

## Thème : Algèbre linéaire : Réduction

### EXERCICE 1

#### Exemple de réduction de matrices

📖 Titre : Exemple de réduction de matrices

🔑 ID : 32 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 1

★ Difficulté :



Soient dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  les matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. les matrices  $A$  et  $B$  sont elles diagonalisables? trigonalisables?
2. Calculer  $B^{-1}$  en utilisant le polynôme caractéristique de  $B$ .

### EXERCICE 2

#### Condition pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable

📖 Titre : Condition pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable

🔑 ID : 34 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 1

★ Difficulté :



Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et  $u$  l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A quelle condition sur le triplet  $(a, b, c)$  l'endomorphisme  $u$  est il diagonalisable?

### EXERCICE 3

#### Utilisation du rang pour réduire une matrice

📖 Titre : Utilisation du rang pour réduire une matrice

🔑 ID : 36 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 1

★ Difficulté :



Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  considérée dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

1. Quel est le rang de  $A$ ?
2. En déduire une valeur propre de  $A$  et calculer la dimension du sous-espace propre qui lui est associé.
3. On note  $0, \lambda, \mu$  les valeurs propres complexes de  $A$  comptées avec leur ordres de multiplicités. Justifier leur existence et calculer  $\text{tr}(A)$  et  $\text{tr}(A^2)$  en fonction de  $\lambda$  et  $\mu$ .
4. Déduire de ce qui précède que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et donner son polynôme minimal ainsi que son polynôme caractéristique.
5. Retrouver le resultat en calculant directement le polynôme caractéristique de  $A$ .

### EXERCICE 4

#### Un exemple de diagonalisation d'une matrice carrée

📖 **Titre :** Un exemple de diagonalisation d'une matrice carrée

🔑 **ID :** 131 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 1

★ **Difficulté :**



Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. Calculer le polynôme caractéristique  $\chi_A$  de  $A$ .
2. Démontrer que  $A$  admet deux valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$  tel que  $\lambda < \mu$ .
3. Déterminer  $\dim(E_\lambda(A))$  et  $\dim(E_\mu(A))$ .
4. En déduire que  $A$  est semblable à la matrice  $D$  avec  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;

## EXERCICE 5

### Exemples de diagonalisation

📖 **Titre :** Exemples de diagonalisation

🔑 **ID :** 723 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 1

★ **Difficulté :**



- 1) Diagonaliser la matrice  $A$  suivante de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  :  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .
- 2) Soit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Justifier que  $M$  est diagonalisable. Quelles sont les dimensions respectives des sous-espaces propre ? Est ce  $M$  est inversible ? Si oui est ce que  $M^{-1}$  est diagonalisable ?

## EXERCICE 6

### Des endomorphismes de polynômes

📖 **Titre :** Des endomorphismes de polynômes

🔑 **ID :** 42 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 2

★ **Difficulté :**



Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  et  $B_n = (1, X, \dots, X^n)$  sa base canonique. On considère les applications :

$$f : \mathbb{R}_4[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X], P \mapsto f(P) = P'$$

et

$$g : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_4[X], P \mapsto g(P) = XP$$

1. Montrer que  $f$  et  $g$  sont des applications linéaires.
2. Donner les matrices  $\text{mat}_{B_4, B_3}(f)$  et  $\text{mat}_{B_3, B_4}(g)$ .
3. Donner la matrice de  $g \circ f$  relativement à la base  $B_4$ .
4. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Calculer suivant les valeurs de  $\lambda$  la dimension

$$d_\lambda = \dim(g \circ f - \lambda \text{Id}_{\mathbb{R}_4[X]}).$$

## EXERCICE 7

### Questions de similitude sur trois matrices carrées de taille 3

📖 **Titre :** Questions de similitude sur trois matrices carrées de taille 3

🔖 **ID :** 133 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 2

★ **Difficulté :**



On considère dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) Démontrer que  $A, B$  et  $C$  ont le même polynôme caractéristique, la même trace et le même déterminant.
- 2)  $A, B$  et  $C$  ont-elles le même rang ?
- 3)  $A$  et  $B$  sont-elles semblables ?
- 4)  $A$  et  $C$  sont-elles semblables ?

### EXERCICE 8

### Un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

📖 **Titre :** Un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$

🔖 **ID :** 134 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 2

★ **Difficulté :**



Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et soit  $f$  l'application de  $E$  vers  $E$  tel que

$$\forall P \in E, \quad f(P) = X(P(X) - P(X-1)).$$

1. Vérifier que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Former la matrice  $A$  de  $f$  relativement à la base canonique  $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$  de  $E$ .
3. Déterminer  $\ker f, \operatorname{Im} f, \operatorname{Sp} f$ .
4. Montrer que  $f$  est diagonalisable et préciser les dimensions respectives des sous-espaces propres.

### EXERCICE 9

### Matrice avec des zéros sauf la première ligne et la première colonne

📖 **Titre :** Matrice avec des zéros sauf la première ligne et la première colonne

🔖 **ID :** 27 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 3

★ **Difficulté :**



Soit  $n$  un entier naturel tel que  $n \geq 3$ . Pour tout  $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$  avec  $a_2 \neq 0$ , on associe la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le rang de  $A_n$  ? Qu'en déduit-on pour le polynôme caractéristique  $\chi_n$  de  $A_n$  ?
2. Calculer  $\chi_2, \chi_3$ .
3. On pose  $b_n = \sum_{k=2}^n a_k^2$ . Montrer par récurrence que  $\chi_n = X^{n-2}(X^2 - a_1X - b_n)$ .
4. Si  $b_n = 0$ , la matrice  $A_n$  est-elle diagonalisable ?
5. On suppose que  $b_n \neq 0$ . A quelle condition  $A_n$  est-elle diagonalisable ?

### EXERCICE 10

### Diagonalisation d'une matrice tridiagonale

📖 Titre : Diagonalisation d'une matrice tridiagonale

🔖 ID : 132 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 3

★ Difficulté :



Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On appelle valeur propre de  $M$  tout scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel qu'il existe  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que  $X \neq 0$  et  $MX = \lambda X$ . Le vecteur  $X$  est alors appelé vecteur propre de  $M$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

On suppose que  $n \geq 2$  et on considère la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tel que :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Soit  $V$  un vecteur propre de  $A$  de composantes  $(v_k)_{1 \leq k \leq n}$  relativement à la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Démontrer que si on pose  $v_0 = v_{n+1} = 0$  alors :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad v_{k+1} - (2 - \lambda)v_k + v_{k-1} = 0$$

2. Montrer que 0 et 4 ne sont pas des valeurs propres de  $A$ .
3. Soit  $\lambda \in ]0, 4[$  une valeur propre de  $A$  et soit  $\rho e^{i\theta}$  une solution complexe de l'équation  $t^2 - (2 - \lambda)t + 1 = 0$ . Démontrer que nécessairement  $\sin((n+1)\theta) = 0$ .
4. On conserve les notations de la question 3). Montrer que  $\rho = 1$  et que  $A$  admet  $n$  valeurs propres  $\lambda_k, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , distinctes dans  $]0, 4[$  qu'on explicitera en fonction de  $k$ .

## EXERCICE 11 Matrice nilpotente et diagonalisation

📖 Titre : Matrice nilpotente et diagonalisation

🔖 ID : 35 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 4

★ Difficulté :



Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée nilpotente non nulle.

1. Montrer que  $I_n - M$  n'est pas diagonalisable.
2. Généralement, montrer que si  $B$  est une matrice diagonalisable ayant une unique valeur propre alors  $B + M$  n'est pas diagonalisable.
3. Donner un exemple de matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tel que  $A \neq 0$  nilpotente et  $B$  diagonalisable et  $A + B$  aussi diagonalisable.

## EXERCICE 12 Matrice compagnon

📖 Titre : Matrice compagnon

🔖 ID : 705 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 4

★ Difficulté :



Soit  $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ . On lui associe la matrice  $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,

appelée matrice compagnon de  $P$ .

1. Prouver que la famille  $(e_1, Ce_1, \dots, C^{n-1}e_1)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$ .
2. Montrer que  $P$  est le polynôme minimal de  $C$ .
3. Quel est le polynôme caractéristique de  $C$ ?

### EXERCICE 13 Commutant d'une matrice diagonale

📖 **Titre :** Commutant d'une matrice diagonale

🔑 **ID :** 17 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 5

★ **Difficulté :**



Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / AM = MA\}$  dit le commutant de  $A$ .

1. Montrer que  $\mathcal{C}_A$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et que  $\mathbb{K}[A] \subset \mathcal{C}_A$ .
2. Soit  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux  $\lambda_i$  sont deux à deux distincts.
  - (a) Chercher  $\mathcal{C}_A$ .
  - (b) Soit  $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); M \mapsto MA - AM$ . Montrer que  $\text{Im}(\Phi)$  est l'ensemble des matrices à diagonale nulle.

### EXERCICE 14 La matrice avec des 1 aux bords et des zéros ailleurs

📖 **Titre :** La matrice avec des 1 aux bords et des zéros ailleurs

🔑 **ID :** 135 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 121

★ **Difficulté :**



Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 3$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Démontrer que  $A$  admet au plus trois valeurs propres complexes distinctes dont au moins une est nulle.
2. Donner les expressions explicites des valeurs propres de  $A$  et prouver qu'elles sont réelles.
3. A quelle condition sur  $n$  les valeurs propres de  $A$  sont entières?

### EXERCICE 15 Matrice diagonalisable sans trop de calcul

📖 **Titre :** Matrice diagonalisable sans trop de calcul

🔑 **ID :** 136 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 122

★ **Difficulté :**



1. Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Pour quelles valeurs de  $a$  la matrice  $A$  est elle diagonalisable.
2. Soit  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ . Prouver sans trop de calculs que  $B$  est diagonalisable.

### EXERCICE 16 Polynôme caractéristique de l'inverse d'une matrice inversible

📖 **Titre :** Polynôme caractéristique de l'inverse d'une matrice inversible

🔖 **ID :** 137 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 123

★ **Difficulté :**  
★ ★ ★ ★ ★

Soit  $M \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ . Exprimer le polynôme caractéristique de  $M^{-1}$  en fonction de  $\chi_M$ .

### EXERCICE 17

#### Polynôme minimal d'une matrice de rang 1

📖 **Titre :** Polynôme minimal d'une matrice de rang 1

🔖 **ID :** 138 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 124

★ **Difficulté :**  
★ ★ ★ ★ ★

$n$  est un entier naturel tel que  $n \geq 2$ .

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que  $\text{rg}(A) = 1$ . Démontrer que le polynôme minimal de  $A$  est  $\mu_A = X^2 - \text{tr}(A)X$ .

2. Déterminer le polynôme minimal de  $B = \begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix}$

### EXERCICE 18

#### L'endomorphisme $\Phi(f) = f + \text{tr}(f) \text{Id}$ .

📖 **Titre :** L'endomorphisme  $\Phi(f) = f + \text{tr}(f) \text{Id}$ .

🔖 **ID :** 139 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 125

★ **Difficulté :**  
★ ★ ★ ★ ★

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  avec  $n \geq 1$  et soit  $\Phi$  l'endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$  tel que pour tout  $f \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\Phi(f) = f + \text{tr}(f) \text{Id}_E$ .

1. Déterminer les éléments propres de  $\Phi$  et donner le polynôme caractéristique  $\chi_\Phi$  de  $\Phi$ .

2. Calculer  $\text{tr}(\Phi)$  et  $\det(\Phi)$ .

3. Montrer que  $\Phi$  est inversible et déterminer son inverse.

### EXERCICE 19

#### Caractérisation de l'inversibilité de $P(u)$ avec le polynôme minimal

📖 **Titre :** Caractérisation de l'inversibilité de  $P(u)$  avec le polynôme minimal

🔖 **ID :** 140 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 126

★ **Difficulté :**  
★ ★ ★ ★ ★

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mu_u$  le polynôme minimal de  $u$ . Démontrer que pour tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$ , on a  $P(u)$  est inversible si et seulement si  $P \wedge \mu_u = 1$

### EXERCICE 20

#### Preuve d'une propriété par trois méthodes

📖 **Titre :** Preuve d'une propriété par trois méthodes

🔖 **ID :** 141 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 127

★ **Difficulté :**  
★ ★ ★ ★ ★

On se propose de démontrer que :

(\*)  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists U, V \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}), A = U + V$   
par trois méthodes :

### 1. Méthode 1 :

- (a) Démontrer que  $(\star)$  est vrai si  $A = 0$  ou  $A$  inversible.
- (b) On suppose que  $A = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$  où  $I_r$  est la matrice unité de  $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$  et  $0_{n-r}$  la matrice nulle de  $\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$ . Démontrer que  $A$  vérifie  $(\star)$ .
- (c) Démontrer que si  $\text{rg}(A) = r$  avec  $0 < r < n$  alors  $A$  vérifie  $(\star)$ .

2. **Méthode 2 :** Démontrer qu'il existe au moins un réel  $\lambda$  tel que  $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$ . Conclure.

3. **Méthode 3 :** Nécessite le chapitre sur les espaces vectoriels normés.

- (a) Montrer que l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); t \mapsto \det(I_n - tA)$  est continue de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- (b) Calculer  $f(0)$ .
- (c) En déduire qu'il existe un voisinage  $V$  non vide de 0 tel que  $f(V) \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})$ .
- (d) Conclure.

## EXERCICE 21

### Polynôme minimal et somme directe et stabilité

📖 **Titre :** Polynôme minimal et somme directe et stabilité

🔑 **ID :** 142 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 128

★ **Difficulté :**



Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ , c'est-à-dire  $F \oplus G = E$ . Démontrer que si  $F$  et  $G$  sont stables par  $u$  et  $v \in \mathcal{L}(F)$  et  $w \in \mathcal{L}(G)$  les endomorphismes induits par  $u$  à  $F$  et  $G$  respectivement alors on a :

$$\mu_u = \mu_v \vee \mu_w$$

## EXERCICE 22

### Sous-espaces vectoriels stables par dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

📖 **Titre :** Sous-espaces vectoriels stables par dérivation dans  $\mathbb{K}[X]$

🔑 **ID :** 143 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 129

★ **Difficulté :**



1. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$  tel que :

$$(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \exists P \in \mathbb{K}[X], \quad \begin{cases} P \in F \\ \deg(P) = n \end{cases}.$$

Prouver que  $F = \mathbb{K}[X]$ .

2. Soit  $u : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X], P \mapsto P'$ . Démontrer que les seuls sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{K}[X]$  stables par  $u$  sont :  $\{0\}$ ,  $\mathbb{K}[X]$  et  $\mathbb{K}_n[X]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## EXERCICE 23

### Valeurs propres et racines $p$ èmes de l'unité

📖 **Titre :** Valeurs propres et racines  $p$  èmes de l'unité

🔑 **ID :** 144 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 130

★ **Difficulté :**



Soient  $p, n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $A^p = I_n$  et  $\omega$  une racine  $p$ ème de l'unité dans  $\mathbb{C}$  telle que  $\omega^{-1} \notin \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ . Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \omega^k A^k = 0.$$

**EXERCICE 24****Valeur propre de  $u \circ v$  et  $v \circ u$** 

📖 Titre : Valeur propre de  $u \circ v$  et  $v \circ u$

🔖 ID : 145 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 131

★ Difficulté :



Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ —espace vectoriel de dimension finie  $n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ . Démontrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \in \text{Sp}(u \circ v) \Leftrightarrow \lambda \in \text{Sp}(v \circ u)$$

**EXERCICE 25****Vecteurs propres et comatrice**

📖 Titre : Vecteurs propres et comatrice

🔖 ID : 146 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 132

★ Difficulté :



On rappelle et on ne demande pas de le démontrer que :

$$(\star) \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M^t(\text{Com}(A)) = \det(M)I_n.$$

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B = {}^t(\text{Com}(A))$ . Montrer que tout vecteur propre de  $A$  est un vecteur propre de  $B$ .

**EXERCICE 26****Noyaux itérés**

📖 Titre : Noyaux itérés

🔖 ID : 147 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 133

★ Difficulté :



Dans tout ce qui suit,  $n$  est un nombre entier naturel,  $E$  est un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u$  est un endomorphisme de  $E$ .

- Démontrer que pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , si  $(n_0, \dots, n_m)$  est une famille d'entiers naturels tel que  $n_0 < \dots < n_m$  alors  $m \leq n_m$ .
- Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Montrer que :
  - si  $\ker(u^p) = \ker(u^{p+1})$  alors  $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq p \Rightarrow \ker(u^k) = \ker(u^p)$ .
  - si  $\ker(u^p) \neq \ker(u^{p+1})$  alors  $p < n$ .
- Démontrer que  $u^n = u^{n+1}$  et que  $E = \ker(u^n) \oplus \text{Im}(u^n)$ .

**EXERCICE 27****Rang d'une matrice annulée par un polynôme**

📖 Titre : Rang d'une matrice annulée par un polynôme

🔖 ID : 148 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 134

★ Difficulté :



Soit  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice tel que  $A^3 + A^2 + A = 0$ . Démontrer que  $\text{rg}(A)$  est un entier naturel pair.

**EXERCICE 28****Matrices de rang 1 et application**

📖 Titre : Matrices de rang 1 et application

🔖 ID : 149 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 135

★ Difficulté :



Soit  $n$  un entier tel que  $n \geq 2$  et  $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice carrée dont tous les coefficients valent 1. On note  $I$  la matrice unité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Calculer  $J^2$  et en déduire que  $J$  est diagonalisable.
2. En remarquant que le rang de  $J$  est égal à 1, montrer que le polynôme caractéristique de  $J$  est scindé et que  $J$  possède exactement deux valeurs propres.
3. Donner le polynôme caractéristique de  $J$
4. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $K = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$ . Exprimer  $J$  en fonction de  $K, I, a$  et  $b$ . En déduire que  $K$  est diagonalisable et préciser le polynôme caractéristique  $\chi_K$  de  $K$ .
5. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice de rang 1. Démontrer que  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{tr}(A) \neq 0$ .

## EXERCICE 29 Un exemple de trigonalisation d'une matrice

**Titre :** Un exemple de trigonalisation d'une matrice  
**ID :** 150 **Durée :** —  
**Niveau :** L2 | N° : 136

**Difficulté :**  


Soit dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- a) Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .
- b) Trigonaliser la matrice  $A$ .

## EXERCICE 30 Un bon problème sur les matrices de taille 2 et 3

**Titre :** Un bon problème sur les matrices de taille 2 et 3  
**ID :** 151 **Durée :** —  
**Niveau :** L2 | N° : 137

**Difficulté :**  


1.  $E$  est un espace vectoriel de dimension  $n$  avec  $n \neq 0$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices carrées à  $n$  lignes et  $n$  colonnes et à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .
  - (a) Démontrer que pour toutes matrices  $M_1, M_2$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  si  $M_1$  et  $M_2$  sont semblables, il en est de même de  $M_1 + \lambda I_n$  et  $M_2 + \lambda I_n$ .
  - (b) Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Démontrer que  $u$  est une homothétie si et seulement si pour tout vecteur  $x$  de  $E$ , la famille  $(x, u(x))$  est liée. En déduire que si  $E$  est de dimension 2 et  $u$  est un endomorphisme de  $E$  qui n'est pas une homothétie alors il existe au moins un vecteur  $x$  tel que la famille  $(x, u(x))$  est une base de  $E$ .
  - (c) Démontrer que pour toute matrice carrée  $A$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ , on a  $A$  est scalaire ou bien  $A$  est semblable à la matrice  $A' = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ 1 & \tau \end{pmatrix}$  où  $\delta = \det(A)$  et  $\tau = \text{tr}(A)$ .
  - (d) Démontrer que si  $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  sont deux matrices non scalaires alors  $A$  et  $B$  sont semblables si et seulement si  $\det(A) = \det(B)$  et  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ .
2. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Justifier que le polynôme caractéristique de  $E$  est de la forme

$$\chi_u = (X - \lambda)Q(X) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{K} \quad \text{et} \quad Q \in \mathbb{K}[X].$$

- (a) Démontrer que si  $Q(\lambda) \neq 0$  alors il existe une base  $b$  de  $E$  tel que la matrice de  $u$  relativement à  $b$  est de la forme :  $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}$  où  $M' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .
- (b) Démontrer que si  $Q(\lambda) = Q'(\lambda) = 0$  alors  $u - \lambda \text{Id}_E$  est nilpotent.
- (c) Démontrer que si  $Q(\lambda) = 0$  et  $Q'(\lambda) \neq 0$ , alors on se ramène au cas du a) ci-dessus.

3. Dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ , on considère les matrices  $J$  et  $K$  suivantes :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$  une matrice nilpotente d'indice  $p$  avec  $p \in \{2, 3\}$ . Démontrer que si  $p = 3$ , alors  $A$  est semblable à  $J$  et si  $p = 2$ , alors  $A$  est semblable à  $K$ .

4. En déduire que si  $A$  et  $B$  sont deux matrices nilpotentes de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$  tel que  $\chi_A = \chi_B$  et  $\mu_A = \mu_B$  alors  $A$  et  $B$  sont semblables.
5. En utilisant tout ce qui précède, démontrer que si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $\mathcal{M}_3(K)$  tel que  $\chi_A = \chi_B$  et  $\mu_A = \mu_B$  alors  $A$  et  $B$  sont semblables.

### EXERCICE 31 Un bon problème sur les matrices de petite taille

📖 **Titre :** Un bon problème sur les matrices de petite taille

🔖 **ID :** 152 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 138

★ **Difficulté :**



On se propose de démontrer que pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a  $A$  et  ${}^tA$  sont semblables. On admet que ce résultat est vrai pour toute matrice nilpotente.

- Démontrer que le résultat est vrai s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $A - \lambda I_n$  est nilpotente.
- Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Démontrer que  $u$  est une homothétie si et seulement si pour tout vecteur  $x$  de  $E$ , la famille  $(x, u(x))$  est liée. En déduire que si  $E$  est de dimension 2 et  $u$  est un endomorphisme de  $E$  qui n'est pas une homothétie alors il existe au moins un vecteur  $x$  tel que la famille  $(x, u(x))$  est une base de  $E$ .
- Démontrer que pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ , on a soit  $A$  est scalaire soit  $A$  est semblable à la matrice  $A' = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ 1 & \tau \end{pmatrix}$  où  $\delta = \det(A)$  et  $\tau = \text{tr}(A)$ .
- En déduire que la propriété à démontrer est vraie si  $n = 2$ .
- Démontrer que si  $A_1, \dots, A_s$  sont des matrices carrées tel que  $A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{K})$  pour tout  $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$  avec  $n_k \in \mathbb{N}^*$  et si  $B_1, \dots, B_s$  sont des matrices carrées tel que  $b_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{K})$  et  $A_k$  et  $B_k$  sont semblables alors les matrices diagonales par blocs :  $U = \text{diag}(A_1, \dots, A_s)$  et  $V = \text{diag}(B_1, \dots, B_s)$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  où  $n = \sum_{k=1}^s n_k$ .
- Démontrer par récurrence que la propriété ci-dessus est vraie dans le cas où  $A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que le polynôme caractéristique de  $A$  est de la forme  $\chi_A = P_1(X)P_2(X)$  où  $P_1$  et  $P_2$  sont deux polynômes non constants et premiers entre eux.
- Démontrer le résultat admis pour les matrices nilpotentes dans le cas où  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est nilpotente d'indice de nilpotence  $n$ .

### EXERCICE 32 Similitude de deux matrices digonalisables

📖 **Titre :** Similitude de deux matrices digonalisables

🔖 **ID :** 153 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 139

★ **Difficulté :**



Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer que si  $A$  et  $B$  sont deux matrices carrées de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonalisables alors  $A$  et  $B$  sont semblables si et seulement si elles ont même polynôme caractéristique, c'est-à-dire si et seulement si  $\chi_A = \chi_B$ .

### EXERCICE 33

### Representation d'un type de matrices

📖 **Titre :** Representation d'un type de matrices

🔖 **ID :** 154 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 140

★ **Difficulté :**



Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice tel que  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$  et  $A$  non nilpotente. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- $A$  est semblable à une matrice de la forme  $B = \text{diag}(O_p, M_1, \dots, M_q)$  avec  $p, q \in \mathbb{N}^*$ ,  $O_p$  la matrice nulle de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  et pour tout  $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ ,  $M_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$ , avec  $(\alpha_j, \beta_j) \in \mathbb{R}^2$  et  $\alpha_j^2 + \beta_j^2 > 0$  et les couples  $(\alpha_j, \beta_j)$  sont deux à deux distincts.
- Le polynôme minimal de  $A$  est de la forme :  $\pi_A = X P_1 \dots P_q$ , avec pour tout  $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ , on a  $P_k$  est un trinôme irréductible et unitaire de  $\mathbb{R}[X]$  et les  $P_k$  sont deux à deux distincts.

### EXERCICE 34

### Centre de $\text{GL}(E)$ en dimension quelconque

📖 **Titre :** Centre de  $\text{GL}(E)$  en dimension quelconque

🔖 **ID :** 155 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 141

★ **Difficulté :**



Dans tout ce qui suit,  $\mathbb{K}$  désigne l'un des corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel quelconque.

- Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Démontrer que  $u$  est une homothétie si et seulement si, pour tout  $x \in E$ , la famille  $(x, u(x))$  est liée.
- Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que :

$$\forall v \in \text{GL}(E), v \circ u = u \circ v$$

On se propose de prouver que  $u$  est une homothétie. Pour cela on considère un vecteur  $x$  non nul de  $E$  et on va prouver que la famille  $(x, u(x))$  est liée. Soit  $H$  un sous-espace supplémentaire de la droite vectorielle  $\mathbb{K}x$ , donc  $\mathbb{K}x \oplus H = E$  et  $v$  l'endomorphisme de  $E$  tel que  $v(x) = x$  et pour tout  $h \in H$ ,  $v(h) = -h$ .

- Soit  $y \in E$  un vecteur tel que  $y = \alpha x + h$  avec  $\alpha \in \mathbb{K}$  et  $h \in H$ . Exprimer  $v(y)$  en fonction de  $\alpha, x$  et  $h$ .
- Determiner  $\ker(v - \text{Id}_E)$ .
- Prouver que  $v \in \text{GL}(E)$ .
- En déduire que  $\mathbb{K}x$  est stable par  $u$ .
- Conclure.

### EXERCICE 35

### Matrices diagonales semblables

📖 **Titre :** Matrices diagonales semblables

🔖 **ID :** 156 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 142

★ **Difficulté :**



On considère deux matrices diagonales :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_n \end{pmatrix}$$

de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\Delta$  et  $D$  et sont semblables.
- (ii) Il existe une permutation  $\sigma$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  tel que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mu_k = \lambda_{\sigma(k)}$$

### EXERCICE 36

### Matrice de rang 1 : diverses caractérisations

📖 Titre : Matrice de rang 1 : diverses caractérisations

🔑 ID : 157 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 143

★ Difficulté :



Dans tout ce qui suit,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $n$  un entier naturel tel que  $n \geq 2$ .

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que  $\text{rg}(A) = 1$ .
  - (a) Démontrer qu'il existe  $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  tel que  $X \neq 0$  et  $Y \neq 0$  et  $A = X^t Y$ .
  - (b) Démontrer que  $\text{tr}(A) = {}^t Y X = {}^t X Y$ .
  - (c) Prouver que le polynôme minimal de  $A$  est  $\pi_A = X^2 - \text{tr}(A)X$ .
2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que  $\text{rg}(A) = 1$ .
  - (a) Montrer que si  $\text{tr}(A) = 0$  alors  $A$  est semblable à la matrice :

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Montrer que si  $\tau = \text{tr}(A) \neq 0$  alors  $A$  est semblable à  $D_\tau$  avec :

$$D_\tau = \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 & \tau \end{pmatrix}$$

Pour tout  $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n$ , on pose :

$$M(x) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x_n \end{pmatrix}$$

Soit  $a = (a_k)_{1 \leq k \leq n}$  et  $b = (b_k)_{1 \leq k \leq n}$  deux éléments  $\mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ . Démontrer que les matrices  $M(a)$  et  $M(b)$  sont semblables si et seulement si  $a_n = b_n$ .

### EXERCICE 37

### Preuve de $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

📖 Titre : Preuve de  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

🔑 ID : 158 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 144

★ Difficulté :



Soient  $m, n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ . On considère les matrices par blocs :

$$C = \begin{pmatrix} xI_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -B & xI_n \end{pmatrix}.$$

1. Calculer  $\det(CD)$  et  $\det(DC)$
2. Montrer que :  $x^n \chi_{AB} = x^m \chi_{BA}$
3. Montrer que si  $m = n$  alors  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

### EXERCICE 38

#### Une expression de $\chi_{-A'}(0)$ par la comatrice

📖 **Titre :** Une expression de  $\chi_{-A'}(0)$  par la comatrice

🔖 **ID :** 159 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 145

★ **Difficulté :**



Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose que  $A$  est inversible.

1. Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{K}^*$ , on a :

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \frac{(-1)^n}{\det(A)} x^n \chi_A\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. En déduire que le coefficient du monôme de degré 1 dans  $\chi_A(X)$  est

$$a_1 = (-1)^{n-1} \text{tr}(\text{Com}(A))$$

### EXERCICE 39

#### Matrice non diagonalisable et sans valeur propre réelle

📖 **Titre :** Matrice non diagonalisable et sans valeur propre réelle

🔖 **ID :** 160 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 146

★ **Difficulté :**



On se propose de donner un exemple d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tel que  $A$  n'a aucune valeur propre réelle et  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

1. Vérifier que si une telle matrice existe forcément  $n$  est pair.
2. Démontrer que si  $n = 2$ , une telle matrice n'existe pas.
3. Donner un exemple d'une telle matrice :
  - (a) Si  $n = 4$ .
  - (b) Généralement si  $n = 2m$  avec  $m \geq 2$ .

### EXERCICE 40

#### Réduction des matrices par blocs

📖 **Titre :** Réduction des matrices par blocs

🔖 **ID :** 161 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 147

★ **Difficulté :**



On considère deux nombres réel  $a$  et  $b$  tel que  $a^2 \neq b^2$  et la matrice  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .  $n$  est un entier naturel tel que  $n \geq 2$ , on considère la matrice  $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  dont les blocs  $A_{i,j}$  pour  $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  sont tous égaux à  $B$ , c'est-à-dire que

$$A = \begin{pmatrix} B & \dots & B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B & \dots & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & \dots & a & b \\ b & a & \dots & b & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & b & \dots & a & b \\ b & a & \dots & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de  $A$ .
2. Démontrer que  $0 \in \text{Sp}(A)$  et préciser la dimension du sous-espace propre  $E_0(A)$ .
3. Démontrer que  $A$  est diagonalisable.

### EXERCICE 41

#### $A$ et $B$ diagonalisable et $A^2 = B^2$ et $A^3 = B^3$

📖 **Titre :**  $A$  et  $B$  diagonalisable et  $A^2 = B^2$  et  $A^3 = B^3$

🔑 **ID :** 162 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 148

★ **Difficulté :**



Dans tout l'exercice  $n$  désigne un entier naturel non nul.

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Démontrer que si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est un endomorphisme diagonalisable alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  on a  $\ker(u - \lambda \text{Id}_E) = \ker(u - \lambda \text{Id}_E)^2$ .
2. Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que  $A$  et  $B$  sont diagonalisables et  $A^2 = B^2$  et  $A^3 = B^3$ . Démontrer que  $A = B$ .
3. Est ce que le résultat demeure vrai si on ne suppose plus que  $A$  et  $B$  sont diagonalisables?

### EXERCICE 42

#### Etude d'une matrice carrée dépendant de deux paramètres

📖 **Titre :** Etude d'une matrice carrée dépendant de deux paramètres

🔑 **ID :** 163 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 149

★ **Difficulté :**



On considère les matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose :

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} y & x - y & 0 \\ 0 & x & 0 \\ x - y & -x + y & x \end{pmatrix},$$

et soit

$$\mathcal{A} = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On note  $a$  et  $b$  les endomorphismes canoniquement associés à  $A$  et  $B$  respectivement.

1. Démontrer que  $\mathcal{A}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  stable par la multiplication des matrices, c'est-à-dire :  $\forall M_1, M_2 \in \mathcal{A}, M_1 M_2 \in \mathcal{A}$ .
2. Démontrer que  $a$  est diagonalisable et préciser ses sous-espaces propres.
3. Démontrer que tout sous-espace vectoriel propre de  $a$  est stable par  $b$ .
4. En déduire qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  dont les vecteurs sont des vecteurs propres à la fois pour  $a$  et  $b$ .
5. Démontrer que toute  $M$  appartenant à  $\mathcal{A}$  est diagonalisable.

### EXERCICE 43

#### Endomorphisme induit et polynômes

📖 **Titre :** Endomorphisme induit et polynômes

🔑 **ID :** 164 ⌚ **Durée :** —

★ **Difficulté :**



Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ —espace vectoriel de dimension finie non nulle.  $u \in \mathcal{L}(E)$  est un endomorphisme de  $E$ .

1. Soit  $F$  un sous-espace stable par  $u$  et  $v$  l'endomorphisme induit par  $u$ . Démontrer que  $\pi_v | \pi_u$ .
2. Soit  $P$  un polynôme irréductible tel que  $P | \chi_u$ . Démontrer que  $P | \pi_u$

#### EXERCICE 44 Conditions sur un polynôme annulateur pour être diagonalisable

 **Titre :** Conditions sur un polynôme annulateur pour être diagonalisable

 ID : 165  **Durée :** —

 Niveau : L2 | N° : 151

★ **Difficulté :**  
★ ★ ★ ★ ★

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme tel qu'il existe un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P$  est scindé et  $P(u) = 0$  et pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , on a  $P(\lambda) = 0$  et  $P'(\lambda) \neq 0$ . Démontrer que  $u$  est diagonalisable.

#### EXERCICE 45 Valeurs propre d'un composé d'endomorphismes

 **Titre :** Valeurs propre d'un composé d'endomorphismes

 ID : 166  **Durée :** —

 Niveau : L2 | N° : 152

★ **Difficulté :**  
★ ★ ★ ★ ★

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ —espace vectoriel de dimension finie  $n$  avec  $n \geq 1$ . et  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $g \circ f$  alors  $\lambda$  est valeur propre de  $f \circ g$  (on distinguera les cas  $\lambda = 0$  et  $\lambda \neq 0$ ).
2. On suppose dans cette question de  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Montrer que si  $f \circ g = g \circ f$  alors  $f$  et  $g$  ont au moins un vecteurs propre commun.

#### EXERCICE 46 Doublon, voir 155

 **Titre :** Doublon, voir 155

 ID : 167  **Durée :** —

 Niveau : L2 | N° : 153

★ **Difficulté :**  
★ ★ ★ ★ ★

Dans tout l'exercice  $\mathbb{K}$  désigne l'un des corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

1. Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  sur  $\mathbb{K}$ , ayant chacun  $n$  valeurs propres distinctes dans  $\mathbb{K}$ . Montrer que  $f \circ g = g \circ f$  si et seulement si  $f$  et  $g$  ont les mêmes vecteurs propres.
2. Supposons maintenant que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  et que  $f \circ g = g \circ f$ . Montrer que tout sous-espace propre de  $f$  est  $g$ —stable et qu'il existe un vecteur propre commun à  $f$  et  $g$ .

#### EXERCICE 47 Polynôme annulateur de la forme $QR$ avec $Q \wedge R = 1$

 **Titre :** Polynôme annulateur de la forme  $QR$  avec  $Q \wedge R = 1$

 ID : 168  **Durée :** —

 Niveau : L2 | N° : 154

★ **Difficulté :**  
★ ★ ★ ★ ★

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ —espace vectoriel de dimension finie ou non,  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel qu'il existe  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P = QR$  est un polynôme annulateur de  $u$  et  $Q \wedge R = 1$ . Démontrer que  $\text{Im}(Q(u)) = \ker(R(u))$

#### EXERCICE 48 Pratique de la trigonalisation et application

📖 Titre : Pratique de la trigonalisation et application

🔑 ID : 169 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 155

★ Difficulté :



Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .
2. Pourquoi  $A$  est-elle trigonalisable ? Est-elle diagonalisable ?
3. Trigonaliser la matrice  $A$ .
4. En déduire le polynôme minimal de  $A$ .
5. Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la matrice  $A^n$  sous forme de combinaison linéaire de  $A$  et  $I_n$ .

## EXERCICE 49

### Exercice pratique, deux matrices de taille 4

📖 Titre : Exercice pratique, deux matrices de taille 4

🔑 ID : 170 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 156

★ Difficulté :



On considère les matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  tel que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que  $\chi_A = \chi_B$  ( $A$  et  $B$  ont même polynôme caractéristique). En déduire que  $\det(A) = \det(B)$  et  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ .
2. Démontrer que  $\pi_A = \pi_B$  ( $A$  et  $B$  ont même polynôme minimal).
3. Montrer que  $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$  et le calculer.
4. Démontrer que  $A$  et  $B$  ne sont pas semblables.

## EXERCICE 50

### Etude d'un endomorphisme de matrices (matrices par blocs)

📖 Titre : Etude d'un endomorphisme de matrices (matrices par blocs)

🔑 ID : 482 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 464

★ Difficulté :



Soit  $n \geq 2$  un entier et soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On définit la matrice par blocs :

$$N = \varphi(M) = \begin{pmatrix} M & M^2 \\ 0_n & M \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

1. Si  $m \in \mathbb{C}$  et  $\varphi(m) = \begin{pmatrix} m & m^2 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ , la matrice  $\varphi(m)$  est-elle diagonalisable ?
2. Dans cette question, on suppose  $n = 2$ . Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  et soit  $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$  telle que  $P^{-1}MP$  soit diagonale si  $M$  est diagonalisable ou triangulaire sinon. En utilisant la matrice  $P$ , montrer que  $N = \varphi(M)$  est diagonalisable si et seulement si  $M = 0$ .
3. (a) Pour  $Q \in \mathbb{C}[X]$ , déterminer  $Q(N)$ .  
(b) Montrer que si  $N$  est diagonalisable, alors  $M$  est diagonalisable.  
(c) Montrer que si  $N$  est diagonalisable, alors  $M^2 = 0$ , et conclure

4. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Exprimer le polynôme minimal de  $N = \varphi(M)$  en fonction de celui de  $M$ .

### EXERCICE 51 Activités sur la réduction

📖 Titre : Activités sur la réduction

🔑 ID : 484 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 466

★ Difficulté :



Considérons la matrice  $A$  suivante :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ .

1. On suppose  $k$  réel, la matrice  $A$  est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  ? (sans calculs).
2. (a) Déterminer le rang de  $A$ .  
(b) Donner la raison pour laquelle le polynôme caractéristique de  $A$  est de la forme  $\chi_A = X^2(X - u_1)(X - u_2)$  avec  $u_1$  et  $u_2$  des nombres complexes non nuls vérifiant :  $u_1 + u_2 = k$  et  $u_1^2 + u_2^2 = k^2 + 6$ .  
(c) Etudier les éléments propres dans le cas où  $u_1 = u_2$ .  
(d) En déduire les valeurs de  $k$  pour que  $A$  soit diagonalisable dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ .

### EXERCICE 52 Réduction d'un endomorphisme de polynômes

📖 Titre : Réduction d'un endomorphisme de polynômes

🔑 ID : 485 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 467

★ Difficulté :



Montrer que l'application

$$f : P(X) \mapsto (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X)$$

est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Former la matrice de  $f$  relative à la base canonique de  $E$ . En déduire la diagonalisabilité de  $f$  ainsi que ses valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

### EXERCICE 53 Etude d'un endomorphisme, somme directe d'un noyau et une image

📖 Titre : Etude d'un endomorphisme, somme directe d'un noyau et une image

🔑 ID : 486 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 468

★ Difficulté :



Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 2$ .

- (a) Donner un exemple d'endomorphisme  $f$  de  $E$  dont l'image et le noyau ne sont pas supplémentaires.
- (b) On suppose, dans cette question seulement, que  $f$  est un endomorphisme de  $E$  diagonalisable. Justifier que l'image et le noyau de  $f$  sont supplémentaires.
- (c) Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer qu'il existe un entier naturel non nul  $k$  tel que

$$\text{Im}(f^k) \oplus \text{Ker}(f^k) = E$$

L'endomorphisme  $f^k$  est-il nécessairement diagonalisable ?

- (d) Le résultat démontré en c) reste-t-il valable si l'espace est de dimension infinie ?

### EXERCICE 54 Commutant d'un endomorphisme nilpotent dans deux cas

📖 **Titre :** Commutant d'un endomorphisme nilpotent dans deux cas

🔖 **ID :** 524 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 505

★ **Difficulté :**



Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 3$  et  $E$  un espace vectoriel de dimension finie de dimension  $n$ . On considère un endomorphisme nilpotent  $u$  de  $E$  d'indice de nilpotence  $p$ . On note

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) / u \circ v = v \circ u\},$$

appelé la commutant de  $u$ . Donner la dimension  $\dim(\mathcal{C}(u))$ , dans chacun des cas particuliers suivants :

1. Le cas  $p = n$ .
2. Le cas  $p = n - 1$

### EXERCICE 55

#### Un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$

📖 **Titre :** Un automorphisme de  $\mathbb{R}[X]$

🔖 **ID :** 525 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 506

★ **Difficulté :**



Soit  $E = \mathbb{R}[X]$  et soit  $u : P \mapsto P(2X)$  défini de  $E$  dans  $E$ .

1. Vérifier que  $u$  est un automorphisme de  $E$ .
2. Soit  $\mathbb{R}[u]$  la  $\mathbb{R}$ -algèbre engendrée par la famille  $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$  (autrement dit  $\mathbb{R}[u]$  est l'ensemble des polynômes de l'endomorphisme  $u$ ). Montrer que  $u^{-1}$  n'appartient pas à  $\mathbb{R}[u]$ .
3. Conclusion?

### EXERCICE 56

#### Théorème de Hadamard

📖 **Titre :** Théorème de Hadamard

🔖 **ID :** 526 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 507

★ **Difficulté :**



**Théorème de Hadamard** - Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Prouver que si

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$$

alors  $A$  est inversible.

### EXERCICE 57

#### Isomorphisme dont l'inverse n'est pas polynôme en $u$

📖 **Titre :** Isomorphisme dont l'inverse n'est pas polynôme en  $u$

🔖 **ID :** 527 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 508

★ **Difficulté :**



Soit  $u : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P \mapsto P(X+1)$ .

1. Démontrer que  $u$  est un isomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$ .
2. Démontrer que  $u \notin \mathbb{R}[u]$ .

### EXERCICE 58

#### Isomorphisme $u$ tel que $u^{-1} \notin \mathbb{K}[u]$ : Variante

📖 **Titre :** Isomorphisme  $u$  tel que  $u^{-1} \notin \mathbb{K}[u]$  : Variante

🔑 **ID :** 528 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 509

★ **Difficulté :**



1. Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  non nul et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de  $E$ . On note  $\theta$  l'endomorphisme nul de  $E$ ,  $\mathfrak{I}_u = \{P \in \mathbb{K}[X] / P(u) = \theta\}$  l'idéal annulateur de  $u$  et  $\mathbb{K}[u] = \{P(u) / P \in \mathbb{K}[X]\}$  l'algèbre des polynômes en  $u$ . Démontrer que si  $u \in \mathbf{GL}(E)$  alors

$$u^{-1} \in \mathbb{K}[u] \Leftrightarrow \mathfrak{I}_u \neq \{0\}$$

2. Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$  défini par :

$$u : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]; P \mapsto u(P) = P(X+1).$$

- (a) Prouver que  $u$  est un isomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$ .  
(b) Prouver que  $u^{-1} \notin \mathbb{K}[X]$ .
3. Soit  $E = \mathbb{R}[X]$  et soit  $u : P \mapsto P(2X)$  défini de  $E$  dans  $E$ .  
(a) Vérifier que  $u$  est un automorphisme de  $E$ .  
(b) Montrer que  $u^{-1}$  n'appartient pas à  $\mathbb{R}[u]$ .

## EXERCICE 59

### Pratique de la réduction sur des exemples

📖 **Titre :** Pratique de la réduction sur des exemples

🔑 **ID :** 530 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 511

★ **Difficulté :**



1. Montrer que :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

est trigonalisable.  $A$  est-elle diagonalisable ? Réduire  $A$  et déterminer son polynôme minimal.

2. Même question pour :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

## EXERCICE 60

### Activité sur les matrices par blocs

📖 **Titre :** Activité sur les matrices par blocs

🔑 **ID :** 531 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 512

★ **Difficulté :**



Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f$  l'endomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{2n}$  dont la matrice dans la base canonique est la matrice par blocs  $M = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ O_n & O_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ .

1. Déterminer le polynôme caractéristique de  $M$ .  
2. (a) Déterminer le noyau de  $f$ .  
(b) Montrer que  $f$  est diagonalisable.

## EXERCICE 61

### Calcul de la dimension du commutant dans un cas

📖 **Titre :** Calcul de la dimension du commutant dans un cas

🔖 **ID :** 532 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 513

★ **Difficulté :**



Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1})$ . On suppose  $u^3 = u$ ,  $\text{tr}(u) = 0$  et  $\text{tr}(u^2) = 2n$ . On note

$$C(u) = \left\{ v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1}) \mid uv = vu \right\}$$

1. Calculer la dimension  $C(u)$ .
2. Quels sont les  $n$  tels que  $C(u) = \mathbb{R}[u]$ ?

## EXERCICE 62

Un bon exercice lien entre  $f$  diagonalisable et des puissances de  $f$

📖 **Titre :** Un bon exercice lien entre  $f$  diagonalisable et des puissances de  $f$

🔖 **ID :** 534 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 515

★ **Difficulté :**



1. Montrer que si  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  diagonalisable, alors l'endomorphisme  $f^2 = f \circ f$  est aussi diagonalisable.
2. Soit  $g$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$ . On note  $I_3$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
  - (a) Déterminer la matrice  $A^2$ , puis établir que  $A^4 = I_3$ . En déduire les valeurs propres possibles de la matrice  $A$ .
  - (b) Montrer que  $\dim(\ker(g - \text{Id})) = 1$  et donner une base  $(V_1)$  de  $\ker(g - \text{Id})$ .
  - (c) Déterminer  $\ker(g + \text{Id})$ .
  - (d) En déduire que  $g$  n'est pas diagonalisable.
3. Résoudre l'équation  $A^2X = -X$ , d'inconnue  $X$  élément de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ , et en déduire une base  $(V_2, V_3)$  de  $\ker(g^2 + \text{Id})$ .
4. Montrer que la famille  $(V_1, V_2, V_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
5. Ecrire la matrice de  $g^2$  dans la base  $(V_1, V_2, V_3)$ .
6. Est ce que la réciproque du résultat prouvé en 1) est vraie?

## EXERCICE 63

Réduction de la matrice somme de deux matrices élémentaires

📖 **Titre :** Réduction de la matrice somme de deux matrices élémentaires

🔖 **ID :** 535 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 516

★ **Difficulté :**



On considère un entier naturel  $n$  tel qu  $n \geq 2$ . Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on note  $E_{i,j}$  la matrice élémentaire de la base canonique dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne  $i$  et la colonne  $j$ , lequel vaut 1. et soit  $U = E_{1,n} + E_{n,1}$ .

1. Calculer le polynôme caractéristique  $\chi_U$  de  $U$ .
2. Démontrer que  $U$  est diagonalisable.
3. Calculer le polynôme minimal  $\pi_U$  de  $U$ .
4. Soit  $x \in \mathbb{K}$  et  $M_x = xU + I_n$ . Démontrer que  $M_x$  est diagonalisable et préciser son spectre, son polynôme caractéristique et son polynôme minimal.

**EXERCICE 64****Bezout avec les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$** 

📖 **Titre :** Bezout avec les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$

🔖 **ID :** 536 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 517

★ **Difficulté :**



Soient  $n \geq 2$ ,  $A$  et  $B$  des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  de déterminants non nuls et premiers entre eux. Montrer qu'il existe  $U$  et  $V$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  telles que

$$UA + VB = I_n$$

On pourra écrire  $\chi_A(X) = XQ_A(X) \pm \det(A)$ .

**EXERCICE 65****Polynôme caractéristique d'une matrice par blocs**

📖 **Titre :** Polynôme caractéristique d'une matrice par blocs

🔖 **ID :** 537 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 518

★ **Difficulté :**



Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$  la matrice par blocs :  $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ . Donner le polynôme caractéristique  $\chi_B$  de  $B$  en fonction du polynôme caractéristique  $\chi_A$  de  $A$ .

**EXERCICE 66****Matrices de rang 1, application**

📖 **Titre :** Matrices de rang 1, application

🔖 **ID :** 538 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 519

★ **Difficulté :**



Soit  $n$  un entier naturel tel que  $n \geq 2$ .

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est une matrice telle que  $\text{rg}(A) = 1$ . On note  $\tau = \text{tr}(A)$ .

(a) Démontrer que  $A$  est semblable à une matrice de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \tau \end{pmatrix}$$

(b) En déduire que  $A^2 = \tau A$  et déterminer le polynôme minimal de  $A$ .

(c) Démontrer alors que  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{tr}(A) \neq 0$ .

(d) Déterminer le polynôme caractéristique de  $A$ .

(e) Calculer  $A^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

2. Soit  $a \in \mathbb{K}^*$  et on considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  (On pourra utiliser judicieusement la question 1)b)).

**EXERCICE 67****Une belle méthode pour prouver que deux matrices sont semblables**

📖 **Titre :** Une belle méthode pour prouver que deux matrices sont semblables

🔖 **ID :** 541 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 522

★ **Difficulté :**



On note  $E_n = \mathbb{K}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans le corps  $\mathbb{K}$  de degré inférieur ou égal à  $n$ . On définit l'endomorphisme de  $E$  suivant :

$$\phi : \begin{cases} E_n & \longrightarrow E_n \\ P & \mapsto P' + P \end{cases}$$

Écrire la matrice de  $\phi$  dans la base canonique de  $E$ . En déduire que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

### EXERCICE 68

### Trace de $(A + B)^p$ avec $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$

**Titre :** Trace de  $(A + B)^p$  avec  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$

**ID :** 543 **Durée :** —

**Niveau :** L2 | **N° :** 524

★ **Difficulté :**



Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p$  un entier naturel premier. Démontrer que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \quad \text{tr}((A + B)^p) \equiv \text{tr}(A^p) + \text{tr}(B^p) [p]$$

### EXERCICE 69

### Un endomorphisme à l'aide de la trace

**Titre :** Un endomorphisme à l'aide de la trace

**ID :** 545 **Durée :** —

**Niveau :** L2 | **N° :** 526

★ **Difficulté :**



Soit  $n$  un entier naturel tel que  $n \geq 2$ . Si  $M$  désigne une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on désigne par  $\text{Tr}(M)$  la trace de la matrice  $M$ , c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

On admet que l'application trace est une forme linéaire de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $A$  une matrice non nulle donnée de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On considère l'application  $f$  qui à toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  associe :

$$f(M) = \text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A$$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que  $f$  n'est pas l'endomorphisme nul (on pourra distinguer les cas  $\text{Tr}(A) = 0$  et  $\text{Tr}(A) \neq 0$ ).
3. (a) Établir que, pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a :  $(f \circ f)(M) = \text{Tr}(A)f(M)$ .  
(b) Donner les valeurs propres possibles de  $f$ .
4. Montrer que 0 est valeur propre de  $f$ .
5. Montrer que, si  $\text{Tr}(A) = 0$ , alors  $f$  n'est pas diagonalisable.
6. On suppose dans cette question que la trace de  $A$  est non nulle.
  - (a) Quelle est la dimension de  $\text{Ker}(\text{Tr})$  ?
  - (b) Conclure que  $f$  est diagonalisable.

### EXERCICE 70

### Etude d'une matrice vérifiant trois conditions

📖 **Titre :** Etude d'une matrice vérifiant trois conditions

🔑 **ID :** 548 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 529

★ **Difficulté :**



On cherche à déterminer une matrice  $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  vérifiant :

- (i)  $(M^2 + M + I_4)(M - 2I_4)^2 = 0$
- (ii)  $(M^2 + M + I_4)(M - 2I_4) \neq 0$
- (iii)  $(M - 2I_4)^2 \neq 0$

où  $I_4$  est la matrice unité de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ .

1. Chercher les valeurs propres possibles d'une telle matrice.
2. Y a-t-il des solutions diagonalisables ?
3. Déterminer une solution qui soit triangulaire supérieure.

## EXERCICE 71

### Un endomorphisme de matrices

📖 **Titre :** Un endomorphisme de matrices

🔑 **ID :** 552 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 533

★ **Difficulté :**



Soit  $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{K}); M \mapsto f(M)$ , défini comme suit : si  $M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$  alors  $f(M) = \begin{pmatrix} t & z \\ x & y \end{pmatrix}$ .

1. Vérifier que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$
2.  $f$  est-il diagonalisable ?
3. Si  $f$  est diagonalisable, diagonaliser  $f$ .

## EXERCICE 72

### Un autre endomorphisme de matrices

📖 **Titre :** Un autre endomorphisme de matrices

🔑 **ID :** 553 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 534

★ **Difficulté :**



Soit  $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{K}); M \mapsto f(M)$ , défini comme suit : si  $M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$  alors  $f(M) = \begin{pmatrix} y & t \\ x & z \end{pmatrix}$ .

1. Vérifier que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$
2.  $f$  est-il diagonalisable ?
3. Si  $f$  est diagonalisable, diagonaliser  $f$ .

## EXERCICE 73

### Un autre endomorphisme de matrices

📖 **Titre :** Un autre endomorphisme de matrices

🔑 **ID :** 554 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 535

★ **Difficulté :**



Identifier les matrices  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que  $A$  est non inversible et :

$$\operatorname{rg}(A - I_n) + \operatorname{rg}(A + I_n) = n + 1.$$

## EXERCICE 74

### La famille des polynômes de Bernstein

📖 **Titre :** La famille des polynômes de Bernestein

🔑 **ID :** 566 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 547

★ **Difficulté :**



On définit les polynômes de Bernestein par

$$B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k},$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On se propose de démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la famille  $(B_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

1. On rappelle que si  $P = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j X^j$ , est un polynôme non nul la valuation de  $P$  est  $\text{val}(P) = \min\{k \in \mathbb{N} / a_k \neq 0\}$ .

(a) Quelle est la valuation de  $B_{n,k}$ ?

(b) Démontrer que si  $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une famille de polynômes tel que  $\text{val}(A_k) = k$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  alors la famille  $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$  est libre.

(c) Démontrer que  $(B_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$  est libre.

2. On considère l'application :

$$f : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X], P \mapsto f(P) = nXP(X) + X(1-X)P'(X)$$

(a) Justifier que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$  et que  $\mathbb{K}_n[X]$  est stable par  $f$ .

(b) Démontrer que pour tout  $(n, k) \in \mathbb{N} \times \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a  $f(B_{n,k}) = \lambda_{n,k} B_{n,k}$  où  $\lambda_{n,k}$  est un scalaire à préciser.

(c) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la famille  $(B_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

## EXERCICE 75

### Une utilisation du théorème de Cayley-Hamilton

📖 **Titre :** Une utilisation du théorème de Cayley-Hamilton

🔑 **ID :** 671 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 652

★ **Difficulté :**



On considère  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  tel que  $\det(A) = 1$ . Démontrer que pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , on a la relation :

$$A^2 M - M A^2 = M A^{-2} - M^{-2} A.$$

## EXERCICE 76

### Trace réelle d'une matrice de taille 4

📖 **Titre :** Trace réelle d'une matrice de taille 4

🔑 **ID :** 690 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 671

★ **Difficulté :**



Soit  $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  tel que  $\text{tr}(A) \in \mathbb{R}$ . Quelles sont les valeurs possibles de  $\det(A)$  et  $\text{tr}(A)$ ?

## EXERCICE 77

### Polynôme min et car

📖 **Titre :** Polynôme min et car

🔑 **ID :** 707 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 685

★ **Difficulté :**



On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de  $A$ .
2. Déterminer le polynôme minimal de  $A$ .