

Thème : Calcul différentiel

EXERCICE 1

Fonction discontinue admettant les dérivées partielles

📖 Titre : Fonction discontinue admettant les dérivées partielles

🔑 ID : 404 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 390

★ Difficulté :



On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ tel que , pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on aie :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Prouver que f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$
2. Prouver que f est discontinue au point $(0, 0)$

EXERCICE 2

Etude de continuité et différentiabilité selon un paramètre

📖 Titre : Etude de continuité et différentiabilité selon un paramètre

🔑 ID : 405 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 391

★ Difficulté :



Soit $a \in \mathbb{R}$ et f l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ tel que :

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^a \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Démontrer les assertions suivantes :

- (1) f est continue si et seulement si $a > 0$
- (2) f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $a > \frac{1}{2}$.
- (3) f est de classe C^1 si et seulement si $a > 1$.

EXERCICE 3

Contre-exemple à propos des dérivées suivant tout vecteur

📖 Titre : Contre-exemple à propos des dérivées suivant tout vecteur

🔑 ID : 406 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 392

★ Difficulté :



Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$.

Démontrer que :

1. f est continue au point $(0, 0)$
2. f est dérivable au point $(0, 0)$ suivant tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$
3. f n'est pas différentiable au point $(0, 0)$.

EXERCICE 4

Discontinue et admet dérivée suivant tout vecteur

📖 **Titre :** Discontinue et admet dérivée suivant tout vecteur

🔑 **ID :** 407 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 393

★ **Difficulté :**



Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Démontrer que :

1. f est discontinue au point $(0, 0)$
2. f est dérivable au point $(0, 0)$ suivant tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$

EXERCICE 5 Contre-exemple; Théorème de Shwarz

📖 **Titre :** Contre-exemple; Théorème de Shwarz

🔑 **ID :** 408 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 394

★ **Difficulté :**



Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$.

1. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.
2. Comment expliquer ce résultat ?

EXERCICE 6 Différentiable et dérivée partielle discontinue

📖 **Titre :** Différentiable et dérivée partielle discontinue

🔑 **ID :** 409 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 395

★ **Difficulté :**



On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ tel que , pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on aie :

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Prouver que f est différentiable au point $(0, 0)$
2. Prouver que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue au point $(0, 0)$

EXERCICE 7 Exemples d'études d'extremums

📖 **Titre :** Exemples d'études d'extremums

🔑 **ID :** 410 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 396

★ **Difficulté :**



Déterminer les extremums locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
2. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$
3. $f(x, y) = x^3 + y^3$
4. $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$
5. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

EXERCICE 8**Recherche d'extrémums sur un fermé**

📖 **Titre :** Recherche d'extrémums sur un fermé

🔖 **ID :** 411 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 397

★ **Difficulté :**



Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 9\}$. Trouver les extremums sur D de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1$.

EXERCICE 9**Recherche d'extremums**

📖 **Titre :** Recherche d'extremums

🔖 **ID :** 412 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 398

★ **Difficulté :**



Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(x, y) = xe^y + ye^x$. Étudier si f a des extremums.

EXERCICE 10**Différentiabilité des normes non euclidiennes**

📖 **Titre :** Différentiabilité des normes non euclidiennes

🔖 **ID :** 413 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 399

★ **Difficulté :**



1. Pour tout $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(X) = \|X\|_1 = |x_1| + |x_2|$ et $g(X) = \|X\|_\infty = \sup(|x_1|, |x_2|)$. Étudier la différentiabilité de f et g sur $\mathbb{R}^2$ en précisant la partie de $\mathbb{R}^2$ des points où f (rep. g) est différentiable.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Démontrer que la norme euclidienne associée est différentiable sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et préciser sa différentielle en tout point de U .
 - (a) En utilisant les composées d'applications différentiables
 - (b) En calculant les dérivées partielles.

EXERCICE 11**Différentiabilité de $M \mapsto M^2$ (matrices)**

📖 **Titre :** Différentiabilité de $M \mapsto M^2$ (matrices)

🔖 **ID :** 414 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 400

★ **Difficulté :**



1. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer la différentielle de f en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $g : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(M) = \text{tr}(M^3)$. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer la différentielle de g en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. **Généralisation :** Répondre aux mêmes questions avec $f(M) = M^p$ et $g(M) = \text{tr}(M^p)$ où $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$

EXERCICE 12**Un exemple de fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$**

📖 **Titre :** Un exemple de fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$

🔖 **ID :** 415 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 401

★ **Difficulté :**



On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ tel que , pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on aie :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Prouver que f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$
2. Prouver que f n'est pas différentiable au point $(0, 0)$
3. Étudier la continuité de f au point $(0, 0)$.

EXERCICE 13

Etude de $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

📖 **Titre :** Etude de $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

🔑 **ID :** 416 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 402

★ **Difficulté :**



Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

1. Quel est l'ensemble de définition D de f ?
2. f est elle de classe C^1 sur D ?
3. Soit $a = (0, 1)$ et $n = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Calculer en fonction de α et β , le nombre réel $\partial_n f(a)$, le nombre dérivé de f au point a suivant n .

EXERCICE 14

Equations aux dérivées partielles

📖 **Titre :** Equations aux dérivées partielles

🔑 **ID :** 417 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 403

★ **Difficulté :**



1. Trouver les applications $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = 0$
2. Trouver les applications $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de : $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$
On pourra pose $\varphi(u, v) = \frac{1}{2}(u + v, u - v)$ et $G = F \circ \varphi$.

EXERCICE 15

Fonction à deux variables à partir d'une à une seule

📖 **Titre :** Fonction à deux variables à partir d'une à une seule

🔑 **ID :** 418 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 404

★ **Difficulté :**



Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable et soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}.$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ si et seulement si F est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que si f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ alors F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 16

Equation aux dérivées partielles et changement de variable

📖 **Titre :** Equation aux dérivées partielles et changement de variable

🔑 **ID :** 419 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 405

★ **Difficulté :**



Pour tout $(s, u) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $u(r, s) = (r^2 + s^2, 2rs)$. Soit $U = \{(r, s) \in \mathbb{R}^2 / r > s > 0\}$

1. Justifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$
2. Prouver que u est injective et de classe C^1 sur U et qu'elle induit une bijection notée aussi u de U vers $V = u(U)$.
3. Déterminer $V = u(U)$ et soit $v : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $v(x, y) = u^{-1}(x, y)$. Démontrer que v est de classe C^1 sur V .
4. Soit f une application de classe C^2 de V vers $\mathbb{R}$. On note (x, y) la variable décrivant V et $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ les premières dérivées partielles de f , et ainsi de suite pour les dérivées partielles d'ordre 2. Soit $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $g(r, s) = f(u(r, s))$ pour tout $(r, s) \in U$.
Exprimer les dérivées partielles : $\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial r \partial s}$ au point $(r, s) \in U$ en fonction en fonction des dérivées partielles de f au point $(x, y) = u((r, s)) \in V$

EXERCICE 17 Equation aux dérivées partielles

📖 **Titre :** Equation aux dérivées partielles

🔑 **ID :** 420 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 406

★ **Difficulté :**



Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > |x|\}$. Trouver toutes les applications $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U tel que :

$$\forall (x, y) \in U \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}$$

en utilisant le changement de variables défini par : $\begin{cases} u = x + y \\ v = y - x \end{cases}$

EXERCICE 18 Résolution d'une EDP avec changement de variable

📖 **Titre :** Résolution d'une EDP avec changement de variable

🔑 **ID :** 421 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 407

★ **Difficulté :**



En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = 2x + 3y \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$3 \frac{\partial f}{\partial x} - 2 \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

EXERCICE 19 Equation aux dérivées partielles $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$

📖 **Titre :** Equation aux dérivées partielles $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$

🔑 **ID :** 422 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 408

★ **Difficulté :**



En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

EXERCICE 20

Equation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$

📖 **Titre :** Equation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$

🔑 **ID :** 423 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 409

★ **Difficulté :**



Soit $c > 0$. En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

EXERCICE 21

Fonctions homogènes : Une étude

📖 **Titre :** Fonctions homogènes : Une étude

🔑 **ID :** 424 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 410

★ **Difficulté :**



Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$(1) \quad (\forall t \in \mathbb{R}_+^*)(\forall (x, y) \in U) \quad (tx, ty) \in U$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est homogène de degré α si :

$$(1) \quad (\forall t \in \mathbb{R}_+^*)(\forall (x, y) \in U) \quad f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

- On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U , homogène de degré α . Démontrer que les applications $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont homogènes de degré β à déterminer en fonction de α .
- On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U , homogène de degré α .
 - Prouver que : $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$ (Égalité d'Euler).
 - Démontrer que, réciproquement, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant l'égalité d'Euler alors f est homogène de degré α .
- Dans cette question, on pose : $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < y < x\}$
 - Vérifier que U est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$ vérifiant la condition (1) ci-dessus.
 - Soit b un nombre réel donné. Déterminer toutes les applications : $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, homogènes tel que :

$$\frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{b}{x^2 + y^2}$$

EXERCICE 22

Quotient de Rayleigh : Gradient et points critiques

📖 **Titre :** Quotient de Rayleigh : Gradient et points critiques

🔑 **ID :** 425 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 411

★ **Difficulté :**



On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle et f la fonction définie sur l'ouvert $U = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ par $f(X) = \frac{\langle AX, X \rangle}{\langle X, X \rangle}$

1. Justifier que f est de classe C^∞ sur U .
2. Déterminer $\nabla f(X)$ pour tout $X \in U$.
3. Démontrer que les points critiques de f sont les vecteurs propres de A .

EXERCICE 23

Différentiabilité d'une application définie par intégrale

📖 **Titre :** Différentiabilité d'une application définie par intégrale

🔑 **ID :** 426 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 412

★ **Difficulté :**



Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe et est continue sur $I \times J$. Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 tel que $\varphi(I) \subset J$. On donne $a \in I$ et l'on définit

$$F : I \times J \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto F(x, y) = \int_a^{\varphi(x)} f(t, y) dt$$

1. Démontrer que F est continûment différentiable sur $I \times J$ et préciser sa différentielle.
2. Démontrer que si $I = J$ alors

$$G : I \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto G(x) = F(x, x)$$

est dérivable sur I et donner sa dérivée.

EXERCICE 24

Projection orthogonale et différentiabilité

📖 **Titre :** Projection orthogonale et différentiabilité

🔑 **ID :** 427 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 413

★ **Difficulté :**



Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \neq E$ et π_F la projection orthogonale de E sur F . On pose pour tout $x \in E$:

$$f(x) = \|x - \pi_F(x)\|.$$

1. Montrer que $x \mapsto \pi_F(x)$ est 1-lipschitzienne et que pour tout $x, y \in E \setminus F$, on a :

$$\langle \pi_F(x) - \pi_F(y), x - \pi_F(x) \rangle \leq \langle \pi_F(x) - \pi_F(y), x - y \rangle \leq \|x - y\|^2$$

2. Soit $U = E \setminus F$. Justifier que U est une partie ouverte de E et démontrer que f est différentiable sur U et préciser sa différentielle en tout point $a \in U$.

EXERCICE 25

Application $f : E \rightarrow E$ tel que $\forall (x, h) \in E^2, \langle df(x)(h), h \rangle \geq \|h\|^2$

📖 **Titre :** Application $f : E \rightarrow E$ tel que

$\forall (x, h) \in E^2, \langle df(x)(h), h \rangle \geq \|h\|^2$

🔑 **ID :** 428 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 414

★ **Difficulté :**



Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien et $f : E \rightarrow E$ une application de classe C^1 sur E et vérifiant :

$$\forall (x, h) \in E^2, \langle df(x)(h), h \rangle \geq \|h\|^2$$

1. Soit $(x, y) \in E^2$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on pose $\gamma(t) = (1 - t)x + ty$ et $\varphi(t) = \langle \gamma(t), y - x \rangle$. Vérifier que φ est dérivable sur $[0, 1]$ et calculer $\varphi'(t)$, pour tout $t \in [0, 1]$. En déduire que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\|$$

2. Montrer que $f(E)$ est dense dans E , puis que f est bijective.
3. Démontrer que f^{-1} est continue sur E .

EXERCICE 26

Différentiabilité et convexité

📖 Titre : Différentiabilité et convexité

🔖 ID : 429 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 415

★ Difficulté :



Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique. On identifie tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ à la matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée par les coordonnées de x relativement à la base canonique. Soit U un ouvert convexe de E . Une application $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si :

$$\forall (x, y) \in U^2, \forall t \in [0, 1], u((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)u(x) + tu(y).$$

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur U .

1. Montrer que f est convexe dans U si et seulement si :

$$\forall (x, x_0) \in U^2, f(x) \geq f(x_0) + df(x_0)(x - x_0)$$

2. On suppose maintenant que f est de classe C^2 sur U et pour tout $(h, k) \in E^2$, de coordonnées respectives $(h_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(k_i)_{1 \leq i \leq n}$, on pose :

$$\Phi(a)(h, k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i k_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = {}^t H A K$$

où H et K sont les colonnes de coordonnées respectives de h et k et A est la matrice $A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

- (a) Montrer que si f est convexe sur U alors :

$$\forall (x, h) \in U \times E, \Phi(x)(h, h) \geq 0$$

- (b) Montrer que réciproquement, si :

$$\forall (x, h) \in U \times E, \Phi(x)(h, h) \geq 0$$

alors f est convexe sur U .

3. Montrer que si f est convexe sur U alors pour tout $a \in U$, si $df(a) = \theta$ (θ étant l'application nulle de E vers $\mathbb{R}$.) alors f admet un minimum absolu en a .

EXERCICE 27

Liste d'application pour étudier si de classe C^1

📖 Titre : Liste d'application pour étudier si de classe C^1

🔖 ID : 430 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 416

★ Difficulté :



Les applications f suivantes sont-elles de classe C^1 ? :

- $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), f(0, 0) = 0$
- $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ si $x^2 + y^2 \neq 0, 0$ sinon,

3. $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $x^2 + y^2 \neq 0$, 0 sinon
4. $f(x, y) = \frac{x \sin(y) - y \sin(x)}{x^2+y^2}$ si $x^2 + y^2 \neq 0$, 0 sinon
5. $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|}$ si $x^2 + y^2 \neq 0$, 0 sinon,
6. $f(x, y) = \exp \left[\frac{1}{x^2+y^2-1} \right]$ si $x^2 + y^2 < 1$, 0 sinon
7. $f(x, y) = y^2 \sin \frac{x}{y}$, pour $y \neq 0$, 0 si $y = 0$
8. $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ si $x^2 + y^2 < 1$, 0 sinon
9. $f(x, y) = (x + y) \sqrt{x^2 + y^2} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$ si $x^2 + y^2 \neq 0$, 0 sinon
10. $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ si $x^2 + y^2 \neq 0$, 0 sinon (α est un réel)

EXERCICE 28

$$\text{Etude de } g(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{pour } x \neq y \\ f'(x) & \text{pour } x = y \end{cases}$$

■ **Titre :** Etude de $g(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{pour } x \neq y \\ f'(x) & \text{pour } x = y \end{cases}$

◆ **ID :** 431 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 417

★ **Difficulté :**
★ ★ ★ ★ ★

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{pour } x \neq y \\ f'(x) & \text{pour } x = y \end{cases}$$

1. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. On suppose que f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 29

$$\text{EDP } 2x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial f}{\partial y} - 1 = 0$$

■ **Titre :** EDP $2x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial f}{\partial y} - 1 = 0$

◆ **ID :** 432 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 418

★ **Difficulté :**
★ ★ ★ ★ ★

Soit l'application ϕ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\phi(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$.

1. ϕ est-elle différentiable ? Quelle est sa matrice jacobienne ? En quels points le déterminant jacobien est-il nul ?
2. Déterminer en fonction de x, y et du signe de y , les antécédents par ϕ d'un couple quelconque (x, y) de $\mathbb{R}^2$.
3. En déduire que la restriction $\tilde{\phi}$ de ϕ à l'ensemble Δ tel que :

$$\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / v > 0 \text{ ou } (v = 0 \text{ et } u \geq 0)\}$$

est une bijection de Δ sur $\mathbb{R}^2$.

Montrer que $\tilde{\phi}^{-1}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et soit $F = f \circ \tilde{\phi}$. Exprimer $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$ à l'aide de u, v et des dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

5. Quelles sont les solutions de classe C^2 de l'équation aux dérivées partielles :

$$2x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial f}{\partial y} - 1 = 0 ?$$

EXERCICE 30

Continuité et différentiabilité d'une application à deux variables

📖 **Titre :** Continuité et différentiabilité d'une application à deux variables

🔖 **ID :** 433 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 419

★ **Difficulté :**
★ ★ ★ ★ ★

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{x} e^{-\frac{|y|}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Etudier la continuité de f .
2. Etudier la différentiabilité de f .

EXERCICE 31

Exemple d'application réelle à deux variables réelles

📖 **Titre :** Exemple d'application réelle à deux variables réelles

🔖 **ID :** 434 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 420

★ **Difficulté :**
★ ★ ★ ★ ★

On considère :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Étudier :

1. La continuité de f .
2. L'existence des dérivées partielles d'ordre 1 de f .
3. La continuité des dérivées partielles d'ordre 1 de f .

EXERCICE 32

Différentiabilité d'une fonction rationnelle à deux variables

📖 **Titre :** Différentiabilité d'une fonction rationnelle à deux variables

🔖 **ID :** 435 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 421

★ **Difficulté :**
★ ★ ★ ★ ★

Soit

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - z^2 \neq 0\}$$

et on considère l'application

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}; (x, y, z) \in U \mapsto f(x, y, z) = \frac{x^4 + y^4 - z^4}{x^2 + y^2 - z^2}.$$

1. Justifier que U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrer que f est continue sur U .
3. Montrer que $(0, 0, 0)$ est un point adhérent à U .
4. Est ce que f admet une limite quand (x, y, z) tend vers $(0, 0, 0)$?

EXERCICE 33

Etude de $f; \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|}$

📖 **Titre :** Etude de $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = \frac{x}{1+\|x\|}$

🔑 **ID :** 436 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 422

★ **Difficulté :**



On considère la fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f(x) = \frac{x}{1+\|x\|}$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

1. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer sa différentielle (distinguer le cas $x = 0$).
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.
3. En utilisant le théorème des accroissements finis démontrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$.

EXERCICE 34

Inégalité des accroissements finis pour une norme euclidienne

📖 **Titre :** Inégalité des accroissements finis pour une norme euclidienne

🔑 **ID :** 437 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 423

★ **Difficulté :**



Soit n un entier naturel non nul. $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, pour tout

$x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbb{R}^n$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire, donc $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

On considère deux nombre réels a et b tel que $a < b$, et soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ des applications continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ et on suppose que l'on a la condition :

$$(\star) \quad \forall t \in]a, b[, \|f'(t)\| \leq g'(t)$$

1. Soient $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ des applications continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$

(a) On suppose que :

$$(\star) \quad \forall t \in]a, b[, u'(t) \leq v'(t),$$

Démontrer que :

$$u(b) - u(a) \leq v(b) - v(a).$$

(b) On suppose que :

$$(\star)' \quad \forall t \in]a, b[, |u'(t)| \leq v'(t).$$

Démontrer que :

$$|u(b) - u(a)| \leq v(b) - v(a).$$

2. On suppose que $\forall t \in [a, b], g(t) = Mt + M'$ où M, M' sont des constante réelles et $M \geq 0$. En considérant la fonction h définie sur $[a, b]$ par $h(t) = \langle f(t), A \rangle$ où $A = f(b) - f(a)$, démontrer que $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a)$.
3. On retourne au cas général. En considérant la fonction h ci-dessus, démontrer que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

EXERCICE 35

Quotient de Rayleigh

📖 **Titre :** Quotient de Rayleigh

🔑 **ID :** 551 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 532

★ **Difficulté :**



n designe un entier naturel tel que $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique, on note $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique et f l'application définie de l'ouvert U vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall X \in U, f(X) = \frac{\langle AX, X \rangle}{\langle X, X \rangle} = \frac{{}^t X A X}{\|X\|^2}.$$

On note

$$\lambda_1 = \min_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (\lambda) \text{ et } \lambda_n = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (\lambda).$$

On peut alors noter $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tel que

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$$

la liste des valeurs propres de A rangées dans l'ordre croissant et comptées avec leur multiplicités.,

1. Démontrer que $f(U) = [\lambda_1, \lambda_n]$.
2. Démontrer que f est de classe C^∞ sur U .
3. Démontrer que pour tout $X \in U$, on a

$$\nabla f(X) = \frac{2}{\|X\|^2} (AX - f(X)X).$$

En déduire que les points critiques de f sont exactement les vecteurs propres de A .

4. Soit $X \in U$ un point critique de f . Démontrer que la hessienne de f au point X est :

$$\mathfrak{H}f(X) = \frac{2}{\|X\|^2} (A - f(X)I_n).$$

En déduire que pour tout vecteur propre X de A tel que $AX = \lambda X$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \neq \lambda_1$ et $\lambda \neq \lambda_n$, on a X est un point selle de f .