

Proposition de corrigé du DL 2

Partie I : Etude des produits de réflexions planes

1°) Ω est l'ensemble des matrices de réflexion de taille 2×2 . Ces matrices sont diagonalisables et de valeurs propres 1 ou -1 . Il y a trois classes de similitude, celle de I , celle de $-I$, et celle de S ; les deux premières sont réduites à un seul élément car toute matrice semblable à une matrice scalaire est elle-même scalaire. ♦

2°) Une matrice M de déterminant -1 et de trace nulle a un polynôme caractéristique égal à $X^2 - 1$; le théorème de Cayley-Hamilton, dans ce cas élémentaire, assure que l'on a $M^2 = I$, donc que M est dans Ω . Sa trace étant nulle, elle n'est pas scalaire, donc il s'agit d'une matrice de la classe de S . Nous pouvons donc représenter cette classe sous la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec $-a^2 - bc = 1$. Nous y trouvons toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} i & b \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, leurs transposées,

et enfin toutes les $\begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{1+a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$.

3°) Notons d'abord que si $A = PA^{-1}P^{-1}$ alors

$$A' = QAQ^{-1} = (QPQ^{-1})(QA^{-1}Q^{-1})(QP^{-1}Q^{-1}) = P'A'^{-1}P'^{-1},$$

de sorte que la classe de similitude de A est formée de matrices semblables à leur inverse. Discutons maintenant selon les valeurs propres de A .

a) On peut avoir $A = I$, avec $\text{tr } A = 2$ et $\det A = 1$.

b) On peut aussi avoir $A = -I$, avec $\text{tr } A = -2$ et $\det A = 1$.

c) Une autre possibilité est fournie par les valeurs propres 1 et -1 ; A est alors semblable à S : $\text{tr } A = 0$ et $\det A = -1$.

d) Un autre cas est celui où A admet pour valeurs propres μ et $\frac{1}{\mu}$, μ étant différent de 1, -1 ; A est alors élément de la classe de D_μ . Il vient $\text{tr } A = \mu + \frac{1}{\mu}$ (nombre complexe quelconque) et $\det A = 1$.

e) Le dernier cas nous est fourni avec A non diagonalisable, donc avec une valeur propre double qui doit valoir 1 ou -1 . En prenant une base de la forme (e_1, e_2) , e_1 étant vecteur propre de A , on trouve une matrice semblable de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, avec $a \neq 0$. Dans la base (ae_1, e_2) il vient une matrice semblable à A de la forme J_1

ou J_{-1} . Ces matrices conviennent ($J_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ semblable à J_1).

f) Réciproquement, supposons que l'on ait $\det A = 1$; si A est diagonalisable on parvient à l'une des solutions envisagées en 3°a, 3°b, 3°d et sinon A est semblable à J_1 ou J_{-1} , qui toutes conviennent. De même, si $\det A = -1$ et $\text{tr } A = 0$ on a deux valeurs propres 1 et -1 , et A convient. ♦

4°) **J_1 est dans Ω^2 :**

Il suffit de poser $B = S$ et de calculer $C = BJ_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; on vérifie directement que $C^2 = I$.

En général, pour avoir une décomposition de la forme $J_1 = BC$ avec B, C dans Ω , on ne peut pas prendre $B = \pm I$ ni $C = \pm I$, car J_1 n'est pas diagonalisable tandis que B et C le sont. Il faut donc prendre B et C dans la classe de S . Or, J_1 doit envoyer e_1 sur lui-même.

Premier cas: Si $Ce_1 = e_1$, alors $Be_1 = e_1$; les valeurs propres de B et C sont 1, -1 , donc on a $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et

$C = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; en faisant le produit $BC = J_1$ on trouve $c - b = 1$, soit $C = \begin{pmatrix} 1 & b+1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Second cas: Si $Ce_1 = -e_1$, alors $Be_1 = -e_1$ donc $B = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; le produit $BC = J_1$ donne

$c - b = -1$, donc $C = \begin{pmatrix} -1 & b-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Troisième cas: Si e_1 n'est pas un vecteur propre de C , on a $e'_1 = Ce_1$ et (e_1, e'_1) est une base de $\mathbb{C}^2$. Comme C est une réflexion, on a $Ce'_1 = e_1$. Mais B doit ramener e'_1 sur e_1 , et on a pour la même raison $Be_1 = e'_1$. Du coup, il vient $B = C$ ce qui ne mène pas au résultat voulu. ♦

Comparaison de Ω^2 et Σ : Soient d'abord B, C appartenant à Ω . On a

$$(BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1} = CB = C(BC)C^{-1},$$

donc BC est semblable à son inverse; c'est-à-dire que $\Omega^2 \subset \Sigma$.

Pour la réciproque on commence par le

Lemme. Si B et C appartiennent à Ω et U est inversible alors $UBCU^{-1}$ appartient à Ω^2 : toute matrice semblable à un produit de réflexions est elle-même un produit de réflexions.

Preuve: $UBCU^{-1} = UBU^{-1}UCU^{-1} = B_1C_1$ et on a encore $B_1^2 = C_1^2 = I$. ♦

Ce lemme montre qu'il suffit de vérifier que $I, -I, S, J_1$ et les D_μ sont dans Ω^2 . Pour les quatre premières matrices c'est immédiat ou accompli. En ce qui concerne D_μ , on constate que $\Delta_a \Delta_b = D_{b/a}$, tandis que $\Delta_a^2 = D_1 = I$. ♦

Partie II : Un bloc de Jordan comme produit de deux réflexions

1°) A est inversible comme produit de deux matrices inversibles. Elle est semblable à son inverse (preuve au I4°). ♦

2°) $AV = \lambda V \Rightarrow A^{-1}V = \frac{1}{\lambda}V \Rightarrow CBV = \frac{1}{\lambda}V \Rightarrow BCBV = \frac{1}{\lambda}BV$ et aussi en prémultipliant par B : $CV = \lambda BV$, donc BV et CV sont vecteurs propres de A pour la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$. ♦

3°) Si $A = I$ on n'insiste pas. Sinon, A ayant la valeur propre 1 avec un espace propre de dimension 1, BV est nécessairement lié à V puisque $\lambda = 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 1$. De plus, les valeurs propres de B et C ne peuvent valoir que 1 ou -1 . En fin de compte, on a soit $AV = BV = CV = V$ soit $AV = V = -BV = -CV$. ♦

4°) **Cas du bloc de Jordan.**

a) La question II3° s'applique ici ; ainsi, B et C ont e_1 comme vecteur propre car c'est la seule direction du noyau de $A - I_2$ (l'écrire).

Inversement, si W est un vecteur propre commun de B et C , il est vecteur propre de A et c'est e_1 . ♦

b) Nous pouvons supposer que le vecteur e_1 est propre pour B et C avec la valeur propre 1, car sinon on se ramène à ce cas en changeant B en $-B$ et C en $-C$.

Soit E_1 l'espace propre de la valeur propre 1 pour B et F_1 celui qui correspond pour C ; de même, E_{-1} et F_{-1} . Nous avons ainsi $E_1 \cap F_1 = \text{Vect}(e_1)$, $E_1 \cap F_{-1} = \{0\} = F_1 \cap E_{-1} = E_{-1} \cap F_{-1}$, ce qui impose d'après la formule de Grassmann que $\dim E_1 + \dim F_{-1} \leq n$, soit $\dim E_1 \leq n - \dim F_{-1} = \dim F_1$. Par symétrie on a $\dim E_1 = \dim F_1$ et aussitôt $\dim E_{-1} = \dim F_{-1}$. Les matrices B et C étant diagonalisables, avec les mêmes valeurs propres et des espaces propres de mêmes dimensions, sont bien semblables.

On a aussi $\dim(E_1 + F_1) = \dim E_1 + \dim F_1 - 1 = 2\dim E_1 - 1 \leq n$, soit $\dim E_1 \leq \frac{n+1}{2}$, tandis que $\dim(E_{-1} + F_{-1}) = \dim E_{-1} + \dim F_{-1} = 2\dim E_{-1} \leq n$, soit $\dim E_{-1} \leq \frac{n}{2}$. Le total de ces deux dimensions doit donner n , donc

- si $n = 2p$: $\dim E_1 = \dim F_1 = \dim E_{-1} = \dim F_{-1} = p$
- si $n = 2p + 1$: $\dim E_1 = \dim F_1 = p + 1$ et $\dim E_{-1} = \dim F_{-1} = p$.

c) On peut noter que la structure de B et C est quasiment fixée par blocs. La première colonne est obligatoirement $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour B et C . En transposant tout et en appliquant à nouveau l'argument du vecteur invariant, on voit que la dernière ligne de B et C est $(0, 0, \varepsilon)$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

Cas $n = 3$. Ainsi, B et C sont triangulaires supérieures avec une diagonale faite de 1 et -1 . Du coup, on peut écrire en blocs : $B = \begin{pmatrix} B' & V \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} C' & W \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$. Le produit par blocs amène $B'^2 = C'^2 = I_2$ et $B'C' = J_1$, situation qui a été traitée au I4°. En particulier, B' et C' doivent avoir la valeur propre -1 , ce qui oblige ε à valoir 1. On peut aussi « lire » les blocs en isolant la première colonne au lieu de la dernière ; la même analyse est possible. Compte-tenu de l'ensemble de ces observations, la structure des matrices B et C est donc la suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b & u \\ 0 & -1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & b+1 & w \\ 0 & -1 & v-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} (\alpha) & 2u + bv = 0 \\ (\beta) & 2w + (b+1)(v-1) = 0 \\ (\gamma) & u + w + b(v-1) = 0 \end{cases}$$

mais $(\alpha) + (\beta) - 2(\gamma)$ donne $v - 1 + b = 0$. Parmi les solutions il y en a deux qui sont très simples, obtenues avec $b = 0, v = 1, u = 0, w = 0$ ou $b = 1, v = 0, u = 0, w = 1$, et une autre assez simple avec $b = -1, v = 2, u = 1, w = 0$. De plus, on peut changer le signe de B et C . Ce qui nous donne ces quelques solutions :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cas $n = 4$. On s'inspire des remarques antérieures : on peut « lire » dans une éventuelle solution de taille 4 des solutions en taille 3 tant à partir du « coin nord-ouest » qu'à partir du « coin sud-est ». D'autre part, on sait qu'ici B et C ont chacune 1 et -1 comme valeur propre double. On commence donc par mettre dans le coin nord-ouest la première des solutions précédentes, ce qui oblige à écrire la dernière dans le coin sud-est. Le coefficient restant est arbitraire, on peut le choisir nul. Soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cas $n = 5$. On recommence avec la méthode de superposition. Il vient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Il est clair, d'après les exemples précédents, qu'un mécanisme de parité est à l'œuvre en combinaison avec des coefficients du binôme. Modélisons l'espace $\mathbb{C}^n$ comme $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. L'endomorphisme associé à $A = A_n$ peut se comprendre comme $\text{id} + \Phi$, avec $\Phi(X^k) = X^{k-1}$, ou en général $\Phi(P) = \frac{P-P(0)}{X}$. L'endomorphisme associé à

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -3 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \ddots \end{pmatrix} \text{ est simple, c'est } P \mapsto P(-X-1). \text{ Quant à l'endomorphisme associé à } C_n, \text{ il est}$$

obtenu comme $C_n = B_n \circ (\text{id} + \Phi)$; en effet, $B_n \circ (\text{id} + \Phi)(X^k) = B_n(X^k + X^{k-1}) = (-X-1)^k + (-X-1)^{k-1} =$

$$(-1)^{k-1}X(X+1)^{k-1} \text{ ce qui correspond bien à la matrice } C_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & +1 & -1 & \dots \\ 0 & 0 & +1 & -2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \ddots \end{pmatrix}. \text{ On vérifie sans peine que}$$

$B_n^2 = I$ et il en résulte que $B_n C_n = B_n^2 \circ (\text{id} + \Phi) = \text{id} + \Phi = A$. Enfin, le calcul de C_n^2 est facile si on travaille par blocs, restreignant C_n au sous-espace formé des polynômes P tels que $P(0) = 0$: la matrice de cette restriction est l'opposée de B_{n-1} , donc de carré l'identité. C'est ainsi que

le problème de décomposition de $J_{n,1}$ en produit de deux réflexions a toujours une solution.

Partie III

1°) Cas où A a une seule valeur propre.

Si A admet une et une seule valeur propre, associée à un espace propre de dimension 1, cette valeur propre doit être égale à son inverse, donc à 1 ou -1 . On peut se ramener au cas de la valeur propre 1 quitte à changer A en $-A$ (et B en $-B$). A ce compte, $N = A - I$ est nilpotente, de rang $n-1$. On vérifie que les rangs des N^k décroissent strictement (si $\text{rg } N^k = \text{rg } N^{k+1}$ alors $\text{Im } N^k = \text{Im } N^{k+1}$ et N ne parvient plus à être nilpotente à moins que $\text{Im } N^k = \{0\}$), ce qui amène $N^{n-1} \neq 0$. On prend e_1 dans $\text{Im } N^{n-1}$, $e_1 = N^{n-1}(e_n)$ et $e_k = N^{n-k}(e_n)$; il ne reste plus qu'à vérifier que ces vecteurs forment une base, ce qui est aisé. On en déduit que la matrice de A est semblable à $J_{n,1}$. On a vu à la question II4°d que l'on peut écrire $J_{n,1} = BC$; la similitude donne (lemme ci-dessus) une décomposition $A = B_1 C_1$ avec $B_1^2 = C_1^2 = I$. ♦

2°) Cas où A a deux valeurs propres.

a) Nous avons les valeurs propres de A et A^{-1} qui doivent être les mêmes, donc $\mu = \frac{1}{\lambda}$ puisque $\lambda \neq \frac{1}{\lambda}$. De plus, les espaces propres de A et A^{-1} ont même dimension, donc l'espace propre associé à la valeur propre μ est aussi une droite. ♦

b) A et A^{-1} étant semblables, λ a mêmes multiplicités dans les polynômes caractéristiques de A et A^{-1} . Cependant, on a

$$\chi_{A^{-1}}(X) = \det(A^{-1} - XI) = X^n \det(A^{-1}) \det\left(\frac{1}{X}I - A\right) = (-X)^n \det A \chi_A\left(\frac{1}{X}\right)$$

ce qui prouve que λ et μ ont mêmes multiplicités comme racines du polynôme caractéristique de A . Toujours par similitude de A et A^{-1} , leurs sous-espaces caractéristiques (pour la même valeur propre λ) ont même dimension ; on a en fait

$$K_\lambda(A^{-1}) = \text{Ker}(A^{-1} - \lambda I)^\alpha = \text{Ker}(I - \lambda A)^\alpha = \text{Ker}\left(A - \frac{1}{\lambda}I\right)^\alpha = K_\mu(A)$$

ce qui nous assure que $K_\mu(A)$ et $K_\lambda(A)$ ont même dimension. Cependant, leur somme est directe et donne $\mathbb{C}^n$ par hypothèse (A ayant seulement deux valeurs propres). Finalement, n doit être pair. ♦

c) Sur $K_\lambda(A)$ l'endomorphisme associé à A agit comme $\lambda I + N$, N étant nilpotent d'indice $\frac{n}{2}$ (puisque l'espace propre de A associé à la valeur propre λ , noyau de N , doit être de dimension 1). On peut donc trouver une base de ce sous-espace rendant la matrice de A de la forme $(\lambda - 1)I_k + J_{k,1}$, avec $k = \frac{n}{2}$. Le même phénomène va se produire sur $K_\mu(A)$. ♦

d) Notons A_λ (resp. A_μ) l'endomorphisme induit sur $K_\lambda(A)$ (resp. $K_\mu(A)$). Considérons A_μ^{-1} : sa seule valeur propre est $\mu^{-1} = \lambda$, et son espace propre associé est de dimension 1 (même argument qu'en II2°). On peut lui appliquer la même réduction qu'à A_λ , et il apparaît que A_μ est semblable (ou conjugué) à A_λ^{-1} . En prenant une base appropriée pour $K_\mu(A)$, on peut trouver une matrice semblable à A de la forme $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix}$, M étant un bloc de Jordan comme à la question précédente (des λ sur la diagonale, des 1 juste au-dessus et 0 ailleurs). Cette matrice peut se factoriser aisément : $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & M^{-1} \\ M & 0 \end{pmatrix}$ et on vérifie - toujours par produit par blocs - que les

deux matrices figurant dans le produit à droite sont de carré I . Ainsi, A est bien semblable à un produit de réflexions, donc (lemme antérieur) est un produit de réflexions.

Conclusion. Il semble que toute matrice semblable à son inverse soit produit de réflexions, et inversement ; mais on ne l'a prouvé que dans des cas particuliers.