0^{+\infty}p(t)\mathrm{d}t}$, donc $W(0)=0$ et $W(x)=0$ pour tout $x\geq 0$, donc (φ,ψ) est liée.

EXERCICE 509 Equation différentielle linéaire

Titre : Equation différentielle linéaire
ID : 701 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 682 | ID : 701
Difficulté : ★★★☆☆

$(E,\|.\|)$ est un espace vectoriel normé réel, et pour tout $u\in\mathcal{L}(E)$, on note

$$|||u|||=\sup_{x\in E\setminus\{0\}}\frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

On considère l'équation différentielle linéaire $y'=a(t).y$, où $a:[0,+\infty[\to\mathcal{L}(E)$ est une application continue tel que $t\mapsto|||a(t)|||$ est integrable sur $[0,+\infty[$.

1. Démontrer que si y est une solution de (E) alors y est bornée sur $[0,+\infty[$.
2. Démontrer que si y est une solution de (E) alors $\lim_{t\to+\infty}y(t)$ existe dans E.

Solution

1. Notons f une solution de (E). Il existe $x_0>0$ tel que $\int_{x_0}^{+\infty}|||a(t)|||\,\mathrm{d}t<\frac{1}{2}$. Pour tout réel $y>x_0$ et pour tout $t\in[x_0,x]$, on a $f(t)=f(x_0)+\int_{x_0}^t f'(s)\mathrm{d}s=f(x_0)+\int_{x_0}^t a(s)(f(s))\mathrm{d}s$. Il en découle que si on note $M(y)=\sup_{t\in[x_0,x]}\|f(t)\|$, alors $\forall t\in[x_0,x],\|f(t)\|\leq\|f(x_0)\|+M(x)\int_0^{+\infty}|||a(s)|||\,\mathrm{d}s$. On a alors

$$\forall t\in[x_0,x],\|f(t)\|\leq\|f(x_0)\|+\frac{1}{2}M(x)$$

et par passage à la borne supérieure on a $M(x)\leq\|f(x_0)\|+\frac{1}{2}M(x)$, donc $M(x)\leq 2\|f(x_0)\|$. Il en découle que f est majorée sur $[x_0,+\infty[$ et que $\sup_{x\in[x_0,+\infty[}\|f(x)\|\leq 2\|f(x_0)\|$. Par continuité f est bornée sur $[0,x_0]$, donc f est bornée sur $[0,+\infty[$.

2. Revenons à l'assertion $\forall x\in[x_0,+\infty[,f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^x a(t)(f(t))\mathrm{d}t$. Si on fixe une base $\mathscr{E}=(e_1,\ldots,e_n)$ de E et on note $f_k,k\in\{1,\ldots,n\}$ les composantes de f dans cette base, et notons $(a_{i,j}(t))_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de $a(t)$ relativement à la base $\mathscr{E}$, donc

$$f(x)=\sum_{j=1}^n\left[f_j(x_0)+\sum_{i=1}^n\left(\int_{x_0}^x a_{i,j}(t)f_j(t)\mathrm{d}t\right)\right]e_j,$$

par suite

$$f_j(x)=f_j(x_0)+\sum_{i=1}^n\int_{x_0}^x a_{i,j}(t)f_j(t)\mathrm{d}t$$

Comme f est bornée sur $[0,+\infty[$ et $t\mapsto|||a(t)|||$ est integrable, en posant $M=\|f\|_{\infty,[0,+\infty[}$, on peut dire qu'il existe une constante $C>0$ tel que $|a_{i,j}(t)f_j(t)|\leq CM|||A(t)|||$, l'existence de la constante C est justifiée par le faite que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les normes sont équivalentes et si on pose $\|M\|_\infty=\sup_{1\leq i,j\leq n}|m_{i,j}|$, il existe une constante $C>0$ tel que $\|M\|_\infty\leq C|||M|||$. Il en découle que l'application $t\mapsto a_{i,j}(t)f_j(t)$ est integrable et que :

$$\lim_{x\to+\infty}f_j(x)=f_j(x_0)+\sum_{i=1}^n\int_{x_0}^{+\infty}a_{i,j}(t)f_j(t)\mathrm{d}t$$

et en notant ℓ_j cette limite on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell = \sum_{j=1}^{n} \ell_j e_j$.

EXERCICE 510 Solution periodique equation linéaire premier ordre

Titre : Solution periodique equation linéaire premier ordre
ID : 702 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 683 | ID : 702
Difficulté : ★★★☆☆

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$ et une application

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x),$$

continue sur $\mathbb{R}$ et $T-$périodique.
On considère l'équation différentielle :

$$(E_f) \quad y' - y = f(t).$$

1. Démontrer que (E_f) admet une et une seule solution g sur $\mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer qu'une telle solution g est alors $T-$ périodique.

Solution

1. La solution générale de l'équation différentielle $(\mathcal{EH}) \quad y' - y = 0$ est $y(t) = \lambda e^t$. La méthode de la variation de la constante donne la solution générale de l'équation différentielle $(\mathcal{E}) \quad y' - y = f(t)$ est $y(t) = \alpha(t)e^t$ avec $\alpha'(t) = e^{-t}f(t)$, ce qui donne

$$y(t) = \left(\lambda + \int_0^t f(s)e^{-s}\mathrm{d}s\right) e^t,$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est l'expression de la solution générale de $(\mathcal{E})$. On remarque que la fonction $s \mapsto f(s)e^{-s}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car f est bornée donc si on note $M = \|f\|_{\infty,\mathbb{R}} = \|f\|_{\infty,[0,T]}$, alors on a $\forall s \in \mathbb{R}, \quad |f(s)e^{-s}| \leq Me^{-s}$, et comme $s \mapsto e^{-s}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, il en est de même de $s \mapsto f(s)e^{-s}$, par un critère de comparaison. Si on pose $h(t) = \lambda + \int_0^t f(s)e^{-s}\mathrm{d}s$ alors $h(t)$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand t tend vers $+\infty$ et $\ell = \lambda + \int_0^{+\infty} f(s)e^{-s}\mathrm{d}s$. Si on suppose que $\ell \neq 0$, alors quand t tend vers $+\infty$, on a $y(t) \sim \ell e^t$, donc y n'est pas bornée. Il en découle qu'une condition nécessaire pour que y soit bornée est $\ell = 0$, c'est-à-dire $\lambda = -\int_0^{+\infty} f(s)e^{-s}\mathrm{d}s$.

• On vient donc de prouver que si (E) admet une solution bornée g alors elle est unique et elle est définie par

$$g(x) = e^x\left(-\int_0^{+\infty} f(t)e^x\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)e^{-t}\mathrm{d}t\right) = -e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$$

Réciproquement, la fonction g définie par $g(x) = -e^x\int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ est une solution de (E) d'après ce qui précède. Il reste à démontrer que g est bornée sur $\mathbb{R}$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|g(x)| \leq e^x M\int_x^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = M$, donc g est bornée.
Il en découle que (E) admet une et une seule solution bornée g et qu'elle est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = -e^x\int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}\mathrm{d}t$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x+T) = -e^{x+T}\int_{x+T}^{+\infty} f(t)e^{-t}\mathrm{d}t$. Le changement de variable $t - T = s$

donne :

$$\begin{aligned} g(x+T) &= -e^x e^T \int_x^{+\infty} f(s+T)e^{-s-T}\mathrm{d}s \\ &= -e^x e^T e^{-T} \int_x^{+\infty} f(s)e^{-s}\mathrm{d}s \\ &= -e^x \int_x^{+\infty} f(s)e^{-s}\mathrm{d}s \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Il en découle que g est $T-$périodique.

Chapitre 014 — Probabilités (L2)

EXERCICE 511 Trace d'une tribu sur une partie

Titre : Trace d'une tribu sur une partie
ID : 355 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 341 | ID : 355
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soient $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble Ω et Ω' une partie de Ω.
Vérifier que $\mathcal{T}' = \{A \cap \Omega' / A \in \mathcal{T}\}$ définit une tribu sur Ω'.

Solution

On a $\Omega' \in \mathcal{T}'$ car $\Omega' = \Omega \cap \Omega'$ et $\Omega' \subset \Omega'$ et $\Omega \in \mathcal{T}$.
Soit $X \in \mathcal{T}'$ alors il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que $X = A \cap \Omega'$, donc $\Omega' \backslash X = \Omega' \backslash (A \cap \Omega') = \Omega' \cap (A \cap \Omega')^c = \Omega' \cap (A^c \cup \Omega'^c) = (\Omega' \cap A^c) \cup (\Omega' \cap \Omega'^c) = \Omega' \cap A^c$ avec $A^c \in \mathcal{T}$.

EXERCICE 512 Tribu engendrée par les singletons

Titre : Tribu engendrée par les singletons
ID : 356 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 342 | ID : 356
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit Ω un ensemble. On introduit

$$\mathcal{T} = \{A \subset \Omega / A \text{ ou } A^c \text{ est au plus dénombrable}\}$$

1. Vérifier que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω.
2. Justifier que $\mathcal{T}$ est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant les singletons $\{\omega\}$ pour ω parcourant Ω.
3. Vérifier que si Ω est au plus dénombrable alors $\mathcal{T} = \mathscr{P}(\Omega)$

Solution

1. On va vérifier les axiomes d'une tribu :
   • On a $\emptyset$ est fini, donc $\emptyset$ est au plus dénombrable donc $\emptyset \in \mathcal{T}$.
   • Soit $A \in \mathcal{T}$, donc A ou A^c est au plus dénombrable, donc A^c ou $(A^c)^c$ est au plus dénombrable donc $A^c \in \mathcal{T}$.
   • Soit (A_n) une famille d'éléments de $\mathcal{T}$. Démontrons que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ appartient à $\mathcal{T}$. S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que A_k est au plus dénombrable alors A est au plus dénombrable, donc $A \in \mathcal{T}$. Si A_k n'est pas dénombrable, pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors comme $A_k \in \mathcal{T}$, on a A_k^c est au plus dénombrable pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc leur union $A^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$ est au plus dénombrable, donc $A \in \mathcal{T}$.
2. Soit $\mathcal{T}_0$ une tribu contenant les singletons $\{\omega\}$ pour ω parcourant Ω. Si $A \in \mathcal{T}$ alors deux cas sont possible : soit A est au plus dénombrable, et comme $A = \bigcup_{\omega\in A}\{\omega\}$, on a $A \in \mathcal{T}_0$, soit A n'est pas au plus dénombrable dans ce cas $A^c \in \mathcal{T}$, donc $A^c \in \mathcal{T}_0$ et comme $\mathcal{T}_0$ est une tribu, on a $A \in \mathcal{T}_0$. On vient de prouver que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_0$. Il en découle que $\mathcal{T}$ est la plus petite tribu contenant tous les singletons.
3. Supposons que Ω est au plus dénombrable alors pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a A est au plus dénombrable, donc $A \in \mathcal{T}$, d'où $\mathcal{P}(\Omega) \subset \mathcal{T}$, donc $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$.

EXERCICE 513 A propos de famille d'événements deux à deux disjoints

Titre : A propos de famille d'événements deux à deux disjoints
ID : 357 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 343 | ID : 357
Difficulté :

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Démontrer que pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux disjoints, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$$
2. Démontrer que toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements, si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_n) = 1$$
alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1$$
3. Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}))$.Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 0$$

Solution

1. Puisque les A_n sont deux à deux disjoitns, si $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, alors $\mathbb{P}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$, donc $\mathbb{P}(A_n)$ est le terme général d'une série convergente, donc $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $B_n = \bigcap_{k=0}^{n} A_k$. Alors la famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille décroissantes d'événements qui de plus vérifie $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = A$. Par la propriété de la continuité monotone séquentielle, on a alors :$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$. Or $\mathbb{P}(B_n) = 1 - \mathbb{P}(B_n^c)$ donc $\mathbb{P}(B_n) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k^c\right)$. Il e,n découle, compte tenu de la sous-additivité : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k^c\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k^c)$,

que : $\mathbb{P}(B_n) \geq 1 - \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k^c)$. Or, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a : $\mathbb{P}(A_k) = 1$, par hypothèse , donc $\mathbb{P}(A_k^c) = 0$ et par suite $\mathbb{P}(B_n) \geq 1$, et par passage à la limite , il vient $\mathbb{P}(A) \geq 1$, donc $\mathbb{P}(A) = 1$.
Conclusion : on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1$$

3. C'est un cas particulier du 1), en posant $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{T} = \wp(\mathbb{N})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{n\}$, d'où le résultat.

EXERCICE 514 Probabilité conditionnelle

Titre : Probabilité conditionnelle
ID : 358 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 344 | ID : 358
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A et B deux événements non négligeables. Démontrer que :

$$\mathbb{P}(A|B) \geq \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(B|A) \geq \mathbb{P}(B)$$

Solution

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|B) \geq \mathbb{P}(A) &\iff \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \geq \mathbb{P}(A)\\
&\iff \mathbb{P}(A\cap B) \geq \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A)\\
&\iff \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} \geq \mathbb{P}(B)\\
&\iff \mathbb{P}(B|A) \geq \mathbb{P}(B)
\end{aligned}$$

EXERCICE 515 Construction de probabilité et suite strictement décroissante

Titre : Construction de probabilité et suite strictement décroissante
ID : 359 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 345 | ID : 359
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels positifs de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$A_n = \{k \in \mathbb{N} / k \geq n\} = [\![n, +\infty[\![.$$

Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}))$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_n) = \lambda a_n$$

Solution

Remarquons que la famille des événements (A_n) est décroissante, donc par la théorème de continuité monotone séquentielle, on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$ où $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On a donc $A = \emptyset$ et par suite $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A_n = \{n\} \cup A_{n+1}$ et $\{n\} \cap A_{n+1} = \emptyset$, donc $\mathbb{P}(A_n) = p_n + \mathbb{P}(A_{n+1})$ où $p_n = \mathbb{P}(\{n\})$, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \lambda(a_n - a_{n+1}).$$

Si $\mathbb{P}$ est une probabilité on doit avoir $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, donc, compte tenu de $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, on doit avoir : $\lambda a_0 = 1$ donc $\lambda = \frac{1}{a_0}$.

Réciproquement si on prends $\lambda = \frac{1}{a_0}$, en posant $p_n = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_0}$ on a $\mathbb{P}_n > 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, donc on définit une probabilité en posant $\mathbb{P}(\{n\} = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $P(A) = \sum_{a\in A} \mathbb{P}(\{a\})$ et de plus $\mathbb{P}$ vérifie $\mathbb{P}(A_n) = \lambda_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi la seule valeur valable pour que $\mathbb{P}$ soit une probabilité est $\lambda = \frac{1}{a_0}$

EXERCICE 516 Une espéce de distance construite par une probabilité

Titre : Une espéce de distance construite par une probabilité
ID : 360 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 346 | ID : 360
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Pour $A, B \in \mathcal{T}$, on pose

$$d(A,B) = P(A\Delta B)$$

avec $A\Delta B$ la différence symétrique de A et B définie par

$$A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$$

1. Vérifier
$$d(A,C) \leqslant d(A,B) + d(B,C)$$
2. En déduire
$$|P(A) - P(B)| \leqslant P(A\Delta B)$$

Solution

1. On a :
$$A\Delta C \subset (A\Delta B) \cup (B\Delta C).$$
En effet pour tout $x \in \Omega$, si $x \in A\Delta C$ alors $x \in A\backslash C$ ou $x \in C\backslash A$. Si $x \in A\backslash C$ alors $x \in A$ et $x \notin C$. Si $x \notin B$ alors $x \in A\Delta B$, si $x \in B$, comme $x \notin C$, on a $x \in B\Delta C$. Si $x \in C\backslash A$ alors si $x \notin B$, on a $x \in C\Delta B$ et si $x \in B$ comme $x \notin A$, on a $x \in A\Delta B$. Ainsi dans tous les cas $x \in (A\Delta B) \cup (B\delta C)$, donc on a bien l'inclusion désirée. et donc
$$P(A\Delta C) \leqslant P(A\Delta B) + P(B\Delta C)$$
2. On a
$$P(A) = P(A\Delta\emptyset) \leqslant P(A\Delta B) + P(B\Delta\emptyset) = P(A\Delta B) + P(B)$$
donc
$$P(A) - P(B) \leqslant P(A\Delta B)$$
Un raisonnement symétrique fournit aussi
$$P(B) - P(A) \leqslant P(A\Delta B)$$
Il en découle que :
$$\forall A, B \in \mathcal{T}, |P(A) - P(B)| \leqslant P(A\Delta B)$$

EXERCICE 517 Lemme de Borel-Cantelli(partiel)

Titre : Lemme de Borel-Cantelli(partiel) **Difficulté :**
ID : 361 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 347 | ID : 361

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.

1. Démontrer que
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left({A_k}^c\right)$$
2. On suppose $\mathbb{P}(A_n) \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$.
   (ii) $\sum \ln\left(\mathbb{P}({A_n}^c)\right)$ diverge.
   (iii) $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

Solution

1. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a
$$(\star) \quad \mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{N} A_n) = 1 - \mathbb{P}(\bigcap_{n=0}^{N} A_n^c) = 1 - \prod_{n=0}^{N} \mathbb{P}(A_n^c).$$
Si on note $B_N = \bigcup_{k=0}^{N} A_k$, la famille d'événements $(B_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc par le théorème de la continuité séquentielle croissante, on a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} = A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(B_N)$. Il en découle que la suite de terme général $\prod_{n=0}^{N} \mathbb{P}(A_n^c)$ et convergente et d'après la relation $(\star)$ ci-dessus, on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=0}^{N} \mathbb{P}(A_n^c).$$
2. On va prouver que les assertions (i),(ii),(iii) sont équivalentes en suivant le plan de démonstration suivant :
$$\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)} \quad \text{et} \quad \text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)} \quad \text{et} \quad \text{(iii)} \Rightarrow \text{(i)}.$$
• Preuve de (i)$\Rightarrow$ (ii) : Supposons que l'on a (i) : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$. D'après la question 1), on a $\lim_{N\to+\infty} \prod_{n=0}^{N} \mathbb{P}(A_n^c) = 0$. Comme, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a supposé que $\mathbb{P}(A_k) \neq 1$, on a $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_k^c) > 0$, donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\prod_{n=0}^{N} \mathbb{P}(A_n^c) > 0$ et de (i) supposée ci-dessus, on déduit $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \ln(\mathbb{P}(A_n^c)) = -\infty$. Il en découle qu'on a (ii), à savoir : $\sum \ln\left(\mathbb{P}(A_n^c)\right)$ est divergente.
• Preuve de (ii) $\Rightarrow$ (iii). Supposons qu'on a(ii), donc que $\sum \ln\left(\mathbb{P}(A_n^c)\right)$ est divergente. On sait que l'on a l'inégalité de concavité $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ln(t) \leq t - 1$, donc en l'appliquant, on a $\ln(\mathbb{P}(A_n^c)) \leq \mathbb{P}(A_n^c) - 1 = -\mathbb{P}(A_n)$, par suite
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(A_n) \leq -\ln(\mathbb{P}(A_n^c))$$
Supposons que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est convergente, alors $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$, par suite quand n tend vers $+\infty$, on a :
$$\ln(\mathbb{P}(A_n^c)) = \ln(1 - \mathbb{P}(A_n)) \sim -\mathbb{P}(A_n)$$

il en découle que la série $\sum \ln(\mathbb{P}(A_n^c))$ est convergente. Par contraposée on a donc (ii) $\Rightarrow$ (iii).
• Preuve de (iii)$\Rightarrow$ (i). Pour cela, supposons que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est divergente, donc que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$. On a déjà vu que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right)$ Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) &= \lim_{N\to+\infty}\left(1-\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n^c\right)\right)\\ &= \lim_{N\to+\infty}\left(1-\prod_{n=0}^{N}\mathbb{P}(A_n^c)\right)\\ &= \lim_{N\to+\infty}\left(1-\prod_{n=0}^{N}(1-\mathbb{P}(A_n))\right)\end{aligned}$$

L'inégalité de concavité de ln permet de dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$1-\mathbb{P}(A_n) = \exp(\ln(1-\mathbb{P}(A_n)) \leq \exp(-\mathbb{P}(A_n))$$

par suite on a $\prod_{n=0}^{N}(1-\mathbb{P}(A_n)) \leq \exp\left(-\sum_{n=0}^{N}\mathbb{P}(A_n)\right)$, or par hypothèse $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n) = +\infty$, donc $\lim_{N\to+\infty} \exp\left(-\sum_{n=0}^{N}\mathbb{P}(A_n)\right) = 0$, ce qui permet de conclure que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(1-\prod_{n=0}^{N}(1-\mathbb{P}(A_n))\right) = 1.$$

• **Conclusion :** les assertions (i),(ii), (iii) sont équivalentes.

EXERCICE 518 Piéces de monnaie et suites récurrentes

Titre : Piéces de monnaie et suites récurrentes
ID : 362 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 348 | ID : 362
Difficulté : ★☆☆☆☆

On lance une infinité de fois une pièce de monnaie non triquée, les lancers étant mutuellement indépendants.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on introduit les événements :
A_n : « On obtient deux piles consécutifs lors des n premiers lancers »
B_n : « On obtient le premier couple de piles consécutifs aux rangs $n-1$ et n. »
L'épreuve étant modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $p_1 = 0$.

1. Calculer p_k pour tout $k \in \{2,3,4\}$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=0}^{n} p_k \quad \text{et} \quad p_{n+3} = \frac{1}{8}\left(1-\sum_{k=1}^{n} p_k\right)$$

3. En déduire une relation entre p_n, p_{n+2} et p_{n+3}, pour tout $n \geq 1$.
4. Exprimer p_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution

(a) Notons S_n l'événement « L'expérience au rang n est un succès ». On sait

$$\mathrm{P}(S_n) = \mathrm{P}\left(\overline{S_n}\right) = \frac{1}{2}$$

On peut exprimer simplement
a

B_2, B_3 et B_4 en fonctions des événements S_n :

$$B_2 = S_1 \cap S_2, \quad B_3 = \overline{S_1} \cap S_2 \cap S_3 \text{ et } B_4 = \overline{S_2} \cap S_3 \cap S_4$$

Par indépendance des résultats des différentes expériences

$$p_2 = \frac{1}{4}, \quad p_3 = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad p_4 = \frac{1}{8}.$$

(b) L'événement A_n est la réunion des B_k pour k allant de 2 à n et ces derniers sont deux à deux incompatibles. Par additivité, on a donc

$$\mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=2}^{n} B_k\right) = \sum_{k=2}^{n} \mathrm{P}(B_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k \quad \text{car} \quad p_1 = 0$$

Étudions ensuite $\mathrm{P}(B_{n+3})$. On exprime B_{n+3} comme intersection d'événements indépendants. L'événement B_{n+3} signifie que deux succès consécutifs sont rencontrés aux rangs $n+2$ et $n+3$ et que cette situation n'a pas été rencontrée précédemment :

$$B_{n+3} = S_{n+2} \cap S_{n+3} \cap \overline{A_{n+2}}$$

Cependant, si l'expérience a réussi au rang $n+2$ mais qu'on n'a pas rencontré deux succès consécutifs avant ce rang, c'est qu'elle a échoué au rang $n+1$. Ainsi, $S_{n+2} \cap \overline{A_{n+2}} \subset \overline{S_{n+1}}$ et donc

$$S_{n+2} \cap \overline{A_{n+2}} = \overline{S_{n+1}} \cap S_{n+2} \cap \overline{A_{n+2}}$$

Aussi, sachant que l'expérience a échoué au rang $n+1$, affirmer qu'il n'y a pas eu deux succès consécutifs avant le rang $n+2$ revient à signifier qu'on n'a pas rencontré deux succès consécutifs avant le rang n :

$$\overline{S_{n+1}} \cap \overline{A_{n+2}} = \overline{S_{n+1}} \cap \overline{A_n}$$

Ainsi, on a l'égalité

$$B_{n+3} = \overline{S_{n+1}} \cap S_{n+2} \cap S_{n+3} \cap \overline{A_n}$$

Enfin, les différentes expériences étant indépendantes et l'événement A_n n'étant que fonctions des événements $S_1, \ldots, S_n$, les événements de l'intersection précédentes sont indépendants ce qui donne

$$p_{n+3} = \mathrm{P}(B_{n+3}) = \mathrm{P}\left(\overline{S_{n+1}}\right) \mathrm{P}(S_{n+2}) \mathrm{P}(S_{n+3}) \mathrm{P}\left(\overline{A_n}\right) = \frac{1}{8}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right)$$

(c) L'égalité précédente démontrée pour $n \geq 2$ est aussi vraie pour $n = 1$. Pour $n \geq 2$, on peut alors écrire à la fois

$$p_{n+3} = \frac{1}{8}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right) \quad \text{et} \quad p_{n+2} = \frac{1}{8}\left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k\right)$$

Par différence, on obtient $p_{n+3} - p_{n+2} = -\frac{1}{8} p_n$ et cette égalité est encore vraie pour $n = 1$. (d) $(p_n)_{n\geq 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 3 : l'expression de son terme général se déduit du calcul des puissances d'une matrice traduisant la relation de récurrence. Pour $n \geq 1$, introduisons X_n la colonne de coefficients p_n, p_{n+1} et p_{n+2}. On a

$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par récurrence, on obtient $X_n = A^{n-1}X_1$ pour tout $n \geq 1$. Afin de calculer la puissance de A, on étudie la réduction de cette matrice. Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A = X^3 - X^2 + \frac{1}{8} = \left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}\right)$$

de racines distingtes

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } \gamma = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

Pour λ valeur propre de A, l'espace propre associé est engendré par la colonne ${}^t\begin{pmatrix}1 & \lambda & \lambda^2\end{pmatrix}$ et on peut donc écrire

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Après calculs, on obtient

$$P^{-1} = \frac{1}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \begin{pmatrix} \beta\gamma(\gamma-\beta) & -(\beta+\gamma)(\gamma-\beta) & \gamma-\beta \\ -\alpha\gamma(\gamma-\alpha) & (\alpha+\gamma)(\gamma-\alpha) & \gamma-\alpha \\ \beta\alpha(\beta-\alpha) & -(\beta+\alpha)(\beta-\alpha) & \beta-\alpha \end{pmatrix}$$

soit

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} - 1 & \frac{2}{\sqrt{5}} + 2 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} - 1 & -\frac{2}{\sqrt{5}} + 2 \end{pmatrix}$$

Enfin, l'égalité $A^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$ permet de conclure :

$$p_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right) \text{ pour tout } n \geq 1$$

a. L'expression de B_5 est plus complexe : $B_5 = \overline{S_3} \cap S_4 \cap S_5 \cap \overline{S_1 \cap S_2}$

EXERCICE 519 Un paraplui perdu avec une proba dans un immeuble

Titre : Un paraplui perdu avec une proba dans un immeuble
ID : 363 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 349 | ID : 363
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $p \in]0,1[$. Une personne a oublié son parapluie dans un immeuble n niveaux avec une probabilité p. Les niveaux ont la même probabilité de contenir le parapluie. Il cherche aux $n-1$ premier niveaux et il ne trouve pas le parapluie. Quelle est la probabilité qu'il le trouve au dernier niveau ?

Solution

$\mathbb{P}(E_i) = \frac{p}{n}$. Soit $F = \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k$. On cherche $\alpha = \mathbb{P}(E_n/F^c)$. On a $\alpha = \frac{\mathbb{P}(E_n \cap F^c)}{\mathbb{P}(F^c)}$. On a $\mathbb{P}(F^c) = 1 - \mathbb{P}(F) = 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k)$ et comme les événements E_k sont deux à deux disjoints, on a $\mathbb{P}(F) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(E_k) = 1 - \frac{n-1}{n}p$. Par ailleurs on a $\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(E_n \cap F) + \mathbb{P}(E_n \cap F^c)$ or $\mathbb{P}(E_n \cap F) = 0$, donc $\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(E_n \cap F^c) = \frac{p}{n}$, donc $\alpha = \frac{\frac{p}{n}}{1-\frac{n-1}{n}p} = \frac{p}{n-(n-1)p}$

EXERCICE 520 Image réciproque et tribu

Titre : Image réciproque et tribu
ID : 364 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 350 | ID : 364
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $(\Omega', \mathcal{T}')$ un espace probabilisable et Ω un ensemble quelconque et soit $f : \Omega \to \Omega'$ une application. Démontrer que :

$$\mathcal{T}' = \{f^{-1}(A) / A \in \mathcal{T}'\}$$

est une tribu de Ω.

Solution

On va vérifier les trois axiomes d'une tribu :
- On a $\Omega = f^{-1}(\Omega')$ et $\Omega' \in \mathcal{T}'$, donc $\Omega \in \mathcal{T}$.
- Soit $X \in \mathcal{T}$, donc il existe $A \in \mathcal{T}'$ tel que $X = f^{-1}(A)$, donc $X^c = (f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c)$ et comme $\mathcal{T}'$ est une tribu sur Ω' et $A \in \mathcal{T}'$, on a aussi $A^c \in \mathcal{T}'$, donc $X^c \in \mathcal{T}$.
- Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$, donc il existe une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{T}'$ tel que $\forall i \in I, X_i = f^{-1}(A_i)$, donc $X = \bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i) = f^{-1}(A)$ avec $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ et on a bien $A \in \mathcal{T}'$ puisque $\mathcal{T}'$ est une tribu et $A_i \in \mathcal{T}'$ pour tout $i \in I$, donc $X \in \mathcal{T}'$, ce qui termine la preuve du fait que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω.

EXERCICE 521 Une tribu construite à l'aide d'une application

Titre : Une tribu construite à l'aide d'une application
ID : 365 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 351 | ID : 365
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soient Ω et Ω' deux ensembles et $f : \Omega \to \Omega'$ une application. Démontrer que :

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) / A = f^{-1}(f(A))\}$$

est une tribu de Ω.

Solution

On va vérifier les trois axiomes d'une tribu :
- On a $f^{-1}(f(\Omega)) = \Omega$ donc $\Omega \in \mathcal{T}$.
- Soit $A \in \mathcal{T}$, donc $f^{-1}(f(A))A$. On sait que $A^c \subset f^{-1}(f(A^c))$. Réciproquement si $\omega \in f^{-1}(f(A^c))$, cela veut dire que $f(\omega) \in f(A^c)$, donc il existe $a \in A^c$ tel que $f(\omega) = f(a)$. Si on suppose que $\omega \notin A^c$, cela veut dire que $\omega \in A$, donc $f(\omega) \in f(A)$, donc $f(a) \in f(A)$, donc $a \in f^{-1}(f(A)) = A$, donc $a \in A$; or on a déjà $a \in A^c$; ce qui est absurde, donc $\omega \in A^c$ et par suite $A^c = f^{-1}(f(A^c))$ et $A^c \in \mathcal{T}$.
- Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$, donc pour tout $i \in I$, on a $A_i = f^{-1}(f(A_i))$, donc si on note $A = \bigcup_{i\in I} A_i$, alors on a $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(\bigcup_{i\in I} A_i)) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(f(A_i)) = \bigcup_{i\in I} A_i = A$, donc $A \in \mathcal{T}$, ce qui termine la preuve du fait que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω.

EXERCICE 522 Tribu engendrée par une famille dénombrable de parties

Titre : Tribu engendrée par une famille dénombrable de parties
ID : 366 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 352 | ID : 366
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $\Omega = \mathbb{Z}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $S_k = \{k, k+1, k+2\}$. Soit $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par l'ensemble $\mathscr{A} = \{S_k / k \in \mathbb{Z}\}$. Expliciter $\mathcal{T}$.

Solution

Soit $k \in \mathbb{Z}$ alors $S_{k-2} \cap S_k \in \mathcal{T}(\mathscr{A})$, et comme $S_{k-2} = \{k-2, k-1, k\}$ et $S_k = \{k, k+1, k+2\}$ on a

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \{k\} \in \mathcal{T}(\mathscr{A})$$

Il en découle que la tribu $\mathcal{T}_0$ engendrée par les singletons de $\mathbb{Z}$ est contenue dans $\mathcal{T}(\mathscr{A})$, c'est-à-dire que $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}(\mathscr{A})$ or $\mathscr{A} \subset \mathcal{T}_0$, donc $\mathcal{T}(\mathscr{A}) \subset \mathcal{T}_0$. Il en découle finalement que $\mathcal{T}(\mathscr{A}) = \mathcal{T}_0$. Comme $\mathbb{Z}$ est dénombrable, on a $\mathcal{T}_0 = \mathscr{P}(\mathbb{Z})$. Conclusion finale : $\mathcal{T}(\mathscr{A}) = \mathscr{P}(\mathbb{Z})$.

EXERCICE 523 — Une inégalité provenant de la proba d'une intersection finie

Titre : Une inégalité provenant de la proba d'une intersection finie
ID : 367 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 353 | ID : 367
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute famille $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'événements, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\right) - n + 1$$

Solution

Si $n = 1$ la relation demandée s'écrit $\mathbb{P}(A_1) \geq \mathbb{P}(A_1) - 1 + 1$, chose vraie. Si $n \geq 2$, on va raisonner par récurrence :

- Pour $n = 2$, on sai que si A_1, A_2 sont des événements alors $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$, donc $\mathbb{P}(A1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cup A_2)$. Comme $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \leq 1$, on a

$$\mathbb{P}(A1 \cap A_2) \geq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - 1 = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - 2 + 1.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et vérifiant pour toute famille $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'événements, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\right) - n + 1.$$

Soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n+1}$ une famille d'événements. D'après la vérité de la propriété pour $n = 2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1}\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - 1 \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - n + 1$$

Il en découle que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - n + 1 + \mathbb{P}(A_{n+1}) - 1.$$

Il en découle que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k) - (n+1) - 1.$$

Il en découle que la propriété est vraie pour $n+1$ et par le principe de récurrence elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et comme on a prouvé qu'elle est vraie pour $n = 1$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 524 Question aux choix multiples et probas

Titre : Question aux choix multiples et probas
ID : 368 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 354 | ID : 368
Difficulté : ★☆☆☆☆

Un étudiant doit répondre à une question à choix multiple où 5 réponses sont proposées, une seule étant correcte. On introduit les événements :
B : « La réponse fournie par l'étudiant est correcte. »
C : « L'étudiant ignore la bonne réponse et répond en en choisissant une au hasard. »
Soit A l'événement contraire de C. L'épreuve associée à cette situation est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et on note $x = \mathbb{P}(A)$.
Calculer en fonction de x la probabilité conditionnelle : $\mathbb{P}(A/B)$.

Solution

D'après la formule des probabilités composées, on a

$$\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(B/A)\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Or $\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$. L'événement A est « L'étudiant sait la bonne réponse ». Si l'étudiant sait la bonne réponse, il va forcément la choisir, donc $A \subset B$ et par suite $\mathbb{P}(B/A) = 1$, donc $\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.
Or $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{5}$ et $\mathbb{P}(A) = x$, donc finalement $\mathbb{P}(A/B) = 5x$.

EXERCICE 525 Le roi Noble, lion et ses sujets Ysengrin, Tibert et Renart

Titre : Le roi Noble, lion et ses sujets Ysengrin, Tibert et Renart
ID : 369 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 355 | ID : 369
Difficulté : ★☆☆☆☆

Le roi Noble, lion, décide d'inviter tous les mois ses sujets Ysengrin, Tibert et Renart, à un grand banquet ; ils peuvent manger tant qu'ils veulent, mais l'étiquette exige qu'ils n'emportent rien chez eux. Tibert et Ysengrin ont chacun une probabilité p de chaparder un peu de nourriture à un banquet, indépendamment des autres fois et des autres convives. Renart, qui est plus fourbe que les autres, chapardera quant à lui avec une probabilité $p' > p$.
Noble fait discrètement surveiller le banquet par ses gardes (qui sont efficaces et repèrent toujours un voleur quand il agit).

1. Les gardes choisissent de se concentrer sur un seul des trois convives au hasard. Quelle est la probabilité q qu'ils observent un vol ?
2. Les gardes annoncent discrètement à Noble qu'ils ont surpris un voleur ; quelles est la probabilité que ce soit Renart ?

3. Noble décide de ne rien dire pour cette fois, et d'attendre le banquet suivant ; il recommande aux gardes de surveiller le même convive. Quelle est la probabilité q' qu'ils observent un vol ? Comparer q' à q à l'aide d'une application numérique où $p = 0.1$ et $p' = 0.8$.

Solution

On note Y, T et R les événements « le convive surveillé est Ysengrin » (respectivement Tibert, Renart). On note V l'événement « les gardes observent un premier vol », et W l'événement « les gardes observent un deuxième vol ».

1. Par la formule des probabilité totales,

$$q = \mathbb{P}(\mathrm{V}) = \mathbb{P}(\mathrm{V} \mid \mathrm{Y})\mathbb{P}(\mathrm{Y}) + \mathbb{P}(\mathrm{V} \mid \mathrm{T})\mathbb{P}(\mathrm{T}) + \mathbb{P}(\mathrm{V} \mid \mathrm{R})\mathbb{P}(\mathrm{R}) = \frac{p}{3} + \frac{p}{3} + \frac{p'}{3} = \frac{2p + p'}{3}$$

Application numérique : $q \approx 0,333$.

2. Par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(\mathrm{R} \mid \mathrm{V}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{R} \cap \mathrm{V})}{\mathbb{P}(\mathrm{V})} = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{V} \mid \mathrm{R})\mathbb{P}(\mathrm{R})}{\mathbb{P}(\mathrm{V})} = \frac{p'/3}{q} = \frac{p'}{2p + p'} = \frac{8}{10} = 0,8$$

3. q' cherché n'est autre que la probabilité conditionnelle : $\mathbb{P}(\mathrm{W} \mid \mathrm{V})$, la probabilité d'observer un second vol sachant qu'on en a observé un premier. Par la formule des probabilités totales on a :

$$\mathbb{P}(W/V) = \frac{\mathbb{P}(W \cap V)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{\mathbb{P}(Y)\mathbb{P}((W \cap V)/Y) + \mathbb{P}(T)\mathbb{P}((W \cap V)/T) + \mathbb{P}(R)\mathbb{P}((W \cap V)/R)}{\mathbb{P}(V)}$$

Chacune des convives va chaparder avec une probabilité, indépendamment de ce qu'il aura fait les autres fois, donc : $\mathbb{P}(\mathrm{W} \cap \mathrm{V} \mid \mathrm{T}) = \mathbb{P}(\mathrm{W} \cap \mathrm{V} \mid \mathrm{Y}) = p^2$, on a aussi : $\mathbb{P}(\mathrm{W} \cap \mathrm{V} \mid \mathrm{R}) = p'^2$, donc

$$q' = \mathbb{P}(\mathrm{W} \mid \mathrm{V}) = \frac{2p^2 + p^2}{2p + p'}$$

Application numérique : $q' = \frac{0,02+0,64}{2 \cdot 0,1+0,8} = 0,66$. De manière générale, si $p' > p$, on trouve

$$\text{que } q' > q$$

EXERCICE 526 Limite supérieure, limite inférieure, inégalités de Fatou

Titre : Limite supérieure, limite inférieure, inégalités de Fatou
Difficulté : ★☆☆☆☆
ID : 370 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 356 | ID : 370

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements, on note :

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k \quad \text{et} \quad \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k$$

1. Determiner $\overline{\lim} A_n$ et $\underline{\lim} A_n$ dans les cas suivants :
   (a) $A_n =]-\infty, n]$
   (b) $A_n = [-n, n]$
   (c) $A_n = [n, n+1]$
   (d) $A_n = \begin{cases} A & \text{si} \quad n = 2k \\ B & \text{si} \quad n = 2k+1 \end{cases}$ avec A et B deux événements donnés.
   (e) $A_n = \left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right]$
2. Donner une interpretation concrète de la réalisation des événements respectifs : $\overline{\lim} A_n$ et $\underline{\lim} A_n$.

3. Montrer que $\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n$.
4. Démontrer les inégalités :
$$\begin{cases} \mathbb{P}(\underline{\lim} A_n) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \inf\limits_{p\geq n} \mathbb{P}(A_p) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{p\geq n} \mathbb{P}(A_p) \leq \mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) \end{cases}$$
5. Donner un exemple où ces inégalités sont strictes.

Solution

1. (a) $A_n =]-\infty, n]$: On a $\bigcup_{k\geq n}]-\infty, k] = \mathbb{R}$ et donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n}]-\infty, n] = \mathbb{R} = \overline{\lim} A_n$.
On a $\bigcap_{k\geq n}]-\infty, k] =]-\infty, n]$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, n] = \mathbb{R}$, donc $\underline{\lim} A_n = \mathbb{R}$.

   (b) $A_n = [-n, n]$
   (c) $A_n = [n, n+1]$
   (d) $A_n = \begin{cases} A & \text{si} \quad n = 2k \\ B & \text{si} \quad n = 2k+1 \end{cases}$ avec A et B deux événements donnés.
   (e) $A_n = \left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right]$
2. Explication intuitive :
   • $\overline{\lim} A_n$ est réalisé si une infinité des A_n est réalisée.

   • $\underline{\lim} A_n$ est réalisée si les A_n sont réalisés à partir d'un certain rang, autrement dit seul un nombre fini des A_n n'est pas réalisé.
3. $\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n$, en effet si $x \in \underline{\lim} A_n$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_k$ pour tout $k \geq n$, donc x est dans une infinité de A_k, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $k \geq n$ tel que $x \in A_k$, donc $x \in \overline{\lim} A_n$.
4. Notons $A^\star = \underline{\lim} A_n$. On pose $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la suite $(B_n)_{n\geq 0}$ est croissante et $A_\star = \lim_n B_n$; donc, par continuité séquentielle croissante, on a $\mathbb{P}(A_\star) = \lim_n \mathbb{P}(B_n)$
Par ailleurs, $B_n \subset A_n$, donc $\mathbb{P}(B_n) \leq \mathbb{P}(A_n)$. En passant à la limite inférieure, on obtient $\underline{\lim}\mathbb{P}(B_n) \leq \underline{\lim}\mathbb{P}(A_n)$, ce qui démontre la première inégalité.
La seconde inégalité se montre de même en posant $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$, la suite $(C_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, $A^\star = \lim\limits_n C_n$ et $\mathbb{P}(A^\star) = \lim_n \mathbb{P}(C_n)$. De plus, $A_n \subset C_n$ donc $\mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(C_n)$ et il ne reste qu'à passer à la limite supérieure pour conclure.
Enfin, si $A_* = A^*$, alors $\underline{\lim}\mathbb{P}(A_n) = \overline{\lim}_n \mathbb{P}(A_n)$, ce qui prouve $(\star)$ que la suite de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge et a pour limite $\mathbb{P}(A^*) = \mathbb{P}(\lim\limits_n A_n)$.
5. exemple où ces inégalités sont strictes.

EXERCICE 527 Probabilité et urnes

Titre : Probabilité et urnes
ID : 372 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 358 | ID : 372
Difficulté : ★☆☆☆☆

On dispose de N urnes numérotées de 1 à N. L'urne k contient k boules blanches et $N-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, et, sans connaître son numéro, on en tire un nombre n fois de suite une boule, avec remise après chaque tirage.

1. Quelle est la probabilité que le tirage suivant donne encore une boule blanche, sachant qu'au cours des n premiers tirages, seules des boules blanches on été tirée ?
2. Calculer la limite de cette probabilité lorsque N tends vers l'infini.

Solution

1. Notons U_k l'événenment : « Le tirage est fait dans l'urne k.» On voit que pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, on a $\mathbb{P}(U_k) = \frac{1}{N+1}$ en vertu de l'équiprobabilité de tirer de chaque urne. $\{U_k, k \in [\![1, N]\!]\}$ est un système complet d'événements. Si on note B_n l'événement : « Les n première boules tirées sont blanches. », on a en vertu de la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(U_k)\mathbb{P}(B_n|U_k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N+1}\left(\frac{k}{N}\right)^n$$

On a $\mathbb{P}(B_n|B_{n+1}) = 1$. La formule des probabilités composées, nous donne :

$$\mathbb{P}(B_{n+1}|B_n) = \mathbb{P}(B_n|B_{n+1}) \times \frac{\mathbb{P}(B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_n)} = \frac{\mathbb{P}(B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_n)}$$

Donc :

$$\mathbb{P}(B_{n+1}|B_n) = \frac{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N+1}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N+1}\left(\frac{k}{N}\right)^{n}}$$

2. On reconnait dans les formules ci-dessus des somme de Riemann à un facteur multiplicatif près. Précisément :

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n = \frac{N}{N+1}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n$$

donc par passage à la limite quand N tends vers $+\infty$, on a :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n = \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

donc :

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(B_{n+1}|B_n) = \frac{n+1}{n+2}$$

EXERCICE 528 Une integrale et les probabilités

Titre : Une integrale et les probabilités
ID : 373 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 359 | ID : 373
Difficulté :

1. Calculer l'intégrale $J_n = \int_0^1 x^n(1-x)^n \mathrm{d}x$, avec $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dispose de p urnes numérotées de 1 à p. Pour $1 \leq k \leq p$, l'urne numéro k contient k boules noires et $p-k$ boules blanches. On choisit au hasard une urne puis on y effectue des tirages avec remise. On note $A_{n,p}$ l'événement : « Après $2n$ tirages, on a obtenu n boules noires.» Calculer $\mathbb{P}(A_{n,p})$.
3. Calculer $\lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}(A_{n,p})$.

Solution

1. On pose $I_{n,m} = \int_0^1 x^m(1-x)^n \mathrm{d}x$. Pour $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on intègre par parties : $I_{m,n} = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}(1-x)^n\right]_0^1 + \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{n}{m+1}I_{m+1,n-1}$.
Par récurrence immédiate : $I_{m,n} = \frac{m!n!}{(m+n)!}I_{m+n,0} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$, en particulier $J_n = I_{n,n} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

2. Le numéro U de l'urne choisie suit la loi uniforme sur $[\![1,p]\!]$. On utilise la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{n,p}) &= \sum_{k=1}^{p}\mathbb{P}(U=k)\mathbb{P}(A_{n,p}|(U=k))\\ &= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\mathbb{P}(A_{n,p}|(U=k))\end{aligned}$$

Or on a :

$$\mathbb{P}(A_{n,p}|(U=k)) = \binom{2n}{n}\left(\frac{k}{p}\right)^n\left(1-\frac{k}{p}\right)^n$$

avec la loi binomiale $\mathcal{B}\left(2n,\frac{k}{p}\right)$. On a donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \mathbb{P}(A_{n,p}) = \frac{1}{p}\binom{2n}{n}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{k}{p}\right)^n\left(1-\frac{k}{p}\right)^n$$

3. Posons $f_n(x) = x^n(1-x)^n$ et $S_p(f_n) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{k}{p}\right)^n\left(1-\frac{k}{p}\right)^n$, on a donc $S_p(f_n) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f_n\left(\frac{k}{p}\right)$ est une somme de Riemann associée à la fonction f_n sur $[0,1]$. On a alors : $\lim\limits_{p\to+\infty} S_p(f_n) = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = J_n$. Il en découle que :

$$\lim_{p\to+\infty}\mathbb{P}(A_{n,p} = \binom{2n}{n}J_n = \frac{1}{2n+1}$$

EXERCICE 529 Probabilités et Python

Titre : Probabilités et Python
ID : 374 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 360 | ID : 374
Difficulté :

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes. On suppose qu'elle sont même loi $\mathbb{P}(X_i=1)=p$ et $\mathbb{P}(X_i=2)=1-p$ où p est un réel tel que $p\in[\![0,1]\!]$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $k\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$ et $Y_k=\inf\{j\in\mathbb{N}^*/S_j\geq k\}$

1. Montrer l'existence de Y_k. Ecrire une fonction **Python** $Y_k(k,p)$.
2. Ecrire une fonction $mk(p)$ donnant une valeur approchée de $m_k=\mathbb{E}(Y_k)$. Tracer les points (k,m_k) pour $1\leq k\leq 100$ et $p\in\{0.1,0.3,0.5,0.7,0.9\}$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(Y_k=n)=p\mathbb{P}(Y_{k-1}=n-1)+(1-p)\mathbb{P}(Y_{k-2}=n-1)$.
4. Montrer que $\mathbb{E}(Y_k)=p\mathbb{E}(Y_{k-1})+(1-p)\mathbb{E}(Y_{k-2})+1$.
5. Montrer que $\mathbb{E}(Y_k)\sim kC_p$ quand $k\to+\infty$, avec C_p fonction de p.

Solution

Commençons par faire quelques remarques d'ordre général. Pour chaque $\omega\in\Omega$, la famille $(S_n(\omega))_{n\geq1}$ est une suite strictement croissante d'entiers. On a toujours $S_{n+1}(\omega)=S_n(\omega)+X_{n+1}(\omega)$, donc $S_{n+1}(\omega)-S_n(\omega)\in\{1,2\}$. Dans ces conditions, $Y_k(\omega)$ est le premier entier n pour lequel $S_n(\omega)$ est supérieur ou égal à k.

1. Puisque $X_i(\Omega)=\{1,2\}$, on a $S_n(\Omega)\subset[\![n,2n]\!]$. On a notamment $S_n(\Omega)\subset[\![k,+\infty[\![$ pour tout $n\geq k$. En particuleir $\{j\in\mathbb{N}^*/S_j\geq k\}$ est non vide (il contient $[\![k,+\infty[\![$), donc Y_k existe. Par définition on peut même dire que $\frac{k}{2}\leq Y_k\leq k$ pour tout k dans $\mathbb{N}^*$.
   Fonction **Python** $Y(k,p)$

```
from random import random
def Y(k,p):
 s=n=0
 while s < k:
  if random() < p: s += 1
  else: s += 2
  n += 1
 return n
```

2. Voici un programme complet qui trace les courbes demandées :

```
from random import random
import matplotlib.pyplot as plt
def Y(k,p):
 s=n=0
 while s < k:
  if random() < p: s += 1
  else: s += 2
  n += 1
 return n

def m(k,p,N=100):
 return sum([Y(k,p) for _ in range(N)])/N

def tracem(N=100):
 plt.clf()
 x= range(100)
 for p in [0.1,0.3,0.5,0.7,0.9]:
  y= [m(k,p,N) for k in x]
  plt.plot(x,y,label="p={}".format(p))
  plt.legend(loc= 'upper left')
 plt.show()
tracem()
```

3. Pour étudier $Y_k = n$, on regarde ce qui précéde dans la chronologie. Dire que $Y_k = n$ c'est dire que $S_n \geq k$ mais que $S_{n-1} < k$. Il y'a pour cela deux possibilités qui s'excluent :
- Ou bien $S_n = k$ et alors peu importe la valeur de X_{n-1}.
- Ou bien $S_{n-1} = k-1$ et $X_n = 2$ et alors $S_n = k+1$.
On en déduit que $\mathbb{P}(Y_k = n) = \mathbb{P}(S_n = k) + (1-p)\mathbb{P}(S_{n-1} = k-1)$.
- Par ailleurs, en conditionnant par X_{n-1}, on a :

$$\mathbb{P}(S_n = k) = p\mathbb{P}(S_{n-1} = k-1) + (1-p)\mathbb{P}(S_{n-1} = k-2)$$

Il suffit alors d'écrire :

$$\mathbb{P}(Y_k = n) = \mathbb{P}(S_n = k) + (1-p)\mathbb{P}(S_{n-1} = k-1) = p\mathbb{P}(S_{n-1} = k-1) + (1-p)\mathbb{P}(S_{n-1} = k-2)$$

EXERCICE 530 Varaible aléatoire et tirage de boules

Titre : Varaible aléatoire et tirage de boules
ID : 375 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 361 | ID : 375
Difficulté :

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire, au hasard et sans remise, n boules de l'urne. On

note X_i la variable aléatoire associe au numéro de la boule obtenue au tirage numéro i, ceci pour $i \in [\![1,n]\!]$.
1.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_i. Préciser son espérance et sa variance.
1.b. Déterminer la loi du $n-$uplet $(X_1,\dots,X_n)$.
A l'issue du tirage numéro n, les numéros obtenus sont classés par ordre croissant. On note Y_j la variable aléatoire associée au $j-$ième numéro, classé par ordre croissant, obtenu parmi les n numéros. Ainsi Y_1 est la variable aléatoire $\min(X_1,\dots,X_n)$, Y_2 est le nombre aléatoire venant juste après Y_1, par ordre croissant, etc. et Y_n est la variable aléatoire $\max(X_1,\dots,X_n)$.
2.a. Déterminer la loi du $n-$uplet $(Y_1,\dots,Y_n)$.
2.b. Déterminer la loi de Y_j, pour $j \in [\![1,n]\!]$.
2.c. Déterminer la loi du couple (Y_j,Y_k) pour $1 \leq i < j \leq n$.
On conserve les notations précédentes, en se restreignant au cas $n=3$.
3.a. Préciser la loi du couple (Y_1,Y_3). En déduire la loi de $D=Y_3-Y_1$. Calculer l'espérance de D.
3.b. Déterminer la loi de Y_2. Que peut-on remarquer

Solution

1. a) La variable aléatoire X_i prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1,2,\dots,N\}$,

$$\text{ou } X_i(\Omega)=\{1,2,\dots,N\}$$

L'événement $(X_i=k)$ est $\cap_{j=1}^{i-1}\left(X_j \neq k\right)\cap(X_i=k)$. Par la formule des probabilités composées, il vient

$$\mathbb{P}(X_i=k)=\frac{N-1}{N}\times\frac{N-2}{N-1}\times\cdots\times\frac{N-i+1}{N-i+2}\times\frac{1}{N-i+1}=\frac{1}{N}$$

Ainsi, X_i suit une loi uniforme sur $\{1,2,\dots,N\}$. On a alors :

$$\mathbb{E}(X_i)=\frac{N+1}{2},\quad \mathbb{V}(X_i)=\frac{N^2-1}{12}$$

b) Pour tout $(i_1,i_2,\dots,i_n)$ distinct de $(\{1,2,\dots,N\})^n$, on a

$$\mathbb{P}(X_1=i_1,X_2=i_2,\dots,X_n=i_n)=\frac{1}{A_N^n}.$$

En effet, il y a A_N^n $n-$uplets possibles, et 1 seul favorable à la réalisation de cet événement (le décompte se fait sans répétition, puisque les i_k sont distincts).
2. a) Pour tout $(j_1,j_2,\dots,j_n)$ de $(\{1,2,\dots,N\})^n$, avec

$$1\leq j_1<j_2<\cdots<j_n\leq N$$

on a :

$$\mathbb{P}\left(Y_1=j_1,Y_2=j_2,\dots,Y_n=j_n\right)=\frac{1}{C_N^n}.$$

En effet, il y a C_N^n n-uplets possibles, et 1 seul favorable à la réalisation de cet événement (le décompte se fait sans ordre et sans répétition, puisque les j_k sont distincts.)
b) Pour tout $j\in\{1,2,\dots,n\}$, on a $Y_j(\Omega)=\{j,\dots,N-n+j\}$. Pour tout $k\in Y_j(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}\left(Y_j=k\right)=\frac{C_{k-1}^{j-1}C_1^1C_{N-k}^{n-j}}{C_N^n}$$

En effet, l'événement $\left(Y_j=k\right)$ correspond à l'événement z les variables aléatoires $Y_1,\dots,Y_{j-1}$ occupent un $(j-1)-$ uplet sans ordre et sans répétition avant $k, Y_j=k$, les variables aléatoires $Y_{j+1},\dots,Y_n$ occupent un$(n-j)-$ uplet sans ordre et sans répétition après k.
c) Pour les mêmes raisons que ci-dessus, pour $1\leq j<k\leq n$,

$$(Y_j,Y_k)(\Omega)=\{(m,p)\in(\{1,\dots,N\})^2/\, j\leq m\leq p-k+j\leq N-n+j\}$$

et

$$\mathbb{P}(Y_j = m, Y_k = p) = \frac{C_{m-1}^{j-1} C_1^1 C_{p-m-1}^{k-j-1} C_1^1 C_{N-p}^{n-k}}{C_N^n}$$

3. a) En reprenant la question précédente :

$$\begin{cases} (Y_1, Y_3)(\Omega) = \{(m,p) \in (\{1,\dots,N\})^2 / 1 \leq m \leq p-2 \leq N-2\} \\ \mathbb{P}(Y_1 = m, Y_3 = p) = \frac{C_{p-m-1}^1}{C_N^3} \end{cases}$$

La variable aléatoire D est à valeurs dans $\{2,\dots,N-1\}$, et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_3 - Y_1 = k) &= \sum_{j=1}^{N-k} P[(Y_3 = j+k) \cap (Y_1 = j)] = \sum_{j=1}^{N-k} \frac{C_{k-1}^1}{C_N^3} \\ &= \frac{(N-k)(k-1)}{C_N^3} \end{aligned}$$

Le calcul de l'espérance de D se fait alors aisément :

$$E(D) = \sum_{k=2}^{N-1} \frac{k(N-k)(k-1)}{C_N^3} = \frac{1}{C_N^3} \sum_{k=2}^{N-1} \left((N+1)k^2 - Nk - k^3\right) = \frac{N+1}{2}$$

b) Déterminons la loi de Y_2. Par les questions précédentes, on a

$$Y_2(\Omega) = \{2,\dots,N-1\}, \text{ et } \mathbb{P}(Y_2 = k) = \frac{(k-1)(N-k)}{C_N^3}$$

On remarque que D et Y_2 suivent la même loi d'où $\mathbb{E}(Y_2) = \frac{N+1}{2}$.

EXERCICE 531 — Calcul de l'espérance d'une variable aléatoire construite

Titre : Calcul de l'espérance d'une variable aléatoire construite
ID : 376 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 362 | ID : 376
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Y = \ln(e^X - 1)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y et une densité de Y.
2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Solution

1. La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, donc $e^X - 1$ aussi et puisque l'événement $(X = 0)$ est quasi-impossible, Y est définie et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit alors $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P\left(\mathrm{e}^X \leq \mathrm{e}^y + 1\right) = P\left(X \leq \ln\left(\mathrm{e}^y + 1\right)\right) = 1 - \exp\left(-\ln\left(\mathrm{e}^y + 1\right)\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^y + 1} \end{aligned}$$

Une densité de Y est donc la fonction f_Y définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_Y(y) = \frac{e^y}{(e^y+1)^2}$$

2. Sous réserve de convergence (absolue), l'espérance de Y est donnée par :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} dx$$

La fonction φ à intégrer est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2\varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2\varphi(x) = 0$, la convergence en résulte en appliquant deux fois la règle de Riemann. Le changement de variable $y = -x$, légitime, donne alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y \cdot \mathrm{e}^y}{(\mathrm{e}^y + 1)^2} dy$$

L'intégrale est donc nulle et $E(Y) = 0$

EXERCICE 532 Maximum d'une famille de variables aléatoires

Titre : Maximum d'une famille de variables aléatoires
ID : 377 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 363 | ID : 377
Difficulté :

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, on considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

1. Déterminer une densité de la variable aléatoire $Y_k = \max(X_1, \ldots, X_k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z_k = -Y_k$.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, la probabilité :

$$\mathbb{P}(X_n \geq \max(X_1, \ldots, X_n))$$

Solution

1. La variable Y_k prend ses valeurs entre 0 et 1, et pour $t \in [0,1]$, on a, par indépendance et équirépartition :

$$P(Y_k \leq t) = P(X_1 \leq t) \cdot P(X_2 \leq t) \cdots P(X_k \leq t) = t^k$$

On en déduit qu'une densité f_{Y_k} de Y_k est donnée par :

$$f_{Y_k}(t) = k \cdot t^{k-1}, \text{ si } 0 \leq t \leq 1; f_{Y_k}(t) = 0, \text{ sinon}$$

2) La variable Z_k prend ses valeurs entre -1 et 0, et pour $t \in [-1,0]$:

$$P(Z_k \leq t) = P(Y_k \geq -t) = 1 - P(Y_k \leq -t) = 1 - (-t)^k$$

Une densité f_{Z_k} de Z_k est donc donnée par :

$$f_{Z_k}(t) = k \cdot (-t)^{k-1}, \text{ si } -1 \leq t \leq 0; f_{Z_k}(t) = 0, \text{ sinon}$$

3) On a : $P(A_n) = P(X_n + Z_{n-1} \geq 0)$, et la variable aléatoire X_n étant indépendante de toute fonction de $X_1, \ldots, X_{n-1}$, la variable X_n est indépendante de Z_{n-1}. D'où, par convolution :

$$P(A_n) = \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z_{n-1}}(t) f_{X_n}(x-t) dt \right] dx$$

Mais $f_{Z_{n-1}}$ est nulle en dehors de $[-1,0]$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z_{n-1}}(t) f_{X_n}(x-t) dt = \int_{-1}^{0} (n-1)(-t)^{n-2} f_{X_n}(x-t) dt$$

Puis f_{X_n} vaut 1 si $x - t$ appartient à [0,1] et 0 sinon. L'intégrale précédente est donc nulle si $x \notin [0,1]$, et si $x \in [0,1]$ elle se réduit à $\int_{x-1}^{0} (n-1)(-t)^{n-2} dt$ et vaut donc $(1-x)^{n-1}$.

EXERCICE 533 Lois de *Pareto* de densités respectives f_a et f_b

Titre : Lois de *Pareto* de densités respectives f_a et f_b **Difficulté :**
ID : 378 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 364 | ID : 378

Soient a et b deux nombres réels posotifs distincts. On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de *Pareto* de densités respectives f_a et f_b définies par :

$$f_a(t) = \begin{cases} at^{a-1} & \text{si} \quad t \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad t < 1 \end{cases}, \quad f_b(t) = \begin{cases} bt^{b-1} & \text{si} \quad t \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad t < 1 \end{cases}$$

1. Reconnaître les lois respectives des variables aléatoires $\ln(X)$ et $\ln(Y)$.
2. En déduire la loi de la vriable aléatoire $Z = XY$.

Solution

1. Les variables aléatoires X et Y prennent leurs valeurs dans $[1, +\infty[$, donc $\ln X$ et $\ln Y$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Pour $x \geq 0$, on a :

$$P(\ln X \leq x) = P\left(X \leq \mathrm{e}^x\right) = \int_1^{\mathrm{e}^x} a \cdot t^{-a-1} dt = 1 - \mathrm{e}^{-ax}$$

Donc $\ln X$ suit la loi exponentielle de paramètre a. De même $\ln Y$ suit la loi exponentielle de paramètre b. Une densité g_a de $\ln X$ est la fonction définie par :

$$\text{Si } x \geq 0, g_a(x) = a\mathrm{e}^{-ax} \text{ et sinon } g_a(x) = 0$$

On notera de même g_b une densité de $\ln Y$.
2. Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, il en est de même des variables aléatoires $\ln X$ et $\ln Y$. Une densité g de $\ln Z = \ln X + \ln Y$ s'obtient donc par convolution :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_a(t) g_b(x-t) dt$$

$\ln Z$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on se limite au cas $x \geq 0$ et l'intégrale devient

$$g(x) = \int_0^x a\mathrm{e}^{-at} b\mathrm{e}^{-b(x-t)} dt = ab\frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{b-a}$$

Enfin, pour $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} P(Z \leq x) = P(\ln Z \leq \ln x) &= \int_0^{\ln x} ab\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a} dt \\ &= \frac{ab}{b-a}\left[\frac{1}{b}\left(x^{-b} - 1\right) - \frac{1}{a}\left(x^{-a} - 1\right)\right] \end{aligned}$$

Donc une densité de Z sur $[1, +\infty[$ est $x \mapsto \frac{ab}{b-a}(x^{-a-1} - x^{-b-1})$

EXERCICE 534 Un bon exercice utilisant la covariance

Titre : Un bon exercice utilisant la covariance **Difficulté :**
ID : 379 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 365 | ID : 379

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p avec $p \in]0,1[$ et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Y_k = X_k X_{k+1}$.

1. Donner la loi de Y_k, ainsi que l'espérance et la variance de Y_k.
2. Soient i et j deux entiers naturels distincts. Discuter, suivant les valeurs de i et de j, de l'indépendance de Y_i et de Y_j.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n}$. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|Z_n - p^2| \geq \varepsilon) = 0$$

Solution

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $p\,(Y_k = 1)$. Or

$$(Y_k = 1) = (X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 1)$$

Par l'indépendance des (X_k), $p\,(Y_k = 1) = p^2$. Finalement :

$$E\,(Y_k) = p^2, \quad V\,(Y_k) = p^2\left(1 - p^2\right)$$

2. Si $j \neq i-1$ ou $j \neq i+1$, les variables aléatoires Y_i et Y_j sont indépendantes commes fonctions de variables aléatoires indépendantes. Par contre, $P\,(Y_iY_{i+1} = 1) = P\left(X_iX_{i+1}^2X_{i+2} = 1\right) = p^3$ alors que $P\,(Y_i = 1)\,P\,(Y_{i+1} = 1) = p^2$. Les variables Y_i et Y_{i+1} ne sont pas indépendantes.
3. Calculons l'espérance et la variance de Z_n.

$$E\,(Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\,(Y_k) = p^2$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Z_n) &= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} V\,(Y_k) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \operatorname{cov}\left(Y_i, Y_j\right)\right)\\ &= \frac{1}{n^2}\left(np^2\left(1-p^2\right) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \operatorname{cov}\left(Y_i, Y_j\right)\right)\end{aligned}$$

Comme $\operatorname{cov}(Y_i, Y_j) = 0$ pour tout (i, j) tel que $j - i \geq 2$(par indépendance), il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Z_n) &= \frac{1}{n^2}(np^2(1-p^2) + 2\sum_{i=1}^{n-1} E(Y_iY_{i+1})\\ &\quad -E(Y_i)E(Y_{i+1})),\end{aligned}$$

donc finalement :

$$\mathbb{V}(Z_n) = \frac{1}{n^2}\left(np^2\left(1-p^2\right) + 2(n-1)\left(p^3 - p^4\right)\right)$$

Il reste à appliquer l'inégalité de Bienaymé-Chebicheff à Z_n, soit :

$$p\,(|Z_n - E\,(Z_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V\,(Z_n)}{\varepsilon^2}$$

avec

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} V\,(Z_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(np^2\left(1-p^2\right) + 2(n-1)\left(p^3 - p^4\right)\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

EXERCICE 535 Diverses opérations sur les variables aléatoires

Titre : Diverses opérations sur les variables aléatoires
ID : 380 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 366 | ID : 380
Difficulté :

Soit X une variables aléatoire réelle à densité, de loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$, et b un nombre réel strictement positif.

1. On pose $Y = -b\ln(X)$. Déterminer une densité de Y, ainsi que son espérance et sa variance.
   Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi que Y. On pose $U = Y_1 + Y_2$, $V = \frac{Y_1}{Y_2}$, $S = \ln(V)$ et $W = \frac{1}{1+V}$.
2. (a) Déterminer une densité de U.
   (b) Déterminer une densité de S(on déterminera au préalable une densité de $T = -\ln(Y_2)$.
   (c) En déduire une densité de V, puis une densité de la variables aléatoire W. Préciser l'espérance et la variance de W.
   (d) En exprimant W en fonction de Y_1 et de Y_2, montrer que la valeur de l'espérance de W était prévisible.
   (e) Calculer $\mathbb{E}(UW) - \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(W)$. Quelle remarque peut-on faire ?

Solution

1. On a $Y(\Omega) = \mathbb{R}^{+*}$, et pour tout $y > 0$:

$$P(Y < y) = P\left(X > e^{-\frac{y}{b}}\right) = 1 - e^{-\frac{y}{b}}$$

Aussi la densité de Y est définie par :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{b}e^{-y/b} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que Y suit une loi $\Gamma(b,1)$, donc que $E(Y) = b, V(Y) = b^2$
2. a) Les variables Y_1 et Y_2 suivant toutes deux une loi $\Gamma(b,1)$ et étant indépendantes, le cours nous dit que $U = Y_1 + Y_2$ suit une loi $\Gamma(b,2)$.
b) Soit $T = -\ln Y_2$. Alors $T(\Omega) = \mathbb{R}$ et pour tout t réel :

$$P(T < t) = P\left(-b\ln X > e^{-t}\right) = P\left(X < \exp\left(-\frac{e^{-t}}{b}\right)\right) = \exp\left(-\frac{e^{-t}}{b}\right)$$

D'où la densité de T définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_T(t) = \exp\left(-\frac{e^{-t}}{b}\right) \cdot \frac{1}{b}e^{-t}$$

Un calcul similaire donne qu'une densité de $\ln Y_1$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{\ln Y_1}(t) = \exp\left(-\frac{e^{t}}{b}\right) \cdot \frac{1}{b}e^{t}$$

Posons $S = \ln Y_1 - \ln Y_2$. Alors $S(\Omega) = \mathbb{R}$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$f_S(s) = \int_{\mathbb{R}} f_{\ln Y_1}(t) f_{-\ln Y_1}(s-t)dt$$

soit

$$f_S(s) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{e^{-t}}{b}\right) \cdot \frac{1}{b}e^{-t} \exp\left(-\frac{e^{s-t}}{b}\right) \cdot \frac{1}{b}e^{s-t}dt$$

Posons $u = \varphi(t) = \frac{1}{b}e^{-t}$ qui est une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}+$ On obtient :

$$f_S(s) = e^s \int_0^{+\infty} ue^{-u(1+e^a)}du$$

et, pour tout s réel :

$$f_S(s) = \frac{e^s}{(1+e^8)^2}\Gamma(2) = \frac{e^8}{(1+e^8)^2}$$

c) On a $V = \exp(S), V(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et une densité de V est définie pour $v \geq 0$

$$\text{par } f_V(v) = \frac{1}{(1+v)^2}$$

On sait que $W(\Omega) =]0,1]$ et pour tout $0 < w \leq 1$

$$P(W < w) = P\left(V > \frac{1}{w} - 1\right) = 1 - F_V\left(\frac{1}{w} - 1\right)$$

On obtient ainsi, pour la densité de W :

$$f_W(w) = -f_V\left(\frac{1}{w} - 1\right)\left(-\frac{1}{w^2}\right) = 1$$

ce qui donne que W suit une loi uniforme sur $]0,1]$. Ainsi $E(W) = \frac{1}{2}, V(W) = \frac{1}{12}$
d) On sait que $W = \frac{Y_2}{Y_1+Y_2} = 1 - \frac{Y_1}{Y_1+Y_2} = 1 - W'$. Comme Y_1 et Y_2 jouent des rôles symétriques, W et W' suivent la mème loi, et $E(W) = E(W') = 1/2$.
e) On a $UW = Y_2$. Donc $E(UW) - E(U)E(W) = 0$. Si on peut étendre les théorèmes connus des variables aléatoires discrètes aux variables continues. alors $\rho_{U,W} = 0$. Cela signifie-t-il que U et W sont indépendantes ?

EXERCICE 536 Variables aléatoires et partie entière

Titre : Variables aléatoires et partie entière
ID : 381 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 367 | ID : 381
Difficulté :

A. Soit k un entier naturel strictement positif. On considère une suite $(x_n)_{n>0}$, de nombres réels appartenant au segment $[0,k[$. On pose pour tout n entier strictement positif :

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j, \quad r_n = f(s_n) = s_n - \lfloor s_n \rfloor$$

où $\lfloor x \rfloor$ représente la partie entière de x.

1. Montrer que la suite (r_n) est bornée.
2. Montrer que $r_{n+1} = f(f(s_n) + x_{n+1})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

B. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles continues indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et toutes deux de loi uniforme sur l'intervalle $[0,k[$.

1. Déterminer une densité de la variable aléatoire S_2, définie par $S_2 = X_1 + X_2$.
2. On définit la variable aléatoire R_2 par : $R_2 = S_2 - \lfloor S_2 \rfloor$. Déterminer la fonction de répartition de R_2 en fonction de celle de S_2 et en déduire une densité de R_2 dans les cas $k = 1$ puis $k = 2$.
3. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, toutes de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1[$. On définit pour tout $n > 0$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad \text{et} \quad R_n = S_n - \lfloor S_n \rfloor$$

Déterminer la loi de R_n(on pourra utiliser les résultats de la question **A.2** et un raisonnement par récurrence).

Solution

A.

1. Pour tout n, s_n est un nombre réel et pour tout n, $0 \leq r_n < 1$. (r_n s'appelle la partie fractionnaire de s_n).
2. Calculons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(s_n) + x_{n+1} = s_n - \lfloor s_n \rfloor + x_{n+1} = s_{n+1} - \lfloor s_n \rfloor$$

et

$$\begin{aligned} f(f(s_n) + x_{n+1}) &= s_{n+1} - \lfloor s_n \rfloor - \lfloor (s_{n+1} - \lfloor s_n \rfloor) \rfloor \\ &= s_{n+1} - \lfloor s_n \rfloor - \lfloor s_{n+1} \rfloor + \lfloor s_n \rfloor \end{aligned}$$

B.

1. On sait que $S_2(\Omega) = [0, 2k[$ et que pour tout x réel, la densité f de S_2 est définie par : $f(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(t) f_{X_2}(x-t) \mathrm{d}t$
   Donc :
   • Si $0 \leq x \leq k$, $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{k^2} = \frac{x}{k^2}$.
   • Si $k \leq x < 2k$, $f(x) = \int_{x-k}^k \frac{dt}{k^2} = \frac{2k-x}{k^2}$. Finalement :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{x}{k^2} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq k \\ \frac{2k-x}{k^2} & \text{si} \quad k \leq x < 2k \\ 0 & \text{si} \quad 2k \leq x \end{cases}.$$

2. • Si $k = 1$, il vient :

$$R_2 = \begin{cases} S_2 & \text{si } 0 \leq S_2 < 1 \\ S_2 - 1 & \text{si } 1 \leq S_2 < 2 \end{cases}$$

Ainsi, pour $t \in [0, 1[$:, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0 \leq R_2 < t) &= \mathbb{P}(((0 \leq S_2 < t) \wedge (0 \leq S_2 < 1)) \\ &\quad \vee ((0 \leq S_2 - 1 < t) \wedge (1 \leq S_2 < 2))) \end{aligned}$$

et, par disjonction et inclusion :

$$P(0 \leq R_2 < t) = P(0 \leq S_2 < t) + P(1 \leq S_2 < 1 + t)$$

La fonction de répartition de R_2 est définie par :

$$F_{R_2}(t) = \int_0^t x dx + \int_1^{1+t} (2 - x) dx = t, \text{ pour } t \in [0, 1[$$

soit :

$$F_{R_2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

ce qui signifie que R_2 suit une loi uniforme sur $[0, 1]$
• Si $k = 2$, on a :

$$R_2 = \begin{cases} S_2 & \text{si } 0 \leq S_2 < 1 \\ S_2 - 1 & \text{si } 1 \leq S_2 < 2 \\ S_2 - 2 & \text{si } 2 \leq S_2 < 3 \\ S_2 - 3 & \text{si } 3 \leq S_2 < 4 \end{cases}$$

et de même que précédemment, pour $t \in [0,1]$, par disjonction et inclusion :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0 \leq R_2 < t) &= \mathbb{P}(0 \leq S_2 < t) + \mathbb{P}(1 \leq S_2 < 1+t) \\ &\quad + \mathbb{P}(2 \leq S_2 < 2+t) + \mathbb{P}(3 \leq S_2 < 3+t) \\ &= \int_0^t \frac{x}{4}\mathrm{d}x + \int_1^{1+t} \frac{1}{4}\mathrm{d}x + \int_2^{2+t} \left(1 - \frac{x}{4}\right)\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_3^{3+t} \left(1 - \frac{x}{4}\right)\mathrm{d}x = t\end{aligned}$$

Donc, et tout comme précédemment, $R_2 \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$.

3. Montrons par récurrence que R_n suit une loi uniforme sur $[0,1]$.
   • C'est vrai pour $n = 1, 2$.
   • Supposons que R_n suive une loi uniforme sur $[0,1]$. Alors $R_{n+1} = f(S_{n+1}) = f(f(S_n) + X_{n+1}) = f(R_n + X_{n+1})$. Or R_n et X_{n+1} suivent chacune une loi uniforme sur $[0,1]$ et sont indépendantes. Par la question précédente, R_{n+1} suit une loi uniforme sur $[0,1]$

EXERCICE 537 $X_n \hookrightarrow$ Ber(x_n) avec $x_n + 1 = f(x_n)$ et $f \in C^2([0,1],\mathbb{R})$

Titre : $X_n \hookrightarrow \mathrm{Ber}(x_n)$ avec $x_n + 1 = f(x_n)$ et $f \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 382 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 368 | ID : 382

On considère une fonction f de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = \lambda$ avec $\lambda \in]0,1[$ et pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) < 0$.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in]0,1]$, on a $f(x) \leq \lambda x$.
   (b) On prends $x_0 \in]0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit par récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que la suite (x_n) est décroissante et converge vers 0.
2. On considère des variables aléatoires indépendantes de Bernoulli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de paramètre x_n, c'est-à-dire que la probabilité de succès la n-ème fois, ce qui corresponds à $X_n = 1$ est x_n.
   (a) Quelle est la probabilité p_n d'obtenir n échecs aux n premières épreuves ?
   (b) Montrer que la suite (p_n) est décroissante et converge. On note ℓ sa limite ; Comment interpréter la propriété $\ell = 0$?
   (c) Montrer que $\ell = 0$ si et seulement si la série de terme général x_n diverge.
3. On pose $f(x) = \frac{x}{1+x}$
   (a) La fonction f vérifie-t-elle les hypothèses du 1) ?
   (b) Calculer $\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}$; En déduire un équivalent de x_n quand n tends vers $+\infty$

Solution

1. a) La fonction f étant de classe C^2 et vérifiant $f(0) = 0, f'(0) = \lambda, f''(t) < 0$, la formule de Taylor avec reste intégral permet d'écrire, pour toult $x \in [0,1]$

$$f(x) = \lambda x + \int_0^x (x-t) f''(t) dt < \lambda x$$

b) Par la question précédente, comme $\lambda \in]0,1]$, la suite (x_n) est décroissante, minorée par 0 ; donc elle est convergente et sa limite L réalise $L \geq 0$ et $L \leq \lambda L$ donc $L = 0$ lorsque $\lambda < 1$.
2. a) Par indépendance, on a : $p_n = (1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n) = \prod_{k=1}^n (1-x_k)$
b) Comme $\frac{p_{n+1}}{p_n} = 1 - x_n < 1$, la suite (p_n) est décroissante, et minorée par 0. Elle admet donc une limite ℓ. Le fait d'avoir $\ell = 0$ signifie obtenir une infinité d'échecs, car les événements E_n : « obtenir n échecs lors des n premières épreuves », forment une suite décroissante d'événements.
c) On a $\ln p_n = \sum_{k=1}^n \ln(1-x_k)$. La suite (x_n) étant convergente vers 0, on sait que pour n grand

$\ln(1-x_n) \sim -x_n$. Ainsi la série $\sum x_n$ diverge si et seulement si la série $\sum \ln(1-x_n)$ diverge c'est-à-dire si et seulement si la limite $\lim_{n\to+\infty} \ln(p_n)$ n'existe pas ou encore si et seulement si $\ell = 0$.
3. On vérifie aisément que la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{1+x}$ vérifie les conditions de la premiére question,sauf pour $\lambda = 1$. Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n}{1+x_n} - \frac{1}{x_n} = 1$$

La suite $\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\right)$ est convergente vers 1 (ici mème égale...). On peut écrine

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k}\right) = \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_0}\right) = n$$

donc $\frac{1}{x_n} \sim n$ et $x_n \sim \frac{1}{n}$. Ainsi la série $\sum x_n$ diverge et $\ell = 0$

EXERCICE 538 Varaible aléatoire et matrices

Titre : Varaible aléatoire et matrices
ID : 383 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 369 | ID : 383
Difficulté :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et suivant respectivement $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$ et $\mathrm{B}\left(n, \frac{3}{4}\right)$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 0 \\ 2 & Y(\omega) \end{pmatrix}$$

1. Calculer la probabilité que $A(\omega)$ soit diagonalisable.
2. Calculer la probabilité que $A(\omega)$ soit inversible.

Solution

1. Les valeurs propres de $A(\omega)$ sont $X(\omega)$ et $Y(\omega)$. Si ces deux valeurs propres sont distinctes, $A(\omega)$ est diagonalisable. Si elles sont égales, $A(\omega)$ n'est pas diagonalisable, sinon elle serait semblable à une matrice scalaire, donc serait une matrice scalaire, ce qui est évidemment faux
En notant p_1 la probabilité que $A(\omega)$ soit diagonalisable, on a donc

$$p_1 = P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y)$$

Par indépendance de X et Y, on peut écrire :

$$P(X = Y) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)P(Y = k) = \left(\frac{3}{16}\right)^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} = \left(\frac{3}{16}\right)^n C_{2n}^n$$

[La dernière relation, appelée formule de Vandermonde résulte du fait que la somme de deux variables indépendantes suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ suit la loi $\mathcal{B}(2n,p)$]

$$p_1 = 1 - \left(\frac{3}{16}\right)^n C_{2n}^n$$

2. $A(\omega)$ est inversible si et seulement si $X(\omega) \neq 0$ et $Y(\omega) \neq 0$. Donc, en notant p_2 la probabilité cherchée :

$$p_2 = P[(X \neq 0) \cap (Y \neq 0)] = [1 - P(X = 0)] \cdot [1 - P(Y = 0)]$$

Donc $p_2 = \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$.

EXERCICE 539 loi de Pareto de paramètres $\lambda > 0$ et $\theta > 0$

Titre : loi de Pareto de paramètres $\lambda > 0$ et $\theta > 0$ **Difficulté :**
ID : 384 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 370 | ID : 384

On note $\mathcal{VP}(\lambda, \theta)$ la loi de Pareto de paramètres $\lambda > 0$ et $\theta > 0$ qui est la loi d'une variable aléatoire continue à densité de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\theta}\left(\frac{\theta}{x}\right)^{\lambda+1} & \text{si} \quad x > \theta \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Un phénomène économique suit une loi $\mathcal{VP}(\lambda, \theta)$, θ étant un paramètre connu et λ un paramètre que l'on veut estimer. On dispose pour cela d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes suivant cette loi. On pose :

$$T = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{X_i}{\theta}\right) \quad \text{et} \quad \widehat{\lambda} = \frac{n}{T}.$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{VP}(\lambda, \theta)$ et $Y = \ln\left(\frac{X}{\theta}\right)$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
   (b) Déterminer, lorsqu'elles existent, l'espérance et la variance de X.
   (c) Montrer que Y suit une loi Γ dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la loi de T ? En donner une densité.
3. Calculer l'espérance et la variance de $\widehat{\lambda}$.
4. Justifier que la suite (Z_n) de variables aléatoires définies par $Z_n = \frac{\sqrt{n}(\widehat{\lambda}-\lambda)}{\lambda}$ converge en loi vers la loi normal standard $\mathcal{N}(0,1)$.

Solution

1. Les calculs donnent :
a) Pour $x \leq \theta, F_X(x) = 0$ et pour $x > \theta, F_X(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^{\lambda}$
b) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si$\lambda > 1$ et dans ce cas : $E(X) = \frac{\lambda\theta}{\lambda-1}$
De même, la variable aléatoire X admet une variance si et seulement si$\lambda > 2$

$$\text{et alors : } V(X) = \frac{\lambda\theta^2}{(\lambda-2)(\lambda-1)^2}\,.$$

c) La variable aléatoire Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, F_Y(x) = P\left(X \leq \theta.e^x\right) = F_X\left(\theta.e^x\right) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Donc Y suit la loi exponentielle de paramètre λ, c'est-à-dire la loi Γ de paramètres $\frac{1}{\lambda}$ et 1
2. La variable aléatoire T est la somme de n variables aléatoires indépendantes de méme loi $\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, 1\right)$, donc T suit la loi $\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, n\right)$ Une densité f_T de T est donnée par

$$\forall t \leq 0, f_T(x) = 0, \forall t > 0, f_T(x) = \frac{e^{-\lambda x}x^{n-1}\lambda^n}{(n-1)!}$$

3. On a : $\widehat{\lambda} = \frac{n}{T}$, donc sous réserve d'existence :

$$E(\hat{\lambda}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{x} f_T(x)dx = \frac{n\lambda}{n-1}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x}x^{n-2}\lambda^{n-1}}{(n-2)!}dx$$

On reconnaît l'intégrale (intégrale d'une densité d'une variable aléatoire suivant la loi $\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}, n-1\right)$), ce qui prouve que l'espérance existe et vaut

$$E(\hat{\lambda}) = \frac{n\lambda}{n-1}$$

⋆ En procédant de la même façon on montre que $\hat{\lambda}$ admet un moment d'ordre 2 valant $\frac{n^2\lambda^2}{(n-1)(n-2)}$, donc une variance valant : $V(\lambda) = \frac{n^2\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)}$

5. Conséquence immédiate du théorème central limite.

EXERCICE 540 Variable aléatoire loi continue

Titre : Variable aléatoire loi continue
ID : 385 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 371 | ID : 385
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $a \in]0,1[$ et X une variable aléatoire, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $[0,1]$. On suppose que la loi conditionnelle de X conditionnée par l'événement $(X \leq a)$ est la loi uniforme sur $[0,a]$ et que la loi conditionnelle conditionnée par l'événement $(X > a)$ est la loi uniforme sur $[a,1]$. On suppose de plus que : $\mathbb{P}(X \leq a) = \frac{1}{2}$.

1. Déterminer une densité de X, son espérance et sa variance.
2. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que X et soit $M_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$. déterminer l'espérance $\mathbb{E}(M_n)$ et la vairiance $\mathbb{V}(M_n)$. Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, opn pose $T_n = 2M_n - \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{E}(T_n) = a$ et $\mathbb{V}(T_n) = 4\mathbb{V}(M_n)$. Que vaut alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(T_n)$?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{V}(T_n) \leq \frac{5}{12n}$. En déduire que :
$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in [0,1],\ \mathbb{P}(|T_n - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{5}{12n\varepsilon^2}$$
4. Justifier que la suite des variables aléatoires $\left(\frac{T_n - a}{\sqrt{\mathbb{V}(T_n)}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire T dont on précisera la loi.

Solution

1. Une densité de X vaut $\frac{1}{2a}$ sur $[0,a]$ et $\frac{1}{2(1-a)}$ sur $[a,1]$ et 0 ailleurs. En utilisant la formule de Chasles pour calculer les intégrales, on trouve alors facilement :
$$E(X) = \frac{2a+1}{4} \text{ et } V(X) = \frac{4+(2a-1)^2}{48}.$$

2. On a $E(M_n) = E(X) = \frac{2a+1}{4}$ et $V(M_n) = \frac{1}{n}V(X) = \frac{4+(2a-1)^2}{48n}$.
Ainsi $T_n = 2M_n - \frac{1}{2}$ est d'espérance $E(T_n) = 2E(M_n) - \frac{1}{2} = \frac{2a+1}{2} - \frac{1}{2} = a$.
La variance de T_n est $V(T_n) = 4V(M_n) = \frac{4+(2a-1)^2}{12n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V(T_n) = 0$.

3. On a : $V(T_n) = \frac{4+(2a-1)^2}{12.n} \leq \frac{5}{12.n}$. Pour tout a de $[0,1]$, on a par l'inégalité de Bienaymé-Chebychev :
$$P(|T_n - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{5}{12.n\varepsilon^2}.$$

4. Le théorème de la limite centrée indique que $\left(\frac{T_n - a}{\sigma(T_n)}\right)_n$ converge en loi vers une variable suivant la loi normale centrée réduite.

EXERCICE 541 Une fonction construite par une variable aléatoire

Titre : Une fonction construite par une variable aléatoire
ID : 386 **Durée :** —
Difficulté : ★☆☆☆☆

Niveau : L2 | N° : 372 | ID : 386

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit r un réel tel que $0 < r < 1$. Soit X une variable aléatoire réelle tel que $X \hookrightarrow \text{Ber}(r)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, soit S_n une variable aléatoire tél que $S_n \hookrightarrow B(n, r)$ (loi binomiale de paramètres (n, r).

1. (a) Pour tout réel t tel que $t > 0$, on pose $g(t) = \mathbb{E}(\exp(-tX))$. Calculer $g(t)$, en fonction de t et r.
   (b) Justifier l'égalité :
$$\mathbb{E}\left(\exp\left(-t\frac{S_n}{n}\right)\right) = g\left(\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$$
2. Soit a un réel tel que $0 < a < r < 1$ et t un réel positif fixé.
   (a) Montrer que :
$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) = \mathbb{P}\left(\exp\left(-t\left(\frac{S_n}{n} - a\right)\right) \geq 1\right)$$
   (b) Soit Y une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs positives. Montrer que $\mathbb{P}(Y \geq 1) \leq \mathbb{E}(Y)$. En déduire que :
$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq \exp(at)\left(g\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$$
3. (a) Étudier les variations de la fonction $t \mapsto \ln(\exp(at)g(t))$.
   (b) En déduire qu'il existe une constante M tel que $M > 0$ et :
$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq \exp(-nM)$$
4. Soit $\varepsilon > 0$ donné ; Donner une interprétation probabiliste du résultat précédent lorsque $a = r - \varepsilon$.

Solution

1. a) On sait que $e^{-tX}(\Omega) = \{1, e^{-t}\}$. Ainsi :
$$g(t) = (1 - r) + re^{-t}$$

b) Soient $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ n variables indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre r, alors $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et
$$\begin{aligned} E\left(\exp\left(-\tfrac{tS_n}{n}\right)\right) &= E\left(\exp\left(-\tfrac{t}{n}\textstyle\sum_{i=1}^n X_i\right)\right) = E\left(\textstyle\prod_{i=1}^n \exp\left(-\tfrac{tX_i}{n}\right)\right) \\ &= \textstyle\prod_{i=1}^n E\left[\exp\left(-\tfrac{tX_i}{n}\right)\right] = \left(g\left(\tfrac{t}{n}\right)\right)^n \end{aligned}$$

2. a) Comme $t > 0$ et comme la fonction exponentielle est bijective, on peut
$$\begin{aligned} \text{écrire : } \left(\tfrac{S_n}{n} \leq a\right) &= \left(\tfrac{S_n}{n} - a \leq 0\right) = \left(-t\left(\tfrac{S_n}{n} - a\right) \geq 0\right) \\ &= \left[\exp\left(-t\left(\tfrac{S_n}{n} - a\right)\right) \geq 1\right] \end{aligned}$$

b) On suppose que $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, avec $y_i \geq 0$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a alors
$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=1}^n y_i P(Y = y_i) = \sum_{i|y_i \leq 1} y_i P(Y = y_i) + \sum_{i|y_i \geq 1} y_i P(Y = y_i) \\ &\geq \sum_{i|y_i \geq 1} y_i P(Y = y_i) \geq \sum_{i|y_i \geq 1} P(Y = y_i) = P(Y \geq 1) \end{aligned}$$

(On remarquera que cette inégalité reste vérifiée même si $P(Y \geq 1) = 0$. puisque l'espérance de Y est

positive). Par les deax résultats précédents, pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) &= P\left[\exp\left(-t\left(\frac{S_n}{n} - a\right)\right) \geq 1\right] \\ &\leq E\left[\exp\left(-t\left(\frac{S_n}{n} - a\right)\right)\right] \\ &= e^{at} E\left[\exp\left(-t\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)\right] \\ &= e^{at}\left(g\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \end{aligned}$$

3. a) On peut écrire $\varphi : t \mapsto at + \ln\left(re^{-t} + 1 - r\right)$. Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $t \geq 0$:

$$\varphi'(t) = \frac{r}{e^t(r-1) - r} + a$$

On a $\varphi'(t) = 0$ si et seulement si $t = t_0 = \ln\left(\frac{(a-1)r}{a(r-1)}\right) > 0$ (car $0 < a < r < 1$). Ainsi la fonction φ admet un minimum en t_0 qui est strictement négatif, puisque $\varphi(0) = 0$.

b) Notons $-M$ ce minimum. On remarque que :

$$e^{at}\left(g\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(e^{at/n} g\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \psi^n\left(\frac{t}{n}\right)$$

avec $\psi(t) = e^{\varphi(t)}$. Donc :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq \left(e^{\varphi(t/n)}\right)^n = e^{n\varphi(t/n)} \leq e^{-nM}$$

4. Si $a \leq r - \varepsilon$, il vient

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq r - \varepsilon\right) \leq e^{-nM}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n}{n} \leq r - \varepsilon\right) = 0$$

et il en découle :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n}{n} \geq r - \varepsilon\right) = 1.$$

EXERCICE 542 Matrices carrées et variables aléatoires

Titre : Matrices carrées et variables aléatoires
ID : 387 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 373 | ID : 387
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \ldots, X_n$, qui suivent une loi normale d'espérance m et de variance σ^2 On pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

et

$$U_n = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$$

1. Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} n-1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Soit B le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

(a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.

(b) Déterminer les valeurs propres de A ainsi qu'une base des sous-espaces propres associés.

(c) Justifier l'existence d'une matrice P de $GL_n(\mathbb{R})$ dont la dernière colonne est proportionnelle à B et telle que ${}^tPAP = D$, où D est une matrice diagonale à déterminer (on ne demande pas la matrice P).

(d) On note ${}^tP = \left(p_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ Montrer que :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, n-1]\!], \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 0 \\ \forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}^2 = 1 \end{cases}$$

2. On note $M = \frac{1}{n}A$ et q l'application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), q(X) = {}^tXMX$ On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$ Montrer que $q(X) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_n\right)^2$, puis $q(X) = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}x_j\right)^2$

3. Pour tout i de $[1, n-1]$, on pose $Y_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}X_j$

(a) Justifier que $E\left(Y_i\right) = 0$ et $V\left(Y_i\right) = \sigma^2$

(b) On suppose que les Y_i sont mutuellement indépendantes. Montrer que U_n suit la loi $\Gamma\left(2, \frac{n-1}{2}\right)$

Solution

1. (a) La matrice A est symétrique réelle : elle est diagonalisable dans une base orthonormée.

(b) Si l'on note J la matrice dont tous les éléments valent 1, on a $A = nI - J$. Les valeurs propres de J sont 0 de sous-espace propre associé de dimension $n-1$ (Ker J), et n dont le sous-espace propre associé est de dimension 1 engendré par le vecteur B (orthogonal à Ker J). Les valeurs propres de A sont donc n de sous-espace propre associé Ker J de dimension $n-1$, et 0 de sous-espace propre associé Vect (B)

(c) La matrice D demandée est la matrice diagonale diag $(n, \ldots, n, 0)$.

(d) La matrice P étant orthogonale, la relation ${}^tPP = I$ donne : $\sum_{i=1}^{n} p_{i,j}^2 = 1$. Si l'on note $C_1, \ldots, C_{n-1}$ les premières colonnes de la matrice P, elles représentent les coordonnées des vecteurs du noyau de J, ce qui donne la relation : $\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 0$

2. L'écriture de l'application q donne :

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2$$

La relation $q(X) = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}x_j\right)^2$ est obtenue à partir de l'écriture de q dans la base orthonormée de diagonalisation, c'est-à-dire $q(X) =' (PX)D(PX)$

3. (a) On a $E\left(Y_i\right) = 0$ par linéarité de l'espérance et la relation $\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 0$ Par indépendance des variables aléatoires (X_i), il vient :

$$V\left(Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}^2 V\left(Y_j\right) = \sigma^2$$

Enfin, on sait (encore l'indépendance des X_i) que les Y_i suivent encore des lois normales. Elles suivent donc la loi normale centrée de variance σ^2.

(b) Grâce aux questions précédentes, on peut écrire :

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_n)^2 \\ &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}X_j\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{Y_i}{\sigma}\right)^2 \end{aligned}$$

Donc, U_n est la somme des carrés de $n-1$ variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite. On sait alors que : $U_n \hookrightarrow \Gamma\left(2, \frac{n-1}{2}\right)$

EXERCICE 543 Variables aléatoires continues à densité

Titre : Variables aléatoires continues à densité
ID : 388 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 374 | ID : 388
Difficulté : ★☆☆☆☆

On considère une fonction F définie sur $[0,+\infty[$ à valeurs réelles, croissante, continue, telle que $F(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

1. On définit la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $p_n = F(n+1) - F(n)$ Montrer que la série de terme général p_n est convergente et déterminer sa somme.
2. (a) Soit x un réel fixé dans $[0,1[$. Montrer que la série de terme général $F(x+n)-F(n)$ est convergente.
   (b) On considère la fonction φ définie sur $\left[0,1\right[$ par : $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(F(x+n)-F(n))$ Montrer que φ est croissante.
   (c) Soient x et y deux réels fixés de $[0,1]$. Montrer que pour tout ε réel fixé strictement positif, il existe N_0 entier positif indépendant de x et y tel que, pour tout $N \geqslant N_0$: $\sum\limits_{n=N}^{+\infty}|F(x+n)-F(y+n)| < \varepsilon$ En déduire que φ est continue sur $[0,1[$.
3. On considère désormais que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$. On considère les variables aléatoires notées $d(X)$ et $\lfloor X\rfloor$ définies par, pour tout $\omega\in\Omega$:

$$d(X)(\omega) = X(\omega) - [X(\omega)] \text{ et } \lfloor X\rfloor(\omega) = \lfloor X(\omega)\rfloor$$

où $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière du réel x.
   (a) Déterminer la loi de $\lfloor X\rfloor$ à l'aide des (p_n) et la fonction de répartition de $d(X)$.
   (b) On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Expliciter la loi de $\lfloor X\rfloor$ et la fonction de répartition de $d(X)$. Déterminer une densité de $d(X)$, puis calculer les espérances de ces deux variables aléatoires.

Solution

1. Pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, on a $\sum_{n=0}^{N} p_n = F(N+1)$. D'après les hypothèses, on en conclut que la série converge et que sa somme vaut 1
2. (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant F(x+n)-F(n) \leqslant p_n$. Cela montre que la série considérée est convergente et que sa somme est inférieure à 1.
   (b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout réels x et y tels que $x\geqslant y, F(x+n)-F(n) \geqslant F(y+n)-F(n)$ ce qui montre que $\varphi(x)\geqslant\varphi(y)$ et donc que la fonction φ est croissante.

(c) De manière évidente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, |F(x+n) - F(y+n)| \leqslant p_n$. D'où,

$$\forall N \in \mathbb{N}, N \geqslant N_0, \sum_{n=N}^{+\infty} |F(x+n) - F(y+n)| \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} p_n$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, la convergence de la deuxième série implique qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que la somme considérée soit inférieure à ε, d'où le résultat. On écrit alors :

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &\leq \sum_{n=1}^{N_a} |F(x+n) - F(y+n)| \\ &\quad + \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} |F(x+n) - F(y+n)| \end{aligned}$$

La seconde somme est inférieure à ε, indépendamment de x et y, et par continuité d'une somme finie de fonctions continues, il existe $\delta > 0$ tel que la première somme soit inférieure à ε, pour $|x-y| < \delta$. Ceci montre la continuité de φ sur $0, [1$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}, P(\lfloor X \rfloor = n) = p_n$, et :

$$P(d(X) < x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in [0, [1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

(b) Sous les hypothèses de cette question, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P(\lfloor X \rfloor = n) = \mathrm{e}^{-\lambda n} - \mathrm{e}^{-\lambda(n+1)}$ Donc : $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda(x+n)}\right) - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda n}\right) \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\lambda n} - \mathrm{e}^{-\lambda(x+n)}\right)$ $= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda n} \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^n = \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda x}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}$ Une densité de $d(X)$ est donnée par $f(x) = \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}$, si $x \in [0, 1[$ et 0 sinon. On a :

$$\begin{aligned} E(\lfloor X \rfloor) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(\mathrm{e}^{-\lambda n} - \mathrm{e}^{-\lambda(n+1)}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-\lambda n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1-1) e^{-\lambda(n+1)}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(n+1)} = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \end{aligned}$$

et finalement :

$$\begin{aligned} E(d(X)) &= E(X) - E(\lfloor X \rfloor) \\ &= \frac{1}{\lambda} - \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} \\ &= \frac{1 - (\lambda+1)\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda}\right)} \end{aligned}$$

EXERCICE 544 Un exercice riche en analyse et probabilités

Titre : Un exercice riche en analyse et probabilités
ID : 389 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 375 | ID : 389
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit X une variable aléatoire réelle de densité g et de fonction de répartition G. On suppose que g est une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$.

1. Exprimer, pour tout réel x, $G(-x)$ en fonction de $G(x)$.
2. On définit la fonction $\tilde{g}$ par : $\tilde{g}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ 2g(t) & \text{si } t > 0 \end{cases}$ Vérifier que $\tilde{g}$ est une densité de probabilité. On note $\tilde{X}$ une variable aléatoire de densité $\tilde{g}$.
3. Exprimer la fonction de répartition $\widetilde{G}$ de $\overline{X}$ en fonction de G. Donner en particulier, pour $0 < a < b$, $\widetilde{G}(b) - \widetilde{G}(a)$ en fonction de $G(b)$ et de $G(a)$
4. Pour tout m de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et tout réel t, on pose : $f_m(t) = 2(1-m)g(t) + (2m-1)\tilde{g}(t)$
   (a) Vérifier que f_m est une densité de probabilité et exprimer $f_m(t)$ en fonction de m et de $g(t)$
   (b) Soit Y_m une variable aléatoire de densité f_m. Déterminer la fonction de répartition F_m de Y_m, en fonction de m et de G.
   (c) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\lfloor |Y_m| \rfloor$ (partie entière de la valeur absolue de Y_m) en fonction de G, puis de G.
5. On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que Y_m. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $Z_n = (X_1, \ldots, X_n)$ et $T_n = \sum_{i=1}^{n} 1_{(X_i \geq 0)}$, c'est-à-dire que T_n est le nombre de variables du n -uplet Z_n qui sont positives. On pose enfin $S_n = \frac{1}{n} T_n$. Donner la loi de T_n, son espérance, sa variance.
6. Soit φ une fonction de $[0, n]$ dans $\mathbb{R}$, telle que : $\forall m \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[, E(\varphi(T_n)) = 0$. Montrer que $\varphi = 0$.

Solution

1. On a $G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$ et donc, $G(-x) = \int_{-\infty}^{-x} g(t)dt$. Avec le changement de variable $u = -t$, on obtient $G(-x) = \int_{+\infty}^{x} g(u)(-du) = \int_{x}^{+\infty} g(u)du$ $G(-x) = 1 - G(x)$
2. La fonction $\tilde{g}$ est évidemment continue sauf éventuellement en un nombre fini de points et positive. De plus $\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(t)dt = 2\int_{0}^{+\infty} g(t)dt = 1$
3. Si $x < 0, \widetilde{G}(x) = 0$ si $x \geqslant 0, \widetilde{G}(x) = \int_{-\infty}^{x} \tilde{g}(t)dt = 2\int_{0}^{x} g(t)dt = \int_{-x}^{x} g(t)dt = G(x) - G(-x)$ $= 2G(x) - 1$ On a donc, pour $0 < a < b, \widetilde{G}(b) - \widetilde{G}(a) = 2(G(b) - G(a))$
4. (a) La fonction f_m est évidemment continue sauf éventuellement en un nombre fini de points et positive. De plus $\int_{-\infty}^{+\infty} f_m(t)dt = 2(1-m)\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt + (2m-1)\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(t)dt$, soit : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_m(t)dt = 2(1-m) + (2m-1) = 1$ Si $t \leqslant 0$, on a $f_m(t) = 2(1-m)g(t)$ Si $t > 0$, on a $f_m(t) = 2(1-m)g(t) + 2(2m-1)g(t) = 2mg(t)$
   (b) Si $x \leqslant 0, F_m(x) = \int_{-\infty}^{x} 2(1-m)g(t)dt = 2(1-m)G(x)$ Si $x > 0, F_m(x) = \int_{-\infty}^{0} 2(1-m)g(t)dt + \int_{0}^{x} 2mg(t)dt = 1 - m + 2m\left(G(x) - \frac{1}{2}\right)$
   (c) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} P(\lfloor |Y_m| \rfloor = k) &= P(\lfloor |Y_m| \rfloor < k+1) \\ &= P(k \leq Y_m < k+1) \\ &\quad + P(-k-1 < Y_m \leq -k) \end{aligned}$$

   Soit

$$\begin{aligned} P(\lfloor |Y_m| \rfloor = k) &= F_m(k+1) - F_m(k) \\ &\quad + F_m(-k) - F_m(-k-1). \end{aligned}$$

   En remplaçant F_m à l'aide de G, on trouve :

$$\begin{aligned} P(\lfloor |Y_m| \rfloor = k)) &= 2(G(k+1) - G(k)) \\ &= \widetilde{G}(k+1) - \widetilde{G}(k) \end{aligned}$$

5. La variable aléatoire T_n suit une loi binomiale dont le paramètre est $p = P(X_i \geqslant 0) = \int_{0}^{+\infty} f_m(t)dt = m$ On en déduit que $E(T_n) = nm$ et $V(T_n) = nm(1-m)$.

6. On a : $E(\varphi(T_n)) = 0 \iff \sum_{k=0}^{n} \varphi(k) \binom{n}{k} m^k (1-m)^{n-k} = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \varphi(k) \binom{n}{k} \left(\frac{m}{1-m}\right)^k = 0$$

Considérons le polynôme P défini par $P = \sum_{k=0}^{n} \varphi(k) \binom{n}{k} X^k$. Ce polynôme s'annule pour tout les réels $\alpha_m = \frac{m}{1-m}$ obtenus lorsque m parcourt l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$. Il possède donc une infinité de racines, c'est donc le poynôme nul.
Conclusion : $\forall k \in [0, n], \varphi(k) = 0$ et φ est la fonction nulle.

EXERCICE 545 Variables aléatoires continues à densité

Titre : Variables aléatoires continues à densité
ID : 390 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 376 | ID : 390
Difficulté : ★☆☆☆☆

1. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles à densité définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f_Y une densité de Y. Pour tout z réel, justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leqslant z - y) f_Y(y) dy$$

On admet que, si X et Y sont indépendantes, alors :

$$\forall z \in \mathbb{R}, P(X + Y \leqslant z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leqslant z - y) f_Y(y) dy$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ fixé *et* $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k suit la loi exponentielle de paramétre $k\alpha$ Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \Phi_n$ la fonction de répartition de S_n et $T_n = \frac{S_n}{n}$

2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\forall z \in \mathbb{R}_+), \Phi_n(z) = (1 - e^{-\alpha z})^n$ (On pourra employer (en le justifiant) le changement de variable $u = e^{-\alpha x}$.)
3. (a) Calculer l'espérance $E(T_n)$ de la variable aléatoire T_n. A-t-elle une limite pour n tendant vers $+\infty$? Déterminer un équivalent de $E(T_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) Calculer la variance de T_n. A-t-elle une limite pour n tendant vers $+\infty$?
   (c) Etudier la convergence en loi de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Solution

1. Par comparaison : $\forall z \in \mathbb{R}, 0 \leqslant P(X \leqslant z - y) f_Y(y) \leqslant f_Y(y)$ qui est une fonction d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}$. La convergence en résulte.
2. La variable $S_1 = X_1$ suit la loi $\mathcal{E}(\alpha)$ et par récurrence, pour $z \geqslant 0$ comme $S_n(\Omega) = \mathbb{R}^+$: $P(S_{n+1} \leqslant z) = P(S_n + X_{n+1} \leqslant z) = \int_0^{+\infty} P(S_n \leqslant z - x)(n+1)\alpha e^{-(n+1)\alpha x} dx$ Comme

$$P(S_n \leqslant z - x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \geq z \\ \left(1 - e^{-\alpha(z-x)}\right)^n \text{ si } x \leqslant z^2 \end{cases}$$

en posant $u = \mathrm{e}^{-\alpha x}$ il vient :

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} \leq z) &= (n+1)\int_0^z (1-\mathrm{e}^{-\alpha(z-x)})^n \alpha e^{-(n+1)\alpha x} dx \\ &= (n+1)\int_{-\alpha z}^1 \left(1-\frac{\mathrm{e}^{-\alpha z}}{u}\right)^n u^n du \\ &= (n+1)\int_{\mathrm{c}-\alpha z}^1 \left(u-\mathrm{e}^{-\alpha z}\right)^n du \\ &= \left(1-\mathrm{e}^{-\alpha z}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

3. (a) Vu que $E(\mathcal{E}(\lambda)) = \frac{1}{\lambda}$, on a par linéarité $E(T_n) = \frac{1}{n\alpha}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et on en déduit classiquement (par comparaison série-intégrale) :

$$E(T_n) \underset{(\infty)}{\sim} \frac{\ln n}{n\alpha}$$

quantité qui tend vers 0 lorsque n tend vers + ∞.

(b) Comme $V(\mathcal{E}(\lambda)) = \frac{1}{\lambda^2}$, on a par indépendance des X_k :

$$V(T_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n V(X_k) = \frac{1}{\alpha^2 n^2}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

quantité qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

(c) La fonction de répartition F_n de T_n est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et, pour $x \geq 0$:

$$F_n(x) = P(S_n \leq nx) = \Phi_n(nx) = \left(1-\mathrm{e}^{-\alpha n x}\right)^n$$

Pour $x > 0$ fixé, un développement limité donne :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \exp\left(n\ln\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha n x}\right)\right) \\ &= \exp\left(-n\mathrm{e}^{-\alpha n x} + o\left(n\mathrm{e}^{-\alpha n x}\right)\right) \to \mathrm{e}^0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall x > 0,\ \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1$$

et par conséquent, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend en loi vers la variable constante égale à 0.

EXERCICE 546 — Varaible aléatoires continues : loi uniforme

Titre : Varaible aléatoires continues : loi uniforme
ID : 391 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 377 | ID : 391
Difficulté : ★☆☆☆☆

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, toutes de même loi uniforme sur le segment $[0,1]$ Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$, on réordonne par ordre croissant les réels $X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_{2n+1}(\omega)$ et on note $M_n(\omega)$ le terme médian, c'est-à-dire le $n+1$ ème de ces termes dans l'ordre croissant.

1. Pour tout réel x de $[0,1]$, exprimer $P(M_n \leqslant x)$ à l'aide d'une somme.
2. En considérant les variables aléatoires $X_k' = 1 - X_k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'espérance de la variable aléatoire M_n est égale à $\frac{1}{2}$
3. Prouver l'égalité : $E(M_n) = \int_0^1 P(M_n > x)\, dx$

4. Pour tous entiers naturels k et m tels que $0 \leqslant k \leqslant m$ calculer l'intégrale :

$$I_{k,m} = \int_0^1 x^k (1-x)^{m-k} dx$$

5. Retrouver ainsi, par un calcul, la valeur de l'espérance de M_n.

Solution

1. Soit x élément de $[0,1]$ fixé. On définit la variable aléatoire Z_x par :

$$\forall \omega \in \Omega \quad Z_x(\omega) = \text{card}\,\{i \in [1, 2n+1] \quad X_i(\omega) \leqslant x\}$$

La variable Z_x suit la loi binomiale de paramètres $(2n+1, x)$. On a donc :

$$\forall k \in [0, 2n+1], \mathbb{P}(Z_x = k) = \binom{2n+1}{k}^k (1-x)^{2n+1-k}$$

Ainsi : $\mathbb{P}(M_n \leqslant x) = \mathbb{P}(Z_x \geq n+1) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \mathbb{P}(Z_x = k)$
En résumé :

$$\mathbb{P}(M_n \leq x) = \begin{cases} \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k} \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \quad \text{si} \quad x < 0 \\ 1 \quad \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

On voit donc que la fonction de répartition de M_n est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable à dérivée continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. M_n est une variable à densité. Elle admet une espérance car $M_n(\Omega) \subset [0,1]$.

2. Si l'on range les valeurs $X_1(\omega), \ldots, X_{2n+1}(\omega)$ dans l'ordre croissant sous la forme : $Y_1(\omega) \leqslant \cdots \leqslant Y_n(\omega) \leqslant Y_{n+1}(\omega) \leqslant Y_{n+2}(\omega) \leqslant \cdots \leqslant Y_{2n+1}(\omega)$ on obtient : $M_n(\omega) = Y_{n+1}(\omega)$ On a : $1 - Y_{2n+1}(\omega) \leqslant \cdots \leqslant 1 - Y_{n+1}(\omega) \leqslant 1 - Y_n(\omega) \leqslant \cdots \leqslant 1 - Y_1(\omega)$ On définit alors $M'_n(\omega)$, terme médian de $X'_1(\omega), \ldots, X'_{2n+1}(\omega)$. Il vient : $\forall \omega \in \Omega, M'_n(\omega) = 1 - Y_{n+1}(\omega) = 1 - M_n(\omega)$ d'oi l'on déduit que $M_n + M'_n = 1$ et donc $E(M_n) + E(M'_n) = 1$ Par ailleurs, X_k et $1 - X_k$ ont la même loi, donc il en va de même de M_n et M'_n. Leurs espérances sont donc égales et toutes deux égales à $1/2$.

3. Soit f_n une densité de M_n. Elle est nulle à l'extérieur de l'intervalle $[0,1]$. Une primitive de f_n est la fonction de répartition F_n de M_n trouvée dans la première question. Mais on peut prendre pour primitive $F_n(x) - 1$, i.e. $-P(M_n > x)$. Il vient, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} E(M_n) &= \int_0^1 x f_n(x) dx \\ &= [-xP(M_n > x)]_0^1 + \int_0^1 P(M_n > x)\, dx \end{aligned}$$

et le résultat demandé se déduit du fait que $P(M_n > 1) = 0$.

4. Supposons tout d'abord $k < m$. En intégrant par parties :

$$\begin{aligned} I_{k,m} &= \int_0^1 x^k (1-x)^{m-k} dx \\ &= \frac{m-k}{k+1} \int_0^1 x^{k+1} (1-x)^{m-(k+1)} dx \\ &= \frac{m-k}{k+1} I_{k+1,m} \end{aligned}$$

D'où $I_{k,m} = \frac{m-k}{k+1} \times \frac{m-(k+1)}{k+2} \times \cdots \times \frac{1}{m} I_{k+(m-k),m}$, donc : $I_{k,m} = \frac{(m-k)!k!}{m!} I_{m,m}$, relation valable lorsque $k = m$ Comme, en outre, $I_{m,m} = \int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$ on a, finalement :$I_{k,m} = \frac{1}{m+1} \times \frac{(m-k)!k!}{m!} = \frac{1}{m+1} \binom{m}{k}^{-1}$

5. On a :

$$\begin{aligned} E(M_n) &= \int_0^1 [1 - P(M_n \leq x)]\, dx \\ &= 1 - \int_0^1 \left[\sum_{k=n+1}^{2n+1} (2n+1) x^k (1-x)^{2n+1-k} \right] dx \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E(M_n) &= 1 - \sum_{k=n+1}^{2n+1} (2n+1) k_{k,2n+1} \\ &= 1 - \sum_{k=n+1}^{2n+1} (2n+1)(2n+1)^{-1} \frac{1}{2n+2} \end{aligned}$$

d'où

$$E(M_n) = 1 - \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2}$$

EXERCICE 547 Loi conjointe, lois marginales : un exemple

Titre : Loi conjointe, lois marginales : un exemple
ID : 392 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 378 | ID : 392
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit X, Y deux v.a.r. à valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$. Leur loi conjointe est définie par :

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{4^n} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$

1. Déterminer la loi de X. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
2. Diagonaliser la matrice $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de coefficients $m_{ij} = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$.

Solution

1. Par symétrie, X et Y ont la même loi. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = i) &= \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}(X = i, Y = j) \\ &= \frac{1}{4^n} \binom{n}{i-1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{j-1}$.
On a donc toujours les égalités :

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$$

Cela établit l'indépendance de X et Y.

2. La matrice M est réelle et symétrique. Par le théorème spectral, elle est diagonalisable. Notons $C_1, \ldots, C_{n+1}$ ses vecteurs colonnes. Pour $2 \leq j \leq n+1$, on a $C_j = \binom{n}{j-1} C_1$. Ainsi $\mathrm{rg}(M) = 1$, c'est-à-dire $\dim(\mathrm{Ker}(M)) = n$. Autrement dit, 0 est valeur propre de multiplicité n. Une base de $\mathrm{Ker}(M)$ est formée des

$$u_j = \binom{n}{j-1} e_1 - e_j \text{ où } 2 \leq j \leq n+1$$

où $e_1, \dots, e_n$ est la base canonique. L'autre valeur propre est simple. Elle vaut $\lambda = \mathrm{tr}(M) = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$. Une base de la droite propre associée est C_1 (c'est logique car ce vecteur dirige $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Ker}(M)^\perp$)

EXERCICE 548 — Une démonstration probabiliste du théorème de Weierstarass

Titre : Une démonstration probabiliste du théorème de Weierstarass
Difficulté : ★☆☆☆☆
ID : 393 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 379 | ID : 393

$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé ; à tout entier naturel non nul n et tout $x \in [0,1]$ on associe la variable aléatoire $X_{n,x}$ qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$, c'est-à-dire que $X_{n,x}(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et pour tout $j \in [\![0,1]\!]$:

$$\mathbb{P}(X_{n,x} = j) = C_n^j x^j (1-x)^{n-j}$$

A toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0,1]$, on associe la variable aléatoire $Y_{n,x} = f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)$. Si on note $Y_{n,x}(\Omega) = \{y_k / k \in [\![0,p]\!]\}$, alors on a :

$$\forall k \in [\![0,p]\!], \mathbb{P}(Y_{n,x} = k) = \sum_{\substack{0 \le j \le n \\ f\left(\frac{i}{n}\right) = y_k}} \mathbb{P}(X_{n,x} = j)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0,n]\!]$, on désigne par $B_{n,k}$ la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in [0,1], B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{1-k}$$

et B_n est l'opérateur de Bernstein défini par :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}.$$

où $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel normé des applications continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ muni de la norme de convergence uniforme notée $\|.\|_\infty$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $x \in [0,1]$.

1. Montrer que l'espérance mathématique de $Y_{n,x}$ est $\mathbb{E}(Y_{n,x}) = B_n(f)(x)$.
2. Pour $\varepsilon > 0$, on désigne par $\tau > 0$ un réel strictement positif tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, pour tout $x, y \in [0,1]$ vérifiant $|x-y| < \eta$ (l'existence de η étant justifié par le théorème de Heine selon lequel f, continue sur $[0,1]$ est uniformément continue sur $[0,1]$.)
   On note :
   $$\begin{cases} J_{1,x} = \left\{ j \in [\![0,n]\!] / \left| f\left(\frac{j}{n}\right) - f(x) \right| < \varepsilon \right\} \\ J_{2,x} = \left\{ j \in [\![0,n]\!] / \left| f\left(\frac{j}{n}\right) - f(x) \right| \ge \varepsilon \right\} \end{cases}$$
   (a) Montrer que $|B_n(f)(x) - f(x)| \le \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{j \in J_{2,x}} \mathbb{P}(X_{n,x} = j)$.
   (b) Montrer que $|B_n(f)(x) - f(x)| \le \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|Y_{n,x} - f(x)| \ge \varepsilon)$.
   (c) Montrer que $|B_n(f)(x) - f(x)| \le \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|X_{n,x} - nx| \ge n\eta)$.
   (d) En utilisant l'inégalité de Bieaymé-Chebychev, montrer que :
   $$|B_n(f)(x) - f(x)| \le \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n.\eta^2}$$
3. Démontrer que toute fonction f de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$, continue sur $[0,1]$ est une limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur $[0,1]$
4. Démontrer que le résultat est vrai pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

Solution

1. On a $Y_{n,x} = f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)$. Par le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_{n,x}) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}(X_{n,x}=k)\\ &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(x)\\ &= B_{n,f}(x)\end{aligned}$$

2. (a) Il est bien d'observer que $\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 1$ et décrire pour tout $x \in [0,1]$ on a $f(x) = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x)f(x)$. Il découle de cette remarque que :

$$|B_{n,f}(x) - f(x)| = \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| B_{n,k}(x)$$

Comme $\{J_{1,x}, J_{2,x}\}$ est une partition de $[\![0,n]\!]$, on a donc :

$$|B_{n,f}(x) - f(x)| = \underbrace{\sum_{k\in J_{1,x}}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| B_{n,k}(x)}_{\alpha_1} + \underbrace{\sum_{k\in J_{2,x}}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| B_{n,k}(x)}_{\alpha_2}$$

- Pour tout $k \in J_{1,x}$, on a par définition : $|\frac{k}{n} - x| < \eta$, il en résulte que l'on a $\alpha_1 = \sum_{k\in J_{1,x}}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| B_{n,k}(x) \leq \varepsilon \sum_{k\in J_{1,x}} B_{n,k}(x) \leq \varepsilon$ car $\sum_{k\in J_{1,x}} B_{n,k}(x) \leq \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = 1$.
- On a $\alpha_2 = \sum_{k\in J_{2,x}}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| B_{n,k}(x) \leq 2\|f\|_\infty \sum_{k\in J_{2,x}} B_{n,k}(x)$. Par ailleurs on a $\sum_{k\in J_{2,x}} B_{n,k}(x) = \sum_{k\in J_{2,x}} \mathbb{P}(X_{n,k} = x)$.
- En combinant tous ces résultats on obtient la relation demandée, à savoir : $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{j\in J_{2,x}} \mathbb{P}(X_{n,x} = j)$.

(b) On a :

$$\begin{aligned}(|Y_{n,x} - f(x)| \geq \varepsilon) &= \{\omega \in \Omega / |Y_{n,x}(\omega) - f(x)| \geq \varepsilon\}\\ &= \left\{\omega \in \Omega / \left|f\left(\frac{X_{n,x}(\omega)}{n}\right) - f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\\ &= \{\omega \in \Omega / X_{n,x}(\omega) \in J_{2,x}\}\\ &= (X_{n,x} \in J_{2,x})\end{aligned}$$

Il en découle que :

$$\sum_{j\in J_{2,x}} \mathbb{P}(X_{n,x} = j) = \mathbb{P}(X_{n,x} \in J_{2,x}) = \mathbb{P}(|Y_{n,x} - f(x)| \geq \varepsilon)$$

ce qui donne l'inégalité demandée, à savoir :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|Y_{n,x} - f(x)| \geq \varepsilon).$$

(c) Pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$\begin{aligned}
\omega \in (|Y_{n,x} - f(x)| \geq \varepsilon) &\Rightarrow |Y_{n,x}(\omega) - f(x)| \geq \varepsilon \\
&\Rightarrow \left| f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right) - f(x) \right| \geq \varepsilon \\
&\Rightarrow \left| \frac{X_{n,x}(\omega)}{n} - x \right| \geq \eta \\
&\Rightarrow |X_{n,x}(\omega) - nx| \geq n\eta \\
&\Rightarrow \omega \in (|X_{n,x} - nx| \geq n\eta)
\end{aligned}$$

Il en découle que $(|Y_{n,x} - f(x)| \geq \varepsilon) \subset (|X_{n,x} - nx| \geq n\eta)$ et par suite que $\mathbb{P}(|Y_{n,x} - f(x)| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_{n,x} - nx| \geq n\eta)$. En combinant ce résultat et celui de la question précédente 2)b), il vient :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|X_{n,x} - nx| \geq n\eta).$$

(d) Puisque la variable aléatoire $X_{n,x}$ suit la loi binomiale de paramètres n et x, donc $X_{n,x} \hookrightarrow B(n,x)$, on a l'expression connue de l'éspérance mathématique de $X_{n,x}$, à savoir : $\mathbb{E}(X_{n,x}) = nx$ et la variance de $X_{n,x}$ est $\mathbb{V}(X_{n,x}) = nx(1-x)$. L'inégalité de Bienaymé-Chébychev donne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X_{n,x} - nx| \geq n\eta) &= \mathbb{P}(|X_{n,x} - \mathbb{E}(X_{n,x})| \geq n\eta) \\
&\leq \frac{\mathbb{V}(X_{n,x})}{n^2\eta^2} = \frac{nx(1-x)}{n^2\eta^2}
\end{aligned}$$

Il aisé de voir que $\max\limits_{0\leq x\leq 1}(x(1-x)) = \frac{1}{4}$. En combinant tous ces résultats et l'inégalité de 2)c), on trouve :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n.\eta^2}$$

3. On a démontré dans la question 2) que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [0,1], \quad |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n.\eta^2}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\|f\|_\infty}{2n.\eta^2} = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \frac{\|f\|_\infty}{2n.\eta^2} < \varepsilon$$

On a donc prouvé que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall x \in [0,1] |B_{n,f}(x) - f(x)| < 2\varepsilon$$

Si on remplace ε par $\frac{\varepsilon}{2}$, on obtient donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|B_{n,f} - f\|_\infty < \varepsilon$$

et comme $B_{n,f}$ est une fonction polynômiale on a donc prouvé que toute fonction continue f de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ est une limite uniforme de suite de fonctions polynômiales sur $[0,1]$. C'est le théorème d'approximation de Weierstrass sur le segment $[0,1]$.

4. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ tel que $a < b$ et g continue sur $[a,b]$. On lui associe la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in |0,1], f(t) = g((1-t)a + tb)$. On voit tout de suite que f est continue sur $[0,1]$ puisque c'est la composée d'une fonction polynômiale $\varphi : t \mapsto (1-t)a + tb = \varphi(t)$ et la fonction g elle même continue sur $[a,b]$. D'après

la question précédente il existe une suite (P_n) de fonctions polynômiales sur $|0,1]$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \|P_n - f\|_\infty = 0$ Or

$$(\star) \quad \|P_n - f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |P_n(t) - f(t)|$$

Remarquons que l'application φ est une bijection de $[0,1]$ vers le segment $[a,b]$ et que sa bijection réciproque est définie par $\forall x \in [a,b], \varphi^{-1}(x) = \frac{x-a}{b-a}$. On déduit de $(\star)$ ci-dessus que :

$$(\star\star) \quad \|P_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \left| P_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - g(x)\right|$$

Donc en notant $Q_n(x) = P_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$, pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$(\star\star\star) \quad \|P_n - f\|_\infty = \|Q_n - g\|_\infty.$$

On peut donc énoncer le théoréme d'approximation de Weierstarss : Pour toute application $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur le segment$[a,b]$ il existe une suite (Q_n) de fonctions polynômiales tel que (Q_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers g.

EXERCICE 549 L'inégalité : $(1-a)\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(X\mathbf{1}_X \geq a\mathbb{E}(X))$

Titre : L'inégalité : $(1-a)\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(X\mathbf{1}_X \geq a\mathbb{E}(X))$ **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 394 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 380 | ID : 394

1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles telles que X^2 et Y^2 admettent une espérance mathématique. Montrer que XY admet une espérance mathématique.
2. Soit $a \in [0,1]$ et X une variable positive ayant une espérance mathématique. Montrer l'inégalité :

$$(1-a)\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X\geq a\mathbb{E}(X)})$$

Solution

1. On a $|XY| \leq \frac{1}{2}(X^2+Y^2)$ et comme X^2 et Y^2 ont chacune une espérance mathématique, il en est de même de $\frac{1}{2}(X^2+Y^2)$ et par le critère de comparaison, $|XY|$ donc XY admet une espérance mathématique.
2. On a $X = X_1 + X_2$ avec $\begin{cases} X_1 = X.\mathbf{1}_{X\geq a\mathbb{E}(X)} \\ X_2 = X.\mathbf{1}_{X<a\mathbb{E}(X)} \end{cases}$. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont positives majorées par X. Elles ont donc une espérance chacune et $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2)$. De plus $0 \leq X_2 \leq a\mathbb{E}(X)$ donc $\mathbb{E}(X_2) \leq a\mathbb{E}(X)$. Ainsi $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(X_1) + a\mathbb{E}(X)$, autrement dit :

$$(1-a)\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X\geq\mathbb{E}(X)}).$$

EXERCICE 550 Une autre expression de l'espérance mathématique et conséquences

Titre : Une autre expression de l'espérance mathématique et conséquences **Difficulté :** ★☆☆☆☆
ID : 395 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 381 | ID : 395

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle convergeant vers un réel λ. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ Montrer que la suite (v_n) converge vers λ.
2. Soit Y une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ telle que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. On suppose que Y admet une espérance. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y \geq k)$
3. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et admettant une espérance, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X < k)$. On se propose de déterminer un développement asymptotique de S_n.
   (a) Démontrer que, quand n tends vers $+\infty$, on a $S_n \sim n$.
   (b) Démontrer que $\lim_{n\to+\infty}(n - S_n) = \mathbb{E}(X)$.
   (c) On suppose que X admet une variance.
      i. Montrer que : $S_n - n + \mathbb{E}(X) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{n}$
      ii. En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$ on a : $S_n = n - \mathbb{E}(X) + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Solution

1. Traduisons le fait que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lambda$ Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, on a $|u_n - \lambda| < \varepsilon/2$ On peut écrire, pour $n \geqslant N+1$: $|v_n - \lambda| = \frac{1}{n}|\sum_{k=1}^{n} u_k - \lambda| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} |u_k - \lambda| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} |u_k - \lambda|$ Or : $\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} |u_k - \lambda| \leq \frac{(n-N)}{n} \times \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$ et : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} |u_k - \lambda| = \lim_{n\to+\infty} \frac{C_N}{n} = 0$, il existe donc $N' \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N'$, alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} |u_k - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$ Pour $n \geqslant \max(N+1, N')$, on a donc $|v_n - \lambda| \leq \varepsilon$, ce qui prouve le résultat demandé.
2. La permutation des signes $\sum$ étant autorisée pour des termes positifs ou nuls, on écrit :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y \geqslant k) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=k}^{+\infty} P(Y = i) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{i} P(Y = i)$$
$$= \sum_{i=1}^{+\infty} iP(Y = i) = \mathbb{E}(Y)$$
3. (a) On sait que $\lim_{k\to+\infty} P(X < k) = 1$. Par la première question :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(Y < k) = \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 1$$
Donc $S_n \sim n$, lorsque n tend vers ∞
   (b) On a : $S_n - n = \sum_{k=1}^{n} (P(X < k) - 1) = -\sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k)$ Cette dernière quantité tend vers $-\mathbb{E}(X)$ par la question 2. Donc, comme
$$\mathbb{E}(X) \neq 0, S_n - n \sim -\mathbb{E}(X)$$
   (c) i. On a :
$$\begin{aligned} S_n - n + \mathbb{E}(X) &= -\sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X \geqslant k) \end{aligned}$$
Par l'inégalité de Markov, $P(X \geqslant k) \leq \frac{E(X^2)}{k^2}$. Donc :
$$S_n - n + \mathbb{E}(X) \leq E(X^2) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

En utilisant une comparaison série, intégrale, avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, il vient facilement $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$ et donc : $S_n - n + \mathbb{E}(X) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{n}$

ii. Comme $S_n - n + \mathbb{E}(X) \geq 0$, il découle de la question précédente que $n|V_n|$ est bornée, donc que $V_n = \left(\frac{1}{n}\right)$, donc, quand n tends vers $+\infty$, on a :

$$S_n = n - \mathbb{E}(X) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

EXERCICE 551 Une autre expression de l'expérance mathématique

Titre : Une autre expression de l'expérance mathématique
ID : 396 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 382 | ID : 396
Difficulté : ★☆☆☆☆

1. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle vérifiant $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)$$
   (b) On suppose que la variable aléatoire X admet une espérance notée $\mathbb{E}(X)$ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant n\mathbb{P}(X > n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$ En déduire que la série de terme général $\mathbb{P}(X > n)$ converge et que :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n) = \mathbb{E}(X)$$
   (c) On suppose que la série de terme général $\mathbb{P}(X > n)$ converge. Montrer que la série de terme général $k\mathbb{P}(X = k)$ converge et que X admet une espérance.
   (d) Enoncer le théorème qui vient d'être établi.
2. Un horticulteur plante n oignons de narcisse dans un jardin (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Chaque oignon est susceptible de fleurir au printemps et ne donne une fleur qu'avec la probabilité p ; de plus, s'il donne une fleur une année, il refleurit de manière certaine les années suivantes mais s'il n'en donne pas, cela n'influe en rien sur ce qui est susceptible de se passer les années suivantes.
   Pour $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on note X_j le nombre aléatoire d'années nécessaires au narcisse numéro j pour produire une première fleur. On suppose que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires et qu'elles sont mutuellement indépendantes. On note X le nombre aléatoire d'années au bout duquel le jardin sera, pour la première fois, fleuri des n narcisses.
   (a) Exprimer X en fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, et calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(X > k)$
   (b) En déduire que X admet une espérance et exprimer cette espérance comme somme d'une série.
3. Déterminer un équivalent simple de $\mathbb{E}(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On utilisera des intégrales bien choisies de la fonction $x \mapsto 1 - (1 - (1 - p)^x)^n$ ainsi que le changement de variable $x = \frac{\ln(1-t)}{\ln(1-p)}$

Solution

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X>k-1) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X>k)\\ &= \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\mathbb{P}(X>j) - \sum_{j=0}^{n} j\mathbb{P}(X>j)\\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{P}(X>j) - n\mathbb{P}(X>n)\end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned}0 &\leq n\mathbb{P}(X>n)\\ &= n\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)\\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k)\end{aligned}$$

Comme la variable aléatoire X admet une espérance, la série $\sum k$
$p(X=k)$ est convergente. Comme le reste d'ordre n d'une série convergente tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, il vient par encadrement : $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X>n) = 0$ Il résulte alors du a) que la série de terme général $\mathbb{P}(X>n)$ converge et : $\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X>n) = \mathbb{E}(X)$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) \leqslant \sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{P}(X>j) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}(X>j)$ (car la dernière série est à termes positifs et convergente). On en conclut que la série de terme général positif $k\mathbb{P}(X=k)$ converge et donc que X admet une espérance.

(d) On vient de montrer que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X>n)$ converge et dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X>n)$$

2. (a) II est clair que $X = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Soit $k \in \mathbb{N}$; par indépendance on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leqslant k) &= \prod_{j=1}^{n} P\left(X_j \leq k\right)\\ &= \prod_{j=1}^{n}\left[1-(1-p)^k\right]\\ &= \left[1-(1-p)^k\right]^n.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(X>k) = 1-\left[1-(1-p)^k\right]^n$$

(b) $\lim_{k\to\infty}(1-p)^k = 0$ et on sait qu'au voisinage de 0 (pour h) : $(1+h)^n - 1 \sim nh$ En conséquence : $\mathbb{P}(X>k)\sum_{(k\to\infty)} n(1-p)^k$ Il s'ensuit que la série de terme général positif $\mathbb{P}(X>n)$ converge, puisque celui-ci est équivalent au terme général d'une série géométrique convergente. On conclut que X admet une espérance, avec :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[1-\left(1-(1-p)^k\right)^n\right]$$

3. la fonction $f : x \mapsto 1-(1-(1-p)^x)^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \geqslant 0$:

$$f'(x) = n\left(1-(1-p)^x\right)^{n-1}(1-p)^x \ln(1-p) \leqslant 0$$

Donc f est décroissante et pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{m+1} f(x)dx \leqslant \sum_{k=0}^{m} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^m f(x)dx$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Le changement de variable $x = \frac{\ln(1-t)}{\ln(1-p)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1-(1-p)^m]$ vers $[0,m]$ et donne :

$$\begin{aligned}\int_0^m f(x)dx &= -\frac{1}{\ln(1-p)}\int_0^{1-(1-p)^m} \frac{1-t^n}{1-t}dt \\ &= -\frac{1}{\ln(1-p)}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{t^k}{k}\right]_0^{1-(1-p)^n}\end{aligned}$$

l'infini, $1-(1-p)^m$ tend vers 1 et donc l'intégrale Quand m tend vers l'infini, $1-(1-$ $\int_0^m f(x)dx$ tend vers $-\frac{1}{\ln(1-p)}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ En passant à la limite lorsque m tend $v.$ vers $+\infty$, on obtient donc :

$$-\frac{1}{\ln(1-p)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant 1 - \frac{1}{\ln(1-p)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

On conclut classiquement que l'on a :

$$\mathbb{E}(X) \underset{(n\to\infty)}{\sim} -\frac{\ln n}{\ln(1-p)}$$

EXERCICE 552 Probabilités avec ζ de Riemann, conséquences

Titre : Probabilités avec ζ de Riemann, conséquences
ID : 397 **Durée :** —
Difficulté : ★☆☆☆☆
Niveau : L2 | N° : 383 | ID : 397

On se fixe un réel $s > 1$ et on considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où $\Omega = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}$ est définie par :

$$\forall n \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)n^s}$$

ζ désignant la fonction de Riemann :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A_n l'événement : « p est multiple de n ».
1. Justifier que $\mathbb{P}$ est bien une probabilité et calculer $\mathbb{P}(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que si $\mathscr{P}$ est l'ensemble des nombres premiers, les événements A_p, $p \in \mathscr{P}$ sont indépendants.
3. En déduire que

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \prod_{p\in\mathscr{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) \quad \text{puis} \quad \zeta(s) = \prod_{p\in\mathscr{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Solution

1. Pour montrer que $\mathbb{P}$ est une probabilité, il faut vérifier que pour tout $n \in \Omega = \mathbb{N}^*$, on a les $\mathbb{P}(\{n\}) \geq 0$ et que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{P}(\{n\}) = 1$.

• Soit $n \in \Omega, \mathbb{P}(\{n\})$ est un réel positif ou nul, terme général d'une série convergente (par le critère de Riemann) et on a

$$\sum_{n\in\Omega} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)n^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = 1$$

Ainsi $\mathbb{P}$ définit bien une probabilité sur Ω. On utilise ensuite la formule du cours pour calculer les probabilités cherchées.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{p\in A_n} \mathbb{P}(\{p\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{kn\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)(kn)^s} = \frac{1}{n^s\zeta(s)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{n^s}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $p_1, \ldots, p_n \in \mathscr{P}$ deux à deux distincts. Alors $A_{p_1} \cap \ldots \cap A_{p_n}$ est l'ensemble des multiples communs à $p_1, \ldots, p_n$, donc de $p_1 \cdots p_n$ (puisque les p_i sont deux à deux premiers entre eux). Ainsi $A_{p_1} \cap \ldots \cap A_{p_n} = A_{p_1 \ldots p_n}$. D'après la question **1.**, on a :

$$\mathbb{P}(A_{p_1} \cap \cdots \cap A_{p_n}) = \mathbb{P}(A_{p_1 \ldots p_n}) = \frac{1}{(p_1 \ldots p_n)^s} = \frac{1}{p_1^s} \times \cdots \times \frac{1}{p_n^s} = \mathbb{P}(A_{p_1}) \ldots \mathbb{P}(A_{p_n})$$

Il en découle que les événements $A_p, p \in \mathscr{P}$ sont indépendants.
3. On reconnaît dans le produit infini le produit de tous les $(1 - \mathbb{P}(A_p)) = \mathbb{P}(\overline{A_p})$. On va donc utiliser l'indépendance des $\overline{A_p}$ (conséquence de l'indépendance des A_p). Pour passer à limite, on utilisera la continuité décroissante de $\mathbb{P}$. Notons $\mathscr{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $E_n = \overline{A_p} \cap \cdots \cap \overline{A_{p_n}}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad E_{n+1} \subset E_n$, donc la famille $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Les événements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_n}$ étant indépendants d'après la question précédente, il en est de même des événements $\overline{A_{p_1}}, \ldots, \overline{A_{p_n}}$, donc on a :

$$\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(\overline{A_{p_1}} \cap \cdots \cap \overline{A_{p_n}}) = \mathbb{P}(\overline{A_{p_1}}) \ldots \mathbb{P}(\overline{A_{p_n}}) = \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_{p_i})) = \prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{1}{p_i^s}).$$

Donc $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} E_n$.
Par continuité décroissante de $\mathbb{P}$ on $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(E)$, et comme E est l'événement : « n n'est multiple d'aucun nombre premier », on peut dire que $E = \{1\}$, et alors $\mathbb{P}(E) = \frac{1}{\zeta(s)}$. Ainsi

$$\zeta(s) = \frac{1}{\mathbb{P}(E)} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(E_n)} = \prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

EXERCICE 553 Probabilités et espaces préhilbertiens

Titre : Probabilités et espaces préhilbertiens
ID : 398 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 384 | ID : 398
Difficulté : ★☆☆☆☆

Dans cet exercice, Ω désigne un ensemble fini non vide, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω et $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.
On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de Ω dans $\mathbb{R}$. Si $X \in \mathcal{F}$, on note $E(X)$ l'espérance de la variable aléatoire X.
Si A est une partie de Ω, on note 1_A la fonction caractéristique de A, c'est-à-dire l'application définie pour tout $\omega \in \Omega$ par :

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Soit $A \subset \Omega$. Calculer $E\left(1_A\right)$.
2. Montrer que l'application φ définie sur $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ par :

$$\varphi : (X, Y) \mapsto E(XY)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{F}$ si et seulement si pour tout $\omega \in \Omega, P(\{\omega\}) > 0$. Dans la suite de l'exercice, on supposera que P vérifie cette propriété et $\mathcal{F}$ sera muni de ce produit scalaire.
3. Soit $X \in \mathcal{F}$ une variable aléatoire non constante. On note G le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par X et la variable aléatoire constante égale à 1 , soit $G = \text{Vect}\left(X, 1_\Omega\right)$. Soit $Y \in \mathcal{F}$.
a) Déterminer les réels a_0 et b_0 pour lesquels $Y - a_0X - b_0$ est orthogonal à tout élément de G.
b) En déduire l'expression de la projection orthogonale de Y sur G qu'on notera $p_G(Y)$.
c) Comparer $E\left(p_G(Y)\right)$ et $E(Y)$.
d) On suppose que $X = 1_A$, avec A partie de Ω non vide et distincte de Ω. Montrer que pour tout $B \subset \Omega$:

$$p_G\left(1_B\right) = P(B/A)1_A + P(B/\overline{A})1_{\overline{A}}$$

où $P(U/V)$ désigne la probabilité conditionnelle de l'événement U, sachant que l'événement V est réalisé.

Solution

1. $E\left(1_A\right) = 1.P(A) + 0.P(\overline{A}) = P(A)$.

2. $\star$ L'application φ est bilinéaire (par linéarité de l'espérance), symétrique (par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, donc dans $\mathcal{F}$) et également positive (car si $X \in \mathcal{F}, \varphi(X, X) = E\left(X^2\right) \geqslant 0$).
$\star$ Si φ est un produit scalaire, pour tout $\omega \in \Omega, X = 1_{\{\omega\}}$ est un élément non nul de $\mathcal{F}$, donc $\varphi(X, X) = E\left(1_{\{\omega\}}^2\right) = E\left(1_{\{\omega\}}\right) = P(\{\omega\}) > 0$.
$\star$ Réciproquement, supposons que $\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) > 0$. Soit $X \in \mathcal{F}$ non nulle. Alors il existe $\omega_0 \in \Omega$ tel que $X\left(\omega_0\right) \neq 0$. Dans ces conditions $\varphi(X, X) = E\left(X^2\right) \geqslant X^2\left(\{\omega_0\}\right) P\left(\{\omega_0\}\right)$, donc φ est bien un produit scalaire.

3. a)

$$\begin{aligned} Y - a_0X - b_0 \in G^\perp &\iff \begin{cases} \varphi\left(Y - a_0X - b_0, 1_\Omega\right) = 0 \\ \varphi\left(Y - a_0X - b_0, X\right) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a_0E(X) + b_0 = E(Y) \\ a_0E\left(X^2\right) + b_0E(X) = E(XY) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a_0 = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{V(X)} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{V(X)} \\ b_0 = E(Y) - E(X)\frac{\text{Cov}(X,Y)}{V(X)} \end{cases} \end{aligned}$$

Notons que $V(X) \neq 0$, puisque X n'est pas constante.

b) $p_G(Y)$ est l'unique élément Z de G tel que $Y - Z \in G^\perp$, donc :

$$p_G(Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)}X + E(Y) - E(X)\frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)}$$

c) $E\left(p_G(Y)\right) = a_0E(X) + b_0 = E(Y)$ (conséquence de $Y - p_G(Y) \perp 1_\Omega$)

d) Remarquons que $A \neq \Omega$ et $A \neq \emptyset$, donc $X = 1_A$ n'est pas constante.
On sait que : $p_G(1_B) = a_0 1_A + b_0 1_\Omega$, or on a $1_\Omega = 1_A + 1_{\overline{A}}$, il en découle que :

$$p_G(1_B) = a_0 1_A + b_0 1_A + 1_{\overline{A}}) = (a_0 + b_0)1_A + b_0 1_{\overline{A}}$$

Pour calculer a_0 et b_0 remarquons d'abord que :

$$\text{Cov}\left(1_A, 1_B\right) = E\left(1_A 1_B\right) - E\left(1_A\right)E\left(1_B\right) = E\left(1_{A\cap B}\right) - E\left(1_A\right)E\left(1_B\right),$$

donc

$$\text{Cov}\left(1_A, 1_B\right) = P(A \cap B) - P(A)P(B)$$

$V\left(1_A\right) = P(A)P(\overline{A})$ (car 1_A suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$). On a alors :

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 &= E\left(1_B\right) + \frac{\text{Cov}\left(1_A, 1_B\right)}{V\left(1_A\right)}\left(1 - E\left(1_A\right)\right) \\ &= P(B) + \frac{P(A \cap B) - P(A)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B/A) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} b_0 &= E\left(1_B\right) - E\left(1_A\right)\frac{\text{Cov}\left(1_A, 1_B\right)}{V\left(1_A\right)} = P(B) - \frac{P(A \cap B) - P(A)P(B)}{P(\overline{A})} \\ &= P(B/\overline{A}) \end{aligned}$$

Finalement :

$$p_G\left(1_B\right) = P(B/A)1_A + P(B/\overline{A})1_{\overline{A}}$$

EXERCICE 554 Python dans les probabilités

Titre : Python dans les probabilités
ID : 399 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 385 | ID : 399
Difficulté :

Soit n un entier naturel non nul. Tous les tableaux envisagés (type tab) sont des permutations de l'intervalle $[\![1, n]\!]$ d'entiers.

1. Ecire en Python une fonction qui associe à toute permutation σ de $[\![1, n]\!]$ le nombre de ses points fixes. On considère cette fonction comme une variable aléatoire T_n sur l'univers S_n des permutations de $[\![1, n]\!]$ muni de l'équiprobabilité.
2. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si $(a[i] = i)$ est réalisé et la valeur 0 sinon.
   (a) Quelle est la loi de X_i? Pour $i \neq j$, les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes? Calculer $\text{Cov}\left(X_i, X_j\right)$.
   (b) Exprimer T_n à l'aide des variables X_i et en déduire l'espérance et la variance de T_n.
3. (a) Calculer $P\left(T_n = n\right), P\left(T_n = n-1\right)$ et $P\left(T_n = n-2\right)$.
   (b) Exprimer $(T_n \neq 0)$ à l'aide des événements $(X_i = 1)$ et en déduire une expression de $P\left(T_n = 0\right)$ sous forme d'une somme. Donner un équivalent de $P\left(T_n = 0\right)$ lorsque n tend vers l'infini.
   (c) Montrer que pour $1 \leqslant k \leqslant n-2, P\left(T_n = k\right) = \frac{1}{k!}P\left(T_{n-k} = 0\right)$, et en déduire la loi de T_n.
   (d) En déduire $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(-1)^j}{(k-1)!j!}$.

Solution

1. La fonction T associe à une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ le nombre de ses points fixes.
2. (a) La variable aléatoire X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$$p = P(a[i] = i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

Les variables aléatoires X_i et X_j, pour $i \neq j$ ne sont pas indépendantes. En effet :

$$\begin{aligned} P\left(\left(X_i = 1\right) \cap \left(X_j = 1\right)\right) &= \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)} \\ &\neq P\left(X_i = 1\right)P\left(X_j = 1\right) = \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Ainsi la variable aléatoire X_iX_j suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n(n-1)}$, et

$$\mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) = E\left(X_iX_j\right) - E\left(X_i\right)E\left(X_j\right) = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

(b) On a immédiatement :

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad E\left(T_n\right) = 1$$

et :

$$\begin{aligned} V\left(T_n\right) &= \sum_{i=1}^{n} V\left(X_i\right) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) \\ &= n \times \frac{n-1}{n^2} + 2\binom{n}{2}\frac{1}{n^2(n-1)} = 1 \end{aligned}$$

3. (a) L'événement $(T_n = n)$ est réalisé si et seulement si la permutation a est l'identité. Donc $P\left(T_n = n\right) = \frac{1}{n!}$. L'événement $(T_n = n-1)$ est impossible car si l'on a $(n-1)$ points fixes, alors le point restant est aussi fixe ! Sa probabilité est donc nulle. L'événement $(T_n = n-2)$ est réalisé si et seulement on a $(n-2)$ points fixes, ce qui signifie que les deux autres éléments sont échangés. Donc il existe $\binom{n}{2}$ permutations de ce type (on dit que ce sont des transpositions)

$$P\left(T_n = n-2\right) = \frac{\binom{n}{2}}{n!}$$

(b) On a $(T_n \neq 0) = \bigcup_{i=1}^{n}\left(X_i = 1\right)$. Soit k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$ et $i_1, \ldots, i_k$ tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$. Alors :

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k}\left(X_{i_j} = 1\right)\right) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

Par la formule du crible :

$$P\left(T_n \neq 0\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}$$

Donc :

$$P\left(T_n = 0\right) = 1 - P\left(T_n \neq 0\right) = 1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{1}{\mathrm{e}}$$

(c) Soit $1 \leqslant k \leqslant n-2$. L'événement $(T_n = k)$ est réalisé si et seulement si k éléments de $[\![1, n]\!]$ sont fixes, et la restriction de la permutation aux $(n-k)$ éléments restant est une permutation sans point fixe. Il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles de ces k éléments. Il y a $(n-k)!P\left(T_{n-k} = 0\right)$ permutations possibles des $(n-k)$ éléments restants. Donc :

$$P\left(T_n = k\right) = \binom{n}{k} \times \frac{(n-k)!P\left(T_{n-k} = 0\right)}{n!} = \frac{1}{k!}P\left(T_{n-k} = 0\right)$$

Donc la loi de T_n est définie par : pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$

$$\forall k \in [\![0, n]\!], P\left(T_n = k\right) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(-1)^j}{j!}$$

(on vérifie que cette relation est également valable pour $k = 0, n-1, n$).

(d) On a :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(-1)^j}{(k-1)!j!} = \sum_{k=1}^{n}kP\left(T_n = k\right) = E\left(T_n\right) = 1$$

EXERCICE 555 Manipulations d'événements, indépendance

Titre : Manipulations d'événements, indépendance
ID : 400 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 386 | ID : 400
Difficulté :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $s = (s_1, \dots, s_p) \in \{0,1\}^p$. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $\alpha \in]0,1[$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n = \left\{\omega \in \Omega / X_{np+1}(\omega) = s_1, X_{np+2}(\omega) = s_2, \dots, X_{(n+1)p}(\omega) = s_p\right\}$$

Si E est un événement, on désignera par E^c son complémentaire dans l'univers Ω.
1. Justifier l'assertion : $\omega \in \bigcap_{k=0}^{\infty}\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i\right) \Longrightarrow s$ apparait une infinité de fois dans $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega), \dots)$
2. Montrer que la suite $(B_n)_{n\geqslant 0}$ est formée d'événements mutuellement indépendants.
3. Déterminer l'événement $\left(\bigcap_{k=0}^{\infty}\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i\right)\right)^c$.
4. Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $P\left(\bigcap_{i=k}^{\infty} B_i^c\right) = 0$.
5. En déduire que $P\left(\bigcap_{k=0}^{\infty}\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i\right)\right) = 1$ et interpréter ce résultat.

Solution

1. $\omega \in \bigcap_{k=0}^{\infty}\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i\right) \Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \omega \in \bigcup_{i=k}^{\infty} B_i \Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \exists i \geqslant k, \omega \in B_i$, et donc ω appartient à une infinité de B_i (sinon à partir d'un certain rang ω n'appartiendrait plus à aucun B_i.
2. B_n dépend des variables aléatoires $X_{np+1}, X_{np+2}, \dots, X_{(n+1)p}$. Donc des événements $B_{n_1}, B_{n_2}, \dots$ (avec les indices n_i deux à deux distincts) utilisent chacun des variables autres que les variables utilisées par les autres, on sait alors que l'indépendance des variables aléatoires $X_i, i \in \mathbb{N}^*$ donne l'indépendance des événements $B_n, n \in \mathbb{N}^*$.
3 . On a :

$$\omega \in \left(\bigcap_{k=0}^{\infty}\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i\right)\right)^c \Longleftrightarrow \omega \notin \bigcap_{k=0}^{\infty}\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i\right) \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \omega \notin \bigcup_{i=k}^{\infty} B_i$$

$$\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \forall i \geqslant k, \omega \notin B_i \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \omega \in \bigcap_{i=k}^{\infty} B_i^c$$

$$\Longleftrightarrow \omega \in \bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\bigcap_{i=k}^{\infty} B_i^c\right)$$

(on peut aussi appliquer directement les lois de Morgan).
4 . $\star$ Par indépendance des variables $X_1, \dots, X_p$, on a :

$$P(B_0) = P\left(X_1 = s_1, X_2 = s_2, \dots, X_p = s_p\right) = \alpha^r(1-\alpha)^{p-r},$$

où r est le nombre de 1 de la séquence s. Le résultat est évidemment le même pour n'importe quel événement B_i. $\star$ Donc $P\left(B_i^c\right) = 1 - \alpha^r(1-\alpha)^{p-r}$ et par indépendance :

$$P\left(\bigcap_{i=k}^{k+j} B_i^c\right) = \left[1 - \alpha^r(1-\alpha)^{p-r}\right]^{j+1}$$

Comme $0 \leqslant 1 - \alpha^r(1-\alpha)^{p-r} < 1$, on a $\lim_{j\to+\infty} P\left(\bigcap_{i=k}^{k+j} B_i^c\right) = 0$. Par le théorème de limite monotone, on a donc :

$$P\left(\bigcap_{i=k}^{+\infty} B_i^c\right) = 0$$

5. La probabilité d'une réunion étant majorée par la somme des probabilités, on a :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}\bigcap_{i=k}^{\infty} B_i^c\right) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\bigcap_{i=k}^{\infty} B_i^c\right) = 0$$

Donc :

$$P\left(\bigcap_{k=0}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i\right) = 1$$

Ainsi, dans la succession des expériences de Bernoulli de ce problème, la liste s de résultats consécutifs, à partir d'un rang de la forme $kp+1$, apparaît presque sûrement une infinité de fois.

EXERCICE 556 — Beaucoup d'analyse et de probabilités

Titre : Beaucoup d'analyse et de probabilités
ID : 401 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 387 | ID : 401
Difficulté : ★☆☆☆☆

1. Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit h une fonction réelle positive et croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel a :

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(h(X))}{h(a)}$$

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ (on a donc $\mathbb{P}(X=1) = p$.) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

2. Déterminer la limite en probabilité de la suite $\left(\overline{X}_n\right)$.
3. Soit a tel que $p < a < 1$.
   (a) Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\overline{X}_n \geqslant a\right) \leqslant \left(\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda X_1}\right)\right)^n \mathrm{e}^{-an\lambda}$$

   (b) En déduire que $\mathbb{P}\left(\overline{X}_n \geqslant a\right) \leqslant \mathrm{e}^{-nh_p(a)}$, où pour tout $x \in]0,1[$, on a posé :

$$h_p(x) = x\ln\left(\frac{x}{p}\right) + (1-x)\ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right).$$

4. Soit a tel que $0 < a < p$. Déduire de ce qui précéde une majoration de $\mathbb{P}(\overline{X_n}) \leq a)$.

Solution

1. Par le théorème de transfert, et par croissance de la fonction h :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(h(X)) &= \sum_{x_k} h(x_k)\,\mathbb{P}(X=x_k) \geqslant \sum_{x_k \geqslant a} h(x_k)\,\mathbb{P}(X=x_k)\\ &\geqslant h(a)\sum_{x_k \geqslant a}\mathbb{P}(X=x_k) = h(a)\mathbb{P}(X\geqslant a)\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Nous sommes dans le cas d'utilisation de la loi faible des grands nombres. Ainsi, la suite (X_n) converge en probabilité vers $p = \mathbb{E}(X)$.

3. (a) Soit $h(x) = e^{\lambda x}$. C'est une fonction positive croissante, si $\lambda > 0$. Ainsi par indépendance :

$$\mathbb{P}\left(\overline{X_n} \geqslant a\right) = \mathbb{P}\left(n\overline{X_n} \geqslant na\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(h\left(\overline{nX_n}\right)\right)}{h(na)} = e^{-n\lambda a}\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda X_i}\right)$$
$$\leqslant e^{-n\lambda a}\left(\mathbb{E}\left(e^{\lambda X_1}\right)\right)^n$$

(b) Lorsque X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, $\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right) = (1-p) + pe^{\lambda}$. Donc, pour tout $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}\left(\overline{X_n} \geqslant a\right) \leqslant e^{-n\lambda a}\left(1 - p + pe^{\lambda}\right)^n$$

On étudie done l'application $\varphi : \lambda \mapsto e^{-n\lambda a}\left(1 - p + pe^{\lambda}\right)^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on majore $\mathbb{P}\left(\overline{X_n} \geqslant a\right)$ par le minimum de φ sur $\mathbb{R}_+^*$. Des calculs simples montrent que la dérivée $\varphi'(\lambda)$ s'annule pour λ tel que

$$(1-a)pe^{\lambda(1-a)} = a(1-p)e^{-\lambda a}$$

soit pour :

$$\lambda = \lambda_0 = \ln\left(\frac{a(1-p)}{(1-a)p}\right)$$

et est décroissante sur $]0, \lambda_0[$, croissante sur $[\lambda_0, +\infty[$, ce qui donne le minimum de $\varphi(\lambda_0)$ et :

$$\mathbb{P}\left(\overline{X_n} \geqslant a\right) \leqslant \exp\left[-na\ln\left(\frac{a(1-p)}{(1-a)p}\right)\right]\left(\frac{1-p}{1-a}\right)^n = e^{-nh_p(a)}$$

4. Lorsque $0 < a < p$, alors $1 - p < 1 - a < 1$ et $Y_n = 1 - X_n$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - p$. La question précédente donne :

$$\mathbb{P}\left(\overline{Y_n} \geqslant 1 - a\right) \leqslant e^{-nh_{1-p}(1-a)}$$

c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(\overline{X_n}) \leq a) \leq e^{-nh_{1-p}(1-a)} = e^{-nh_p(a)}.$$

EXERCICE 557 Loi de Poisson et famille de variables aléatoires

Titre : Loi de Poisson et famille de variables aléatoires
ID : 402 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 388 | ID : 402
Difficulté :

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, n$ variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$, avec $\lambda > 0$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.
2. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = 1 - (1-x)e^x$. Montrer que pour tout x de $[0,1]$, on a : $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
3. Pour tout entier $n > \lambda$ et pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note U_i une variable aléatoire indépendante de Y_i et suivant la loi de Bernoulli de paramètre $f\left(\frac{\lambda}{n}\right)$. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, soit X_i la variable aléatoire définie par :

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{si } Y_i = U_i = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la loi de X_i.
4. Montrer que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a : $\mathbb{P}\left(X_i \neq Y_i\right) \leqslant \frac{\lambda^2}{n^2}$.
5. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i = Y_i]\right)$.

Solution

1. Par le théorème de stabilité, S_n suit la loi de Poisson de paramètre λ.
2. On peut bien sûr étudier les variations de la fonction f, mais on peut aussi savoir que pour tout u réel, on a : $e^u \geqslant 1+u$, d'où : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} \geqslant 1-x$ et $1 \geqslant (1-x)e^x$ ou encore $1-(1-x)e^x \geqslant 0$ et enfin si $x \leqslant 1$, clairement $1-(1-x)e^x \leqslant 1$. Bref :

$$(0 \leqslant)x \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$$

3. La variable aléatoire X_i est une variable de Bernoulli, et par indépendance :

$$\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(Y_i = 0)\,\mathbb{P}(U_i = 0) = e^{-\frac{\lambda}{n}} \times \left(1 - f\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right) = 1 - \frac{\lambda}{n}$$

Donc

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{\lambda}{n} \text{ et } X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$$

4. Comme X_i ne peut prendre que les valeurs 0 et 1 , on a :

$$\mathbb{P}(X_i = Y_i) = \mathbb{P}((X_i = 1) \cap (Y_i = 1)) + \mathbb{P}((X_i = 0) \cap (Y_i = 0))$$

et comme $(X_i = 0) \subset (Y_i = 0)$ et $(Y_i = 1) \subset (X_i = 1)$:

$$\mathbb{P}(X_i = Y - i) = \mathbb{P}(Y_i = 1) + \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}e^{-\frac{\lambda}{n}}$$

Donc : $\mathbb{P}(X_i \neq Y_i) = \frac{\lambda}{n}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)$ et ainsi, par inégalité usuelle :

$$\mathbb{P}(X_i \neq Y_i) \leqslant \frac{\lambda^2}{n^2}$$

5. Par les lois de Morgan : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = Y_i]\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n [X_i \neq Y_i]\right)$ Or la probabilité d'une réunion est toujours majorée par la somme des probabilités des événements en question (démonstration par exemple par récurrence, donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n [X_i \neq Y_i]\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{\lambda^2}{n^2} = \frac{\lambda^2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = Y_i]\right) = 1$$

EXERCICE 558 Bienaimé-Chebychev en oeuvre

Titre : Bienaimé-Chebychev en oeuvre
ID : 403 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 389 | ID : 403
Difficulté : ★☆☆☆☆

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la variable $Y_n = \frac{1+X_n}{2}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p_n (avec $p_n \in]0,1[$). Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la variable aléatoire S_n par : $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.
1. Quelle est la loi de X_n ?
2. Peut-on appliquer la loi faible des grands nombres à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$?
3. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n.
4. Montrer que $0 \leqslant p_k(1-p_k) \leqslant \frac{1}{4}$ pour tout $k \geqslant 1$. En déduire que la variance $V(S_n)$ est majorée par n.

5. Soit $\varepsilon > 0$, montrer que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}(S_n)}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{4}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k) \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2}$. Que peut-on en conclure ?
6. Dans cette question, on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = 1 - \frac{1}{2^{n+2}}$. Soit L un entier fixé. On introduit l'événement A_L qui est égal à l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels la suite $(S_n(\omega))$ contient une infinité de termes qui se trouvent dans le segment $[-L, L]$.
a) Etudier la suite $\left(\frac{\mathbb{E}(S_n)}{n}\right)_{n\geq 1}$. En déduire l'existence d'un entier $N > 2L$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a : $\left|\frac{\mathbb{E}(S_n)}{n} - 1\right| \leqslant \frac{1}{4}$.
b) Montrer que pour $n \geqslant N$ on a $\left[\left|\frac{S_n}{n} - 1\right| \geqslant \frac{1}{2}\right] \subseteq \left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{E(S_n)}{n}\right| \geqslant \frac{1}{4}\right]$. En déduire que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 1\right| \geqslant \frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{16}{n^2}$.
c) Soit $n \geqslant N$, prouver que

$$[|S_n| \leqslant L] \subseteq \left[\left|\frac{S_n}{n} - 1\right| \geqslant \frac{1}{2}\right] \text{ et que } A_L \subseteq \bigcup_{k\geq n} [|S_k| \leqslant L]$$

d) Etablir que pour tout $n \geqslant N$, on a $\mathbb{P}(A_L) \leqslant 16\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. (On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\mathbb{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_m) \leqslant \sum_{k=1}^{m} P(E_k)$ pour tout m-uplet d'événements $(E_1, \ldots, E_m)$.) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(A_L)$.

Solution

1. On a $X_n(\Omega) = \{-1, 1\}$ avec $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p_n$ et $\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n$.
2. On ne peut pas appliquer la loi faible des grands nombres car les p_n ne sont pas supposés égaux.
3. On a $\mathbb{E}(S_n) = 2\sum_{k=1}^{n} p_k - n$, et par indépendance :

$$\mathbb{V}(S_n) = 4\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(Y_n) = 4\sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k)$$

4. Par exemple, le maximum sur $[0,1]$ de la fonction $t \mapsto t(1-t)$ est $\frac{1}{4}$ et on utilise 3.
5. Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et la question précédente, il vient :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}(S_n)}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(S_n/n)}{\varepsilon^2} = \frac{4}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k) \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

La suite de variables $\left(\frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}(S_n)}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge donc en probabilité vers 0 .
6. a) On a : $\frac{\mathbb{E}(S_n)}{n} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2^{k+2}}\right) - 1 = 1 - \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. L'existence de l'entier N s'obtient en «jouant» $1/4$ sur la limite et on peut toujours le choisir tel que $N > 2L$.
b) Si $\left[\left|\frac{S_n}{n} - 1\right| \geqslant \frac{1}{2}\right]$ et si $n \geqslant N$, avec l'inégalité triangulaire, il vient :

$$\frac{1}{2} \leqslant \left|\frac{S_n}{n} - 1\right| \leqslant \left|\frac{S_n}{n} - \frac{E(S_n)}{n}\right| + \frac{1}{4}$$

L'inclusion demandée en découle directement. Par suite, en utilisant aussi la première inégalité de 5 . il vient :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 1\right| \geqslant \frac{1}{2}\right) \leqslant P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{E(S_n)}{n}\right| \geqslant \frac{1}{4}\right) \leqslant \frac{64}{n^2}\sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k) \leqslant \frac{64}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k+2}}$$
$$\leqslant \frac{16}{n^2}.$$

c) Si $n \geqslant N > \frac{L}{2}$, l'inclusion $[|S_n| \leqslant L] \subseteq \left[\left|\frac{S_n}{n} - 1\right| \geqslant \frac{1}{2}\right]$ s'obtient facilement en utilisant l'inégalité triangulaire ou par calculs directs sur les inégalités. Maintenant, si $\omega \in A_L$, il existe une infinité de $S_k(\omega)$ qui se trouvent dans le segment $[-L, L]$, donc au moins un pour lequel $k \geqslant n$, il est alors clair que ω appartient au membre de droite de l'inclusion souhaitée.
d) En utilisant l'inégalité mentionnée, les limites monotones et les deux questions précédentes,

il vient : $P(A_L) \leqslant P\left(\bigcup_{k\geq n}(|S_k| \leqslant L)\right) = \lim_{m\to+\infty} P\left(\bigcup_{n\leq k\leq m}(|S_k| \leqslant L)\right) \leqslant \lim_{m\to+\infty} 16\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k^2}$
Donc :

$$P(A_L) \leqslant 16\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Comme le reste d'une série convergente tend vers 0 , on a nécessairement $P(A_L) = 0$. Ainsi presque sûrement, on sort de l'intervalle $[-L, L]$ à un moment donné pour ne jamais y revenir.

EXERCICE 559 — Variable aléatoire discrète : un bon exercice

Titre : Variable aléatoire discrète : un bon exercice
ID : 549 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 530 | ID : 549
Difficulté : ★★★☆☆

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire définie sur cet espace, discrète à valeurs strictement positives qui admet une espérance et une variance. L'image de X est notée $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$.

1. Soit $A \in \mathcal{A}$. On note $\mathbf{1}_A$ la variable aléatoire qui vaut 1 si $\omega \in A$ et 0 sinon.
   (a) Pour tout $x_n \in X(\Omega)$, comparer $P(\mathbf{1}_A \times X = x_n)$ et $P(X = x_n)$.
   (b) Montrer que la variable aléatoire $\mathbf{1}_A \times X$ admet une espérance.
   On pose désormais : $P_X(A) = \frac{E(\mathbf{1}_A \times X)}{E(X)}$.
2. Dans cette question seulement, on suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit l'évènement $A = (X \in 2\mathbb{N})$. Calculer $P(A)$ et $P_X(A)$.
3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements incompatibles. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $(E(\mathbf{1}_{B_n} \times X))^2 \leqslant E(X^2)\sum_{i=n}^{\infty} P(A_i)$.
   (b) En déduire que P_X est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Solution

1. (a) Comme X est à valeurs strictement positives, tous les x_i sont non nuls donc : $P(\mathbf{1}_A X = x_i) = P(A \cap (X = x_i))$. Or $A \cap (X = x_i) \subset (X = x_i)$. Par croissance de P on a donc : $P(\mathbf{1}_A X = x_i) \leqslant P(X = x_i)$.
   (b) Comme $(\mathbf{1}_A X)(\Omega) \subset \{0\} \cup X(\Omega)$, quitte à enlever un terme nul, il suffit de montrer la convergence absolue de la série $\sum_n x_n P(\mathbf{1}_A X = x_n)$. Cette convergence découle du théorème de comparaison pour les séries car l'inégalité de la question précédente et comme les x_n sont positifs, on a :

$$0 \leqslant x_n P(\mathbf{1}_A X = x_n) \leqslant x_n P(X = x_n),$$

   et la série $\sum_n x_n P(X = x_n)$ converge puisque X a une espérance.
2. On a : $P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$.
   De plus $E(X) = \lambda$ et comme $P(\mathbf{1}_A X = n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ P(X = n) & n \text{ pair} \end{cases}$, par définition de l'espérance on a :

$$P_X(A) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}(2k)\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

   D'après la formule de sommation de la série exponentielle, on remarque que :

$$P(A) + P_X(A) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = 1 \text{ et } P(A) - P_X(A) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\mathrm{e}^{-2\lambda}$$

Donc $P(A) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2\lambda}\right)$ et $P_X(A) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\lambda}\right)$.

3. (a) Comme X admet un moment d'ordre2, et qu'il en est de même pour la fonction caractéristique $\mathbf{1}_{B_n}$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\begin{aligned} E^2\left(X\mathbf{1}_{B_n}\right) &\leqslant E\left(X^2\right) E\left(\mathbf{1}_{B_n}^2\right) = E\left(X^2\right) E\left(\mathbf{1}_{B_n}\right) = E\left(X^2\right) P\left(B_n\right) \\ &\leqslant E\left(X^2\right) \sum_{i=n}^{\infty} P\left(A_i\right). \end{aligned}$$

(b) P_X est positive car les variables aléatoires dont on prend les espérances sont positives.
- Comme $\mathbf{1}_\Omega X = X$, on a bien $P_X(\Omega) = 1$.
- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements incompatibles. D'après les questions précédentes, on a :

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=0}^{n} P_X\left(A_i\right) - P_X\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right)\right| &= \left|\frac{1}{E(X)} E\left[X\left(\sum_{i=0}^{n} \mathbf{1}_{A_i} - \mathbf{1}_{B_0}\right)\right]\right| \text{ (définition de} \\ &= \frac{1}{E(X)} E\left(X\mathbf{1}_{B_{n+1}}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{E(X)} \sqrt{E\left(X^2\right) \sum_{i=n+1}^{\infty} P\left(A_i\right)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

la suite des restes d'une série convergente converge vers 0. On en déduit que

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_X\left(A_i\right) = P_X\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right)$$

il en découle que P_X est bien une probabilité.

EXERCICE 560 Tribu engendré par les singletons

Titre : Tribu engendré par les singletons
ID : 680 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 661 | ID : 680
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit Ω un ensemble non vide. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{P}_n = \{A \subset \Omega / \operatorname{card}(A) = n\}$ et on note $\mathscr{M}_n = \mathcal{T}(\mathscr{P}_k)$, la tribu engendré par $\mathscr{P}_n$.

1. Montrer que Ω est infini alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathscr{M}_n = \mathscr{M}_1$.
2. On suppose que Ω est fini et que $\operatorname{card}(\Omega) = N$ avec $N \in \mathbb{N}$ et $N \geq 2$. Montrer que $\forall n \in [\![1, N-1]\!], \mathscr{M}_n = \mathscr{M}_1$.
3. On note $\mathscr{M}_0 = \{A \subset \Omega / A$ ou A^c est au plus dénombrable $\}$. Montrer que $\mathscr{M}_1 = \mathscr{M}_0$.
4. Montrer que Ω est au plus dénombrable si et seulement si $\mathscr{M}_1 = \mathscr{P}(\Omega)$.
5. Donner un exemple d'existence d'une tribu $\mathcal{T}$ de Ω tel que $\mathscr{M}_1 \subsetneq \mathcal{T} \subsetneq \mathscr{P}(\Omega)$.
6. On suppose que Ω est non dénombrable et on considère $\mathbb{P} : \mathscr{M}_1 \to \mathbb{R}_+; A \mapsto \mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad A \text{ est au plus d} \\ 1 & \text{si} \quad A^c \text{ est au plus} \end{cases}$

Démontrer que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{T}_0)$.

Solution

1. Supposons que Ω est infini. On a $\mathscr{M}_n \subset \mathscr{M}_1$ car pour tout $A \in \mathscr{P}_n$, donc A est fini de cardinale n, or on a $A = \bigcup_{a\in A} \{a\}$, donc $A \in \mathscr{M}_1$, donc $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{M}_1$, par suite $\mathcal{T}(\mathscr{P}_n) \subset \mathscr{M}_1$, c'est-à-dire $\mathscr{M}_n \subset \mathscr{M}_1$. Réciproquement si $\omega \in \Omega$ comme Ω est infini, il existe des éléments

$\omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega \backslash \{\omega\}$. En posant $A = \{\omega, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}\}$ et $B = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, on a $A, B \in \mathscr{M}_n$ car $A, B \in \mathscr{P}_n$, donc $A \backslash B \in \mathscr{M}_n$, or $A \backslash B = \{\omega\}$, donc $\{\omega\} \in \mathscr{M}_n$, donc $\mathscr{P}_1 \subset \mathscr{M}_n$, donc $\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}_n$. En conclusion on a $\mathscr{M}_1 = \mathscr{M}_n$.

2. Soit $n \in [\![1, N-1]\!]$. Comme dans la question précédente on a facilement $\mathscr{M}_n \subset \mathscr{M}_1$. Réciproquement si $n = 1$ alors $\mathscr{M}_1 = \mathscr{M}_n$, si $n \geq 2$, soit $\omega \in \Omega$, comme $n \leq N-1$, on a $n+1 \leq N$, donc il existe $\omega_1 \ldots, \omega_n \in \Omega \backslash \{\omega\}$. Pour $A = \{\omega, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}\}$ et $B = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, on a $A, B \in \mathscr{M}_n$ car $A, B \in \mathscr{P}_n$, donc $A \backslash B \in \mathscr{M}_n$, or $A \backslash B = \{\omega\}$, donc $\{\omega\} \in \mathscr{M}_n$, par suite $\mathscr{P}_1 \subset \mathscr{M}_n$, donc $\mathscr{M}_1 = \mathscr{M}_n$.
3. On a $\mathscr{P}_1 \subset \mathscr{T}_0$ donc $\mathcal{T}(\mathscr{P}_1) \subset \mathscr{T}_0$, donc $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_0$. Inversement si $A \in \mathscr{T}_0$ alors soit A est au plus dénombrable donc $A \in \mathscr{T}_1$ car $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$, soit A n'est pas dénombrable donc A^c est au plus dénombrable et $A^c \in \mathscr{T}_1$, donc $A \in \mathscr{T}_1$. Il en découle que $\mathscr{T}_0 = \mathscr{T}_1$.
4. Si Ω est au plus dénombrable alors pour tout $A \subset \Omega$, on a $A \in \mathscr{M}_1$ car $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$, donc $\mathscr{P}(\Omega) \subset \mathscr{M}_1$ or l'inclusion inverse est vraie, donc $\mathscr{M}_1 = \mathscr{P}(\Omega)$. Réciproquement si $\mathscr{M}_1 = \mathscr{P}(\Omega)$ alors $\mathscr{P}(\Omega) = \mathscr{M}_0$, donc pour tout $A \subset \Omega$, on a A ou A^c est au plus dénombrable, or tout ensemble non dénombrable est une réunion disjointe de deux ensembles non dénombrables donc Ω est au plus dénombrable.
5. On prend $\Omega = \mathbb{R}$ et la tribu borelienne $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, on a $\mathscr{M}_1 \subsetneq \mathscr{B}_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathscr{P}(\mathbb{R})$.
6. On a $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ car $\Omega^c = \emptyset$ donc au plus dénombrable. Soit $(A_n) \in \mathscr{T}_0$ deux à deux incompatibles, deux cas sont possibles :
   • Premier cas : tous les A_n sont au plus dénombrables alors $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}$ est au plus dénombrable donc $\mathbb{P}(A) = 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
   • Deuxième cas : il existe au mons $j \in \mathbb{N}$ tel que A_j est non dénombrable donc c'est le seul parmi les A_n car si $n \in \mathbb{N}$ et $n \neq j$ alors $A_n \subset A_j^c$ car les A_k sont deux à deux disjoints, donc A_j^c étant au plus dénombrable les A_n est au plus dénombrable, donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_j) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
   • Dans tous les cas on a $\mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$, donc finalement $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{T}_0)$.

EXERCICE 561 Atomes d'une tribu

Titre : Atomes d'une tribu
ID : 681 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 662 | ID : 681
Difficulté : ★★★☆☆

Soit Ω un ensemble fini et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$I_\omega = \{X \in \mathcal{T} / \omega \in X\} \quad \text{et} \quad \mathrm{A}(!) = \bigcap_{X \in I_!} X.$$

1. Démontrer que $\forall \omega \in \Omega, \mathrm{A}(!) \neq \emptyset$ et $A(\omega) \in \mathcal{T}$.
2. Démontrer que $\forall x, y \in \Omega, \mathrm{A}(x) = \mathrm{A}(y)$ ou $\mathrm{A}(x) \cap \mathrm{A}(y) = \emptyset$.
3. Prouver qu'il existe $s \in \mathbb{N}^*$ et une famille $(\omega_k)_{1 \leq k \leq s} \in \Omega^s$ tel que l'ensemble

$$\mathfrak{P} = \{\mathrm{A}(\omega_k) / k \in [\![1, s]\!]\}$$

est une partition de Ω.
4. Démontrer que $\mathcal{T} = \mathscr{T}(\mathfrak{P})$, c'est-à-dire la tribu engendrée par $\mathfrak{P}$.
5. En déduire que $\sharp \mathcal{T} = 2^s$.

6. Soit
$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$
et
$$\mathscr{A} = \{\{1,2\},\{1,3\}\}.$$
Donner en extension la tribu engendrée par $\mathscr{A}$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$, et
$$\Omega = [\![1,2n]\!] = \{1,2,\ldots,2n\}.$$
On considère la partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ définie par
$$\mathscr{A} = \{\{1,k\}/k \in [\![2,n]\!]\}$$
et soit $\mathfrak{T}$ la tribu engendrée par $\mathscr{A}$. Déterminer card$(\mathfrak{T})$.

Solution

1. Soit $\omega \in \Omega$. On a $\omega \in A(\omega)$, donc $A(\Omega) \neq \emptyset$. On a $A(\omega)$ est une intersection finie d'événements, donc $A(\omega) \in \mathcal{T}$.

2. Soit $x,y \in \Omega$. Si $x \notin A(y)$ alors $x \in X = (A(y))^c$, or $X \in \mathcal{T}$, donc $X \in I_x$, donc $A(x) \subset X = (A(y))^c$, donc $A(x) \cap A(y) = \emptyset$. On a démontré l'implication :
$$\forall x,y \in \Omega, \quad x \notin A(y) \Rightarrow A(x) \cap A(y) = \emptyset$$
Il en découle par contraposée et symétrie des roles que :
$$\forall x,y \in \Omega, \quad A(x) \cap A(y) \neq \emptyset \Rightarrow \begin{cases} x \in A(y) \\ y \in A(x) \end{cases}$$
or $x \in A(y) \Rightarrow A(x) \subset A(y)$ (car si $x \in A(y)$ alors $A(y) \in I_x$, donc $A(x) \subset A(y)$). Il en découle que $\begin{cases} x \in A(y) \\ y \in A(x) \end{cases} \Rightarrow A(x) = A(y)$, donc finalement :
$$\forall x,y \in \Omega, \quad A(x) \cap A(y) \neq \emptyset \Rightarrow A(x) = A(y)$$
Par définition de l'implication logique, on a
$$\forall x,y \in \Omega, \quad A(x) = A(y) \quad \text{ou} \quad A(x) \cap A(y) = \emptyset.$$

3. Posons $\mathfrak{P} = \{A(\omega)/\omega \in \Omega\}$. Comme Ω est fini non vide on a $\mathfrak{P}$ est fini. Posons $\#(\mathfrak{P}) = s$. Alors il existe des éléments $\omega_1,\ldots,\omega_s \in \Omega$ tel que $\mathfrak{P} = \{A(\omega_1),\ldots,A(\omega_s)\}$.
   - Pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, on a $A(\omega_i) \neq \emptyset$.
   - La question 2) montrer que les pour tout $i,j \in [\![1,s]\!], i \neq j \Rightarrow A(\omega_i) \cap A(\omega_j) = \emptyset$.
   - Si $\omega \in \Omega$, alors $A(\omega) \in \mathfrak{P}$, donc $\exists i \in [\![1,s]\!], A(\omega) = A(\omega_i)$, donc $\omega \in A(\omega_i)$.
   - Il découle de ces trois points que $\mathfrak{P}$ est une partition de $\mathcal{T}$.

4. On va monter que $\mathfrak{P} \subset \mathcal{T}$ et que $\mathcal{T}$ est minimale. On a $\mathfrak{P} \subset \mathcal{T}$ car $A(\omega_k) \in \mathcal{T}$ pour tout $k \in [\![1,s]\!]$. Si $\mathcal{T}'$ est une tribu tel que $\mathfrak{P} \subset \mathcal{T}'$ alors Si $M \in \mathcal{T}$ alors $M = \bigcup\limits_{x \in M} A(x)$ car, pour tout $\omega \in M$, on a $\omega \in A(\omega) \subset \bigcup\limits_{x \in M} A(x)$ et inversement si $\omega \in \bigcup\limits_{x \in M} A(x)$, il existe $x \in M$ $\omega \in A(x)$, donc $M \in I_x$ et $\omega \in A(x)$, donc $\omega \in A(x) \subset M$, donc $\omega \in M$. Il en découle que $M = \bigcup\limits_{x \in M} A(x)$, donc $M \in \mathcal{T}'$. Ainsi $\mathcal{T}$ est la plus petite tribu contenant $\mathfrak{P}$, donc la tribu engendrée par $\mathfrak{P}$.

5. Soit $\mathcal{T}_0 = \{\bigcup\limits_{k \in J} A(\omega_k)/J \subset [\![1,s]\!]\}$. On démontre que $\mathcal{T}_0$ est une tribu contenant $\mathfrak{P}$ et contenue dans $\mathcal{T}$ donc $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$. L'application $J \mapsto O_J = \bigcup\limits_{k \in J} A(\omega_k)$ est une bijection de $\mathscr{P}([\![1,s]\!])$ vers $\mathcal{T}_0$ donc $\#\mathcal{T}_0 = 2^s$.

6. $\{1\},\{2\},\{3\} \in \mathcal{T}$, donc $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(\mathfrak{P})$ avec $\mathfrak{P} = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4,5,6\}\}$ donc $\#\mathcal{T} = 2^4$, et les les éléments de $\mathcal{T}$ sont exactement toutes les réunions finies de k atomes avec $k \in \{0,1,2,3,4\}$(les

atomes étant les éléments de $\mathfrak{P}$: On va les donner explicitement dans le tableau suivant :

k	événements	nombre	cumule
0	$\emptyset$	1	1
1	$\{1\},\{2\},\{3\},\{4,5,6\}$	4	5
2	$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4,5,6\},\{2,3\},\{2,4,5,6\},\{3,4,5,6\}$	6	11
3	$\{1,2,3\},\{1,2,4,5,\},\{1,3,4,5,6\},\{2,3,4,5,6\}$	4	15
4	$\{1,2,3,4,5,6\}$	1	**16**

On voit que le nombre total des événements est bien **16**.
Remarquons que $\mathcal{T}$ c'est la tribu engendrée par $\mathscr{A}' = \{\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, c'est-à-dire engendrée par des atomes minimaux.

7. On a $n \geq 2$, donc $\#\Omega = 2n \geq 4$. On va étudier deux cas :
   - Premier cas : $n = 2$, alors $\mathscr{A} = \{\{1,2\}\}$ et $\mathcal{T}(\mathscr{A}) = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, \Omega\}$.
   - Deuxième cas : $n > 2$, pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, il existe $\ell \in [\![2,n]\!]$ tel que $k \neq \ell$, donc $\{1,k\}\backslash\{1,\ell\} = \{k\}$ et alors $\{k\} \in \mathcal{T}(\mathscr{A})$. On voit aussi que $\{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\} \in \mathcal{T}(\mathscr{A})$, et comme synthèse : $\forall k \in [\![1,2n]\!], \{k\} \in \mathcal{T}(\mathscr{A})$. Il en découle que tous les singletons $\{k\}$ sont des atomes de cette tribu. Il en découle que $\{n+1,\ldots,2n\}$ est aussi un atome puisque en posant $\mathfrak{P} = \{\{1\},\ldots,\{n\},\{n+1,\ldots,2n\}$, on a bien $\mathcal{T}(\mathscr{A}) = \mathcal{T}(\mathfrak{P})$ car $\mathscr{A} \subset \mathcal{T}(\mathfrak{P})$ et $\mathfrak{P} \subset \mathcal{T}(\mathscr{A})$. Comme $\#\mathfrak{P} = n+1$, on a $\#(\mathcal{T}(\mathscr{A})) = 2^{n+1}$ et, en notant $\Omega_1 = [\![1,n]\!]$, on a :

$$\mathcal{T}(\mathscr{A}) = \mathscr{P}(\Omega_1) \cup \{A \cup \{n+1,\ldots,2n\} / A \in \mathscr{P}(\Omega_1)\}$$

EXERCICE 562 Variable aléatoire sans mémoire

Titre : Variable aléatoire sans mémoire
ID : 692 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 673 | ID : 692
Difficulté : ★★☆☆☆

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ tel que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On dit que X est sans mémoire si pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}_{(X=n)}(X \geq n+m) = \mathbb{P}(X \geq m).$$

On pose $\mathbb{P}(X=0) = p$ et $q = 1-p$ et on suppose de plus que l'on a la condition :

$$(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X \geq n) > 0.$$

1. Montrer que $\mathbb{P}(X \geq 1) = q$. En déduire que $0 < q \leq 1$.
2. Montrer que $\forall n, m \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X \geq n+m) = \mathbb{P}(X \geq n)\mathbb{P}(X \geq m)$.
3. On cosidère la suite réelle (u_n) définie par $u_n = \mathbb{P}(X \geq n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Donner u_n en fonction de q et n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(X \geq n) - \mathbb{P}(X \geq n+1)$.
   (d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X=n) = pq^n$.
   (e) En déduire que $0 < q < 1$.
4. Donner la loi de la variable aléatoire $Y = X+1$.
5. Démontrer qu'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ tel que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ est sans mémoire si et seulement si la variable aléatoire $Y = X+1$ suit une loi géométrique de paramètre à préciser.

Solution

1. On a $\Omega = (X=0) \cup (X \geq 1)$ et les deux événements sont disjoints, donc $1 = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X \geq 1)$, donc $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X=0) = 1-p = q$. Comme $\mathbb{P}(X \geq 1) > 0$ d'après

la condition $(\star)$, on déduit que $q > 0$. On sait déjà que $q \leq 1$, donc $0 < q \leq 1$.

EXERCICE 563 Variables aléatoires et matrices de rang 1

Titre : Variables aléatoires et matrices de rang 1 — **Difficulté :** ★★☆☆☆
ID : 695 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 676 | ID : 695

On suppose que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramétre $p \in]0,1[$. On définit les matrices aléatoires :

$$U = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ et } M = U \times U^\top = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_1X_2 & X_1X_1 & \cdots & \cdots & X_1X_n \\ X_2X_1 & X_2^2 & X_2X_1 & \cdots & \cdots & X_2X_n \\ X_1X_1 & X_1X_2 & X_1^2 & \cdots & \cdots & X_1X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_nX_1 & X_nX_2 & X_nX_3 & \cdots & \cdots & X_n^2 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $Y = \text{rg}(M)$. Montrer que la variable aléatoire Y suit une loi de Bernoulli de parametre $1-(1-p)^n$
2. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $\text{Tr}(M)$.
3. Vérifier que $M^2 = \text{Tr}(M)M$ et en déduire la probabilité de l'évènement : « M est une matrice de projection.»

Solution

1. Remarquons que si $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $Y = (y_i)_{1\leq i\leq n}$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et si on note A la matrice $A = (x_iy_j)_{1\leq i,j\leq n}$ alors les colonnes de A sont $y_1X, \ldots, y_nX$, donc $\text{rg}\,(A) = 0$ ou $\text{rg}\,(A) = 1$. Plus précisément $\text{rg}\,(A) = 1$ si et selement si $X \neq 0$ et $Y \neq 0$. Il en découle que $\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(M=0) = \mathbb{P}(U=0) = \mathbb{P}(X_1=0,\ldots,X_n=0)$. Par indépendance $\mathbb{P}(Y=0) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i=0) = (1-p)^n$, donc $\mathbb{P}(Y=1) = 1-(1-p)^n$, or $Y(\Omega) \subset \{0,1\}$, donc $Y \hookrightarrow \text{Ber}(1-(1-p)^n)$.
2. Soit $1 \leq i \leq n$. On a $X_i \hookrightarrow \text{Ber}(p)$ donc $X_i^2 \hookrightarrow \text{Ber}(p)$. Comme les $(X_i)_i$ sont indépendantes, les $(X_i^2)_i$ le sont aussi. $\text{Tr}(M)$ est une somme de n variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre p, donc la variable aléatoire $\text{Tr}(M)$ suit la loi binomiale de paramètre (n,p). $\text{Tr}(M) \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
3. On a $M^2 = U\left(U^\top U\right)U^\top$ et $U^\top U = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \text{Tr}(M)$, donc $M^2 = \text{Tr}(M)UU^\top = \text{Tr}(M)M$. Il en découle que M est une matrice de projection si, et seulement si, $\text{Tr}(M) = 1$, donc la probabilité cherchée est, d'après la question précédente $\mathbb{P}(\text{Tr}(M)=1) = \binom{n}{1}p(1-p)^{n-1} = np(1-p)^{n-1}$

EXERCICE 564 Tribu enegedrée par une paire

Titre : Tribu enegedrée par une paire — **Difficulté :** ★★☆☆☆
ID : 696 — **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 677 | ID : 696

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A et B deux parties de Ω non vides et distinctes. Expliciter la tribu engendrée par $\{A, B\}$

Solution

On étuide les cas selon $A \cap B = \emptyset$ ou $A \cap B \neq \emptyset$.
Commençons par le cas où $A \cap B = \emptyset$, il en découle que $\{\emptyset, \Omega, A, B\}$ est une tribu, puisque elle est contenue dans la tribu engendrée par $\{A, B\}$, elles coïncident, donc en posant $\mathscr{A} = \{A, B\}$, on a $\mathcal{T}(\mathscr{A}) = \{\emptyset, \Omega, A, B\}$.

EXERCICE 565 Variables aléatoires et matrices de rang 1

Titre : Variables aléatoires et matrices de rang 1
ID : 720 **Durée :** —
Niveau : L2 | N° : 687 | ID : 720
Difficulté : ★★☆☆☆

On suppose que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramétre $p \in]0,1[$. On définit les matrices aléatoires :

$$U = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ et } M = U \times U^\top = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_1X_2 & X_1X_1 & \cdots & \cdots & X_1X_n \\ X_2X_1 & X_2^2 & X_2X_1 & \cdots & \cdots & X_2X_n \\ X_1X_1 & X_1X_2 & X_1^2 & \cdots & \cdots & X_1X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_nX_1 & X_nX_2 & X_nX_3 & \cdots & \cdots & X_n^2 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $Y = \text{rg}(M)$. Montrer que la variable aléatoire Y suit une loi de Bernoulli de parametre $1-(1-p)^n$
2. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $\text{Tr}(M)$.
3. Vérifier que $M^2 = \text{Tr}(M)M$ et en déduire la probabilité de l'évènement : « M est une matrice de projection.»

Solution

1. Remarquons que si $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $Y = (y_i)_{1\leq i\leq n}$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et si on note A la matrice $A = (x_iy_j)_{1\leq i,j\leq n}$ alors les colonnes de A sont $y_1X, \ldots, y_nX$, donc $\text{rg}\,(A) = 0$ ou $\text{rg}\,(A) = 1$. Plus précisément $\text{rg}\,(A) = 1$ si et selement si $X \neq 0$ et $Y \neq 0$. Il en découle que $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(M = 0) = \mathbb{P}(U = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, \ldots, X_n = 0)$. Par indépendance $\mathbb{P}(Y = 0) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = 0) = (1-p)^n$, donc $\mathbb{P}(Y = 1) = 1-(1-p)^n$, or $Y(\Omega) \subset \{0,1\}$, donc $Y \hookrightarrow \text{Ber}(1-(1-p)^n)$.
2. Soit $1 \leq i \leq n$. On a $X_i \hookrightarrow \text{Ber}(p)$ donc $X_i^2 \hookrightarrow \text{Ber}(p)$. Comme les $(X_i)_i$ sont indépendantes, les $\left(X_i^2\right)_i$ le sont aussi. $\text{Tr}(M)$ est une somme de n variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre p, donc la variable aléatoire $\text{Tr}(M)$ suit la loi binomiale de paramètre (n,p). $\text{Tr}(M) \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
3. On a $M^2 = U\left(U^\top U\right)U^\top$ et $U^\top U = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \text{Tr}(M)$, donc $M^2 = \text{Tr}(M)UU^\top = \text{Tr}(M)M$. Il en découle que M est une matrice de projection si, et seulement si, $\text{Tr}(M) = 1$, donc la probabilité cherchée est, d'après la question précédente $\mathbb{P}(\text{Tr}(M) = 1) = \binom{n}{1}p(1-p)^{n-1} = np(1-p)^{n-1}$