

## Thème : Suites séries de fonctions I

### EXERCICE 1 Une suite de fonctions

📖 Titre : Une suite de fonctions

🔖 ID : 13 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 2

★ Difficulté :



Soit  $(f_n)$  la suite de fonctions de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{\sin(nx^2)}{n^2 + 1}$$

1. Démontrer que la suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$  à préciser.
2. La convergence est-elle uniforme ?
3. Quelle est la nature de la série de fonctions  $\sum f_n$  ?

### EXERCICE 2 Trois exemples de suites de fonctions

📖 Titre : Trois exemples de suites de fonctions

🔖 ID : 295 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 281

★ Difficulté :



Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonction  $(f_n)$ .

- a)  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{n+1}{n^2+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$
- b)  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{nx^2}{1+nx}, n \in \mathbb{N}^*$
- c)  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x}{x^2+n^2}, n \in \mathbb{N}^*$ .

### EXERCICE 3 Etude d'une fonction qui est la somme d'une série de fonctions

📖 Titre : Etude d'une fonction qui est la somme d'une série de fonctions

🔖 ID : 296 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 282

★ Difficulté :



Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on pose  $f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+x}$ .

1. Démontrer que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement vers une application  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  et que la convergence est normale sur tout intervalle de la forme  $I_a = [a, +\infty[, a > 0$  et n'est pas normale sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. Démontrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

### EXERCICE 4 modes de convergence des séries de fonctions pour 7 exemples

📖 Titre : modes de convergence des séries de fonctions pour 7 exemples

🔖 ID : 297 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 283

★ Difficulté :



Dans chacun des cas suivants étudier la convergence simple, absolue, uniforme et normale de la série  $\sum f_n$ .

1.  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}, n \in \mathbb{N}$
2.  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto n^2 x^n (1-x)^n, n \in \mathbb{N}$ .
3.  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{nx^2}{n^3+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$ .
4.  $f_n : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x}{n} e^{-n^2 x^2}, n \in \mathbb{N}^*$ .
5.  $f_n : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{n+x}{n^2+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$ .
6.  $f_n : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$ .
7.  $f_n : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$ .

## EXERCICE 5

### Recherche des intervalles de convergence uniforme

📖 **Titre :** Recherche des intervalles de convergence uniforme

🔖 **ID :** 298 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 284

★ **Difficulté :**



Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n 2^n x^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

Sur quels intervalles de  $\mathbb{R}$ , la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge-t-elle uniformément ?

## EXERCICE 6

### Convergence simple et uniforme pour une suite de fonctions

📖 **Titre :** Convergence simple et uniforme pour une suite de fonctions

🔖 **ID :** 299 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 285

★ **Difficulté :**



Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  définie par  $f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$  pour tout  $x \in [0, +\infty[$

## EXERCICE 7

### Série de fonctions, convergence et continuité

📖 **Titre :** Série de fonctions, convergence et continuité

🔖 **ID :** 300 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 286

★ **Difficulté :**



Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note :  $f_n : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+x}$ .

1. Etudier la convergence de la série de fonctions  $\sum f_n$ .
2. Montrer que la somme  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

## EXERCICE 8

### Suite de fonctions dont le tg est un produit

📖 **Titre :** Suite de fonctions dont le tg est un produit

🔖 **ID :** 301 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 287

★ **Difficulté :**



Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_n(x) = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$ .

1. Démontrer que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$  à préciser.

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $f_n(2^n \pi)$ . En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur  $\mathbb{R}$ .
3. Démontrer que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur tout segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ .

## EXERCICE 9

### Une série de fonctions, étude, équivalent

📖 **Titre :** Une série de fonctions, étude, équivalent

🔖 **ID :** 302 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 288

★ **Difficulté :**



On considère la fonction réelle de variable réelle définie par  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .
2. Démontrer que  $f$  est continue sur  $D_f$ .
3. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
4. Démontrer que : Quand  $x$  tends vers 0 à droite, on a  $f(x) \sim -\ln(x)$  et quand  $x$  tends vers  $+\infty$ , on a  $f(x) \sim \frac{\pi^2}{6x}$ .

## EXERCICE 10

### Suite de fonctions vectorielles

📖 **Titre :** Suite de fonctions vectorielles

🔖 **ID :** 303 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 289

★ **Difficulté :**



Dans tout ce qui suit  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé de dimension finie sur  $\mathbb{K}$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On considère un vecteur  $x_0 \in E$  tel que  $\|x_0\| \leq 1$  et  $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une application tel que  $\gamma(t) \leq kt$  où  $k \in [0, 1]$ . On considère une suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}_+$  vers  $E$  tel que :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}_+, f_0(t) = x_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, f_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f_n(\gamma(s)) ds \end{cases}$$

1. Prouver que la suite  $(f_n)$  est bien définie.
2. Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ .
3. Prouver que la suite  $(f_n)$  converge simplement vers une application  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$  et que la convergence est uniforme sur tout compact  $K$  inclus dans  $\mathbb{R}_+$ .
4. Démontrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et que  $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = f(\gamma(x))$ .

## EXERCICE 11

### Etude d'une série de fonctions, propriétés de la somme

📖 **Titre :** Etude d'une série de fonctions, propriétés de la somme

🔖 **ID :** 304 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 290

★ **Difficulté :**



Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on pose  $f_n(x) = \arctan(x+n) - \arctan(n)$ .

1. Démontrer que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. Démontrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
3. Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
4. En déduire que la convergence de  $\sum f_n$  n'est pas uniforme sur  $\mathbb{R}_+$ .

## EXERCICE 12

### Une suite de fonctions qui converge vers $x \mapsto e^{-x}$

📖 **Titre :** Une suite de fonctions qui converge vers  $x \mapsto e^{-x}$

🔖 **ID :** 305 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 291

★ **Difficulté :**



Soit, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0; n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ si } x \geq n$$

Démontrer que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+$  vers  $f$  définie par  $f(x) = e^{-x}$ .

### EXERCICE 13

#### Suite de fonctions qui converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$

📖 **Titre :** Suite de fonctions qui converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+$

🔖 **ID :** 306 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 292

★ **Difficulté :**



Soit  $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

a) Etudier la limite simple de  $(f_n)$  et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) \geq \lim f_n(x)$$

b) En partant de l'encadrement suivant valable pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$

$$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$$

justifier que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur tout intervalle  $[0; a]$  (avec  $a > 0$ ) c) Etablir qu'en fait, la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+$ .

### EXERCICE 14

#### Construction d'une série de fonctions qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ .

📖 **Titre :** Construction d'une série de fonctions qui converge normalement sur  $\mathbb{R}$ .

🔖 **ID :** 307 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 293

★ **Difficulté :**



Pour tout  $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ , on pose :

$$f_n(x) = \frac{nx}{x^2 + n^3 + 1}.$$

1. Vérifier que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .
2. La convergence est-elle uniforme sur  $\mathbb{R}$  ?
3. Étudier la convergence uniforme de la série  $\sum f_n$ , sur tout compact  $K$  inclus dans  $\mathbb{R}$ .
4. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\alpha > \frac{1}{2}$ , et  $(g_n)_{n \geq 0}$  la suite de fonctions définie par :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{1}{n^\alpha} f_n(x).$$

Démontrer que la série de fonctions  $\sum g_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ .

### EXERCICE 15

#### Une application du théorème de convergence dominée

📖 **Titre :** Une application du théorème de convergence dominée

🔑 **ID :** 308 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 294

★ **Difficulté :**



1. Soit  $x \in ]0, +\infty[$ . Démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = +\infty$ .
2. En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (x+k)} dx = 0$$

## EXERCICE 16

### Un équivalent pour une suite définie par intégrale

📖 **Titre :** Un équivalent pour une suite définie par intégrale

🔑 **ID :** 309 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 295

★ **Difficulté :**



On considère la suite réelle  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4 x^3} dx.$$

1. Justifier que  $(u_n)$  est bien définie.
2. Démontrer que, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on a  $u_n \sim \frac{c}{n^{\frac{5}{3}}}$ .

## EXERCICE 17

### Etude d'une suite de fonctions

📖 **Titre :** Etude d'une suite de fonctions

🔑 **ID :** 310 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 296

★ **Difficulté :**



1. Soit  $\alpha \in ]0, 1]$ . Démontrer que la fonction  $u : x \mapsto (1+x)^\alpha$  est concave sur  $\mathbb{R}_+$ . En déduire que pour tout nombre réel  $x \in \mathbb{R}_+$ , on a  $0 \leq (1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$ .
2. Démontrer que la suite de fonctions  $(f_n)$  définie par  $f_n(x) = \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{n}}}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in \mathbb{R}_+$  est simplement convergente vers une fonction  $f$  à préciser.
3. Démontrer que la convergence est uniforme sur  $\mathbb{R}_+$ .

## EXERCICE 18

### Un bon exercice d'application sur les suites de fonctions

📖 **Titre :** Un bon exercice d'application sur les suites de fonctions

🔑 **ID :** 672 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 653

★ **Difficulté :**



On considère la suite de fonction  $(f_n)$  définie de l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = (\cos(x))^n \sin(x).$$

1. Montrer que  $(f_n)$  convergence uniformément vers la fonction nulle sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .
2. Soient  $(g_n)$  la suite de fonction définie par  $g_n = (n+1)f_n$  et  $\gamma$  un réel de  $[0, \frac{\pi}{2}[$ .
  - (a) Montrer que sur  $[\gamma, \frac{\pi}{2}]$ , la suite  $(g_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle.

(b) La suite de fonction  $(g_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  vers la fonction nulle.

### EXERCICE 19 Modes de convergence pour une série de fonctions

📖 Titre : Modes de convergence pour une série de fonctions

🔑 ID : 686 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 667

★ Difficulté :



Soit  $f_n$  la fonction définie sur  $[0, \pi/2]$  par

$$f_n(x) = \sin^{2n+1} x \cos^3 x.$$

1. Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de terme général  $f_n$ .
2. Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de terme général  $n f_n$ .
3. Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de terme général  $n f_n$  sur  $[0, \pi/2 - \alpha]$ , lorsque  $\alpha$  appartient à  $]0, \pi/2[$ .

### EXERCICE 20 Modes de convergence de séries de fonctions

📖 Titre : Modes de convergence de séries de fonctions

🔑 ID : 687 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 668

★ Difficulté :



Soit  $f_n$  la fonction définie sur  $[-1, 1]$  par

$$f_n(x) = x^n (1 - x^2).$$

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite  $(f_n)$ .
2. Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de terme général  $f_n$ .
3. Étudier la convergence normale et uniforme de la série de terme général  $f_n$  sur  $[-1, \alpha]$ , lorsque  $\alpha$  appartient à  $[0, 1[$ .