

Thème : Suites séries de fonctions II

EXERCICE 1 Une somme d'idéaux de polynômes

📖 Titre : Une somme d'idéaux de polynômes

🔑 ID : 24 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 11

★ Difficulté :



Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit : $E_a = \{P \in E / (X - a) \mid P\}$. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $a \neq b$ alors $E = E_a + E_b$. La somme est-elle directe ?

EXERCICE 2 Calcul de l'intégrale de Gauss(Wallis, CVD)

📖 Titre : Calcul de l'intégrale de Gauss(Wallis, CVD)

🔑 ID : 311 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 297

★ Difficulté :



- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt$ (intégrale de Wallis) et on se propose de prouver que quand n tends vers $+\infty$ on a $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
 - Démontrer que $W_0 = \frac{\pi}{2}$, $W_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \pi/2$ et $W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)}{(2n+1)!}$.
 - Prouver que la suite (W_n) est décroissante et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.
 - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$ (Remarquer que $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$).
 - En déduire que quand n tends vers $+\infty$ on a $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
- On se propose dans cette question de démontrer, en utilisant la question 1) et d'autres résultats que l'intégrale de Gauss $\alpha = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Pour cela on utilisera la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définie par : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq t \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } t > \sqrt{n} \end{cases}$
 - Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers une application $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ à préciser.
 - Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(t)| \leq e^{-t^2}$.
 - En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ avec $I_n = \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$.
 - Conclure.

EXERCICE 3 Integration terme à terme pour calculer une intégrale

📖 Titre : Integration terme à terme pour calculer une intégrale

🔑 ID : 312 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 298

★ Difficulté :



On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Démontrer que $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt = \frac{\pi^2}{6}$.

Indication : On pourra remarquer que : $\forall t \in]0, 1[$, $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$.

EXERCICE 4 Une formule magique : égalité d'une série et une integrale

📖 **Titre :** Une formule magique : égalité d'une série et une integrale

🔖 **ID :** 313 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 299

★ **Difficulté :**



Montrer que $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

Indication : On pourra écrire $x^{-x} = e^{-x \ln(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x \ln(x))^n}{n!}$.

EXERCICE 5 Deux suites définies par des intégrales

📖 **Titre :** Deux suites définies par des intégrales

🔖 **ID :** 314 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 300

★ **Difficulté :**



Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+\dots+t^n} dt$$

et

$$v_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+\dots+t^n} dt$$

Démontrer que la série $\sum u_n$ est divergente alors que la série $\sum v_n$ est convergente.

EXERCICE 6 Un bon exercice sur une suite définie par une integrale

📖 **Titre :** Un bon exercice sur une suite définie par une integrale

🔖 **ID :** 315 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 301

★ **Difficulté :**



Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t - 1} e^{-nt} dt$.

1. Montrer l'existence de l'intégrale définissant S_n .
2. Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, on pose : $T(a, b) = \int_0^{+\infty} t^a e^{-bt} dt$. Simplifier l'expression de $T(a, b)$.
3. Montrer que pour tout naturel n , on a : $S_0 = p! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{p+1}} + S_n$.
4. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$.
5. Montrer que $S_0 = p! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+1}}$.
6. Retrouver ce résultat en effectuant une intégration terme à terme et l'expression intégrale de S_0 .

EXERCICE 7 Intversion des symboles $\sum$ et $\int$

📖 **Titre :** Intversion des symboles $\sum$ et $\int$

🔖 **ID :** 316 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 302

★ **Difficulté :**



On pose

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \text{ pour } x \in]0, 1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

a) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

- b) Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $]0, 1]$.
 c) En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

EXERCICE 8

Utilisation de la formule de Stirling pour calculer une limite

📖 **Titre :** Utilisation de la formule de Stirling pour calculer une limite

🔑 **ID :** 317 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 303

★ **Difficulté :**



Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)} \right)$$

- a) Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$.
 b) Déterminer la limite de sa somme en $+\infty$. On pourra exploiter la formule de Stirling

EXERCICE 9

Des études sur la fonction ζ de Riemann

📖 **Titre :** Des études sur la fonction ζ de Riemann

🔑 **ID :** 318 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 304

★ **Difficulté :**



Si $x > 1$, on pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1. Quelle est la limite de $\zeta(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$?
2. Pour quels réels x la série $\sum \frac{\zeta(n)}{n} x^n$ converge-t-elle?
3. On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{n} x^n.$$

Montrer que F est continue sur $[-1, 1[$ et de classe C^1 sur $] -1, 1[$

4. Démontrer que :

$$F(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\ln \left(\frac{p}{p-x} \right) - \frac{x}{p} \right)$$

EXERCICE 10

Fonction définie par une série, étude.

📖 **Titre :** Fonction définie par une série, étude.

🔑 **ID :** 319 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 305

★ **Difficulté :**



On se donne deux nombres réels p et q tel que $\sup(p, q) > 1$ et on considère la série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n(x) = \frac{x}{n^p + x^2 n^q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on note sa somme $f(x)$ pour tout x tel que la série $\sum f_n(x)$ est convergente.

1. Prouver que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, pour toutes valeurs de p et q .
2. Donner une condition suffisante et nécessaire sur p et q pour que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

- Démontrer que si $p < q$ alors $\sum f_n$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $I_a = [a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.
- Démontrer que si $p > 1$ alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. En déduire que dans ce cas f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- Prouver que si $p \leq 1$ alors f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

EXERCICE 11 Des études concernant ζ de Riemann

📖 Titre : Des études concernant ζ de Riemann

🔖 ID : 320 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 306

★ Difficulté :



On considère la fonction ζ de Riemann définie par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

- Prouver que l'ensemble de définition de ζ est $D =]1, +\infty[$.
- Démontrer que la série de fonctions définissant ζ converge normalement sur tout intervalle de la forme $D_a = [a, +\infty[$ avec $a > 0$. En déduire que ζ est continue sur D .
- Démontrer que : $\forall x \in]1, +\infty[, 1 + \frac{2^{1-x}}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{x}{x-1}$.
- En déduire que :
 - Au voisinage de 1 à droite : $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$.
 - Au voisinage de $+\infty$: $\zeta(x) \sim \frac{x}{x-1}$.
- Démontrer que la série définissant ζ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$.
- On considère la fonction η définie par $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.
 - Prouver que l'ensemble de définition de η est $]0, +\infty[$.
 - Démontrer que la série définissant η est uniformément convergente sur tout intervalle de la forme $I_a = [a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.
 - Prouver que η est continue sur $]0, +\infty[$.
 - Démontrer que : $\forall x \in]1, +\infty[, \zeta(x) = \frac{2^x}{2-2^x} \eta(x)$.

EXERCICE 12 Etudes concernat la fonction Γ d'Euler

📖 Titre : Etudes concernat la fonction Γ d'Euler

🔖 ID : 321 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 307

★ Difficulté :



On considère la fonction Γ définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

- Déterminer l'ensemble de définition D de Γ
- Montrer que Γ est continue sur tout segment $[a, b]$ contenu dans D .
- Montrer que Γ est de classe C^1 puis C^2 sur tout segment $[a, b] \subset D$. En déduire que Γ est de classe C^2 sur D et déterminer Γ' et Γ''
- Montrer que Γ est une fonction convexe.
- Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- Calculer $\Gamma(1)$, et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(n+1) = n!$
- Déterminer un équivalent de $\Gamma(x)$ lorsque x tend vers 0. En déduire la limite de Γ en 0.
- Donner la limite de Γ en $+\infty$, ainsi que celle de $x \mapsto \frac{\Gamma(x)}{x}$

EXERCICE 13 Un contre exemple pour l'interversion des limites

📖 **Titre :** Un contre exemple pour l'interversion des limites

🔑 **ID :** 322 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 308

★ **Difficulté :**



Dans cet exercice, on admet la formule de Sterling : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, quand n tends vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(t) = \frac{t^n e^{-t}}{n!}$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!$.
2. Etudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions (f_n) . On note $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$, quand celle-ci existe.
3. Comparer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$
4. Que peut-on en conclure ?

EXERCICE 14

Fonction de classe C^1 sous forme d'une série

📖 **Titre :** Fonction de classe C^1 sous forme d'une série

🔑 **ID :** 323 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 309

★ **Difficulté :**



Montrer que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \sin nx}$$

est C^1 sur $\mathbb{R}$

EXERCICE 15

Definition, continuité et dérivabilité d'une fonction série

📖 **Titre :** Definition, continuité et dérivabilité d'une fonction série

🔑 **ID :** 324 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 310

★ **Difficulté :**



Etudier l'ensemble de définition, la continuité et la dérivabilité de la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$$

EXERCICE 16

Fonction série dérivable sur $\mathbb{R}^*$

📖 **Titre :** Fonction série dérivable sur $\mathbb{R}^*$

🔑 **ID :** 325 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 311

★ **Difficulté :**



Montrer que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{n} (1 + nx^2)}$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

EXERCICE 17

En lien avec la fonction Γ d'Euler

📖 **Titre :** En lien avec la fonction Γ d'Euler

🔖 **ID :** 326 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 312

★ **Difficulté :**



1. Montrer que $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$. On note alors $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$
2. Montrer que, pour $t > 0$, $\frac{1}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}$
3. En déduire que pour tout $x > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t-1}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{(n+1)^{x+1}}$

EXERCICE 18

Une technique pour déterminer une fonction définie par intégrale

📖 **Titre :** Une technique pour déterminer une fonction définie par intégrale

🔖 **ID :** 327 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 313

★ **Difficulté :**



$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-t^2+itx)}dt$$

1. Existence de f ?
2. Continuité de f ?
3. Dérivabilité de f ?
4. En intégrant par partie, montrer que f vérifie : $xf(x) + f'(x) = 0$
5. Trouver f sachant que $f(0) = \sqrt{\pi}$

EXERCICE 19

Technique pour expliciter une fonction définie par intégrale

📖 **Titre :** Technique pour expliciter une fonction définie par intégrale

🔖 **ID :** 328 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 314

★ **Difficulté :**



Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner $f'(x)$ sous forme intégrale.
3. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \arctan(x)$.

EXERCICE 20

Etude d'une fonction définie par une série

📖 **Titre :** Etude d'une fonction définie par une série

🔖 **ID :** 329 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 315

★ **Difficulté :**



Montrer que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} \sin(nx)$ est définie sur $]0, +\infty[$ et qu'elle est continue sur $]0, +\infty[$.
Expliciter $S(x)$. La fonction S est-elle continue en 0 ?

EXERCICE 21

Premier théorème de Dini

📖 Titre : Premier théorème de Dini

🔑 ID : 330 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 316

★ Difficulté :



1. Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de parties compactes de $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} K_n \neq \emptyset \\ K_{n+1} \subset K_n \end{cases}.$$

Démontrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.

2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq f_{n+1}$ et (f_n) converge simplement vers f , application de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ et que les f_n et f sont continues sur $[a, b]$. On se propose de prouver que la convergence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur $[a, b]$. Pour cela, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $g_n = f - f_n$.

(a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} g_n \geq 0 \\ g_{n+1} \leq g_n \end{cases}$.

(b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application g_n est bornée sur $[a, b]$. On note alors $\alpha_n = \sup_{x \in [a, b]} g_n(x)$.

(c) Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell \geq 0$. On suppose désormais que $\ell > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $K_n = \{x \in [a, b] / g_n(x) \geq \frac{\ell}{2}\}$.

(d) Démontrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ et en déduire une contradiction puis conclure.

EXERCICE 22

Deux questions pour appliquer la théorème de convergence dominée

📖 Titre : Deux questions pour appliquer la théorème de convergence dominée

🔑 ID : 331 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 317

★ Difficulté :



En utilisant le théorème de convergence dominée calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} (\sin(t))^n dt$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^n + e^t} dt$

EXERCICE 23

Deuxième théorème de Dini

📖 Titre : Deuxième théorème de Dini

🔑 ID : 332 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 318

★ Difficulté :



Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suites d'applications de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On suppose que :

(1) les applications f_n et f sont continues sur $[a, b]$;

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est croissante sur $[a, b]$;

(3) la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $[a, b]$ vers f .

Démontrer que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers f .

EXERCICE 24

Une suite de fonctions

📖 Titre : Une suite de fonctions

🔑 ID : 333 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 319

★ Difficulté :



Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = nx \sin(x)e^{-nx}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction f nulle sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la fonction $t \mapsto u(t) = te^{-t}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. En déduire que (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[1, +\infty[$.
3. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est dérivable sur $[0, 1]$ et calculer $f'_n(x)$, pour tout $x \in [0, 1]$.
(b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [1, \frac{1}{n}]$, on a $f'_n(x) > 0$.
(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$. En écrivant $f'_n(x)$ sous la forme $f'_n(x) = g_n(x)h_n(x)$ avec

$$h_n(x) = \tan(x) - \frac{x}{nx - 1}$$

et g_n est une fonction à préciser et en calculant $f'_n(\frac{2}{n})$ étudier les variations de f_n sur $[0, 1]$.

(d) Démontrer que (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$.

4. Déduire de ce qui précède que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

EXERCICE 25 Un équivalent d'une suite définie par intégrale

📖 Titre : Un équivalent d'une suite définie par intégrale

🔑 ID : 334 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 320

★ Difficulté :



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^n} dt$.

1. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
2. Démontrer que quand n tend vers $+\infty$, on a $I_n \sim \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

EXERCICE 26 Convergence dominée sommes partielles

📖 Titre : Convergence dominée sommes partielles

🔑 ID : 555 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 536

★ Difficulté :



En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

EXERCICE 27 Convergence uniforme sans avoir la convergence normale

📖 Titre : Convergence uniforme sans avoir la convergence normale

🔑 ID : 670 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 651

★ Difficulté :



Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application f_n définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}.$$

1. Tracer l'allure du graphe de f_n .

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, fixé. La série $\sum f_n(x)$ est-elle convergente?
3. Démontrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \varepsilon_n.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|.$$

Déduire M_n de l'étude des variations de f_n . La série $\sum M_n$ est-elle convergente?

EXERCICE 28

Integrale de Dirichlet

📖 Titre : Integrale de Dirichlet

🔑 ID : 693 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 674

★ Difficulté :



On pose, pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

1. Montrer que F est continue sur $[0; +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$.
2. Montrer que F est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer $F''(x)$.
3. En déduire la valeur de $F(0)$ puis la valeur de l'intégrale convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

EXERCICE 29

une série convergente avec le TCD

📖 Titre : une série convergente avec le TCD

🔑 ID : 722 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 688

★ Difficulté :



Soit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \int_0^n x^{x+1} dx$.

1. Montrer qu'il existe $c, \alpha > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{c}{n^\alpha}$
2. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?
3. Donner un équivalent simple de u_n