

Un problème complet d'algèbre linéaire

NB : Ce problème est beaucoup trop long pour être traité dans le temps imparti. L'objectif d'un étudiant est d'arriver à faire plusieurs parties parmi les 6. Ces 6 parties sont largement indépendantes et quand une question d'une partie demande l'utilisation d'un résultat d'une partie précédente, l'énoncé le précise explicitement.

La partie I est la plus simple, ensuite, c'est la partie III. Les questions précédées d'un astérisque (*) sont moins simples que celles qui précèdent ou qui suivent dans cette partie.

On a utilisé les conventions typographiques suivantes :

- Les matrices sont notées par des majuscules en italique : A par exemple.
- Les vecteurs sont notés par des minuscules en italique : x par exemple.
- Les endomorphismes sont notés par des minuscules en gras italique : $\mathbf{u}$ par exemple.
- Les polynômes et les espaces vectoriels sont notés par des majuscules en italique : P par exemple.
- Les bases et les systèmes sont dans une police cursive : $\mathcal{B}$ par exemple.

Tous les espaces vectoriels utilisés sont de **dimension finie**.

Partie I.

Question I : Montrez que pour un endomorphisme $\mathbf{u}$ d'un espace vectoriel E , les sept propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) L'endomorphisme $\mathbf{u}$ est une homothétie vectorielle, c'est-à-dire que pour un certain scalaire k on a, pour tout x de E , $\mathbf{u}(x) = kx$.
- ii) Il existe deux constantes α et β telles que $\alpha \neq 0$ et $\alpha\mathbf{u} + \beta\text{Id}_E = \mathbf{0}$.
- iii) Toute droite vectorielle $\mathcal{D}$ de E est stable par $\mathbf{u}$. (i.e. : $\text{Dim}(\mathcal{D}) = 1 \Rightarrow \mathbf{u}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$).
- iv) Tout sous-espace vectoriel de E est stable par $\mathbf{u}$.
- v) L'endomorphisme $\mathbf{u}$ a la même matrice dans toutes les bases de E .
- vi) L'endomorphisme $\mathbf{u}$ commute avec tous les endomorphismes de E
(i.e. : $\forall \mathbf{v} \in L(E) \Rightarrow \mathbf{u} \circ \mathbf{v} = \mathbf{v} \circ \mathbf{u}$)
- vii) (*) L'endomorphisme $\mathbf{u}$ est soit $\mathbf{0}$ soit vérifie $(\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in L(E))(\mathbf{u} = \mathbf{v} \circ \mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{w} \circ \mathbf{v})$

Question II. On considère un endomorphisme $\mathbf{u} : E \rightarrow E$ où E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On suppose que $\mathbf{u}$ vérifie $\mathbf{u}^2 + \text{Id}_E = \mathbf{0}$.

1°) a) Montrez qu'il n'a pas de valeur λ et de vecteur x non nul tels que $\mathbf{u}(x) = \lambda x$.

b) Soit x un vecteur non nul de E , montrez que les deux vecteurs x et $\mathbf{u}(x)$ ne sont pas colinéaires et que le plan vectoriel engendré par x et $\mathbf{u}(x)$ est stable par $\mathbf{u}$. On notera $\langle x \rangle_{\mathbf{u}}$ ce plan.

c) Soit E' un sous-espace vectoriel de E stable par $\mathbf{u}$. Montrez que si x est un vecteur non nul quelconque de E on a, soit $\langle x \rangle_{\mathbf{u}}$ contenu dans E' , soit E' et $\langle x \rangle_{\mathbf{u}}$ en somme directe.

Dans ce second cas, montrez que $E' \oplus \langle x \rangle_{\mathbf{u}}$ est encore stable par $\mathbf{u}$.

d) En déduire que E peut s'écrire comme une somme directe de plans stables par $\mathbf{u}$. *Indication :* Appelez E' un sous-espace vectoriel de E qui est une somme directe de plans stables et qui est de dimension maximum, montrez que $E' = E$.

Vous en déduirez que dans une base $\mathcal{B}$ bien choisie, la matrice $M_{\mathcal{B}}(\mathbf{u})$ est de la forme :

$$B = M_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A \end{bmatrix} \text{ avec } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Plus généralement, montrez que tout sous-espace vectoriel de E stable par $\mathbf{u}$ est une somme directe de plans du type $\langle x \rangle_{\mathbf{u}}$. Quelle particularité arithmétique ont les dimensions de E et de tous les sous-espaces vectoriels de E stables par $\mathbf{u}$? Retrouvez cette particularité en utilisant les déterminants.

2°) Montrez que les seuls sous-espaces vectoriels de E qui sont des noyaux de polynômes en u sont les sous-espaces, dits triviaux, $\{0\}$ et E .

3°) Montrez que si E' est un sous-espace vectoriel stable par u , il existe un autre sous-espace vectoriel E'' stable par u et supplémentaire de E' . *Indication* : Inspirez vous de la démonstration faite au 1°) d).

(*) 4°) a) Trouvez la forme des matrices B qui commutent avec la matrice trouvée au 2°) d).

b) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des endomorphismes qui commutent avec u ?

Partie II : $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{C}$ désignent respectivement le corps des nombres réels, celui des nombres rationnels et celui des nombres complexes. L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne celui des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$.

Si E est un espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B}$ une base de E , u un élément de l'ensemble, noté $L(E)$, des endomorphismes de E , on note $M_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

On rappelle qu'un polynôme P est dit irréductible si et seulement s'il est de degré au moins 1 et qu'il ne peut pas s'écrire comme un produit de deux polynômes de degré au moins 1. Dans le cas de $\mathbb{C}$, les seuls polynômes irréductibles sont les polynômes du premier degré ; dans le cas de $\mathbb{R}$, les seuls polynômes irréductibles sont les polynômes du premier degré et ceux de degré 2 avec des discriminants strictement négatifs. Dans le cas de $\mathbb{Q}$, il y a beaucoup d'autres cas plus difficiles à répertorier, mais dans la suite vous n'aurez que le résultat suivant à utiliser :

Tout polynôme P non nul de $\mathbb{K}[X]$ s'écrit de manière unique à l'ordre près des facteurs sous la forme d'un produit d'une constante et d'un produit de polynômes normalisés et irréductibles :

$$P = c P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k} \text{ où chaque } P_i \text{ est irréductible et normalisé dans } \mathbb{K}[X].$$

Dans cette partie, le corps $\mathbb{K}$ est selon les questions $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$) et u un endomorphisme de E .

1°) Soit x un vecteur de E . On pose $I_x = \{P ; P \in \mathbb{K}[X] \text{ et } P(u)(x) = 0\}$. Montrez que I_x est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ et qu'il existe un unique polynôme normalisé $\pi_{u,x}$ tel que $I_x = \pi_{u,x} \times \mathbb{K}[X]$. Montrez que le polynôme $\pi_{u,x}$ divise tout polynôme P tel que $P(u)(x) = 0$. Soit π_u le polynôme minimal de u , montrez que $\pi_{u,x}$ divise π_u . On dira dans la suite que $\pi_{u,x}$ est le polynôme minimal de x dans le contexte u .

2°) Soit x un vecteur non nul de E de polynôme minimal $\pi_{u,x}$ qui est de degré k .

Montrez que le système $\mathcal{S}_x = \{x, u(x), u^2(x), \dots, u^{k-1}(x)\}$ est un système libre, que le sous-espace E_x engendré par $\mathcal{S}_x$ est stable par u et que c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E stable par u et contenant x . On notera $\langle x \rangle_u$ ce sous-espace dans la suite du problème. Quelle est, en fonction de k , la dimension de ce sous-espace $\langle x \rangle_u$?

3°) Soit π_u le polynôme minimal de u , on suppose $\pi_u = P^\alpha Q$ où P est un polynôme normalisé irréductible et Q est un polynôme qui n'est pas divisible par P .

a) Quel théorème permet d'affirmer que $E = \text{Ker}(P^\alpha(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$?

b) Montrez qu'il existe un vecteur y tel que $P^\alpha(u)(y) = 0$ et $P^{\alpha-1}(u)(y) \neq 0$. *Indication* : Raisonnez par contradiction et montrez, par exemple, que le polynôme minimal de la restriction de l'endomorphisme u à $\text{Ker}(P^\alpha(u))$ est P^α et pas P^β avec $\beta < \alpha$.

c) (*) Soit x et y deux vecteurs de E tels que les deux polynômes $\pi_{u,x}$ et $\pi_{u,y}$ soient premiers entre eux. Soit $z = x + y$, montrez que $\pi_{u,z} = \pi_{u,x+y} = \pi_{u,x} \times \pi_{u,y}$. *Indication* : Utilisez une relation de Bézout entre $\pi_{u,x}$ et $\pi_{u,y}$ pour démontrer que $\pi_{u,x}$ et $\pi_{u,y}$ divisent tous les deux $\pi_{u,z} = \pi_{u,x+y}$.

d) En déduire le théorème suivant : il existe un vecteur x de E tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$. Autrement dit, il existe un vecteur dont le polynôme minimal dans le contexte u est le polynôme minimal de u .

4°) On suppose que l'on connaît une base $\mathcal{B}$ où $M_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice diagonale D . Calculez le polynôme minimal de u et trouvez un vecteur x de E tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.

5°) Soit P un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$ de degré k et u un endomorphisme de E tel que son polynôme minimal π_u soit égal à P . On utilise les résultats et les notations introduits ci-dessus aux questions 1°) et 2°)

a) Montrez que pour tout x non nul de E on a $\pi_{u,x} = \pi_u$. Donnez une base du sous-espace vectoriel $\langle x \rangle_u$. Quelle est la dimension d'un tel sous-espace vectoriel ?

b) Montrez, en utilisant une technique très similaire à celle mise en place à la partie I 2°) que E est une somme directe de sous-espaces vectoriels de type $\langle x \rangle_u$. En prenant pour base une union de bases de sous-espaces vectoriels de type $\langle x \rangle_u$, montrez qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E où la matrice de u est de la forme :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A \end{bmatrix} \text{ avec } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & -a_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{k-1} \end{bmatrix} \text{ et } P = \pi_u = X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \dots + a_1X + a_0$$

Partie III : Soit $u : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ un endomorphisme qui dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ admet une matrice U de la forme suivante :

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & -a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

L'endomorphisme u est alors dit cyclique. On appelle P le polynôme : $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$

1°) a) Montrez que $(\forall i \in [1, n]) (u^{i-1}(e_1) = e_i)$.
Montrez que : $u^n(e_1) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(e_1)$.

b) Vous en déduirez que :
 $u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \dots + a_i u^i + \dots + a_1 u + a_0 Id = 0$
et que : $U^n + a_{n-1}U^{n-1} + \dots + a_i U^i + \dots + a_1 U + a_0 I = 0$.

c) Montrez que le polynôme minimal π_u de l'endomorphisme u est le polynôme P .

2°) Montrez que l'endomorphisme v , de l'espace vectoriel E de dimension n , est cyclique si et seulement s'il existe un vecteur x tel que $(x, v(x), v^2(x), \dots, v^{n-1}(x))$ est une base de l'espace vectoriel E .

3°) a) Montrez que λ est une valeur propre de u si et seulement si $P(\lambda) = 0$.

b) Trouvez sans calcul (par exemple en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton) le polynôme caractéristique de u .

4°) Montrez que tous les sous-espaces vectoriels propres de u sont de dimension 1 et trouvez un vecteur engendrant le sous-espace vectoriel propre de u associé à la valeur propre λ . *Indication :* Utilisez la méthode du pivot en prenant pour pivots les "1" et en allant de bas en haut.

5°) Calculez le polynôme caractéristique de u en calculant explicitement $\text{Det}(U - \lambda I)$ (il serait bien de retrouver le même résultat qu'à la question 3°) !). L'indication de la question 4°) est là aussi pertinente.

6°) Soit $v : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ un endomorphisme.

a) on suppose qu'il existe $b_0, b_1, \dots, b_i, \dots, b_k$ tels que $b_k u^k + \dots + b_i u^i + \dots + b_1 u + b_0 Id = v$.
Montrer que $u \circ v = v \circ u$.

b) On suppose réciproquement que $u \circ v = v \circ u$. Montrer qu'il existe des coefficients $b_0, b_1, \dots, b_i, \dots, b_k$ tels que : $b_{n-1} u^{n-1}(e_1) + \dots + b_i u^i(e_1) + \dots + b_1 u(e_1) + b_0 e_1 = v(e_1)$.

En déduire que : $v = b_{n-1} u^{n-1} + \dots + b_i u^i + \dots + b_1 u + b_0 Id$

c) Énoncez sous forme d'un théorème le résultat démontré aux questions a) et b).

7°) On utilise dans cette question des résultats et des notations de la partie II. Provisoirement on ne suppose plus que $\mathbf{u}$ est cyclique, mais seulement que c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n . On rappelle que $\pi_{u,x}$ désigne le polynôme minimal de x dans le contexte $\mathbf{u}$, c'est le générateur de l'idéal $I_x = \{Q; Q \in \mathbb{K}[X] \text{ et } Q(\mathbf{u})(x) = 0\}$. On note $\langle x \rangle_{\mathbf{u}}$ le plus petit sous-espace vectoriel stable par $\mathbf{u}$. On a démontré dans cette partie qu'il y avait un vecteur x de E tel que $\pi_{u,x} = \pi_{\mathbf{u}}$.

a) On suppose que $\mathbf{u}$ vérifie la propriété suivante : tout sous-espace vectoriel de E stable par $\mathbf{u}$ est un noyau de polynôme en $\mathbf{u}$. Montrer que l'endomorphisme $\mathbf{u}$ est cyclique.

Indication : Montrez que $E = \langle x \rangle_{\mathbf{u}}$ pour un vecteur x bien choisi.

b) (*) On suppose à nouveau que l'endomorphisme $\mathbf{u}$ est cyclique, que l'espace vectoriel E est $\langle x \rangle_{\mathbf{u}} = \{Q(\mathbf{u})(x); Q \in \mathbb{K}[X]\}$ et que $\pi_{\mathbf{u}} = P$. Soit E' un sous-espace vectoriel de E stable par $\mathbf{u}$. On pose $I_{E'} = \{Q; Q \in \mathbb{K}[X] \text{ et } Q(\mathbf{u})(x) \in E'\}$.

i) Montrez que $I_{E'}$ est un idéal non réduit à $\{0\}$ de $\mathbb{K}[X]$ et que l'application de $I_{E'}$ dans E' qui à Q associe $Q(\mathbf{u})(x)$ est une surjection. Montrez que $I_{E'} = Q_{E'} \times \mathbb{K}[X]$ où $Q_{E'}$ est un polynôme normalisé.

ii) Vous en déduirez que $E' = \langle Q_{E'}(\mathbf{u})(x) \rangle_{\mathbf{u}}$. Que pouvez-vous dire de la restriction de $\mathbf{u}$ à E' ?

iii) On pose $y = Q_{E'}(\mathbf{u})(x)$ et $\pi_{\mathbf{u}} = \pi_{u,y} R$. Montrez que $\dim(E')$ est le degré de $\pi_{u,y}$ et que E' est contenu dans $\text{Ker}(\pi_{u,y}(\mathbf{u}))$. Montrez qu'un vecteur z est dans $\text{Ker}(\pi_{u,y}(\mathbf{u}))$ si et seulement s'il peut s'écrire sous la forme $TR(\mathbf{u})(x)$ où T est un polynôme dont on limitera le degré. Vous en déduirez, par une comparaison de dimensions, que $E' = \text{Ker}(\pi_{u,y}(\mathbf{u}))$ et vous énoncerez sous forme d'un théorème ce qui vient d'être démontré.

Partie IV : Notion de facteur direct et de décomposition cyclique.

Par définition, si $\mathbf{u}$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel E et si E' est un sous-espace vectoriel de E stable par $\mathbf{u}$, on dit que E' est un facteur direct pour $\mathbf{u}$ si et seulement si E' admet un supplémentaire lui aussi stable par $\mathbf{u}$. Donc plus formellement on a :

E' est un facteur direct pour $\mathbf{u} \Leftrightarrow \mathbf{u}(E') \subset E'$ et $(\exists E'' \text{ sous-espace de } E) (E = E' \oplus E'' \text{ et } \mathbf{u}(E'') \subset E'')$

On notera $\pi_{\mathbf{u}}$ le polynôme minimal de $\mathbf{u}$.

1°) Montrez que $\{0\}$ et E sont toujours des facteurs directs.

2°) Trouvez la forme de la matrice de $\mathbf{u}$ quand on prend pour base de E , l'union de bases de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires E' et E'' tous les deux stables par $\mathbf{u}$. Montrez la réciproque de la propriété que vous aurez découverte.

3°) On suppose que $\mathbf{u}$ est un endomorphisme diagonalisable. Rappelez comment sont faits les sous-espaces vectoriels stables par $\mathbf{u}$ et montrez qu'ils sont tous des facteurs directs.

4°) a) Montrez que si $\pi_{\mathbf{u}} = P_1 \times P_2$ où P_1 et P_2 sont deux polynômes premiers entre eux, $\text{Ker}(P_1(\mathbf{u}))$ est un facteur direct pour $\mathbf{u}$. Donnez une ou plusieurs formes de supplémentaire de $\text{Ker}(P_1(\mathbf{u}))$ qui soit stable par $\mathbf{u}$.

b) En déduire que les sous-espaces spectraux d'un endomorphisme sont toujours des facteurs directs.

c) Trouvez un exemple d'endomorphisme où un sous-espace propre n'est pas un facteur direct.

d) Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme $\mathbf{u}$. Montrez que le sous-espace propre $E_{\lambda}(\mathbf{u})$ de $\mathbf{u}$ est un facteur direct si et seulement si l'indice $n(\lambda)$ de la valeur propre λ vaut 1. *Rappel et Indication* : L'indice d'une valeur propre est l'ordre de multiplicité de cette valeur propre en tant que racine du polynôme minimal de $\mathbf{u}$. Il pourra être utile de montrer que :

$$\lambda \in \text{Sp}(\mathbf{u}) \Rightarrow (n(\lambda) = 1 \Leftrightarrow E = \text{Im}(\mathbf{u} - \lambda \text{Id}) \oplus \text{Ker}(\mathbf{u} - \lambda \text{Id})).$$

e) Montrez que, plus généralement, si P est un diviseur du polynôme minimal de $\mathbf{u}$, les deux sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(P(\mathbf{u}))$ et $\text{Im}(P(\mathbf{u}))$ sont des facteurs directs si et seulement si le polynôme minimal $\pi_{\mathbf{u}}$ s'écrit $\pi_{\mathbf{u}} = PQ$ où P et Q sont premiers entre eux.

5°) (**) Cette question a pour but de démontrer le résultat fondamental suivant : " Soit x un vecteur de E tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$ (notation du problème 2), alors $\langle x \rangle_u$ qui est le plus petit sous-espace vectoriel stable par u et contenant x , est un facteur direct pour u ". Cette question étant difficile, vous pouvez l'admettre, **mais vous devez avoir lu et compris le résultat qui précède** pour pouvoir continuer cette partie. L'énoncé qui suit est cependant très découpé et si vous le suivez sans paniquer, vous devriez arriver au résultat.

a) Soit E' un sous espace vectoriel stable par u de E et y un vecteur de E .

On pose $I_y(E') = \{P ; P \in \mathbb{K}[X] \text{ et } P(u)(y) \in E'\}$. Montrez que $I_y(E')$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. En déduire qu'il existe un polynôme P_y normalisé tel que, pour tout polynôme P , on ait :

$$P(u)(y) \in E' \Leftrightarrow (\exists Q \in \mathbb{K}[X])(P = P_y \times Q).$$

Montrez que $y \in E' \Leftrightarrow I_y(E') = \mathbb{K}[X] \Leftrightarrow P_y = 1$.

b) Soit x un vecteur de E tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$ (rappel : $\pi_{u,x}$ est le générateur normalisé de l'idéal des polynômes P tels que $P(u)(x) = 0$).

On appelle F un sous-espace de E possédant les propriétés suivantes :

- F est stable par u .
- F est en somme directe avec $\langle x \rangle_u$ où $\langle x \rangle_u$ désigne le plus petit sous-espace vectoriel stable par u et contenant le vecteur x .
- F est de dimension maximum parmi les sous-espaces de E possédant les deux propriétés précédentes.

i) Montrez qu'un tel sous-espace de E existe.

ii) Montrez que le problème posé revient à montrer que $E = \langle x \rangle_u \oplus F$.

Dans toute la suite de la question, on raisonne par contradiction en supposant que $E' = \langle x \rangle_u \oplus F$ est strictement inclus dans E . On choisit un vecteur y de E qui n'est pas dans E' et, en appliquant la question a), on appelle P_y le générateur de l'idéal $I_y(E') = \{P ; P \in \mathbb{K}[X] \text{ et } P(u)(y) \in E'\}$.

c) Avec les notation précédemment introduites, montrez successivement que :

- i) $\pi_{u,x} = \pi_u = P_y Q$ avec Q dans $\mathbb{K}[X]$ ii) $P_y(u)(y) = R(u)(x) + z$ avec R dans $\mathbb{K}[X]$ et z dans F .
 iii) $(RQ)(u)(x) = Q(u)(z) = 0$ iv) $RQ = \prod_x$ et $T = \pi_u T$ avec T dans $\mathbb{K}[X]$. v) $R = T P_y$.

d) Toujours avec les notations précédentes, on pose $t = y - T(u)(x)$. Montrez successivement que :

- i) Le vecteur t n'est pas dans E' . ii) $P_y(u)(t)$ est un vecteur de F .
 iii) Les deux polynômes P_y et P_t sont égaux iv) $(F + \langle t \rangle_u) \cap \langle x \rangle_u \neq \{0\}$

(N'oubliez pas que la dimension de F est maximum)

e) Toujours avec les notations précédentes, montrez qu'il existe un vecteur z' de F , un vecteur y' non nul de $\langle x \rangle_u$ et deux polynômes A et B tels que $z' + A(u)(t) = B(u)(x) = y'$.

Montrer que $B(u)(x) = y' = 0$ et donc (enfin !) une contradiction.

f) Énoncez sous forme d'un théorème (dont l'énoncé tient en deux lignes) le résultat qui vient d'être démontré ici.

6°) a) Déduire de la question précédente le résultat fondamental suivant qui est une autre façon d'aborder les réduites de Jordan : Soit u un endomorphisme de E de polynôme minimal π_u . Il existe une base $\mathcal{B}$ de E où la matrice de u est de la forme :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & C_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & C_k \end{bmatrix}$$

où C_i est une matrice compagnon de polynôme minimal P_i et où ces polynômes P_i vérifient les deux conditions :

i) $P_1 = \pi_u$
 ii) pour tout i de $[1, k-1]$ le polynôme P_i est un multiple du polynôme P_{i+1} .

Une telle réduction de u s'appelle une *décomposition cyclique* de u . On verra ultérieurement que cette décomposition est unique.

b) Montrez en utilisant les notations de la question précédente que le polynôme caractéristique de u est le produit des polynômes P_i pour i de 1 à k . Indication : Utilisez un résultat de la partie III.

7°) a) On suppose que u est un endomorphisme diagonalisable et que son polynôme caractéristique P_u est $(X - \lambda_1)^{\alpha_1} (X - \lambda_2)^{\alpha_2} \dots (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$. Trouvez une décomposition cyclique de u et donnez une méthode de calcul d'une base correspondant à cette décomposition cyclique. Montrez que dans ce cas la décomposition cyclique obtenue est unique.

b) Même question pour un endomorphisme pour lequel on connaît une base où sa matrice est sous forme réduite de Jordan. *Indication* : Suivez la démonstration de la question 6°) en commençant par construire un vecteur tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$ et ensuite construire explicitement un supplémentaire stable de $\langle x \rangle_u$ en utilisant la réduite de Jordan de u .

Partie V

1°) On dit qu'un endomorphisme u de E est simple si et seulement si tout sous-espace vectoriel stable est soit $\{0\}$ soit E tout entier.

a) Montrez que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le seul cas d'endomorphisme simple est celui des homothéties vectorielles (i.e. : $\text{Dim}(E) = 1$ et $u(x) = kx$).

b) Montrez que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il y a deux cas d'endomorphismes simples qui sont les homothéties de droites vectorielles et les endomorphismes u en dimension 2 vérifiant $(\text{Tr}(u))^2 - 4 \times \text{Det}(u) < 0$.

c) Montrez que dans le cas général, un endomorphisme u est simple si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) Le polynôme minimal π_u est un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$.

ii) $\text{Dim}(E) = \pi_u$

2°) On dit qu'un endomorphisme u est semi-simple si et seulement si tout sous-espace vectoriel stable est un facteur direct pour u .

a) Montrez que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, un endomorphisme u est semi-simple si et seulement s'il est diagonalisable.

b) Montrez que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, un endomorphisme u est semi-simple si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

i) E est une somme directe de plans et de droites stables par u , la restriction de u à chaque plan stable étant simple.

ii) Le polynôme minimal de u s'écrit :

$\pi_u = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_i) \dots (X - \alpha_p)(X^2 + a_1X + b_1) \dots (X^2 + a_jX + b_j) \dots (X^2 + a_qX + b_q)$ où les α_i sont deux à deux distincts et où pour tout j , on a $a_j^2 - 4b_j < 0$ et enfin où les couples (a_j, b_j) sont deux à deux distincts.

iii) Le polynôme minimal π_u et sa dérivée π'_u sont deux polynômes premiers entre eux.

iv) Dans une base $\mathcal{B}$ quelconque la matrice $M_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonalisable en tant que matrice complexe.

v) Dans une base $\mathcal{B}$ bien choisie, $M_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme suivante :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_k \end{bmatrix} \text{ où } D \text{ est une matrice diagonale et } A_i = \begin{bmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{bmatrix} \text{ avec } b_i^2 \neq 0$$

c) (*) Montrez que dans le cas général un endomorphisme u est semi-simple si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

i) Il existe des vecteurs $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ tels que E soit la somme directe des $\langle x_i \rangle_u$ et que la restriction de u à chaque $\langle x_i \rangle_u$ soit simple.

ii) Le polynôme minimal de u s'écrit $\pi_u = P_1 \times \dots \times P_i \times \dots \times P_k$ les P_i étant des polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux distincts.

iii) Le polynôme minimal π_u et sa dérivée π'_u sont deux polynômes premiers entre eux.

3°) Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ pour les plus téméraires, attention c'est un peu dur !), montrez que tout endomorphisme $\mathbf{u}$ admet une unique décomposition vérifiant $\mathbf{u} = \mathbf{d} + \mathbf{n}$ où $\mathbf{d}$ est un endomorphisme semi-simple, $\mathbf{n}$ est un endomorphisme nilpotent et $\mathbf{d} \circ \mathbf{n} = \mathbf{n} \circ \mathbf{d}$.

Partie VI : Dans toute cette partie, on considère un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension n , un endomorphisme $\mathbf{u}$ de E et une matrice compagnon C de la forme suivante.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad 1^\circ) \text{ Montrez que la réduite de Jordan de } C \text{ est de la forme}$$

$$J = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{bmatrix} \text{ avec } A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \text{ où}$$

$$\text{Sp}(C) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_k\}.$$

2°) Montrez que l'endomorphisme $\mathbf{u}$ est cyclique si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiées :

- i) L'endomorphisme $\mathbf{u}$ a des sous-espaces propres qui sont tous de dimension 1.
- ii) Pour toute valeur propre λ , l'indice $n(\lambda)$ et la multiplicité $m(\lambda)$ sont deux entiers égaux.
- iii) Les polynômes minimaux et caractéristiques de $\mathbf{u}$ sont égaux (au signe près).
- iv) Les seuls facteurs directs de E associés à $\mathbf{u}$ sont les sommes de sous-espaces spectraux de $\mathbf{u}$.
- v) Le commutant $C(\mathbf{u}) = \{v ; u \circ v = v \circ u\}$ est exactement l'ensemble $\mathbb{C}[\mathbf{u}]$ des polynômes en $\mathbf{u}$.
- vi) Il existe un vecteur x de E tel que $x, \mathbf{u}(x), \dots, \mathbf{u}^i(x), \dots, \mathbf{u}^{n-1}(x)$ soit une base de E .

Indications : La caractérisation vi) est la plus simple à mettre en évidence. En utilisant ce que vous savez sur les dimensions des noyaux itérés associés à une valeur propre, vous ne devriez pas avoir de problème pour démontrer l'équivalence de i), ii) et iii). Pour retrouver vi) à partir d'un de i) par exemple, prenez un vecteur qui est la somme de vecteurs choisis dans chaque sous-espace vectoriel spectraux en "haut" d'une colonne de Jordan. Pour iv), quand il y a plus d'un bloc de Jordan dans la réduite de $\mathbf{u}$, construire un facteur direct qui n'est pas un sous-espace vectoriel spectral. Pour v), utilisez le résultat de la partie IV 5°) sur les décompositions cycliques et remarquez, en utilisant les notations de cette partie, que si $E = \langle x \rangle_{\mathbf{u}} \oplus F$, la projection sur F commute avec $\mathbf{u}$ sans pouvoir être un polynôme en $\mathbf{u}$.

3°) a) Montrez que si l'endomorphisme $\mathbf{u}$ est cyclique et si E' est un sous-espace vectoriel stable par $\mathbf{u}$ de E , alors $\mathbf{u}' = \mathbf{u}|_{E'}$ est aussi cyclique.

b) Décrivez l'ensemble des sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme cyclique. En particulier on donnera le nombre de tels sous-espaces en fonction des multiplicités des valeurs propres et on montrera que tous ces sous-espaces sont des noyaux de polynômes en $\mathbf{u}$.