

Thème : Fonctions vectorielles

EXERCICE 1

Fonction vectorielle f tel que $f(t) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

📖 Titre : Fonction vectorielle f tel que $f(t) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

🔖 ID : 286 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 272

★ Difficulté :



Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = I_n$. Montrer que si $f(t)$ est une matrice orthogonale pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors $f'(0)$ est une matrice antisymétrique.

EXERCICE 2

Dérivabilité de $t \mapsto \|f(t)\|$

📖 Titre : Dérivabilité de $t \mapsto \|f(t)\|$

🔖 ID : 287 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 273

★ Difficulté :



Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle, \rangle$ et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ une application dérivable. Montrer que l'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto g(t) = \|f(t)\|$ est dérivable en tout point $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) \neq 0$. Calculer alors $g'(t_0)$.

EXERCICE 3

Fonction vectorielle matricielle

📖 Titre : Fonction vectorielle matricielle

🔖 ID : 288 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 274

★ Difficulté :



Soit $X : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application de classe C^1 sur un intervalle I à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $t \in I$, la matrice $X(t)$ est inversible. On note alors $Y(t) = (X(t))^{-1}$ pour tout $t \in I$.

- Démontrer que la fonction $t \mapsto Y(t)$ est de classe C^1 sur I . Préciser $Y'(t)$ en fonction de $X(t)$ et $X'(t)$ pour tout $t \in I$.
- Soit $C : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application continue d'un intervalle ouvert I voisinage de 0 vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer l'existence et l'unicité d'une application $X : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 vérifiant :

$$\forall t \in I, X'(t) = C(t) \quad \text{et} \quad X(0) = I_n$$

En déduire qu'il existe un intervalle ouvert J voisinage de 0, dans lequel la matrice $X(t)$ est inversible. Précise ce résultat lorsque la matrice $C(t)$ est égale à une matrice D constante (indépendante de t).

EXERCICE 4

Dérivabilité à droite de $g(t) = \|f(t)\|$

📖 Titre : Dérivabilité à droite de $g(t) = \|f(t)\|$

🔖 ID : 289 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 275

★ Difficulté :



Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension n avec $n \geq 1$

- Démontrer que si pour tous réels a et b tel que $a < b$, si $h : J =]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe alors h est dérivable à droite en tout point de J .
- Démontrer que pour tout intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$ et tout couple $(v, w) \in E^2$, l'application $\Phi_{v,w} : I \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto \Phi_{v,w}(t) = \|w + tv\|$ est convexe sur l'intervalle I .

3. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow E$ une application continue sur I .
 Pour tout $t \in I$, on pose $g(t) = \|f(t)\|$.
 Montrer que si f est dérivable à droite en un point $t_0 \in I$ alors g est dérivable à droite au point t_0 et que :

$$|g'_d(t_0)| \leq \|f'_d(t_0)\|$$

EXERCICE 5

Si $\forall x \in]a, b[, f'_d(x) \in C$ avec C fermé convexe ..

Titre : Si $\forall x \in]a, b[, f'_d(x) \in C$ avec C fermé convexe ..

ID : 290 **Durée :** —

Niveau : L2 | **N° :** 276

★ **Difficulté :**



E est un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ une application continue d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ayant une dérivée à droite en tout point $x \in]a, b[$. Soit C une partie fermée et convexe de E tel que : $\forall x \in]a, b[, f'_d(x) \in C$. Montrer que :

$$\frac{1}{b-a}(f(b) - f(a)) \in C$$

EXERCICE 6

Fonction tel que $\|f(t)\|^2 + \|f'(t)\|^2 > 0$ pour tout $t \in [a, b]$

Titre : Fonction tel que $\|f(t)\|^2 + \|f'(t)\|^2 > 0$ pour tout $t \in [a, b]$

ID : 291 **Durée :** —

Niveau : L2 | **N° :** 277

★ **Difficulté :**



Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et on considère une application $f : [a, b] \rightarrow E$ de $[a, b]$ vers E avec E un espace vectoriel réel normé, dérivable sur $[a, b]$ et vérifiant :

$$\forall t \in [a, b], \|f(t)\|^2 + \|f'(t)\|^2 > 0$$

Démontrer que l'ensemble des zéros de f est une partie finie de I .

EXERCICE 7

Dérivabilité au point 0 de $f(t) = \det(I_n + tA)$

Titre : Dérivabilité au point 0 de $f(t) = \det(I_n + tA)$

ID : 292 **Durée :** —

Niveau : L2 | **N° :** 278

★ **Difficulté :**



Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto f(t) = \det(I_n + tA)$. Montrer que f est dérivable au point 0 et calculer $f'(0)$.

EXERCICE 8

Fonction vectorielle matricielle A tel que $A(t) \in \mathcal{O}_{2n+1}(\mathbb{R})$

Titre : Fonction vectorielle matricielle A tel que $A(t) \in \mathcal{O}_{2n+1}(\mathbb{R})$

ID : 293 **Durée :** —

Niveau : L2 | **N° :** 279

★ **Difficulté :**



Soit $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. On considère une application $A : I \rightarrow \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ dérivable sur I , tel que $\forall t \in I, A(t) \in \mathcal{O}_{2n+1}(\mathbb{R})$. Démontrer que $\forall t \in I, \det(A'(t)) = 0$.

EXERCICE 9

Théorème du relèvement : preuve dans un cas particulier

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, |e^{iz}| = 1 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$.
2. Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables sur I , à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ et telles que $\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g}$ Montrer que f et g sont proportionnelles, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $g = \lambda f$
3. Soit $h : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 sur I telle que, pour $t \in I, |h(t)| = 1$ Si $t_0 \in I$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ sont tels que $h(t_0) = e^{i\theta_0}$, montrer que la fonction θ définie sur I par

$$\forall t \in I, \quad \theta(t) = \theta_0 - i \int_{t_0}^t \frac{h'(s)}{h(s)} ds$$

est de classe C^1 sur I , vérifie $h(t) = e^{i\theta(t)}$, pour tout $t \in I$ et que la fonction θ est à valeurs réelles.

4. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}^*$
 - (a) Montrer que la fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto |f(t)|$ est de classe C^1 sur I
 - (b) Soient $t_0 \in I$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tels que $f(t_0) = |f(t_0)|e^{i\theta_0}$. Montrer qu'il existe une unique fonction $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 telles que

$$\theta(t_0) = \theta_0 \quad \text{et} \quad \forall t \in I, f(t) = |f(t)|e^{i\theta(t)}$$