

Thème : Equations différentielles

EXERCICE 1

Système différentiel linéaire à trois inconnues

📖 Titre : Système différentiel linéaire à trois inconnues

🔑 ID : 438 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 424

★ Difficulté :



Résoudre le système différentiel :

$$(E) \quad \begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z \end{cases}$$

avec la condition initiale : $x(0) = 3, y(0) = 1, z(0) = 1$.

Dessiner la projection sur la plan xOy de la courbe intégrale associée à la solution trouvée.

EXERCICE 2

Système différentiel linéaire avec second membre : exemple

📖 Titre : Système différentiel linéaire avec second membre : exemple

🔑 ID : 439 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 425

★ Difficulté :



Résoudre le système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} x' = x - y + z + e^t \\ y' = -x + y + z \\ z' = -x - y + 3z + e^{3t} \end{cases}$$

EXERCICE 3

Solution d'équation différentielle tel que $X(t+T) = \alpha X(t)$

📖 Titre : Solution d'équation différentielle tel que $X(t+T) = \alpha X(t)$

🔑 ID : 440 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 426

★ Difficulté :



Soit T un nombre réel strictement positif et $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une application continue T -périodique. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad Y' = A(t)Y.$$

Démontrer que (E) admet une solution non nulle X tel qu'il existe un nombre complexe α tel que :
($\forall t \in \mathbb{R}$) $X(t+T) = \alpha X(t)$

EXERCICE 4

Equations différentielles et matrices symétriques

📖 Titre : Equations différentielles et matrices symétriques

🔑 ID : 441 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 427

★ Difficulté :



a est un nombre réel strictement positif, on pose : $I_a =]-a, a[$.

Soit $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, ($n \in \mathbb{N}^*$) et $X : I_a \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable tel que :

$$\begin{cases} (\forall t \in I_a) & X'(t)X(t) = A \\ X(0) = I_n \end{cases}.$$

1. Démontrer que : $(\forall t \in I_a) \quad X(t)A = AX(t)$
2. Démontrer que si A est symétrique alors $X(t)$ est symétrique pour tout $t \in I_a$.

EXERCICE 5 Système linéaire avec matrice variable

📖 **Titre :** Système linéaire avec matrice variable

🔑 **ID :** 442 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 428

★ **Difficulté :**



On considère le système différentiel :

$$(E) \quad \begin{cases} x' = y + t \\ y' = \frac{1}{t^2}x - \frac{1}{t}y + t^2 \end{cases}$$

et soit (EH) le système homogène associé.

1. I désigne l'un des intervalles $] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$. Déterminer les solutions φ sur I de (EH) de la forme : $\begin{pmatrix} \alpha t^a \\ \beta t^b \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$.
2. En déduire la solution générale de (EH)
3. Résoudre (E)

EXERCICE 6 Système linéaire homogène

📖 **Titre :** Système linéaire homogène

🔑 **ID :** 443 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 429

★ **Difficulté :**



On considère le système différentiel

$$(E) : \begin{cases} x' = -x + 4z + t \\ y' = -4x + 3y + 4z - t \\ z' = 3z \end{cases}$$

1. Résoudre le système homogène associé :
 - (a) En résolvant ses équations de proche en proche.
 - (b) En diagonalisant la matrice associée.
2. Résoudre (E) .

EXERCICE 7 Système linéaire avec second membre

📖 **Titre :** Système linéaire avec second membre

🔑 **ID :** 444 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 430

★ **Difficulté :**



Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = 5x - 10y + 4z + e^t \\ y' = 2x - 7y + 4z - 1 \\ z' = 2x - 10y + 7z \end{cases}$$

EXERCICE 8 Etude qualitative d'une équation différentielle du second ordre

Titre : Etude qualitative d'une équation différentielle du second ordre

ID : 445 **Durée :** —

Niveau : L2 | **N° :** 431

★ **Difficulté :**
★ ★ ★ ★ ★

p et q sont deux application de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + py' + qy = 0.$$

1. Soit y une solution non identiquement nulle de (E) .
 - (a) Montrer que les fonctions y et y' ne s'annulent pas simultanément.
 - (b) Montrer que les zéros de y sont en nombre fini.
2. Soient y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de (E) ; on suppose que y_1 admet au moins deux zéros et on note a et b deux zéros consécutifs.
 - (a) Montrer que y_2 admet au moins un zéro dans l'intervalle ouvert $]a, b[$ (Penser au wronskien).
 - (b) La fonction y_2 peut elle avoir plusieurs zéros dans $]a, b[$?

EXERCICE 9

Wronskien, étude qualitative, second ordre

Titre : Wronskien, étude qualitative, second ordre

ID : 446 **Durée :** —

Niveau : L2 | **N° :** 432

★ **Difficulté :**
★ ★ ★ ★ ★

Soit $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $\mathbb{R}$ et paire et on considère l'équation différentielle :

$$(E_\lambda) \quad y'' + (\lambda - q(t))y = 0$$

1. Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz adapté à (E_λ) .
2. En déduire qu'une solution φ de (E_λ) est impaire si, et seulement si $\varphi(0) = 0$
3. Prouver, par exemple, à l'aide du wronskien que (E_λ) ne peut admettre un système fondamental de solutions constitué de fonctions de même parité.

EXERCICE 10

Equation différentielle à solutions bornées

Titre : Equation différentielle à solutions bornées

ID : 447 **Durée :** —

Niveau : L2 | **N° :** 433

★ **Difficulté :**
★ ★ ★ ★ ★

Soit p une application de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ continue et intégrable et on considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + (p(t) + 1)y = 0$$

1. Soit φ une solution de (E) . Prouver que φ est une solution de l'équation différentielle :

$$(F) \quad z'' + z = g(t)$$

où g est à déterminer.

2. En déduire que toute solution de (E) est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

EXERCICE 11

Solutions polynômiales, application

📖 Titre : Solutions polynômiales, application

🔖 ID : 448 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 434

★ Difficulté :



On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad (x^2 - 1)y' + xy = x^3 - x$$

1. Déterminer une fonction polynomiale p solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre (E) sur chacun des intervalles $] -\infty, -1[,] -1, 1[,] 1, +\infty[$.
3. Expliquer pourquoi la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est p .

EXERCICE 12

Zéros des solutions d'équations différentielles

📖 Titre : Zéros des solutions d'équations différentielles

🔖 ID : 449 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 435

★ Difficulté :



On considère un intervalle I non trivial de $\mathbb{R}$, des applications a, b de I vers $\mathbb{R}$ et l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' = a(t)y' + b(t)y$$

1. Démontrer que si (I, ϕ) est une solution maximale de (E) alors les zéros de ϕ sont isolés.
2. Montrer que si (I, ϕ) et (J, ψ) sont deux solutions maximales de (E) alors soit elles sont proportionnelles soit pour tous zéros x_1, x_2 de ϕ , il existe un zéro x_0 de ψ tel que $x_1 < x_0 < x_2$

EXERCICE 13

Au moins un zéro, au plus un zéro, selon le cas

📖 Titre : Au moins un zéro, au plus un zéro, selon le cas

🔖 ID : 450 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 436

★ Difficulté :



Soit $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application strictement positive et continue sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que toute solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad y'' + p(t)y = 0$$

admet au moins un zéro sur $\mathbb{R}$

2. Démontrer que toute solution non identiquement nulle de l'équation différentielle :

$$(E_2) \quad y'' - p(t)y = 0$$

admet au plus un zéro sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 14

Equation différentielle avec determinant

📖 Titre : Equation différentielle avec determinant

🔖 ID : 451 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 437

★ Difficulté :



Trouver les $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle :

$$\begin{vmatrix} y' & y'' & y \\ y'' & y & y' \\ y & y' & y'' \end{vmatrix} = 0$$

EXERCICE 15**Etude qualitative, zéros d'équations différentielles**

📖 **Titre :** Etude qualitative, zéros d'équations différentielles

🔖 **ID :** 452 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 438

★ **Difficulté :**



Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et a et b deux applications de I vers $\mathbb{R}$, continues sur I . On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

et soit φ une solution non identiquement nulle de (E) .

1. Montrer que pour tout sous intervalle compact K de I , l'ensemble :

$$Z_{\varphi,K} = \{t \in K / \varphi(t) = 0\}$$

est fini. Que peut-on en déduire pour l'ensemble Z_{φ} des zéros de φ sur I ?

2. On suppose que φ s'annule au moins deux fois sur I et on considère α, β deux zéros consécutifs de φ (on expliquera pourquoi cela a un sens). Montrer que, si ψ est une autre solution sur I de (E) , non proportionnelle à φ , alors $\psi(\alpha)\psi(\beta) \neq 0$ et que ψ s'annule une seule fois sur $]\alpha, \beta[$.
3. On considère deux équations différentielles :

$$(E_f) \quad y'' + f(t)y = 0$$

et

$$(E_g) \quad y'' + g(t)y = 0$$

avec $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues tel que $f \geq g$. Montrer que, si v est une solution de (E_g) dont α et β sont deux zéros consécutifs et u une solution de (E_f) tel que $u(\alpha)u(\beta) \neq 0$ alors u admet un zéro dans $]\alpha, \beta[$.

EXERCICE 16**Application des equa diff au calcul d'intégrales**

📖 **Titre :** Application des equa diff au calcul d'intégrales

🔖 **ID :** 453 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 439

★ **Difficulté :**



Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(tx) dt, v(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(tx) dt$$

1. Montrer que u et v sont solutions de classe C^1 d'un système différentiel de premier ordre.
2. En déduire les valeurs de $u(x)$ et $v(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 17**Equation différentielle avec $t \mapsto A(t)$ périodique**

📖 **Titre :** Equation différentielle avec $t \mapsto A(t)$ périodique

🔖 **ID :** 454 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 440

★ **Difficulté :**



Soit $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une application continue et 2π -périodique. On considère l'équation différentielle linéaire homogène suivante :

$$(E) \quad x' = A(t)x.$$

Soit φ_1 et φ_2 deux solutions linéairement indépendantes de (E) et $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ la matrice dont les colonnes sont celles des coordonnées de φ_1 et φ_2 dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$.

- (a) Vérifier que $t \mapsto \varphi_1(x + 2\pi)$ et $t \mapsto \varphi_2(x + 2\pi)$ sont encore deux solutions de (E).
(b) En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversible telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t + 2\pi) = M(t)P.$$

- Déduire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $P : t \mapsto P(t) = M(t)e^{tB}$ soit 2π -périodique.

EXERCICE 18

Equation différentielle non linéaire

📖 Titre : Equation différentielle non linéaire

🔑 ID : 455 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 441

★ Difficulté :



On considère l'équation différentielle : (E) $y' = y^3 + t^3$. Pour tout $a \in [0, +\infty[$, on note (I_a, φ_a) la solution maximale de (E) tel que $\varphi_a(0) = a$.

- Démontrer que φ_a est strictement croissante sur I_a
- Démontrer que I_a est majoré, soit alors $b = \sup(I_a)$
- Prouver que : $\lim_{t \rightarrow b^-} \varphi_a(t) = +\infty$

EXERCICE 19

Etude qualitative d'une equa diff non linéaire

📖 Titre : Etude qualitative d'une equa diff non linéaire

🔑 ID : 456 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 442

★ Difficulté :



On considère le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{C}) \quad \begin{cases} y' = y^2 + t^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

- Justifier l'existence d'une solution maximale (I, φ) pour $(\mathcal{C})$
- Démontrer que φ est impaire
- Étudier la monotonie et la concavité de φ
- Démontrer que l'intervalle I est borné
- Dresser le tableau de variations de φ et donner une allure de sa courbe représentative
- Généralisation du 4) : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et h une fonction continue positive sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}_+$ de $\mathbb{R}$. Démontrer que si (J, g) est une solution maximale du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = y^n + h(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

alors l'intervalle J est majoré.

EXERCICE 20

Equa diff non linéaire avec radical

📖 Titre : Equa diff non linéaire avec radical

🔑 ID : 457 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 443

★ Difficulté :



Montrer que si (J, φ) est une solution maximale de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = \sqrt{y^2 + t^2}$$

sur un intervalle J contenu dans $]0, +\infty[$ alors $J =]0, +\infty[$

EXERCICE 21

Solutions maximales d'une équation diff non linéaire

📖 Titre : Solutions maximales d'une équation diff non linéaire

🔖 ID : 458 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 444

★ Difficulté :



On considère l'équation différentielle : $(E) \quad y' = y^3 + t^3$. Pour tout $a \in [0, +\infty[$, on note (I_a, φ_a) la solution maximale de (E) tel que $\varphi_a(0) = a$.

1. Démontrer que φ_a est strictement croissante sur I_a
2. Démontrer que I_a est majoré, soit alors $b = \sup(I_a)$
3. Prouver que : $\lim_{t \rightarrow b^-} \varphi_a(t) = +\infty$

EXERCICE 22

Solution développable en série entière d'une équation diff

📖 Titre : Solution développable en série entière d'une équation diff

🔖 ID : 487 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 469

★ Difficulté :



1. Déterminer les séries entières solutions au voisinage de 0 de l'équation différentielle $(E) \quad y'' + 2xy' + 2y = 0$.
2. Exprimer parmi celles-ci, celles dont la somme est une fonction paire.

EXERCICE 23

Etude qualitative d'une équation différentielle du second ordre

📖 Titre : Etude qualitative d'une équation différentielle du second ordre

🔖 ID : 488 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 470

★ Difficulté :



On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + \cos^2(t)y = 0$$

1. Justifier l'existence d'une solution u de (E) telle que $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.
2. Démontrer l'existence de deux réels α, β vérifiant

$$\alpha < 0 < \beta, u'(\alpha) > 0 \text{ et } u'(\beta) < 0$$

En déduire que u possède au moins un zéro dans $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

3. Justifier l'existence de réels

$$\gamma = \max\{t < 0 \mid u(t) = 0\} \text{ et } \delta = \min\{t > 0 \mid u(t) = 0\}$$

4. Soit v une solution de (E) linéairement indépendante de u . En étudiant les variations de

$$W = uv' - u'v$$

montrer que v possède au moins un zéro dans $] \gamma; \delta[$.

5. Soit w une solution non nulle de (E) . Démontrer que w admet une infinité de zéros. On pourra introduire pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$w_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto w(t - n\pi)$$

EXERCICE 24**Condition pour avoir une solution periodique**

📖 **Titre :** Condition pour avoir une solution periodique

🔖 **ID :** 567 ⌚ **Durée :** —

📊 **Niveau :** L2 | **N° :** 548

★ **Difficulté :**



Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction 2π -périodique. Existe-t-il $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, une fonction 2π -périodique et solution de

$$y'' + y = f?$$

EXERCICE 25**Solution developpable en série entière d'une équation différentielle**

📖 **Titre :** Solution developpable en série entière d'une équation différentielle

🔖 **ID :** 689 ⌚ **Durée :** —

📊 **Niveau :** L2 | **N° :** 670

★ **Difficulté :**



Chercher les fonctions y développables en série entière au voisinage de 0, solutions de l'équation différentielle

$$(2 + x^2) y'' - xy' + y = 0.$$

EXERCICE 26**Comportement de solutions d'équations diff**

📖 **Titre :** Comportement de solutions d'équations diff

🔖 **ID :** 700 ⌚ **Durée :** —

📊 **Niveau :** L2 | **N° :** 681

★ **Difficulté :**



Soit $p : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ et on considère l'équation différentielle $(E) : y'' + p(t)y = 0$. On considère une solution f de (E) .

1. Prouver que si f est bornée alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.
2. Montrer que (E) admet des solutions bornées.

EXERCICE 27**Equation différentielle linéaire**

📖 **Titre :** Equation différentielle linéaire

🔖 **ID :** 701 ⌚ **Durée :** —

📊 **Niveau :** L2 | **N° :** 682

★ **Difficulté :**



$(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé réel, et pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on note

$$\|u\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

On considère l'équation différentielle linéaire $y' = a(t).y$, où $a : [0, +\infty[\rightarrow \mathcal{L}(E)$ est une application continue tel que $t \mapsto \|a(t)\|$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

1. Démontrer que si y est une solution de (E) alors y est bornée sur $[0, +\infty[$.
2. Démontrer que si y est une solution de (E) alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ existe dans E .

EXERCICE 28**Solution periodique equation linéaire premier ordre**

📖 **Titre :** Solution periodique equation linéaire premier ordre

🔑 **ID :** 702 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 683

★ **Difficulté :**



Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$ et une application

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(x),$$

continue sur $\mathbb{R}$ et T -périodique.

On considère l'équation différentielle :

$$(E_f) \quad y' - y = f(t).$$

1. Démontrer que (E_f) admet une et une seule solution g sur $\mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer qu'une telle solution g est alors T -périodique.