

Thème : Séries entières

EXERCICE 1 Exemples d'études de séries entières

📖 Titre : Exemples d'études de séries entières

🔑 ID : 335 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 321

★ Difficulté :



1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\text{a) } \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 1}{3^n} z^n \quad \text{b) } \sum_{n \geq 0} e^{-n^2} z^n \quad \text{c) } \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n} \quad \text{d) } \sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$$

2. Déterminer le rayon de convergence de :

$$\text{a) } \sum_{n \geq 0} n! z^n \quad \text{b) } \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} z^n \quad \text{c) } \sum_{n \geq 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n \quad \text{d) } \sum_{n \geq 0} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \right) z^n$$

3. Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\text{a) } \sum_{n \geq 0} z^{n^2} \quad \text{b) } \sum_{n \geq 0} \sin(n) z^n \quad \text{c) } \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$$

EXERCICE 2 Deux séries entières, un contre-exemple

📖 Titre : Deux séries entières, un contre-exemple

🔑 ID : 336 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 322

★ Difficulté :



a) Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$$\sum \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) x^n \text{ et } \sum \sin(e^{-n}) x^n$$

b) Une série entière converge-t-elle normalement sur son disque ouvert de convergence ?

EXERCICE 3 Série entière dont les coefficients sont les termes d'une suite récurrentes

📖 Titre : Série entière dont les coefficients sont les termes d'une suite récurrentes

🔑 ID : 337 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 323

★ Difficulté :



Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ où (a_n) est la suite déterminée par

$$a_0 = \alpha, a_1 = \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

EXERCICE 4 Les séries entières $\sum d(n)z^n$ et $\sum s(n)z^n$

📖 **Titre :** Les séries entières $\sum d(n)z^n$ et $\sum s(n)z^n$

🔑 **ID :** 338 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 324

★ **Difficulté :**



Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} d(n)z^n \text{ et } \sum_{n \geq 1} s(n)z^n$$

où $d(n)$ et $s(n)$ désignent respectivement le nombre de diviseurs supérieurs à 1 de l'entier n et la somme de ceux-ci.

EXERCICE 5

Série entière dont les coefficients sont les termes d'une suite récurrente

📖 **Titre :** Série entière dont les coefficients sont les termes d'une suite récurrente

🔑 **ID :** 339 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 325

★ **Difficulté :**



On considère un nombre réel strictement positif a et soit (a_n) la suite réelle définie par $a_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum a_n x^n$.
2. Donner un équivalent de a_n et retrouver le résultat de la question 1).
3. On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la fonction associée à la série entière en question. Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tends vers R à gauche.

EXERCICE 6

Une série entière dont le rayon de convergence est non évident

📖 **Titre :** Une série entière dont le rayon de convergence est non évident

🔑 **ID :** 340 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 326

★ **Difficulté :**



On considère la série entière $\sum a_n z^n$ où $a_n = \frac{1}{\sin(n\pi\sqrt{3})}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On note R son rayon de convergence

1. Prouver que $R \leq 1$.
2. (a) Prouver que : $\forall t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}|t| \leq |\sin(t)| \leq |t|$.
(b) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un et un seul entier naturel k_n tel que $(n\sqrt{3} - k_n)\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
(c) En déduire l'existence d'une suite (b_n) tel que $|a_n| \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b_n = O(n)$ quand n tends vers $+\infty$.
(d) En déduire que $R = 1$.

EXERCICE 7

Série entière dont les coefficients utilisent H_n (série harmonique)

📖 **Titre :** Série entière dont les coefficients utilisent H_n (série harmonique)

🔑 **ID :** 341 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 327

★ **Difficulté :**



1. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes. On suppose que la série $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R . Déterminer les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n \ln(n) z^n$ et $\sum a_n H_n z^n$ où $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Donner un équivalent simple de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$ quand x tend vers 1 à gauche.

EXERCICE 8

Exercice utilisant une série entière

📖 **Titre :** Exercice utilisant une série entière

🔑 **ID :** 342 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 328

★ **Difficulté :**



1. Soit une série entière de coefficient $a_n, n \geq 0$ de rayon de convergence R avec $R > 0$. Montrer que la série entière de coefficient $\frac{a_n}{n!}$ est de rayon de convergence infini.
2. Pour tout nombre réel t on pose :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x > r$, la fonction φ définie par

$$\varphi(t) = f(t)e^{-xt}$$

soit intégrable sur $[0, +\infty[$ et exprimer cette intégrale sous la forme de série entière en $\frac{1}{x}$.

EXERCICE 9

Série entière et polynômes

📖 **Titre :** Série entière et polynômes

🔑 **ID :** 343 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 329

★ **Difficulté :**



1. Montrer que, pour tout entier naturel p , il existe un polynôme R_p tel que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^p x^n = \frac{R_p(x)}{(1-x)^{p+1}}$$

Que vaut $R_p(1)$?

2. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels admettant un développement asymptotique de la forme $a_n = P(n) + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où P est un polynôme de degré p
 - (a) Trouver le rayon de convergence R de la série entière de coefficient a_n
 - (b) Pour $x \in]-R, R[$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Montrer que S admet en R une limite infinie et en $-R$ une limite finie.

EXERCICE 10

Série entière coefficients avec partie entière

📖 **Titre :** Série entière coefficients avec partie entière

🔑 **ID :** 344 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 330

★ **Difficulté :**



Pour tout nombre réel x , on note $E(x)$ la partie entière de x . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$a_n = \frac{\sqrt{n} - E(\sqrt{n})}{n},$$

et on considère la série entière $a = \sum a_n x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière a .

2. On note :

$$\begin{cases} \mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} / \sum a_n z^n \text{ converge} \} \\ \mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} / \sum a_n z^n \text{ converge absolument} \} \end{cases}$$

Déterminer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$.

EXERCICE 11

Série entière et divers domaines de convergence

📖 **Titre :** Série entière et divers domaines de convergence

🔑 **ID :** 345 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 331

★ **Difficulté :**



Pour tout entier naturel n , on pose :

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{n!}$$

et on considère la série entière $a = \sum a_n x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière a .

2. Déterminer $\mathcal{C}_a = \{x \in \mathbb{R} / \sum a_n x^n \text{ CV} \}$ et $\mathcal{A}_a = \{x \in \mathbb{R} / \sum a_n x^n \text{ ACV} \}$. On pourra utiliser la formule de Stirling : quand n tends vers $+\infty$, on a $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

EXERCICE 12

Quelques comportements au bord de l'intervalle ouvert de convergence

📖 **Titre :** Quelques comportements au bord de l'intervalle ouvert de convergence

🔑 **ID :** 346 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 332

★ **Difficulté :**



Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et on considère la série entière $a = \sum a_n x^n$ et la fonction associée : $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

2. Étudier la convergence de $\sum a_n x^n$ aux points $x = -R$ et $x = R$.

3. (a) Soit $M > 0$. Montrer que :

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \exists \delta > 0, \forall x \in]1 - \delta, 1[, \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \geq M.$$

(b) En déduire la limite de $f(x)$ quand x tends vers 1 à gauche.

4. On considère la série entière $\sum b_n x^n$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, b_n = \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right) x^n,$$

et soit $g : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} b_n x^n$ la fonction qui lui est associée.

(a) Démontrer que la série $\sum b_n x^n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

(b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x)f(x) = 0$

EXERCICE 13

Expression intégrale des coefficients d'une série entière, application

📖 **Titre :** Expression intégrale des coefficients d'une série entière, application

🔑 **ID :** 347 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 333

★ **Difficulté :**
★ ★ ★ ★ ★

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, on pose : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

1. Soit $r \in]0, R[$. Montrer que :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

2. En déduire que si $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ alors, $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$.

3. **Application :** Supposons f bornée sur $\mathbb{C}$, développable en série entière de rayon de convergence infini. Montrer qu'alors f est constante.

EXERCICE 14 un peu de Tauber série entière $\sum u_n x^n$ tel que $u_n = o(1/n)$

📖 **Titre :** un peu de Tauber série entière $\sum u_n x^n$ tel que $u_n = o(1/n)$

🔑 **ID :** 348 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 334

★ **Difficulté :**
★ ★ ★ ★ ★

Soit $\sum u_n x^n$, ($n \geq 0$) une série entière de rayon de convergence 1, de somme $f(x)$ sur $] -1, 1[$. On suppose que : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = S$, et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = 0$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, 1[$ et $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer que :

$$|S_n - f(x)| \leq (1-x) \left(\sum_{k=0}^n |k u_k| \right) + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} |k u_k| x^k$$

2. En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(S_n - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right) = 0$$

3. Montrer alors que la série $\sum u_n$ converge et a pour somme S

EXERCICE 15 Série entière et développement asymptotique

📖 **Titre :** Série entière et développement asymptotique

🔑 **ID :** 349 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 335

★ **Difficulté :**
★ ★ ★ ★ ★

On étudie la série entière $\sum a_n x^n$ avec :

$$a_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n} \right).$$

Préciser le convergence, le domaine de définition de la somme puis en donner un équivalent en 1

EXERCICE 16 Théorème de convergence radial d'Abel

📖 **Titre :** Théorème de convergence radial d'Abel

🔑 **ID :** 350 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 336

★ **Difficulté :**
★ ★ ★ ★ ★

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et soit z_0 un complexe tel que $|z_0| = R$ et la série numérique $\sum a_n z_0^n$ est convergente, alors la série entière $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur la segment $[0, z_0]$. On pourra remarquer qu'en posant $z = tz_0$, on peut se ramener à $R = 1$ et le segment $[0, 1]$

EXERCICE 17 Des études avec séries entières

📖 Titre : Des études avec séries entières

🔑 ID : 351 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 337

★ Difficulté :



Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue tel que : $\forall t \in [0, 1] \quad \varphi(t) > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t^n + \varphi(t)} dt$.

1. Calculer de façon très simple le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. On se propose de donner un équivalent simple de a_n et de déduire le résultat trouvé dans 1).

(a) Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = \ln \frac{1 + \varphi(0)}{\varphi(0)}.$$

(b) Retrouver le résultat de la question 1) ci-dessus.

EXERCICE 18 Action d'une suite sur une série entière

📖 Titre : Action d'une suite sur une série entière

🔑 ID : 352 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 338

★ Difficulté :



1. On considère une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R .
 - (a) Démontrer que pour tout nombre réel non nul q le rayon de convergence de la série entière $\sum q^n a_n x^n$ est $R_q = \frac{R}{|q|}$
 - (b) Démontrer que pour tout nombre réel α , le rayon de convergence de la série entière $\sum n^\alpha a_n x^n$ est $R_\alpha = R$.
2. Soit (α_n) une suite de complexes non nuls tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} \right| = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
 - (a) Démontrer que pour toute série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R , le rayon de convergence de $\sum \mu_n a_n x^n$ est $R_\alpha = \frac{R}{\ell}$.
 - (b) Retrouver le résultat établi dans 1)b) ci-dessus avec $\mu_n = n^\alpha$

EXERCICE 19 Série entière $\sum a_n x^n$ et $\sum (-1)^n a_n x^n$ avec a_n une intégrale

📖 Titre : Série entière $\sum a_n x^n$ et $\sum (-1)^n a_n x^n$ avec a_n une intégrale

🔑 ID : 353 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 339

★ Difficulté :



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Étudier la convergence de $\sum a_n R^n$ et celle de $\sum (-1)^n a_n R^n$.

EXERCICE 20 Série entière $\sum \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1}) x^n$

📖 **Titre :** Serie entière $\sum \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})x^n$

🔑 **ID :** 354 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 340

★ **Difficulté :**



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Étudier la convergence de $\sum a_n R^n$ et celle de $\sum (-1)^n a_n R^n$.

EXERCICE 21 Rang et dimension de sous-espaces vectoriels

📖 **Titre :** Rang et dimension de sous-espaces vectoriels

🔑 **ID :** 674 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 655

★ **Difficulté :**



Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle n et f et g deux endomorphismes de E tel que $f \circ g = \theta$ et $f + g \in \mathbf{GL}(E)$. Démontrer que $\text{Im}(f) = \ker(g)$.

Une question qu'on peut ajouter :

Donner des exemples de tels endomorphismes.

EXERCICE 22 Série entière et équivalent au voisinage de $+\infty$

📖 **Titre :** Série entière et équivalent au voisinage de $+\infty$

🔑 **ID :** 685 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 666

★ **Difficulté :**



1. Montrer que la série entière de terme général $(1 + \frac{1}{n})^{n^2} \frac{x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.
2. Pour tout x réel, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{e}} e^{ex}.$$

Montrer que lorsque x tend vers $+\infty$, on a

$$f(x) \sim g(x).$$

EXERCICE 23 Rayon de convergence et somme d'une série entière

📖 **Titre :** Rayon de convergence et somme d'une série entière

🔑 **ID :** 688 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 669

★ **Difficulté :**



Soit la série entière de terme général

$$a_n = \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n t}{1+t} dt$$

Déterminer le rayon de convergence R de cette série et écrire sa somme sous forme d'intégrale lorsque x appartient à l'intervalle $[-R, R]$.

EXERCICE 24 DSE de $\exp(\exp(x))$

📖 **Titre :** DSE de $\exp(\exp(x))$

🔑 **ID :** 694 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 675

★ **Difficulté :**



Démontrer que la fonction $x \mapsto f(x) = \exp(\exp(x))$ est développable en série entière et préciser son rayon de convergence.