

Thème : Séries numériques et intégrales impropres

EXERCICE 1 Une série avec suite récurrente

📖 Titre : Une série avec suite récurrente

🔑 ID : 14 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 3

★ Difficulté :



Soit $a \in]0, 1[$ et (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{2} \end{cases}$$

Démontrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

EXERCICE 2 Série dont le terme général sous forme d'une intégrale

📖 Titre : Série dont le terme général sous forme d'une intégrale

🔑 ID : 29 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 16

★ Difficulté :



Quelle est la nature de la série numérique $\sum u_n$ où $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3(t)}{1+t} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?

EXERCICE 3 Une liste d'intégrales généralisées

📖 Titre : Une liste d'intégrales généralisées

🔑 ID : 242 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 228

★ Difficulté :



Etudier la convergence des intégrales suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1. $\int_0^1 t^\alpha \ln t \, dt$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. | 10. $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$. |
| 2. $\int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta dt$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. | 11. $\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$. |
| 3. $\int_0^1 \frac{t^\alpha + (1-t)^\beta}{t^\alpha(1-t)^\beta} dt$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. | 12. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$. |
| 4. $\int_0^1 \frac{ \ln(t) ^\gamma}{t^\alpha(1-t)^\beta} dt$, avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. | 13. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} dx$. |
| 5. $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2} dt$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. | 14. $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{nt}} dt, n \in \mathbb{N}$. |
| 6. $\int_0^{+\infty} x(\sin x)e^{-x} dx$. | 15. $\int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{t}} dt$. |
| 7. $\int_0^{+\infty} (\ln t)e^{-t} dt$. | 16. $\int_0^{+\infty} \left(1 + t \ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right) dt$. |
| 8. $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$. | 17. $\int_2^{+\infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x\sqrt[3]{x^3 + ax}) dx$ où $a \in \mathbb{R}$. |
| 9. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t - 1} dt$. | 18. $\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt$. |

EXERCICE 4 Deux intégrales généralisées

📖 Titre : Deux intégrales généralisées

🔑 ID : 243 ⌚ Durée : —

★ Difficulté :



Discuter, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt$
2. $\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x}) dx$

EXERCICE 5 Une autre liste d'intégrales généralisées

Titre : Une autre liste d'intégrales généralisées

ID : 244 **Durée :** —

i Niveau : L2 | N° : 230

★ Difficulté :



Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3+1}} dx.$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2 e^{-x}}{x^2+e^{-2x}} dx .$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^4}} dx .$
4. $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^3+x^2} dx.$
5. $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^6}} dx.$
6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} 2x} dx$
7. $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}} dx$
8. $\int_0^{+\infty} \frac{x-5}{x^2+4x+4} dx$
9. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx$
10. $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$
11. $\int_0^{+\infty} \frac{2+\ln x}{x+4} dx$
12. $\int_1^2 \frac{1}{t^2-t} dt$
13. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}} dt$
14. $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx$
15. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$
16. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx,$
17. $\int_0^1 \ln(x) dx$
18. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx.$
19. $\int_1^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x \ln(2+x^2)} dx,$
20. $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{t}} dx,$
21. $\int_0^1 \frac{\cosh x - \cos x}{x^{5/2}} dx,$
22. $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} \sin(1/x^2)}{\ln(1+x)} dx.$

EXERCICE 6 Une liste de 132 séries numériques à étudier

Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \frac{3^n + n^4}{5^n - 3^n}$
2. $u_n = \frac{\operatorname{ch}(2n)}{\operatorname{ch}(3n)}$
3. $u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n$
4. $u_n = \tanh(n+a) - \tanh(n), a \in \mathbb{R} \text{ donné.}$
5. $u_n = \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$
6. $u_n = \frac{1}{1+x^{2n}}, x \in \mathbb{R}, \text{ donné.}$
7. $u_n = 1 - \cos \frac{1}{n}$
8. $u_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1$
9. $u_n = n^{-(1+\frac{2}{n})}$
10. $u_n = \exp\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \exp\left(\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$
11. $u_n = x^{\ln(n)}, x > 0, \text{ donné.}$
12. $u_n = n^2 a^{\sqrt{n}}, a > 0 \text{ donné.}$
13. $u_n = \frac{n!}{a^n}, a > 0, \text{ donné.}$
14. $u_n = \frac{n!}{n^n}$
15. $u_n = \frac{a^n}{n^a}, a > 0 \text{ donné.}$
16. $u_n = \left(a + \frac{1}{n}\right)^n, a > 0 \text{ donné.}$
17. $u_n = \frac{1}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}, a > 0 \text{ donné.}$
18. $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n^2}, x \in \mathbb{R}, \text{ donné.}$
19. $u_n = \left(\frac{\sin^2 n}{n}\right)^n$
20. $u_n = \left(1 - \exp\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sqrt{\ln(n)}$
21. $u_n = \frac{1}{\ln(n!)}$
22. $u_n = n^{n^{-a}} - 1, a > 0 \text{ donné.}$
23. $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
24. $u_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$
25. $u_n = \frac{n^2}{n^3+1}$
26. $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}$
27. $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$
28. $u_n = \frac{1}{\ln(n^2+n+1)}$
29. $u_n = \frac{n^2}{(1+\delta)^n}, \delta \text{ un nombre réel tel que } |\delta| < \frac{1}{2}.$
30. $u_n = \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sum_{k=1}^n k^2} = \frac{1+\cdots+n}{1^2+\cdots+n^2}.$
31. $u_n = \frac{a^n+1}{n+a^{2n}}, a > 0 \text{ donné.}$
32. $u_n = 2^{-\sqrt{n}}.$

33. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$
34. $u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \exp\left(\frac{1}{n+a}\right), a > 0$ donné.
35. $u_n = f\left(a + \frac{1}{n}\right) + f\left(a - \frac{1}{n}\right) - 2f(a)$ avec : $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle de classe C^2 sur un intervalle de la forme $]a - \alpha, a + \alpha[, \alpha > 0$
36. $u_n = \frac{1}{an+b} - \frac{c}{n}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$: discuter suivant a, b et c .
37. $u_n = \frac{2^n + a^n}{2^n + b^n}, (a, b) \in \mathbb{R}^2$: discuter suivant a et b .
38. $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \arctan \frac{1}{n}$
39. $u_n = \sin\left(\left(n + \frac{a}{n}\right)\pi\right), a \in \mathbb{R}$
40. $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^a}, a \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.
41. $u_n = \frac{\cos(an+b)}{n^\alpha},$ avec $(a, b, \alpha) \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 0 [2\pi]$.
42. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+2\sin n}$
43. $u_n = (-1)^n(\sqrt{n^2+1} - n)$
44. $u_n = \ln\left(1 + \frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right)$
45. $u_n = \frac{\sin(2n)}{n^2 - n + 1}$
46. $u_n = \frac{1 + \ln(n)}{n^2}$
47. $u_n = \frac{2^n + 5}{3^n + 11}$
48. $u_n = \frac{5^n + 2}{11^n + 3}$
49. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$
50. $u_n = \frac{n!}{n^n}$
51. $u_n = \frac{(n+1)^4}{n!+1},$
52. $u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n,$
53. $u_n = \frac{n^{\ln(n)}}{\ln(n)^n},$
54. $u_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{2^n}\right),$
55. $u_n = (n^6 + 3)^a - (n^2 + 2)^{3a},$ où $a \in \mathbb{R}$
56. $u_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)},$
57. $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - 1\right)^\alpha,$ où $\alpha > 0$, DL2 de la suite u_n .
58. $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).$
59. $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n},$
60. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n \ln(n)},$ DL2 de la suite u_n .
61. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n \sqrt{n+1}},$
62. $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha+(-1)^n}$ avec $\alpha > 0$.
63. $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 0$.
64. $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$
65. $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right),$
66. $u_n = (-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right),$
67. $u_n = \cos\left(n^2 \pi \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right),$

68. $u_n = \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}}{e^{\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)} - 1} - 1,$
69. $u_n = \ln \left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n-4}} \right),$
70. $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \right),$
71. $u_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$ et équivalent du reste.
72. $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}.$
73. $u_n = \frac{x^n}{1+y^{2n}}$ selon les valeurs des réels x et y .
74. $u_n = \left(n \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right)^n$
75. $u_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}} - \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)^n$
76. $u_n = n^{\frac{1}{1+n^2}} - 1$
77. $u_n = \sin \left(\frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$
78. $u_n = \frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\sin \left(\frac{1}{n} \right)},$ DL2 de la suite u_n .
79. $u_n = \frac{n^2 + n - 3}{n!}$
80. $u_n = \arctan \left(\frac{2}{n^2} \right)$
81. $u_n = \frac{n-1}{n(n+1)(n+2)}$
82. $u_n = \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$
83. $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$
84. $u_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n} \sin(1/\sqrt{n})}{n + (-1)^n}$
85. $u_n = \frac{\cos(\ln n)}{n}$
86. $u_n = \prod_{p=2}^n (2 - \sqrt[p]{e})$
87. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} : \text{généraliser à } u_n = \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha + e^{in\theta}}$
88. $u_n = (\sin(\pi en!))^p$
89. $u_n = \sum_n \sin \pi \sqrt{n^2 + 1};$
90. Pour $n \geq 1, u_n = \left(\frac{1}{p(n)} \right)^{p(n)},$ où $p(n)$ est le nombre de chiffres de l'écriture décimale de $n;$
91. Pour $n \geq 1, u_n = \frac{\sigma(n)}{n^2},$ où $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ est une bijection;
92. $u_n = \sin(\pi(2 + \sqrt{5})^n)$
93. $u_n = \frac{n+1}{n^3 - 7},$
94. $u_n = \frac{n+1}{n^2 - 7},$
95. $u_n = \frac{n+1}{n-7},$
96. $u_n = \sin \left(\frac{1}{n^2} \right),$
97. $u_n = \frac{2^n + 3^n}{n^2 + 5^n},$
98. $u_n = \frac{1}{n^{(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})}},$
99. $u_n = \frac{1}{\ln(n^2 + 2)},$

100. $u_n = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}},$
101. $u_n = \frac{n}{2^n},$
102. $u_n = \frac{n^{100\,000}}{2^n},$
103. $u_n = \frac{1}{n!},$
104. $u_n = \frac{n^{100\,000}}{n!},$
105. $u_n = \frac{2^n}{n!},$
106. $u_n = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n)!},$
107. $u_n = \left(\sin \left(\frac{1}{n} \right) \right)^n,$
108. $u_n = \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2},$
109. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}.$
110. $u_n = \frac{1}{n^{3/4}} + \frac{\sin(2n)}{n^{3/4}},$
111. $u_n = \frac{1}{n^{3/4}} + \frac{1 - n^{(n-3/4)}}{n^n},$
112. $u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}} - \exp \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n^{3/4}} \right).$
113. $u_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \cos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right),$
114. $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}}.$
115. $u_n = (-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)},$
116. $u_n = \sin \left(\left(n + \frac{1}{n} \right) \pi \right),$
117. $u_n = (-1)^n (\sqrt{1+n} - \sqrt{n}).$
118. $u_n = (-1)^n \frac{n^3}{n!},$
119. $u_n = \frac{a^n}{n!}$ avec $a \in \mathbb{C},$
120. $u_n = na^{n-1}$ avec $a \in \mathbb{C},$
121. $u_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+p)^2}$ (comparer à une intégrale)
122. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{2/3} + \cos n}$
123. $u_n = \frac{\cos \sqrt{n}}{n(\ln n)^2}$
124. $u_n = x^{-\sqrt{1+n}} \quad (x \in \mathbb{R}_+^*).$
125. $u_n = \frac{\cos(\ln n)}{n}$
126. $u_n = \left(\frac{2n}{3n+2} \right)^n,$
127. $u_n = \frac{1}{n^n},$

128. $u_n = \frac{n!}{n^n}$,
 129. $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,
 130. $u_n = \frac{(n+1)2^n}{n!}$,
 131. $u_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}}$,
 132. $u_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$

EXERCICE 7

Liste de 14 série : convergence et calcul de la somme

📖 **Titre :** Liste de 14 série : convergence et calcul de la somme

🔖 **ID :** 246 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 232

★ **Difficulté :**



Calculer la somme de la série $\sum u_n$ dans chacun des cas suivants, après justification de sa convergence.

- $u_n = \frac{3^n}{7^{n-2}}, n \geq 2$;
- $u_n = \frac{1}{n(n+1)}, n \geq 1$;
- $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, n \geq 1$;
- $u_n = \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}, n \geq 1$ et $p \in \mathbb{N}^*$ fixé ;
- $u_n = \ln \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}, n \geq 1$;
- $u_n = \ln(1 + 2^{-2^n}), n \geq 0$.
- $u_n = \frac{n^2+9n+5}{(n+1)(2n+3)(2n+5)(n+4)}$.
- $u_n = n \ln \left(\frac{n^4+2n^3-2n-1}{n^4+2n^3} \right)$.
- $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!2^{n-k}}$.
- $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!k!}$.
- $u_n = \frac{E(\sqrt{n+1})-E(\sqrt{n})}{n}$.
- $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2-1}$.
- $u_n = na^n, a \in [0, 1[$.
- $u_n = \frac{a^n}{n}, a \in [0, 1[$.

EXERCICE 8

Deux bonnes intégrales généralisées

📖 **Titre :** Deux bonnes intégrales généralisées

🔖 **ID :** 247 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 233

★ **Difficulté :**



Etudier la convergence des intégrales suivantes :

- $\int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} dx$
- $\int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{\sin x}{x^\alpha} \right) dx$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.

EXERCICE 9

Etude de la convergence d'une intégrale généralisée

📖 Titre : Etude de la convergence d'une intégrale généralisée

🔑 ID : 248 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 234

★ Difficulté :



Démontrer que l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} ((1+x)^{\frac{1}{1+x}} - x^{\frac{1}{x}}) dx$ est convergente.

EXERCICE 10

Une intégrale généralisée non évidente

📖 Titre : Une intégrale généralisée non évidente

🔑 ID : 249 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 235

★ Difficulté :



Quelle est la nature de l'intégrale suivante $\int_0^{+\infty} e^{\cos(x)} dx$?

EXERCICE 11

Intégrale généralisée dépendant de deux paramètres

📖 Titre : Intégrale généralisée dépendant de deux paramètres

🔑 ID : 250 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 236

★ Difficulté :



Déterminer les valeurs possibles de α et β pour lesquelles l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{\alpha x + \beta x^2} dx$ est convergente.

EXERCICE 12

Une suite pas aisée

📖 Titre : Une suite pas aisée

🔑 ID : 251 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 237

★ Difficulté :



Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{n^2}{\left(\prod_{k=1}^n k^k \right)^{\frac{4}{n^2}}}$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

EXERCICE 13

la série $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n^\alpha}, n \geq 1$

📖 Titre : la série $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n^\alpha}, n \geq 1$

🔑 ID : 252 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 238

★ Difficulté :



Démontrer que pour tout nombre réel α , si $\alpha > \frac{1}{2}$ alors la série $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n^\alpha}, n \geq 1$ est convergente.

EXERCICE 14

Une étude d'intégrales généralisées

📖 Titre : Une étude d'intégrales généralisées

🔑 ID : 253 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 239

★ Difficulté :



Soit a un nombre réel et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une application de classe C^1 tel que les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} |f'(t)|dt$ sont convergentes. Démontrer que la série $\sum f(n), n \geq p$ est convergente, p étant le plus petit entier naturel supérieur ou égal à a .

EXERCICE 15

la série de terme général $u_n = \frac{e^{in\beta}}{n^\alpha}$

📖 Titre : la série de terme général $u_n = \frac{e^{in\beta}}{n^\alpha}$

🔑 ID : 254 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 240

★ Difficulté :



Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $1 - \alpha < \beta < 1$.

1. Démontrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{e^{in\beta}}{n^\alpha}$$

est convergente.

2. En déduire que les séries de termes généraux respectifs

$$c_n = \frac{\cos(n\beta)}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad s_n = \frac{\sin(n\beta)}{n^\alpha}$$

sont convergentes.

EXERCICE 16

Une série qui l'air alternée

📖 Titre : Une série qui l'air alternée

🔑 ID : 255 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 241

★ Difficulté :



Quelle est la nature de la série de terme générale $u_n = \frac{(-1)^n}{n^3 + (-1)^n}$?

EXERCICE 17

Une série dont le terme général est une intégrale

📖 Titre : Une série dont le terme général est une intégrale

🔑 ID : 256 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 242

★ Difficulté :



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt$.

1) Montrer que (a_n) est décroissante.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n$. En déduire que $a_n \sim a_{n+1}$.

3) Montrer que la suite de terme générale $b_n = (n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1}$ est constante. En déduire un équivalent de a_n et la nature de la série $\sum a_n$.

EXERCICE 18

Estimation du reste d'une intégrale convergente

📖 Titre : Estimation du reste d'une intégrale convergente

🔑 ID : 257 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 243

★ Difficulté :



Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application strictement positive de classe C^1 tel que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$$

1. Montrer que f est intégrable sur $[1, +\infty[$
2. Démontrer que, quand x tends vers $+\infty$, on a

$$\int_x^{+\infty} f(t)dt = o(f(x))$$

EXERCICE 19 Une condition d'intégrabilité pour que la fonction tende vers 0

📖 **Titre :** Une condition d'intégrabilité pour que la fonction tende vers 0

🔖 **ID :** 258 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 244

★ **Difficulté :**



Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Montrer que, si f^2 et f'^2 sont intégrables sur $[0, +\infty[$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

EXERCICE 20 Un extrait de concours (ENSI) sur les intégrales

📖 **Titre :** Un extrait de concours (ENSI) sur les intégrales

🔖 **ID :** 259 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 245

★ **Difficulté :**



Soit α un nombre réel *strictement* positif. Pour tout nombre réel strictement positif x , on pose $F_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} du$.

1. Montrer que F_α est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer $F_1(x)$ et $F_{\frac{1}{2}}(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Trouver la limite, quand x tend vers 0 à droite de $F_\alpha(x)$.
4. Montrer que sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto F_\alpha(x)$ est la seule solution de l'équation différentielle $(E_\alpha) \quad xy' + \alpha y = \frac{1}{x+1}$ qui ait une limite finie quand la variable x tend vers 0 à droite.
5. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $F_\alpha(x) \geq \frac{1}{\alpha(1+x)}$.
(b) Montrer que, sur l'intervalle $x > 0$, la fonction $x \mapsto F_\alpha(x)$ est décroissante.
6. (a) Si $\alpha > 1$, montrer que, pour tout $x > 0$, on a $F_\alpha(x) \leq \frac{1}{(\alpha-1)x}$.
(b) Si $0 < \alpha < 1$, montrer qu'il existe un nombre réel c_α , ne dépendant que de α , tel que, pour tout $x > 0$, on ait : $F_\alpha(x) \leq \frac{c_\alpha}{x^\alpha}$.
7. (a) Trouver une relation simple entre $F_\alpha(x)$ et $F_{\alpha+1}(x)$.
(b) En déduire la limite, quand x tend vers $+\infty$, de $x F_{\alpha+1}(x)$.

EXERCICE 21 Une intéressante intégrale impropre

📖 **Titre :** Une intéressante intégrale impropre

🔖 **ID :** 260 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 246

★ **Difficulté :**



Etudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x} + \cos(x)} dx$.

EXERCICE 22 Série dont le terme général est un reste

📖 **Titre :** Série dont le terme général est un reste

🔖 **ID :** 261 ⌚ **Durée :** —

★ **Difficulté :**



On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Justifier l'existence de R_n .

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

3) Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{R}^*$ tels que $R_n = A \frac{(-1)^{n+1}}{n^\beta} + O\left(\frac{1}{n^{\beta+1}}\right)$. En déduire la convergence de $\sum R_n$.

4) Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} R_n$.

EXERCICE 23

Série de terme général $u_n = \frac{a_n}{(1+a_0)(1+a_1)\cdots(1+a_n)}$, où $(a_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$

 **Titre** : Série de terme général $u_n = \frac{a_n}{(1+a_0)(1+a_1)\cdots(1+a_n)}$, où $(a_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$

 **ID** : 262  **Durée** : —

 Niveau : L2 | N° : 248

★ **Difficulté** :
★ ★ ★ ★ ★

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes positifs. Montrer que la série $\sum u_n$ de terme général

$$u_n = \frac{a_n}{(1+a_0)(1+a_1)\cdots(1+a_n)}$$

converge et calculer sa somme en fonction des a_n .

EXERCICE 24

Une famille d'intégrales divergentes

 **Titre** : Une famille d'intégrales divergentes

 **ID** : 263  **Durée** : —

 Niveau : L2 | N° : 249

★ **Difficulté** :
★ ★ ★ ★ ★

Démontrer que pour tout nombre complexe p , l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{x^2} e^{-px} dx$$

est divergente.

EXERCICE 25

Convergence dominée pour les suites

 **Titre** : Convergence dominée pour les suites

 **ID** : 285  **Durée** : —

 Niveau : L2 | N° : 271

★ **Difficulté** :
★ ★ ★ ★ ★

Soit $(a_{n,k})_{n,k \geq 0}$ une famille de réels. On suppose que :

- Pour tout $k \geq 0$, la suite $(a_{n,k})_{n \geq 0}$ est convergente, de limite a_k .

- Il existe une famille $(b_k)_{k \geq 0}$ telle que $|a_{n,k}| \leq b_k$ pour tout $k, n \geq 0$ et telle que $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$.

Montrer que les quantités $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}$ et $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sont bien définies, puis que l'on a $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

EXERCICE 26

Limite de la suite $(\frac{a_n}{n})_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sqrt{a_0 + \cdots + a_n}$

 **Titre** : Limite de la suite $(\frac{a_n}{n})_n$ avec

$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sqrt{a_0 + \cdots + a_n}$

 **ID** : 489  **Durée** : —

 Niveau : L2 | N° : 471

★ **Difficulté** :
★ ★ ★ ★ ★

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sqrt{a_0 + \dots + a_n}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}$.

EXERCICE 27

Série $\sum \frac{1}{u_n}$ avec (u_n) une suite récurrente

📖 **Titre :** Série $\sum \frac{1}{u_n}$ avec (u_n) une suite récurrente

🔑 **ID :** 492 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 474

★ **Difficulté :**



On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]1; +\infty[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$$

a) Montrer : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.

b) Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$.

EXERCICE 28

Série des restes de la série $\exp(1)$

📖 **Titre :** Série des restes de la série $\exp(1)$

🔑 **ID :** 494 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 476

★ **Difficulté :**



Donner un équivalent simple de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

EXERCICE 29

Si les série $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent

📖 **Titre :** Si les série $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent

🔑 **ID :** 498 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 480

★ **Difficulté :**



Soit (u_n) une suite réelle tel que les séries $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ sont convergentes.

1. Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq k \Rightarrow u_n + 1 \neq 0$. On note p le plus petit $k \in \mathbb{N}$ réalisant (1) ci-dessus.
2. Démontrer que la série $\sum_{n \geq p} \frac{u_n}{1+u_n}$ est convergente

EXERCICE 30

De bons exemples de séries dont le terme général est une intégrale

📖 **Titre :** De bons exemples de séries dont le terme général est une intégrale

🔑 **ID :** 499 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 481

★ **Difficulté :**



Nature des séries $\sum u_n$ et $\sum U_n$ pour $u_n = \int_0^1 \tan(x^n) dx$ et $U_n = \int_0^1 \tan(x^{n^2}) dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

EXERCICE 31

De bonx exemple de séries numériques

📖 **Titre :** De bonx exemple de séries numériques

🔑 **ID :** 500 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 482

★ **Difficulté :**



Nature des séries $\sum u_n$ et $\sum U_n$ pour $u_n = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n k!$ et $U_n = \frac{1}{(n+2)!} \sum_{k=0}^n k!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

EXERCICE 32

La suite des sinus itérés, une généralisation

📖 **Titre :** La suite des sinus itérés, une généralisation

🔖 **ID :** 501 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 483

★ **Difficulté :**



1. Soit (u_n) une suite de nombre complexes et (U_n) définie par $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$. Démontrer que si (u_n) est convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$ alors (U_n) converge aussi vers ℓ .

2. Soit $\alpha \in]0, 1[$ et (x_n) la suite définie par $\begin{cases} x_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \sin(x_n) \end{cases}$.

(a) Montrer que (x_n) converge vers 0.

(b) Montrer que $x_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

3. **Généralisation :** Soit a un nombre réel tel que $a > 0$ et $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ une application concave strictement croissante tel qu'il existe k et p constantes réelles strictement positives tel que, pour x voisin de 0 dans $[0, a]$, on aie :

$$f(x) = x - kx^{p+1} + o(x^{p+1}).$$

Soit alors (x_n) une suite définie par $x_0 \in]0, a[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$. Démontrer que quand n tend vers $+\infty$, on a : $x_n \sim \left(\frac{1}{pkn}\right)^{\frac{1}{p}}$.

EXERCICE 33

Série dont le terme général est construit à l'aide de Γ d'Euler

📖 **Titre :** Série dont le terme général est construit à l'aide de Γ d'Euler

🔖 **ID :** 503 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 485

★ **Difficulté :**



On note la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. On pose $u_n = \int_n^{n+1} \ln \Gamma(x) dx$. Préciser la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{u_n}$.

EXERCICE 34

suites et séries, développements asymptotiques

📖 **Titre :** suites et séries, développements asymptotiques

🔖 **ID :** 504 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 486

★ **Difficulté :**



1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists ! a_n \in \mathbb{R}, e^{a_n} + na_n = 2$.

2. Déterminer la nature de $\sum a_n$ et $\sum (-1)^n a_n$.

3. Déterminer la limite de $n(1 - na_n)$ en $+\infty$.

4. Développer a_n à la précision $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

EXERCICE 35

Séries et integration, un équivalent d'une suite

📖 **Titre :** Séries et integration, un équivalent d'une suite

🔖 **ID :** 505 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 487

★ **Difficulté :**



On pose $a_n = - \int_0^1 \frac{t^n \ln t}{t+1} dt$

1. Montrer que (a_n) est définie. Donner sa limite.
2. Calculer $a_n + a_{n+1}$. En déduire un équivalent de a_n .
3. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

EXERCICE 36 Comparaison de deux sommes de séries

📖 **Titre :** Comparaison de deux sommes de séries

🔑 **ID :** 507 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 489

★ **Difficulté :**



Soit (u_n) une suite réelle strictement positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{p=0}^n u_p$. Comparer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{S_n}$.

EXERCICE 37 Une série : convergence et calcul de la somme

📖 **Titre :** Une série : convergence et calcul de la somme

🔑 **ID :** 513 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 495

★ **Difficulté :**



Soit (x_n) la suite définie par

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \sum_{k=0}^n x_k \end{cases}.$$

Démontrer que la série $\sum \frac{1}{x_n}$ converge et calculer sa somme.

EXERCICE 38 Un exercice sur les intégrales et le suites

📖 **Titre :** Un exercice sur les intégrales et le suites

🔑 **ID :** 529 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 510

★ **Difficulté :**



Soit f la fonction définie par :

$$f(t) = \frac{2t-1}{\ln t - \ln(1-t)}$$

et soit :

$$I = \int_0^1 f(t) dt.$$

1. Justifier l'existence de I
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{4n} \leq I - \frac{\pi}{2n^3} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \leq \frac{3}{4n}$$

3. En déduire que $I = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{x(1-x)}{\sin(\pi x)} dx$.

EXERCICE 39 Une famille sommable pas facile

📖 **Titre :** Une famille sommable pas facile

🔑 **ID :** 533 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 514

★ **Difficulté :**



Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de complexes telle que $\sum_{n \geq 1} a_n^2$ est absolument convergente.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k |a_k| e^{ikx} \right)^2 dx = \frac{2\pi}{i} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq p \leq n}} \frac{|a_k| |a_p|}{k+p}.$$

2. Montrer que la famille $\left(\frac{a_p a_q}{p+q} \right)_{p,q \in \mathbb{N}^*}$ est sommable.

EXERCICE 40

Equivalent pour une integrale

📖 **Titre :** Equivalent pour une integrale

🔑 **ID :** 557 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 538

★ **Difficulté :**



Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue tel que $f(1) \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$.

Démontrer que $I_n \sim \frac{f(1)}{n}$ dans les deux cas suivants :

1. f est de classe C^1 .
2. f est de classe C^0 .

EXERCICE 41

Calcul de l'intégrale de Dirichlet et de $\zeta(2)$.

📖 **Titre :** Calcul de l'intégrale de Dirichlet et de $\zeta(2)$.

🔑 **ID :** 682 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 663

★ **Difficulté :**



On se propose de démontrer que $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et de calculer $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

1. Soient deux réels $a < b$ et une fonction g de classe C^1 sur le segment $[a, b]$. Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt = 0$. (Utiliser une intégration par parties.)
2. Soit un entier non-nul $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction S_n sur $[0, \pi]$ par

$$S_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt)$$

Montrer sans utiliser de récurrence que $\forall t \in]0, \pi[\quad S_n(t) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$. et calculer $S_n(0), S_n(\pi)$.

3. Calculer l'intégrale $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt$
4. On définit la fonction ϕ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par : $\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$. Montrer que la fonction ϕ est dérivable en 0 et préciser $\phi'(0)$. Montrer ensuite que la fonction ϕ est de classe C^1 sur le segment $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
5. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t) \sin(2n+1)t dt$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt.$$

6. Déterminer deux réels α et β tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$

7. En déduire que

$$2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) S_n \left(\frac{t}{2} \right) dt$$

est un réel indépendant de n que l'on précisera.

8. On définit la fonction h sur $]0, \pi]$ par $h(t) = \frac{(\alpha t + \beta t^2)}{\sin \frac{t}{2}}$. Montrer que h se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

9. Montrer que les séries $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ sont convergentes et calculer leur sommes respectives :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ et } S' = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

EXERCICE 42

Un orale de Mines et Ponts 2024, beos 8052

📖 **Titre :** Un orale de Mines et Ponts 2024, beos 8052

🔑 **ID :** 699 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 680

★ **Difficulté :**



Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs convergente. La suite (u_n) est indexée par $\mathbb{N}$. On définit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k u_k \quad W_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k u_k.$$

1. Démontrer que la suite $(V_n)_{n \geq 1}$ est convergente vers 0.

2. Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} W_n$ est convergente.

3. Montrer que la série de terme général $U_n = \frac{1}{n+1} \left(n! \prod_{k=1}^n u_k \right)$ est convergente et en déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} U_k \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_k.$$

EXERCICE 43

Une série avec suite décroissante

📖 **Titre :** Une série avec suite décroissante

🔑 **ID :** 719 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 686

★ **Difficulté :**



Soit (a_n) une suite à termes positifs et qui est décroissante et on pose $b_n = n(a_n - a_{n+1})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

2. On note $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ et $T_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Démontrer que $T_n = S_n - n a_{n+1}$.

3. En déduire que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature et en cas de convergence on a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n =$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n + \sum_{n=1}^{+\infty} n(a_n - a_{n+1})$$