

## Thème : Espaces vectoriels normés

### EXERCICE 1 Séparation par des ouverts

📖 Titre : Séparation par des ouverts

🔖 ID : 23 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 10

★ Difficulté :  
★ ★ ★ ★ ★

$(E, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé.

- Démontrer que si  $(a, b) \in E^2$  et  $a \neq b$ , alors il existe  $U$  et  $V$  ouverts de  $E$  tel que  $a \in U$  et  $b \in V$  et  $U \cap V = \emptyset$ .
- Généralement, démontrer que si  $A$  et  $B$  sont deux parties non vides telles que  $d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y) > 0$ .
- Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints  $U$  et  $V$  de  $E$  tel que  $\begin{cases} A \subset U \\ B \subset V \end{cases}$ .

### EXERCICE 2 Les normes de la droite réelle

📖 Titre : Les normes de la droite réelle

🔖 ID : 171 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 157

★ Difficulté :  
★ ★ ★ ★ ★

- Démontrer que toute norme sur  $\mathbb{R}$  est de la forme  $N = c|\cdot|$  où  $c$  est une constante strictement positive.
- Démontrer que si  $E$  est un espace vectoriel non réduit à  $\{0\}$  toute norme  $N$  sur  $E$  en tant qu'application de  $E$  vers  $\mathbb{R}_+$  est surjective.

### EXERCICE 3 Distance d'un point à une partie lipschitzienne.

📖 Titre : Distance d'un point à une partie lipschitzienne.

🔖 ID : 172 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 158

★ Difficulté :  
★ ★ ★ ★ ★

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $A$  une partie non vide de  $E$  et  $d_A : E \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto d_A(x) = d(x, A)$ . Démontrer que :

$$\forall x, y \in E, \quad |d_A(x) - d_A(y)| \leq \|x - y\|$$

### EXERCICE 4 Une inégalité pour les normes

📖 Titre : Une inégalité pour les normes

🔖 ID : 173 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 159

★ Difficulté :  
★ ★ ★ ★ ★

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Montrer que pour tout  $x, y, z, t \in E$ , on a :

$$\|x - y\| + \|z - t\| \leq \|x - z\| + \|y - t\| + \|x - t\| + \|y - z\|$$

### EXERCICE 5 Norme construite par une famille de scalaires

📖 **Titre :** Norme construite par une famille de scalaires

🔑 **ID :** 174 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 160

★ **Difficulté :**



Soient  $a_1, \dots, a_n$  des réels et  $N : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par

$$N(x_1, \dots, x_n) = a_1 |x_1| + \dots + a_n |x_n|$$

A quelle condition sur les  $a_1, \dots, a_n$ , l'application  $N$  définit-elle une norme sur  $\mathbb{K}^n$  ?

### EXERCICE 6

### Norme construite par une famille de fonctions

📖 **Titre :** Norme construite par une famille de fonctions

🔑 **ID :** 175 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 161

★ **Difficulté :**



Soient  $f_1, \dots, f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continues.

A quelle condition l'application

$$N : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x_1 f_1 + \dots + x_n f_n\|_\infty$$

définit-elle une norme sur  $\mathbb{R}^n$  ?

### EXERCICE 7

### Des questions sur les parties bornées

📖 **Titre :** Des questions sur les parties bornées

🔑 **ID :** 176 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 162

★ **Difficulté :**



Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

1. Montrer que toute boule fermée ou ouverte de  $E$  est bornée.
2. Montrer que si  $A$  et  $B$  sont deux parties de  $E$  bornées alors  $A + B$  est bornée.
3. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Démontrer que  $F$  est borné si et seulement si  $F = \{0\}$ .

### EXERCICE 8

### Des normes équivalentes dans $\mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$

📖 **Titre :** Des normes équivalentes dans  $\mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$

🔑 **ID :** 177 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 163

★ **Difficulté :**



Soit  $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$  l'espace vectoriel réel des applications réelles de classes  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  et pour tout  $f \in E$ , on pose :

$$N_1(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt$$

et

$$N_2(f) = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| + \int_0^1 |f'(t)| dt$$

1. Montrer que  $N_1$  et  $N_2$  sont deux normes sur  $E$
2. Montrer que  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes

### EXERCICE 9

### Topologie des parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies par le rang

📖 **Titre :** Topologie des parties de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définies par le rang

🔑 **ID :** 178 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 |  $N^\circ$  : 164

★ **Difficulté :**



Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on note :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_p = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \text{rg}(A) = p\} \\ \mathcal{B}_p = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \text{rg}(A) \leq p\} \end{cases}$$

Les parties  $\mathcal{A}_p$  et  $\mathcal{B}_p$  sont-elles ouvertes ? fermées ?

## EXERCICE 10

### Topologie d'un espace de suites

📖 **Titre :** Topologie d'un espace de suites

🔑 **ID :** 179 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 |  $N^\circ$  : 165

★ **Difficulté :**



On note  $E$  l'ensemble des suites réelles bornées.

Pour tout  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ , on pose :

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

1. Montrer que  $\|\cdot\|_\infty$  est une norme sur  $E$ .
2. Montrer que chacun des ensembles suivants :

$$\begin{cases} F = \{u \in E / u_0 = 1\} \\ G = \{u \in E / u \text{ converge} \} \\ H = \{u \in E / \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0\} \end{cases}$$

est un fermé de  $E$ .

3. Montrer que

$$K = \{u \in E / \exists n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, u_p = 0\}$$

n'est pas un fermé de  $E$ . Déterminer l'adhérence de  $K$ .

4. L'espace  $E$  est-il complet ?

## EXERCICE 11

### Normes sur un espace fonctionnel

📖 **Titre :** Normes sur un espace fonctionnel

🔑 **ID :** 180 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 |  $N^\circ$  : 166

★ **Difficulté :**



On note  $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$  l'espace vectoriel réel des applications continues de  $[0,1]$  vers  $\mathbb{R}$  et  $E' = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$  le sous-espace vectoriel de  $E$  constitué des applications de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $[0,1]$  vers  $\mathbb{R}$ . et soit

$$F = \{f \in E' / f(0) = 0\}$$

Pour tout  $f \in E$ , on pose :

$$N(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|,$$

et pour tout  $f \in E'$ , on pose

$$N'(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

1. On rappelle que  $N$  est une norme sur  $E$ . Est-ce que  $N'$  est une norme sur  $E'$  ?
2. Démontrer que  $N'$  est une norme sur  $F$ .

3. Les normes  $N$  et  $N'$  considérées comme normes de  $F$  sont-elles équivalentes ?

### EXERCICE 12

#### Une inégalité pour les normes

📖 **Titre :** Une inégalité pour les normes

🔑 **ID :** 181 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 167

★ **Difficulté :**



$(E, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé. Soient  $x, y, z \in E$  tel que  $x + y + z = 0$ . Montrer que :

$$\|x - y\| + \|y - z\| + \|z - x\| \geq \frac{3}{2} (\|x\| + \|y\| + \|z\|)$$

### EXERCICE 13

#### Exemples de calcul de norme d'une fonction

📖 **Titre :** Exemples de calcul de norme d'une fonction

🔑 **ID :** 182 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 168

★ **Difficulté :**



Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  l'espace vectoriel réel des applications continues de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{R}$  et pour tout  $f \in E$ , on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|; \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt; \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère l'application  $f_n$  définie sur  $[0, 1]$  par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. Donner une représentation graphique  $f_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
2. Calculer  $\|f_n\|_p$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $p \in \{1, 2, \infty\}$

### EXERCICE 14

#### Des normes dans l'espace des suites bornées

📖 **Titre :** Des normes dans l'espace des suites bornées

🔑 **ID :** 183 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 169

★ **Difficulté :**



On note  $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u \text{ est bornée}\}$  l'espace vectoriel réel des suites réelles bornées. Pour tout  $u = (u_n) \in E$ , on note :

$$\|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \quad \text{et} \quad N(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|u_n| + |u_{2n}|)$$

1. Montrer que  $\|\cdot\|$  et  $N$  sont des normes sur  $E$ .
2. Montrer qu'elles sont équivalentes.
3. On note  $\theta$  la suite nulle. Préciser les valeurs de :

$$k_1 = \sup_{\substack{u \in E \\ u \neq \theta}} \frac{\|u\|}{N(u)} \quad \text{et} \quad k_2 = \sup_{\substack{u \in E \\ u \neq \theta}} \frac{N(u)}{\|u\|}$$

### EXERCICE 15

#### Topologie de $\Gamma_p = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \text{rg}(M) \geq p\}$

📖 **Titre :** Topologie de  $\Gamma_p = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \text{rg}(M) \geq p\}$   
🔑 **ID :** 184 ⌚ **Durée :** —  
📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 170

★ **Difficulté :**  
★ ★ ★ ★ ★

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on note  $\Gamma_p = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \text{rg}(M) \geq p\}$ .

1. Étudier si  $\Gamma_p$  est ouvert, fermé.
2. Préciser l'adhérence et l'intérieur de  $\Gamma_p$ .

## EXERCICE 16 Une norme non classique de $\mathbb{R}^2$

📖 **Titre :** Une norme non classique de  $\mathbb{R}^2$   
🔑 **ID :** 185 ⌚ **Durée :** —  
📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 171

★ **Difficulté :**  
★ ★ ★ ★ ★

Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose :  $N(x, y) = \max(|x|, |y|, |x - y|)$ .

1. Prouver que  $N$  est une norme.
2. tracer la sphère unité associée à  $N$ .

## EXERCICE 17 Toute partie d'intérieur non vide est génératrice

📖 **Titre :** Toute partie d'intérieur non vide est génératrice  
🔑 **ID :** 186 ⌚ **Durée :** —  
📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 172

★ **Difficulté :**  
★ ★ ★ ★ ★

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

1. Montrer que pour toute partie  $A$ , on a :

$$\text{Int}(A) \neq \emptyset \Rightarrow \text{Vect}(A) = E$$

2. En déduire que pour tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$ , si  $F \neq E$  alors  $\text{Int}(F) = \emptyset$ .

## EXERCICE 18 Hyperplans, formes linéaires et topologie

📖 **Titre :** Hyperplans, formes linéaires et topologie  
🔑 **ID :** 187 ⌚ **Durée :** —  
📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 173

★ **Difficulté :**  
★ ★ ★ ★ ★

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel. On appelle hyperplan de  $E$  tout sous-espace vectoriel  $H$  de  $E$  tel qu'il existe  $a \in E$  tel que  $a \neq 0$  et  $E = H \oplus \mathbb{K}a$ .

1. Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ . Montrer que :

$$\forall b \in E, E = H \oplus \mathbb{K}b \Leftrightarrow b \notin H$$

2. Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ . Démontrer que pour tout sous-espace vectoriel  $H'$  de  $E$ , on a :

$$H \subset H' \Rightarrow H' = H \quad \text{ou} \quad H' = E$$

3. Montrer que pour tout sous-espace vectoriel  $H$  de  $E$  on a :  $H$  est un hyperplan si et seulement si : il existe une forme linéaire non nulle  $\varphi$  sur  $E$  tel que  $H = \ker(\varphi)$ .
4. Démontrer que si  $\phi$  et  $\psi$  sont deux formes linéaires non nulles de  $E$  alors :

$$\ker(\phi) = \ker(\psi) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K}^*, \psi = \lambda\phi$$

5. On suppose que  $E$  est muni d'une norme  $\|\cdot\|$ .
- Montrer que pour tout sous-espace vectoriel  $F$  l'adhérence de  $F$ , à savoir  $\overline{F}$  est aussi un sous-espace vectoriel de  $E$ .
  - En déduire que tout hyperplan de  $E$  est soit fermé soit dense.
6. On suppose toujours que  $E$  est muni d'une norme  $\|\cdot\|$  et soit  $H$  un hyperplan de  $E$  tel que  $H = \ker(\varphi)$  avec  $\varphi$  une forme linéaire non nulle de  $E$ . Démontrer que  $\varphi$  est continue si et seulement si  $H$  est fermé.

## EXERCICE 19 Sou-espaces vectoriels connexes par arcs

📖 Titre : Sou-espaces vectoriels connexes par arcs

🔖 ID : 188 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 174

★ Difficulté :



Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension  $n$  avec  $n \geq 2$ . Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  tel que  $F \neq E$  et soit  $A = E \setminus F$ .

- Montrer que si  $\dim(F) = n - 1$  alors  $A$  n'est pas connexe par arcs.
- Montrer que si  $\dim(F) \leq n - 2$ , alors  $A$  est connexe par arcs.

## EXERCICE 20 Distance de $I_n$ à un hyperplan

📖 Titre : Distance de  $I_n$  à un hyperplan

🔖 ID : 189 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 175

★ Difficulté :



Dans cet exercice,  $n$  est un entier naturel tel que  $n \geq 2$  et on note  $\mathcal{N}_n$  l'ensemble des matrices nilpotentes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{H}_n$  l'hyperplan des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui sont de trace nulle. On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  et on rappelle que :

$$\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|.$$

Pour tout couple  $(M_1, M_2)$  de matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $d(M_1, M_2) = \|M_1 - M_2\|_\infty$ , la distance entre les matrices  $M_1$  et  $M_2$  et on pose :

$$d_\infty = d(I_n, \mathcal{N}_n) = \inf_{A \in \mathcal{N}_n} \|I_n - A\|_\infty = \inf_{A \in \mathcal{N}_n} d(I_n, A).$$

- Prouver que  $\mathcal{N}_n$  et  $\mathcal{H}_n$  sont des fermés de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et que  $\mathcal{N}_n \subset \mathcal{H}_n$ .
- (a) Soit  $X$  une partie non vide minorée de  $\mathbb{R}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Démontrer que :

$$\alpha = \inf(X) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \text{ est un minorant de } X \\ \alpha \in \overline{X} \end{cases}$$

ou  $\overline{X}$  est l'adhérence de  $X$ . En déduire que si  $\alpha$  est un minorant de  $X$  alors  $\alpha = \inf(X)$  si et seulement si il existe une suite  $(x_p)_{p \geq 1}$  à valeurs dans  $X$  tel que :  $\lim_{p \rightarrow +\infty} x_p = \alpha$ .

- Montrer que si  $X$  et  $Y$  sont deux parties de  $\mathbb{R}$  tel que  $X \neq \emptyset$  et  $X \subset Y$  et  $Y$  est minorée alors  $X$  est minorée et  $\inf(Y) \leq \inf(X)$ .

- Prouver que  $d_\infty \leq 1$ .
- Prouver que pour toute matrice  $M \in \mathcal{H}_n$ , on a  $1 \leq \|I_n - M\|_\infty$  (On pourra poser  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  et remarquer, après justification, que

$$\|I_n - M\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} |1 - m_{i,i}|$$

et utiliser le fait que  $\text{tr}(M) = 0$ .)

5. Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $M_p = \frac{1}{p}E_{11} - \frac{1}{p}E_{22}$ .
- Calculer, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , la distance  $t_p = d(I_n, M_p) = \|I_n - M_p\|_\infty$ .
  - Calculer  $d(I_n, \mathcal{H})$ .
  - En déduire que  $d_\infty = 1$ .

## EXERCICE 21 Normes subordonnées : généralité et exemple

📖 Titre : Normes subordonnées : généralité et exemple

🔖 ID : 190 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 176

★ Difficulté :



Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on considère la norme  $\| \cdot \|$  définie par

$$\|A\| = \sup_{\substack{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \neq 0}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$$

- Démontrer que pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , le réel  $\|A\|_\infty$  est effectivement bien défini.
- Démontrer que  $A \mapsto \|A\|$  est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- Démontrer que pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a :

$$\|A\| = \sup_{\|X\|_\infty \leq 1} \|AX\|_\infty = \sup_{\|X\|_\infty = 1} \|AX\|_\infty$$

- Démontrer que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \|AX\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|X\|_\infty$$

En déduire que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , tel que  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ . On se propose dans cette question de démontrer que :

$$\|A\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$$

Pour cela on pose, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \text{et} \quad \alpha = \sup_{1 \leq i \leq n} \alpha_i.$$

On veut donc prouver que  $\alpha = \|A\|_\infty$ .

- Justifier qu'il existe au moins un indice  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que

$$\alpha = \alpha_k = \sum_{j=1}^n |a_{kj}|.$$

- Démontrer que si  $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $Y = AX = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ , alors :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |y_j| \leq \alpha_j \|X\|_\infty$$

En déduire que :  $\|AX\|_\infty \leq \alpha \|X\|_\infty$  et que  $\|A\| \leq \alpha$ .

- Soit  $X_0 = (\xi_j)_{1 \leq j \leq n}$  avec, pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on aie :

$$\xi_j = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{k,j} = 0 \\ \frac{|a_{kj}|}{a_{k,j}} & \text{si } a_{k,j} \neq 0 \end{cases}$$

Démontrer que  $\|X_0\|_\infty = 1$ . Que vaut  $\|AX_0\|_\infty$  ?

- Conclure.

## EXERCICE 22 Exemples de normes de polynômes

📖 **Titre :** Exemples de normes de polynômes

🔑 **ID :** 191 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 177

★ **Difficulté :**



On considère  $E = \mathbb{R}[X]$ . Pour tout  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in E$ , on pose :  $\|P\| = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$ . On considère l'application linéaire

$$\varphi : E \rightarrow E, P \mapsto \varphi(P) = P(X+1)$$

1. Étudier la continuité de  $\varphi$  de  $(E, \|\cdot\|)$  vers lui-même.
2. Étudier la continuité de  $\psi$  de  $(E, \|\cdot\|)$  vers lui-même où

$$\psi : E \rightarrow E, P \mapsto \psi(P) = AP$$

où  $A \in \mathbb{R}[X]$  est un polynôme donné.

3. Reprendre les questions précédentes si on considère le norme :

$$\|P\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} e^{-|t|} |P(t)|$$

.

## EXERCICE 23

### Normes de polynômes associées à un compact

📖 **Titre :** Normes de polynômes associées à un compact

🔑 **ID :** 192 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 178

★ **Difficulté :**



Soit  $K$  une partie infinie bornée de  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ , on pose

$$\|P\|_K = \sup_{t \in K} |P(t)|.$$

Soit  $A \in \mathbb{K}[X]$  et  $\Phi_A$  l'application linéaire définie par :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad \Phi_A(P) = AP$$

1. Montrer que  $\|\cdot\|_K$  est une norme sur  $\mathbb{K}[X]$ .
2. Étudier la continuité de  $\Phi_A$  de  $(\mathbb{K}[X], \|\cdot\|_K)$  vers lui-même dans chacun des cas suivants :
  - (a)  $K$  est une partie compacte infinie de  $\mathbb{K}$ .
  - (b)  $K$  est une partie bornée infinie de  $\mathbb{K}$ .
3. Étudier la continuité de  $\Phi_A$  de  $(\mathbb{K}[X], \|\cdot\|)$  vers  $(\mathbb{K}[X], \|\cdot\|)$  lorsque  $\mathbb{K}[X]$  est muni de la norme  $\|P\| = \sum_{k=0}^N |a_k|$  pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ .
4. On suppose dans cette question que  $K = [0, 1]$  et  $A(X) = X^m$  avec  $m \in \mathbb{N}$ . Étudier la continuité de  $\Phi_A$  de  $(\mathbb{K}[X], \|\cdot\|)$  vers  $(\mathbb{K}[X], \|\cdot\|_K)$  où  $\|\cdot\|_\infty$  est celle définie :  $\|P\| = \max_{0 \leq k \leq N} |a_k|$  pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ .

## EXERCICE 24

### Construction de normes sur un espace vectoriel

📖 **Titre :** Construction de normes sur un espace vectoriel

🔑 **ID :** 193 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 179

★ **Difficulté :**



On considère un entier naturel  $m$  tel que  $m \geq 2$ ,  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $(N_k)_{1 \leq k \leq m}$  une famille de normes de  $E$ . Pour tout  $a = (a_k)_{1 \leq k \leq m} \in (\mathbb{R}_+^*)^m$  et tout vecteur  $x \in E$ , on pose  $\|x\|_a = \sum_{k=1}^m a_k N_k(x)$ .

1. Démontrer que  $\|\cdot\|_a$  est une norme sur  $E$ , pour tout  $a \in (\mathbb{R}_+^*)^m$ .
2. Démontrer que les normes  $\|\cdot\|_a$  sont deux à deux équivalentes quand  $a$  décrit  $(\mathbb{R}_+^*)^m$ .

## EXERCICE 25

### Activités sur le diamètre d'une partie bornée

📖 **Titre :** Activités sur le diamètre d'une partie bornée

🔖 **ID :** 194 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 180

★ **Difficulté :**



Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $A$  et  $B$  deux parties non vides bornées de  $E$ . On définit la distance de  $A$  à  $B$  comme suit  $d(A, B) = \inf\{\|a - b\| / (a, b) \in A \times B\}$  et le diamètre d'une partie bornée non vide  $X$  de  $E$  par  $\delta(X) = \sup\{\|x - y\| / x, y \in X\}$ .

1. Montrer que  $A \cup B$  est non vide bornée.
2. Montrer que  $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$ .

## EXERCICE 26

### Adhérence et intérieur d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$

📖 **Titre :** Adhérence et intérieur d'un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$

🔖 **ID :** 195 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 181

★ **Difficulté :**



Soit  $E$  un espace vectoriel normé, de dimension finie et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et

$$\mathfrak{L}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) / \ker u = F\}.$$

1. Démontrer que  $\mathfrak{L}_F \neq \emptyset$
2. Déterminer  $\text{Adh}(\mathfrak{L}_F)$  et  $\text{Int}(\mathfrak{L}_F)$ , l'adhérence et l'intérieur de  $\mathfrak{L}_F$

## EXERCICE 27

### Egalité de deux boules ouvertes ou fermées

📖 **Titre :** Egalité de deux boules ouvertes ou fermées

🔖 **ID :** 196 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 182

★ **Difficulté :**



1. Soient  $a, b, c, d$  des nombres réels tel que  $a < b$  et  $c < d$ . Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $]a, b[ \cap ]c, d[ \neq \emptyset$
- (ii)  $\max(a, c) < \min(b, d)$
- (iii)  $|a + b - c - d| \leq b - a + d - c$

2. Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Pour tout  $(x, r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$ , on note  $B_{x,r}$  la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r$ . Pour toutes parties non vides  $A$  et  $B$  de  $E$ , on note  $A + B = \{a + b / (a, b) \in A \times B\}$ .

- (a) Démontrer que pour tout  $(x, x', r, r') \in E \times E \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ , on a :

$$B_{x,r} \cap B_{x',r'} \neq \emptyset \Leftrightarrow \|x' - x\| < r + r'$$

- (b) Démontrer que pour tout  $(x, x', r, r') \in E \times E \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ , on a :

$$B_{x,r} + B_{x',r'} = B_{x+x', r+r'}$$

- (c) Démontrer que pour tout  $(x, x', r, r') \in E \times E \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ , on a :

$$B_{x,r} = B_{x',r'} \Leftrightarrow x = x' \quad \text{et} \quad r = r'$$

**EXERCICE 28****Convexe d'intérieur vide et hyperplan**

📖 **Titre :** Convexe d'intérieur vide et hyperplan

🔖 **ID :** 197 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 183

★ **Difficulté :**



Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A$  une partie de  $\mathbb{R}^n$ . On suppose que  $A$  est convexe. Démontrer que  $\text{Int}(A) = \emptyset$  si et seulement si  $A$  est contenue dans un hyperplan  $H$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**EXERCICE 29****Une belle propriété d'une partie convexe d'intérieur non vide**

📖 **Titre :** Une belle propriété d'une partie convexe d'intérieur non vide

🔖 **ID :** 198 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 184

★ **Difficulté :**



Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $A$  une partie de  $E$ . On suppose que  $A$  est convexe et  $\text{Int}(A) \neq \emptyset$ .

1. Démontrer que pour tout  $a \in \text{Int}(A)$  et tout  $b \in \text{Adh}(A)$ , le segment  $]a, b[$  est contenu dans  $\text{Int}(A)$  (autrement dit, pour tout  $t \in ]0, 1[$ , on a  $(1-t)a + tb \in \text{Int}(A)$ .)
2. Démontrer que  $\text{Int}(A) = \text{Int}(\text{Adh}(A))$

**EXERCICE 30****Activités sur l'adhérence, l'intérieur, la frontière, l'extérieur,..**

📖 **Titre :** Activités sur l'adhérence, l'intérieur, la frontière, l'extérieur,..

🔖 **ID :** 199 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 185

★ **Difficulté :**



Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Démontrer que :

1. Pour toutes parties  $A$  et  $B$  de  $E$ , Si  $A \subset B$  alors  $\text{Adh}(A) \subset \text{Adh}(B)$  et  $\text{Int}(A) \subset \text{Int}(B)$  et  $\text{Ext}(A) \supset \text{Ext}(B)$ .
2. Pour toute partie  $A$  de  $E$ , on a  $\text{Adh}(A^c) = (\text{Int}(A))^c$  et  $\text{Int}(A^c) = (\text{Adh}(A))^c$  et  $(\text{Ext}(A))^c = \text{Adh}(A)$  et  $\partial(A^c) = \partial(A)$ .
3. Pour toute partie  $A$  de  $E$ , on a :  $\text{Adh}(A) = \text{Int}(A) \cup \partial A$ .
4. Une partie  $A$  de  $E$  est fermée si et seulement si  $\partial A \subset A$ .
5. Pour toutes parties  $A$  et  $B$  de  $E$ , on a :
  - (a)  $\text{Adh}(A \cup B) = \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$  et  $\text{Adh}(A \cap B) \subset \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B)$ .
  - (b)  $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$  et  $\text{Int}(A \cup B) \supset \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$ .
  - (c)  $\text{Ext}(A \cup B) = \text{Ext}(A) \cap \text{Ext}(B)$  et  $\text{Ext}(A \cap B) \supset \text{Ext}(A) \cup \text{Ext}(B)$ .
  - (d)  $\partial(\text{Int}(A)) \subset \partial A$  et  $\partial(\text{Adh}(A)) \subset \partial(A)$  et  $\partial(A \cup B) \subset \partial(A) \cup \partial(B)$ .
6. Pour toute partie  $A$  de  $E$ , on a  $\partial(A) = \emptyset \Leftrightarrow A$  est ouverte ou  $A$  est fermée.
7. Pour toutes parties  $A$  et  $B$  de  $E$ , si  $\partial(A) \cup \partial(B) = \emptyset$ , alors on a les égalités suivantes :  $\text{Adh}(A \cap B) = \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B)$  et  $\text{Int}(A \cup B) = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$  et  $\partial(A \cap B) = (\partial(A) \cap \text{Adh}(B)) \cup (\text{Adh}(A) \cap \partial(B))$ .

**EXERCICE 31****Adherence des matrices triangulaires**

📖 **Titre :** Adherence des matrices triangulaires

🔖 **ID :** 200 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 186

★ **Difficulté :**



1. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  unitaire de degré  $n$ . Montrer que  $P$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si :  $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im} z|^n$
2. Montrer que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices trigonalisables.

### EXERCICE 32 Distance à une partie atteinte

📖 Titre : Distance à une partie atteinte

🔖 ID : 201 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 187

★ Difficulté :



Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension  $n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $A$  une partie fermée non vide de  $E$ . Démontrer que :

$$\forall x \in E, \exists a \in A, \quad d(x, A) = \|x - a\|$$

### EXERCICE 33 Une variante du théorème du point fixe

📖 Titre : Une variante du théorème du point fixe

🔖 ID : 202 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 188

★ Difficulté :



Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Soit  $K$  une partie compacte convexe de  $E$ . Soit  $f$  une application de  $K$  dans  $K$ , 1-lipschitzienne. Montrer que  $f$  admet un point fixe.

**Indication :** pour  $a$  dans  $K$  fixé et tout entier naturel  $n$  non nul, on pourra considérer l'application  $f_n$  définie sur  $K$  par :  $f_n : x \mapsto \frac{1}{n}a + (1 - \frac{1}{n})f(x)$ .

### EXERCICE 34 Théorème du pont fixe

📖 Titre : Théorème du pont fixe

🔖 ID : 203 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 189

★ Difficulté :



Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie sur  $\mathbb{K}$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $A$  une partie finie non vide et  $f : A \rightarrow E$  une application de  $A$  vers  $E$  tel que :

$$\begin{cases} f(A) \subset A \\ \exists k \in [0, 1[, \forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\| \end{cases}$$

Soit  $a \in A$  et  $(x_n)$  la suite définie par  $\begin{cases} x_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$ .

1. Démontrer que la série  $\sum (x_{n+1} - x_n)$  est absolument convergente.
2. En déduire que la suite  $(x_n)$  est convergente. On note  $\ell$  sa limite.
3. Démontrer que  $\ell$  est l'unique point fixe de  $f$ , c'est-à-dire l'unique  $t \in A$  tel que  $f(t) = t$ .

### EXERCICE 35 Une autre variante du théorème du point fixe

📖 Titre : Une autre variante du théorème du point fixe

🔖 ID : 204 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 190

★ Difficulté :



Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie sur  $\mathbb{K}$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $K$  une partie compacte non vide de  $E$  et  $f : K \rightarrow E$  une application tel que  $f(K) \subset K$  et  $\forall (x, y) \in K^2, x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ .

Démontrer que  $f$  admet un et un seul point fixe  $\ell$  et que toute suite  $(x_n)_{n \geq 0} \in K^{\mathbb{N}}$ , définie par  $x_0 \in K$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$  est convergente de limite  $\ell$ .

### EXERCICE 36

#### Union de boules ouvertes de rayon 1

📖 **Titre :** Union de boules ouvertes de rayon 1

🔖 **ID :** 205 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 191

★ **Difficulté :**



Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $\Omega$  un ouvert de  $E$ . On note  $\mathbf{O}(\Omega) = \bigcup_{\omega \in \Omega} B_f(\omega, 1)$ . Démontrer que  $\mathbf{O}(\Omega)$  est un ouvert de  $E$ .

### EXERCICE 37

#### Convergence d'une suite de fonctions suivant la norme

📖 **Titre :** Convergence d'une suite de fonctions suivant la norme

🔖 **ID :** 206 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 192

★ **Difficulté :**



Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des applications continues de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{R}$ . Étudier la convergence de la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  dans l'espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|_p)$  pour les cas  $p = 1, p = 2$  et  $p = \infty$ , dans les deux cas suivants :

1. La suite  $(f_n)$  définie par :

$$\forall t \in [0, 1], f_n(t) = \begin{cases} -2n^2t + 2n & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

2. La suite  $(f_n)$  définie par :

$$\forall t \in [0, 1], f_n(t) = \begin{cases} -2n\sqrt{n}t + 2\sqrt{n} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

### EXERCICE 38

#### Norme de convergence uniforme

📖 **Titre :** Norme de convergence uniforme

🔖 **ID :** 207 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 193

★ **Difficulté :**



Soit  $E = \mathcal{B}([-1, 1], \mathbb{R})$  l'espace des applications bornées de  $[-1, 1]$  vers  $\mathbb{R}$  muni de la norme de convergence uniforme  $\|\cdot\|_{\infty}$  et  $A$  la parties de  $E$  constituées des applications continues. Calculer  $d(f, A)$  où  $f$  est l'application définie par :

$$\forall t \in [-1, 1], f(t) = \begin{cases} \frac{t}{|t|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

### EXERCICE 39

#### Activités sur les normes équivalentes

📖 **Titre :** Activités sur les normes équivalentes

🔖 **ID :** 208 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 194

★ **Difficulté :**



Soit  $E$  un espace vectoriel non réduit à  $\{0\}$ . Si  $N_1$  et  $N_2$  deux normes de  $E$ , on dit que  $N_1$  est moins fine que  $N_2$  et on note  $N_1 \prec N_2$  si et seulement s'il existe une constante  $\alpha > 0$  tel que  $N_1 \leq \alpha N_2$ . Pour tout  $k \in \{1, 2\}$

et tout  $(a, r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$ , on adoptera les notations suivantes :

- $\mathcal{O}_k$  l'ensemble des ouverts de l'espace normé  $(E, N_k)$ .
- $B^k(a, r)$  (resp.  $B_f^k(a, r)$ ) la boule ouverte (resp. fermée) de centre  $a$  et de rayon  $r$  de l'espace vectoriel normé  $(E, N_k)$ .
- $\mathcal{S}_{1,2} = \{ \frac{N_2(x)}{N_1(x)} / x \in E \setminus \{0\} \}$  et  $\mathcal{S}_{2,1} = \{ \frac{N_1(x)}{N_2(x)} / x \in E \setminus \{0\} \}$ .

Dans tout ce qui suit  $N_1$  et  $N_2$  sont deux normes de  $E$ .

- Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
  - $N_2$  est plus fine que  $N_1$ .
  - $\mathcal{S}_{2,1}$  est majorée.
  - $\exists r > 0, B_f^2(0, r) \subset B_f^1(0, r)$ .
  - $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ .
- Démontrer que  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes si et seulement si  $N_1 \prec N_2$  et  $N_2 \prec N_1$ .
- Démontrer que  $N_1$  et  $N_2$  ne sont pas équivalentes si et seulement si  $\mathcal{S}_{1,2}$  ou  $\mathcal{S}_{2,1}$  n'est pas majorée. En déduire que si  $N_1$  et  $N_2$  ne sont pas équivalentes alors il existe une suite  $(x_n) \in E^{\mathbb{N}^*}$  tel que  $(x_n)$  converge dans l'un des espace vectoriels normés  $(E, N_1)$ ,  $(E, N_2)$  et diverge dans l'autre.
- En déduire que  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes si et seulement si  $(E, N_1)$  et  $(E, N_2)$  ont les mêmes suites convergentes.
- Démontrer que Si  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes alors pour toute suite  $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$  convergente pour l'une des normes, elle converge pour l'autre et les limites sont égales.
- Démontrer que  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes si et seulement si  $(E, N_1)$  et  $(E, N_2)$  ont les mêmes suites qui convergent vers 0.

#### EXERCICE 40

#### Un exemple de boule unité fermée non compacte

📖 **Titre :** Un exemple de boule unité fermée non compacte

🔑 **ID :** 209 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 195

★ **Difficulté :**



Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  l'espace vectoriel réel des applications continues de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{R}$  muni de la norme de convergence uniforme  $\|\cdot\|_\infty$ , c'est-à-dire :

$$\forall f \in E, \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Démontrer que la boule fermée unité de  $(E, \|\cdot\|_\infty)$  n'est pas compacte.

#### EXERCICE 41

#### Complémentaire d'un sev connxe par arc

📖 **Titre :** Complémentaire d'un sev connxe par arc

🔑 **ID :** 210 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 196

★ **Difficulté :**



Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé au moins de dimension 2, donc elle peut être éventuellement infinie.

- Démontrer que si  $E_1, E_2, E_3$  sont trois s.e.v. de  $E$  tel que  $E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq E_3$  et si  $a, b \in E$  tel que  $a \in E_2 \setminus E_1$  et  $b \in E_3 \setminus E_2$  alors  $E_1 \cap [a, b] = \emptyset$ .
- En utilisant le résultat établi dans la question 1), démontrer que si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  tel que  $\text{codim}(F) \notin \{0, 1\}$  alors  $E' = E \setminus F$  est une partie non vide connexe par arcs de  $E$ .

#### EXERCICE 42

#### Topologie de l'ensemble des projecteurs

📖 **Titre :** Topologie de l'ensemble des projecteurs

🔑 **ID :** 211 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 197

★ **Difficulté :**



$\mathbb{K}$  désigne l'un des corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n \geq 2$  et

$$\mathcal{P}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / M^2 = M\}.$$

On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  d'une norme quelconque.

1.  $\mathcal{P}_n$  est-elle une partie compacte de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?
2. Prouver que  $\mathcal{P}_n$  n'est pas connexe par arcs.
3. Pour tout  $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $\mathcal{P}_{n,r} = \{M \in \mathcal{P}_n / \text{rg}(M) = r\}$ 
  - (a) Prouver que  $\mathcal{P}_{n,r}$  est connexe par arcs dans chacun des cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  puis  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .
  - (b) Soit  $r, r' \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que  $r \neq r'$ . Démontrer que si  $A \in \mathcal{P}_{n,r}$  et  $B \in \mathcal{P}_{n,r'}$  alors il n'existe aucune chemin qui joigne  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{P}_n$ .
  - (c) En déduire les composantes connexes de  $\mathcal{P}_n$ .

### EXERCICE 43

### Etude d'une suite récurrente linéaire par réduction

📖 **Titre :** Etude d'une suite récurrente linéaire par réduction

🔑 **ID :** 478 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 461

★ **Difficulté :**



On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$u_0 = 0, u_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$$

1. Déterminer une matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

Veuillez bien justifier votre réponse.

2. Déterminer le polynôme caractéristique  $\chi_A(X)$  de  $A$  et calculer ses valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .
3. Soit  $R_n(X) = a_n X + b_n$  le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $\chi_A(X)$ . Calculer  $a_n$  et  $b_n$  (on pourra utiliser les racines  $\lambda_1, \lambda_2$  de  $\chi_A(X)$ .)
4. Montrer que  $A^n = a_n A + b_n I_n$ , en déduire que la suite  $(A^n)_{n \geq 0}$  converge lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  vers une limite  $A_\infty$  que l'on déterminera. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### EXERCICE 44

### L'application distance à une partie, lien avec un compact

📖 **Titre :** L'application distance à une partie, lien avec un compact

🔑 **ID :** 496 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 478

★ **Difficulté :**



Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Soit  $A$  une partie non vide de  $E$ . Montrer que l'application  $x \mapsto d(x, A)$  est continue sur  $E$ .
2. Soit  $K$  un compact non vide inclus dans un ouvert  $U$ . Montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall x \in K, B(x, \alpha) \subset U$$

### EXERCICE 45

### Distance d'un point à l'union de deux parties

📖 **Titre :** Distance d'un point à l'union de deux parties

🔑 **ID :** 539 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 520

★ **Difficulté :**



Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

1.  $A$  et  $B$  sont deux parties non vides de  $E$ . Démontrer que

$$\forall x \in E, d(x, A \cup B) = \min(d(x, A), d(x, B))$$

2. Soit  $x \in E$  et on note  $B_x = B_f(x, \|x\|)$  la boule fermée de centre  $x$  et de rayon  $\|x\|$ . Soit  $F$  une partie de  $E$  tel que  $F \cap B_x \neq \emptyset$ . Démontrer que  $d(x, F) = d(x, F \cap B_x)$ .

3. En déduire que le résultat de la question précédente est vrai si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

4. En déduire que si  $F$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$  alors :

$$\forall x \in E, \exists y \in F, d(x, F) = \|x - y\|$$

## EXERCICE 46

### Distance à l'union d'une famille quelconque de parties

📖 **Titre :** Distance à l'union d'une famille quelconque de parties

🔑 **ID :** 540 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 521

★ **Difficulté :**



Soit  $(E, d)$  un espace métrique,  $I$  un ensemble non vide et  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties *non vides* de  $E$ . Démontrer que :

$$(\star\star) \quad d(x, \bigcup_{i \in I} A_i) = \inf_{i \in I} d(x, A_i).$$

## EXERCICE 47

### Matrices stochastiques et convergence

📖 **Titre :** Matrices stochastiques et convergence

🔑 **ID :** 542 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 523

★ **Difficulté :**



$p, q, r$  sont des nombres réels strictement positifs tel que  $p + q + r = 1$ . On considère la matrice  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définie par :

$$M = \begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

## EXERCICE 48

### Un endomorphisme de matrices qui est une dérivation

📖 **Titre :** Un endomorphisme de matrices qui est une dérivation

🔑 **ID :** 544 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 525

★ **Difficulté :**



On fixe  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  et on considère  $\Delta : M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA$ .

1. Prouver que  $\Delta$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (M, N) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2, \Delta^n(MN) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k(M) \Delta^{n-k}(N)$$

2. On suppose que  $B = \Delta(H)$  commute avec  $A$ . Montrer :

$$\Delta^2(H) = 0 \text{ et } \Delta^{n+1}(H^n) = 0$$

Vérifier  $\Delta^n(H^n) = n!B^n$ .

3. Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\|B^n\|^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

4. En déduire que la matrice  $B$  est nilpotente.

### EXERCICE 49

### Fermeture d'une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

📖 **Titre :** Fermeture d'une partie de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

🔖 **ID :** 546 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 527

★ **Difficulté :**



Soit  $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \text{Sp}(A) \neq \emptyset\}$ . Démontrer que  $\mathcal{F}$  est une partie fermée de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### EXERCICE 50

### Raisonnement par compacité

📖 **Titre :** Raisonnement par compacité

🔖 **ID :** 550 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 531

★ **Difficulté :**



Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$  pour laquelle il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que l'on ait  $\|x_m - x_n\| \geq \varepsilon$  pour tous entiers naturels  $m, n$  distincts.

1. Montrer qu'une telle suite n'admet aucune valeur adhérence.

Soit  $K$  une partie compacte d'un espace normé  $E$ .

2. Montrer que pour tout réel  $\alpha > 0$ , il existe un entier  $p > 0$  et  $x_1, \dots, x_p$  éléments de  $K$  tels que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^p B(x_k, \alpha)$$

Pour  $I$  un ensemble d'indexation quelconque, on considère une famille  $(\Omega_i)_{i \in I}$  de parties ouvertes de  $E$  telle que <sup>1</sup>

$$K \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i.$$

3. Montrer qu'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que, pour tout  $x \in K$ , il existe un indice  $i \in I$  pour lequel la boule  $B(x, \alpha)$  soit contenue dans l'ouvert  $\Omega_i$ .

4. En déduire qu'il existe une sous-famille finie  $(\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_p})$  de la famille  $(\Omega_i)_{i \in I}$  telle que <sup>2</sup>

$$K \subset \bigcup_{k=1}^p \Omega_{i_k}$$

### EXERCICE 51

### $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs

📖 **Titre :**  $GL_n(\mathbb{C})$  est connexe par arcs

🔑 **ID :** 589 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 570

★ **Difficulté :**



1. Montrer que  $\mathbb{C}$  privé d'un nombre fini de complexes est une partie connexe par arcs.
2. Application : Établir que  $GL_n(\mathbb{C})$  est une partie connexe par arcs.  
On pourra considérer l'application  $z \mapsto \det((1-z)A + zB)$  pour  $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ .

## EXERCICE 52

### Topologie de certain sous-espaces de suites

📖 **Titre :** Topologie de certain sous-espaces de suites

🔑 **ID :** 673 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 654

★ **Difficulté :**



On munit le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  des suites réelles bornées de la norme

$$\|u\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :

1.  $A = \{ \text{suites croissantes} \}$ ,
2.  $B = \{ \text{suites convergeant vers } 0 \}$ ,
3.  $C = \{ \text{suites convergentes} \}$ ,
4.  $D = \{ \text{suites admettant } 0 \text{ pour valeur d'adhérence} \}$ ,
5.  $E = \{ \text{suites périodiques} \}$ .

## EXERCICE 53

### Jauge de Minkowski d'un ouvert convexe symétrique

📖 **Titre :** Jauge de Minkowski d'un ouvert convexe symétrique

🔑 **ID :** 679 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 660

★ **Difficulté :**



Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé réel et on considère une partie  $\mathbf{O}$  de  $E$  tel que  $\mathbf{O}$  est convexe, ouvert bornée et symétrique ( $\forall x \in E, x \in E \Rightarrow -x \in E$ .) et  $0 \in \mathbf{O}$ . Pour tout  $x \in E$ , on pose :

$$N(x) = \inf \left\{ \lambda > 0 / \frac{x}{\lambda} \in \mathbf{O} \right\}.$$

Prouver que  $N$  est une norme sur  $E$ .