

Thème : Algèbre linéaire : Rappels

EXERCICE 1 Matrice avec que des 1

📖 Titre : Matrice avec que des 1

🔑 ID : 12 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 1

★ Difficulté :



Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $J = (a_{i,j})$ avec $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,j} = 1$. On note que si u l'endomorphisme canoniquement associé à J . On note $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de E .

1. Calculer $\dim(\ker(u))$
2. Prouver que $\ker(u) \cap \ker(u - n \text{Id}_E) = \{0\}$.
3. Calculer $u(e)$ où $e = \sum_{k=1}^n e_k$.
4. Dédurre de ce qui précède que l'on a : $\ker(u) \oplus \ker(u - n \text{Id}_E) = E$.

EXERCICE 2 Suite exacte de sous-espaces vectoriels

📖 Titre : Suite exacte de sous-espaces vectoriels

🔑 ID : 16 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 4

★ Difficulté :



Soient $E_0, E_1, \dots, E_n, n+1$ espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$, de dimensions respectives $d_0, d_1, \dots, d_n$. On suppose qu'il existe n applications linéaires $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ telles que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, f_k \in \mathcal{L}(E_k, E_{k+1}).$$

et de plus :

- f_0 est injective ;
- $\forall j \in \{1, \dots, n-1\}, \text{Im } f_{j-1} = \ker(f_j)$;
- f_{n-1} est surjective.

Montrer que

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j d_j = 0$$

EXERCICE 3 Exemple de calcul d'inverse d'une matrice

📖 Titre : Exemple de calcul d'inverse d'une matrice

🔑 ID : 20 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 7

★ Difficulté :



Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que A est inversible
2. Calculer A^{-1} par au moins deux méthodes.

EXERCICE 4 Dimension et somme directe

📖 Titre : Dimension et somme directe

📌 ID : 21 ⌚ Durée : —

📌 Niveau : L2 | N° : 8

★ Difficulté :



Soit E un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel de dimension n avec $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que pour tous sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E , on a $\dim(F_1) = \dim(F_2)$ si et seulement si il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que $F_1 \oplus F = F_2 \oplus F = E$. (on exprime ça en disant F_1 et F_2 possèdent un supplémentaire commun.)

EXERCICE 5 Changement de base

📖 Titre : Changement de base

📌 ID : 25 ⌚ Durée : —

📌 Niveau : L2 | N° : 12

★ Difficulté :



Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ est $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ avec $e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$, $e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

1. Démontrer que $\mathcal{E}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice A' de f relativement à $\mathcal{E}'$.

EXERCICE 6 Transformation d'une somme en une somme directe

📖 Titre : Transformation d'une somme en une somme directe

📌 ID : 26 ⌚ Durée : —

📌 Niveau : L2 | N° : 13

★ Difficulté :



Soit E un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel de dimension finie, $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E tel que $F_1 + \dots + F_n = E$. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels $G_1, \dots, G_n$ de E tel que $G_1 \subset F_1, \dots, G_n \subset F_n$ et $\bigoplus_{k=1}^n G_k = E$.

EXERCICE 7 Inverse d'une matrice par blocs

📖 Titre : Inverse d'une matrice par blocs

📌 ID : 33 ⌚ Durée : —

📌 Niveau : L2 | N° : 20

★ Difficulté :



Soient $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On considère $(A, B) \in \mathbf{GL}_p(\mathbb{K}) \times \mathbf{GL}_q(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et la matrice définie par blocs : $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que M est inversible.
2. Calculer M^{-1} en fonction de A, B et C .

EXERCICE 8 Un bon exercice non classique sur les endomorphismes

📖 Titre : Un bon exercice non classique sur les endomorphismes

📌 ID : 39 ⌚ Durée : —

📌 Niveau : L2 | N° : 26

★ Difficulté :



On considère un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel E de dimension finie et quatre endomorphismes u, v, f, g de E qui commutent deux à deux, et vérifient la relation :

$$(\star) \quad u \circ f + v \circ g = \text{Id}_E$$

1. Montrer que $\ker(f) \cap \ker(g) = \{0\}$ et $E = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.
2. Montrer que $\ker(f \circ g) = \ker(f) \oplus \ker(g)$ et $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)$.
3. On suppose dans cette question qu'on a de plus $f \circ g = 0$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \ker(g) = \text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g)$, $\ker(f) = \text{Im}(g)$, $\ker(g) = \text{Im}(f)$.

EXERCICE 9

Un bon exercice sur les endomorphismes en dimension quelconque

📖 **Titre :** Un bon exercice sur les endomorphismes en dimension quelconque

🔖 **ID :** 40 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 27

★ **Difficulté :**



On considère un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel E et quatre endomorphismes u, v, f, g de E qui commutent deux à deux, et vérifient la relation :

$$(\star) \quad u \circ f + v \circ g = \text{Id}_E$$

1. Montrer que $\ker(f) \cap \ker(g) = \{0\}$ et $E = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.
2. Montrer que $\ker(f \circ g) = \ker(f) \oplus \ker(g)$ et $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)$.
3. On suppose dans cette question qu'on a de plus $f \circ g = 0$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \ker(g) = \text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g)$, $\ker(f) = \text{Im}(g)$, $\ker(g) = \text{Im}(f)$.

EXERCICE 10

Dimension de l'intersection de deux hyperplans différents

📖 **Titre :** Dimension de l'intersection de deux hyperplans différents

🔖 **ID :** 41 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 28

★ **Difficulté :**



Soit E un espace vectoriel de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si H et K sont deux hyperplans différents de E alors $\dim(H \cap K) = n - 2$.

EXERCICE 11

Bonnes questions sur le rang, inéga

📖 **Titre :** Bonnes questions sur le rang, inéga

🔖 **ID :** 44 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 31

★ **Difficulté :**



Soient E et F deux $\mathbb{K}$ –espaces vectoriels de dimensions finies p et n respectivement. On considère deux applications linéaires u et v de E vers F .

1. Démontrer que $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.
2. En déduire que $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v)$.
3. Vérifier dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \mathbb{R}_1[X]$ et $u(P) = P'$ et $v(P) = P(X + 1) - P(X)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

EXERCICE 12

Comparaison de sous-espaces vectoriels

📖 Titre : Comparaison de sous-espaces vectoriels

🔑 ID : 89 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 75

★ Difficulté :



Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et A, B deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que :

$$f(A) \subset f(B) \Leftrightarrow A + \ker f \subset B + \ker f$$

EXERCICE 13

Exemple de calcul de rang

📖 Titre : Exemple de calcul de rang

🔑 ID : 90 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 76

★ Difficulté :



Soit $m \in \mathbb{R}$ et on considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & m \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A .

EXERCICE 14

Calcul du rang

📖 Titre : Calcul du rang

🔑 ID : 91 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 77

★ Difficulté :



Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer $\text{rg}(A)$.

EXERCICE 15

Activités sur $\text{Vect}(A)$ avec A une partie de E .

📖 Titre : Activités sur $\text{Vect}(A)$ avec A une partie de E .

🔑 ID : 92 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 78

★ Difficulté :



Soient A et B deux parties d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

1. Comparer $\text{Vect}(A \cap B)$ et $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$.
2. Montrer que : $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

EXERCICE 16

Sous-espaces vectoriels et intersection

📖 Titre : Sous-espaces vectoriels et intersection

🔑 ID : 93 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 79

★ Difficulté :



Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E .

Montrer que : $F \cap G = F + G \Leftrightarrow F = G$.

EXERCICE 17

Caractérisation d'une homothétie par des familles liées

📖 **Titre :** Caractérisation d'une homothétie par des familles liées

🔖 **ID :** 94 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 80

★ **Difficulté :**



Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que les vecteurs x et $f(x)$ sont colinéaires et ce pour tout $x \in E$.

1. Justifier que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x \cdot x$.
2. Montrer que pour tout couple de vecteurs non nuls x et y , on a $\lambda_x = \lambda_y$.
(indice : on pourra distinguer les cas : (x, y) liée ou (x, y) libre.)
3. Conclure que f est une homothétie vectorielle.

EXERCICE 18 Endomorphismes f et g tel que $f \circ g = \text{Id}$

📖 **Titre :** Endomorphismes f et g tel que $f \circ g = \text{Id}$

🔖 **ID :** 95 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 81

★ **Difficulté :**



Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $f \circ g = \text{Id}$.

1. Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker f$ et $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im} g$.
2. Montrer
$$E = \ker f \oplus \text{Im} g$$
3. Dans quel cas peut-on conclure $g = f^{-1}$?
4. Calculer $(g \circ f) \circ (g \circ f)$ et caractériser $g \circ f$.

EXERCICE 19 Polynôme annulateur et inverse

📖 **Titre :** Polynôme annulateur et inverse

🔖 **ID :** 96 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 82

★ **Difficulté :**



Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\text{Id} = 0$.

1. Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f .
2. Établir que $\ker(f - \text{Id})$ et $\ker(f - 2\text{Id})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

EXERCICE 20 Sous-espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes

📖 **Titre :** Sous-espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes

🔖 **ID :** 97 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 83

★ **Difficulté :**



n désigne un entier naturel non nul et $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un entier naturel non nul k tel que $A^k = 0$. Le plus petit entier naturel non nul p réalisant $A^p = 0$ s'appelle l'indice de nilpotence de A . On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Démontrer que si A est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $A^n = 0$.
2. La somme de deux matrices nilpotentes est-elle toujours nilpotente?

- Montrer que si A et B sont deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $AB = BA$ alors $A + B$ et AB sont nilpotentes.
- $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
- Démontrer que si $\mathcal{H}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \text{tr}(M) = 0\} = \ker(\text{tr})$ alors $\text{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{K})) = \mathcal{H}_n(\mathbb{K})$.

EXERCICE 21

Dimensions de quelques espaces de matrices

📖 **Titre :** Dimensions de quelques espaces de matrices

🔑 **ID :** 98 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 84

★ **Difficulté :**



Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que A n'est ni nulle ni inversible et soit $r = \text{rg}(A)$. On pose :

$$\mathcal{E}_1 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / AM = 0\};$$

$$\mathcal{E}_2 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / MA = 0\}$$

et

$$\mathcal{E}_3 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / AM = MA = 0\} = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2.$$

- Démontrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $B \neq 0$ et $AB = BA = 0$.
- Démontrer que $\mathcal{E}_k, k \in \{1, 2, 3\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Déterminer les dimensions de $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$.

EXERCICE 22

Endomorphismes f, g tel que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$

📖 **Titre :** Endomorphismes f, g tel que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$

🔑 **ID :** 99 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 85

★ **Difficulté :**



Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$g \circ f \circ g = g \text{ et } f \circ g \circ f = f.$$

- Montrer que $\text{Im } f$ et $\ker g$ sont supplémentaires dans E .
- Justifier que $f(\text{Im } g) = \text{Im } f$.

EXERCICE 23

Commutant d'un endomorphisme cyclique

📖 **Titre :** Commutant d'un endomorphisme cyclique

🔑 **ID :** 100 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 86

★ **Difficulté :**



Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E tel qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ pour lequel la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E . On note

$$\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{L}(E) / g \circ f = f \circ g\}.$$

- Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
- On note $\mathbb{K}[f] = \{P(f) / P \in \mathbb{K}[X]\}$. Démontrer que $\mathbb{K}[f] \subset \mathcal{C}(f)$.
- Soit $g \in \mathcal{C}(f)$. Justifier l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g(x_0) = P(f)(x_0)$. Prouver ensuite que $P(f) = g$. En déduire que

$$\mathcal{C}(f) = \left\{ a_0 \text{Id} + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1} \mid a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K} \right\}$$

4. Déterminer la dimension de $\mathcal{C}(f)$.

EXERCICE 24 Hyperplan de matrices stbale par la multiplication

📖 Titre : Hyperplan de matrices stbale par la multiplication

🔑 ID : 101 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 87

★ Difficulté :



Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$ stable par la multiplication matricielle, c'est-à-dire :

$$\forall (M, M') \in F^2, MM' \in F.$$

On suppose que $I_n \notin F$.

1. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \text{Vect}(I_n)$.
2. (a) Soit p le projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\text{Vect}(I_n)$ parallèlement à F . Montrer que :

$$\forall (M, M') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, p(MM') = p(M)p(M').$$

- (b) Montrer que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que M^2 appartienne à F , on a $M \in F$.
- (c) Soit $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$ pour tout $i, j, k, l \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- (d) Montrer que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, E_{i,j} \in F$.
- (e) Conclure.

EXERCICE 25 Utilisation des matrices de rang 1

📖 Titre : Utilisation des matrices de rang 1

🔑 ID : 102 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 88

★ Difficulté :



Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Démontrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que A non nulle et non inversible, il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $B \neq 0$ et $AB = BA = 0$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ Démontrer que $\text{rg}(A) = 1$ si et seulement si :

$$\exists (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \begin{cases} X \neq 0 \\ Y \neq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad A = XY^t$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ tel que $A \neq 0$ et $A^2 = 0$. Démontrer que A est semblable à la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 26 Polynôme interpolateur de Lagrange, des études.

📖 Titre : Polynôme interpolateur de Lagrange, des études.

🔑 ID : 103 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 89

★ Difficulté :



1. On considère $n + 1$ nombres réels deux à deux distincts $a_0, \dots, a_n$. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe un unique polynôme L_k de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_k(a_j) = \delta_{k,j}$.
Expliciter le polynôme L_k sous forme factorisée.

2. (a) Montrer que $\mathcal{L} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
 (b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Donner les coordonnées de P dans la base $\mathcal{L}$
 (c) Montrer que $\sum_{k=0}^n L_k = 1$.
3. On suppose dans cette question que $a_j = j$ pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
 (a) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$L_k(X) = \frac{(-1)^{n-k}}{n!} \binom{n}{k} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (X - j).$$

- (b) Déterminer le polynôme $Q = \sum_{k=1}^n kL_k$.
- (c) Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ à la base $\mathcal{L}$ trouvée ci-dessus. Préciser la première ligne de A , la somme des éléments des autres lignes de A et la somme des éléments des colonnes de A .
- (d) Donner A^{-1}

EXERCICE 27

Activités sur le calcul matriciel, puissances, inverse

■ **Titre :** Activités sur le calcul matriciel, puissances, inverse

◆ **ID :** 104 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 90

★ **Difficulté :**



Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Calculer A^2 et A^3 .
2. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

EXERCICE 28

En domorphisme u tel que $p \circ u - u \circ p = u$, avec p projecteur

■ **Titre :** En domorphisme u tel que $p \circ u - u \circ p = u$, avec p projecteur

◆ **ID :** 105 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 91

★ **Difficulté :**



E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Si f et g sont deux endomorphismes de E on note fg le composé $f \circ g$ et f^2 l'endomorphisme $f \circ f$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E . On suppose qu'il existe un projecteur p de E tel que $u = pu - up$. Démontrer que $u^2 = 0$.
2. On suppose que $u^2 = 0$.
 (a) Justifier que $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$.
 (b) Prouver que si F est un sous-espace vectoriel de E tel que $\text{Im}(u) \subset F \subset \ker(u)$, G un supplémentaire de F dans E et p la projection de E sur F parallèlement à G , alors $pu = u$ et $up = 0$.
3. Dédurre de ce qui précède que pour tout endomorphisme u de E , il existe un projecteur p de E tel que $pu - up = u$ si et seulement si $u^2 = 0$.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$. Caractériser par leur images, les projecteurs p vérifiant $u = pu - up$.

EXERCICE 29

Matrices tel que $AB = A + B$

📖 **Titre :** Matrices tel que $AB = A + B$

🔑 **ID :** 106 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 92

★ **Difficulté :**



Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$AB = A + B$$

Montrer que A et B commutent

EXERCICE 30

Trois méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice

📖 **Titre :** Trois méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice

🔑 **ID :** 107 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 93

★ **Difficulté :**



On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On se propose de calculer A^{-1} par trois méthodes.

Première méthode :

1. Calculer N^n et N^{n-1} .
2. Exprimer A en fonction de N .
3. Montrer que $I_n - N$ est inversible et déterminer son inverse. Conclure.

Deuxième méthode : Soit $f : \mathbb{K}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{K}_{n-1}[X]; P \mapsto f(P) = \frac{P(0) + (X-1)P}{X}$

1. Montrer que f est bien une application.
2. Montrer que f est un isomorphisme du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
3. Déterminer $g = f^{-1}$.
4. Calculer les matrices de f et g relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{n-1})$ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et conclure.

Troisième méthode : Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et soit $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ avec pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on pose $\omega_k = \sum_{j=1}^k e_j$.

1. Déterminer les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à Ω et celle de Ω à $\mathcal{B}$.
2. Conclure.

EXERCICE 31

Condition pour que la somme de projecteurs est un projecteur

📖 **Titre :** Condition pour que la somme de projecteurs est un projecteur

🔑 **ID :** 108 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 94

★ **Difficulté :**



E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ et $p_1, \dots, p_k$ des projecteurs de E . On note $p = \sum_{i=1}^k p_i$.

1. Démontrer que pour tout projecteur π de E on a $\text{rg}(\pi) = \text{tr}(\pi)$.
2. On suppose que p est un projecteur. Montrer que $\text{Im}(p) = \bigoplus_{i=1}^k \text{Im}(p_i)$.
3. Montrer que p est un projecteur si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2, p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i.$$

avec pour tout $i, j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ (le symbole de Kronecker).

EXERCICE 32

Projecteurs de même noyau : Une condition

📖 Titre : Projecteurs de même noyau : Une condition

🔖 ID : 109 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 95

★ Difficulté :
★ ★ ★ ★ ★

Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les assertions :

(i) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$. (ii) p et q sont des projecteurs de même noyau.

EXERCICE 33

Inversibilité de $\text{Id} - f$ avec f nilpotent

📖 Titre : Inversibilité de $\text{Id} - f$ avec f nilpotent

🔖 ID : 110 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 96

★ Difficulté :
★ ★ ★ ★ ★

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E nilpotent i.e. tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $f^n = 0$. Montrer que $\text{Id} - f$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de f .

EXERCICE 34

Centre de $\mathcal{L}(E)$

📖 Titre : Centre de $\mathcal{L}(E)$

🔖 ID : 111 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 97

★ Difficulté :
★ ★ ★ ★ ★

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de dimension finie ou infinie et u un endomorphisme de E tel que :

$$\forall v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u$$

1. Démontrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$ alors f est une homothétie de E si et seulement si pour tout $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ est liée.
2. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$. On note $F = \mathbb{K}x$ la droite vectorielle engendrée par x , G un supplémentaire de F (donc G est un hyperplan de E), et soit p la projection de E sur F parallèlement à G .
 - (a) Prouver que $u(x) = p(u(x))$.
 - (b) En déduire que $(x, u(x))$ est liée.
 - (c) Énoncer le théorème démontré.

EXERCICE 35

Caractérisation de non inversible par nilpotente

📖 Titre : Caractérisation de non inversible par nilpotente

🔖 ID : 112 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 98

★ Difficulté :
★ ★ ★ ★ ★

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

1. Démontrer que pour tout $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, il existe une matrice carrée $N_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente de rang r .
2. En déduire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a A est non inversible si et seulement si il existe une matrice nilpotente N et une matrice inversible P tel que $A = PN$ si et seulement si il existe une matrice nilpotente M et une matrice inversible Q tel que $A = MQ$

EXERCICE 36 Des relations pour le rang d'un endomorphisme

📖 **Titre :** Des relations pour le rang d'un endomorphisme

🔑 **ID :** 113 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 99

★ **Difficulté :**



Rang de f^2 :

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

1. Montrer que $\text{rg}(f^2) = \text{rg } f - \dim(\ker f \cap \text{Im}(f))$
2. En déduire que $\dim(\ker(f^2)) \leq 2 \dim(\ker(f))$.

EXERCICE 37 Dimension de l'image d'un sous espace

📖 **Titre :** Dimension de l'image d'un sous espace

🔑 **ID :** 114 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 100

★ **Difficulté :**



E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et G un sous espace de E
Montrer que $\dim(f(G)) = \dim(G) - \dim(\ker f \cap G)$.

EXERCICE 38 Une famille libre construite avec l'application $x \mapsto \sin(x)$

📖 **Titre :** Une famille libre construite avec l'application $x \mapsto \sin(x)$

🔑 **ID :** 115 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 101

★ **Difficulté :**



Dans l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sin(x).$$

Démontrer que la famille

$$\mathcal{F} = (f, f \circ f, f \circ f \circ f, \dots)$$

est une famille libre de vecteurs de E .

EXERCICE 39 Quelques propriétés concernant l'image et le noyau

📖 **Titre :** Quelques propriétés concernant l'image et le noyau

🔑 **ID :** 116 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 102

★ **Difficulté :**



On considère trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ des application linéaires.
Démontrer que :

1. $f(\ker(g \circ f)) = \ker(g) \cap \text{Im}(f)$.
2. $g^{-1}(\text{Im}(g \circ f)) = \ker(g) + \text{Im}(f)$.
3. $\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker(g))$.

4. $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$.
5. $\operatorname{Im}(g \circ f) = g(\operatorname{Im}(f))$.
6. $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im}(g)$.

EXERCICE 40

Image, noyau, composé de deux applications linéaire

📖 **Titre :** Image, noyau, composé de deux applications linéaire

🔑 **ID :** 117 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 103

★ **Difficulté :**



E, F et G sont trois $\mathbb{K}$ —espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que :

1. $\ker(g \circ f) = \ker(f) \Leftrightarrow \ker(g) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$
2. $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g) \Leftrightarrow \ker(g) + \operatorname{Im}(f) = F$.

EXERCICE 41

Endomorphisme u tel que $u^3 + u = 0$

📖 **Titre :** Endomorphisme u tel que $u^3 + u = 0$

🔑 **ID :** 118 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 104

★ **Difficulté :**



Soit $E = \mathbb{R}^3$ et on note θ l'endomorphisme nul de E et Id l'application identique de E , ce qui veut dire $\forall x \in E, \theta(x) = 0$ et $\operatorname{Id}(x) = x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $u^n = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un

endomorphisme de E tel que $u \neq \theta$ et $u^3 + u = \theta$. On se propose de démontrer qu'il existe une base

$\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ de E tel que la matrice de u relativement à $\mathcal{V}$ est $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{V}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\ker(u) \oplus \ker(u^2 + 1) = E$
2. Prouver que u et $u^2 + \operatorname{Id}$ ne sont pas inversibles.
3. En déduire l'existence de $v_1, v_2 \in E$ tel que $v_1 \neq 0$ et $v_2 \neq 0$ et $u(v_1) = 0$ et $u^2(v_2) = -v_2$.
4. Démontrer que $\operatorname{Im}(u) \subset \ker(u^2 + \operatorname{Id})$ et en déduire que si on pose $v_3 = u(v_2)$ alors $u(v_3) = -v_3$.
5. Démontrer que (v_2, v_3) est une famille libre.
6. En déduire que $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E et que $\operatorname{mat}_{\mathcal{V}}(u) = A$ où A est la matrice indiquée ci-dessus.

EXERCICE 42

Union de sous-espaces vectoriels

📖 **Titre :** Union de sous-espaces vectoriels

🔑 **ID :** 119 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 105

★ **Difficulté :**



Soit $\mathbb{K}$ un corps infini et E un $\mathbb{K}$ —espace vectoriel. Démontrer que pour toute entier naturel m tel que $m \geq 2$, si $F_1, \dots, F_m$ sont des sous-espaces vectoriels de E tel que $\bigcup_{k=1}^m F_k = E$ alors il existe $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tel que $F_i = E$.

EXERCICE 43

Bases d'un sous-espace de dimension finie de $\mathbb{K}[X]$.

📖 **Titre :** Bases d'un sous-espace de dimension finie de $\mathbb{K}[X]$.

🔖 **ID :** 120 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 106

★ **Difficulté :**



Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\dim(E) = n$. Démontrer qu'il existe deux bases $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_n)$ et $\mathcal{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$ de E tel que :

1. Les polynômes $Q_1, \dots, Q_n$ ont des degrés deux à deux distincts.
2. Les polynômes $P_1, \dots, P_n$ ont le même degré.

EXERCICE 44 Sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$ stables par dérivation

📖 **Titre :** Sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$ stables par dérivation

🔖 **ID :** 121 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 107

★ **Difficulté :**



Soit $D : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X], P \mapsto P'$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}[X]$ est stable par D si et seulement si $D(F) \subset F$. Démontrer que les seuls sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$ stables par D sont $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 45 Matrices de taille 2 et similitude

📖 **Titre :** Matrices de taille 2 et similitude

🔖 **ID :** 122 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 108

★ **Difficulté :**



1. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \text{Id}_E$ (Cela veut dire que u est une homothétie vectorielle.)
2. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ une matrice non scalaire (c'est-à-dire $\forall \lambda \in \mathbb{K}, A \neq \lambda I_2$). Démontrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ 1 & \tau \end{pmatrix}$, où $\tau = \text{tr}(A)$ et $\delta = \det(A)$.
(b) Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier rapidement que A_1 et A_2 sont semblables puis donner une matrice $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $A_2 = P^{-1}A_1P$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 2$) tel que $\text{tr}(A) = 0$. démontrer que A est semblable à une matrice A' dont tous les termes diagonaux sont nuls.
4. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall v \in \mathcal{L}(E), \quad u \circ v = v \circ u$$

Démontrer que u est une homothétie vectorielle.

EXERCICE 46 Factorisation des applications linéaires

📖 **Titre :** Factorisation des applications linéaires

🔖 **ID :** 123 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 109

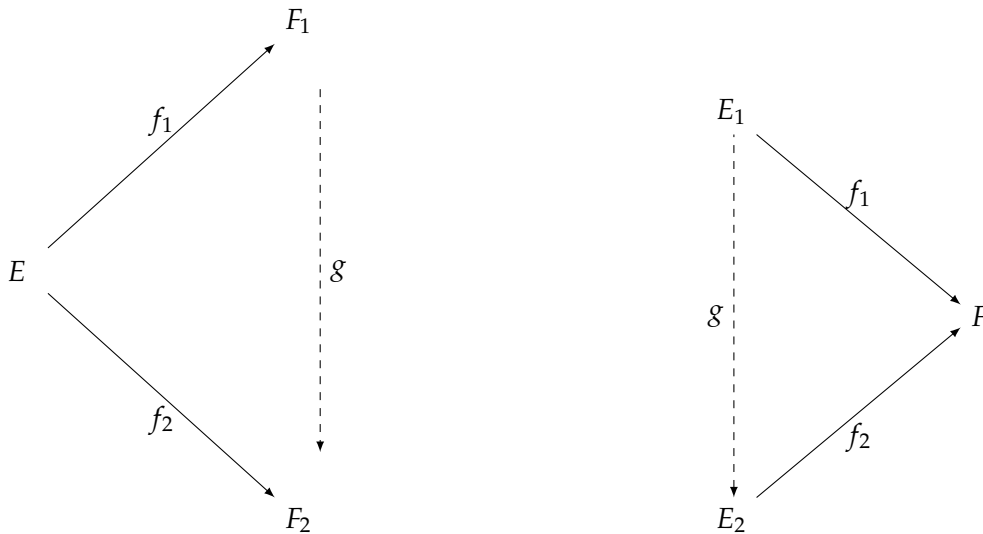
★ **Difficulté :**



1. Soient E, F_1, F_2 des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et on considère $f_1 \in \mathcal{L}(E, F_1), f_2 \in \mathcal{L}(E, F_2)$ des applications linéaires. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (1) $\ker f_1 \subset \ker f_2$
 - (2) $\exists g \in \mathcal{L}(F_1, F_2), \quad f_2 = g \circ f_1$

2. On considère des $\mathbb{K}$ –espaces vectoriels E_1, E_2, F et des applications linéaires $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\text{Im}(f_1) \subset \text{Im}(f_2)$.
- (2) $\exists g \in \mathcal{L}(E_1, E_2) \quad f_1 = f_2 \circ g$.



3. Soient E, F des $\mathbb{K}$ –espaces vectoriels.

(a) On considère des applications linéaires $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer que pour toute application linéaire $g \in \mathcal{L}(E, F)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\ker(f_1) \cap \ker(f_2) \subset \ker(g)$.
- (2) $\exists a, b \in \mathcal{L}(F), g = a \circ f_1 + b \circ f_2$.

(b) On considère des applications linéaires $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer que pour toute application linéaire $g \in \mathcal{L}(E, F)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(f_1) + \text{Im}(f_2)$.
- (2) $\exists a, b \in \mathcal{L}(E), g = f_1 \circ a + f_2 \circ b$.

EXERCICE 47 Déterminant de Vandermonde et applications

■ Titre : Déterminant de Vandermonde et applications

◆ ID : 124 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 110

★ Difficulté :



1. Pour tout $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$, on note :

$$V(a) = V(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^{n-1} \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Démontrer que $V(a_0, \dots, a_{n-1}) = \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i)$.

2. APPLICATION : Soit E un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel de dimension n avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$ et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E tel que $m \geq 2$ et $\bigcup_{k=1}^m F_k = E$. Démontrer qu'il existe $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tel que $F_j = E$.

Indication : On pourra considérer une base $\mathcal{E} = (e_0, \dots, e_{n-1})$ de E et l'application

$$f : \mathbb{K} \rightarrow E; t \mapsto f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k e_k.$$

3. Prouver que le résultat du 2) reste vrai si on ne suppose plus E de dimension finie.

EXERCICE 48

Etudes des hyperplans et formes linéaires

📖 Titre : Etudes des hyperplans et formes linéaires

🔑 ID : 125 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 111

★ Difficulté :



Soit E un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel. On appelle hyperplan de E , un sous-espace vectoriel H de E de codimension 1, c'est-à-dire tel qu'il existe $a \in E$ tel que $a \neq 0$ et $H \oplus \mathbb{K}a = E$. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E vers $\mathbb{K}$. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, appelé le dual algébrique de E .

1. Soit H un hyperplan de E . Démontrer que :

$$\forall b \in E, \quad H \oplus \mathbb{K}b = E \Leftrightarrow b \notin H.$$

2. Soit H un hyperplan de E . Démontrer que pour tout sous-espace vectoriel H' de E on a :

$$H \subset H' \Rightarrow H' = H \quad \text{ou} \quad H' = E.$$

3. Soit H un sous-espace vectoriel de E . Démontrer que H est un hyperplan de E si et seulement si il existe une forme linéaire non nulle φ sur E tel que $H = \ker \varphi$.

4. Soit E un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel. Démontrer que si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles de E alors :

$$\ker \varphi = \ker \psi \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K}^*, \quad \psi = \alpha \varphi$$

EXERCICE 49

Comatrice, étude de son rang selon les cas

📖 Titre : Comatrice, étude de son rang selon les cas

🔑 ID : 126 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 112

★ Difficulté :



Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on rappelle que la comatrice de A est $A' = (a'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ tel que pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a'_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$ et $\Delta_{i,j} = \det(A_{i,j})$, avec $A_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue après suppression de la ligne i et la colonne j de A . On note $A' = \text{Com}(A)$, la comatrice de A et $\tilde{A} = {}^t(\text{Com}(A))$, appelée matrice complémentaire de A .

1. Prouver que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \tilde{A}A = A\tilde{A} = \det(A)I_n.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on note $r = \text{rg}(A)$. Démontrer que :

$$\text{rg}(\tilde{A}) = \text{rg}(\text{Com}(A)) = \begin{cases} n & \text{si } r = n \\ 1 & \text{si } r = n - 1 \\ 0 & \text{si } r < n - 1 \end{cases}$$

EXERCICE 50

Expression des matrices de trace nulle

📖 Titre : Expression des matrices de trace nulle

🔑 ID : 127 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 113

★ Difficulté :



Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les termes diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts. On considère l'application :

$$\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); X \mapsto \phi(X) = \Delta X - X \Delta$$

Pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $[X, Y] = XY - YX$, appelé crochet de Lie. Ainsi $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \Phi(X) = [\Delta, X]$.

1. Vérifier que Φ est linéaire et déterminer $\ker \Phi$ et $\text{Im } \Phi$.
2. Démontrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{tr}([A, B]) = 0$.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\text{tr}(M) = 0$.
 - (a) Démontrer que M est semblable à une matrice M' dont les termes diagonaux sont nuls.
 - (b) En déduire qu'il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = [A, B]$.

EXERCICE 51

Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible

📖 **Titre :** Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible

🔑 **ID :** 128 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 114

★ **Difficulté :**



1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\psi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, X \mapsto \Psi_A(X) = \text{tr}(AX)$. Démontrer que l'application :

$$\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*; A \mapsto \Phi(A) = \Psi_A$$

est un isomorphisme.

2. Soit $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $r \neq 0$, et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$. Démontrer que $\text{tr}(J_r M) = \text{tr}(A)$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Vérifier que la matrice

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

est inversible et que $\text{tr}(K) = 0$.

4. Démontrer que tout hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice A tel que $A \in \mathcal{H} \cap \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

EXERCICE 52

Factorisation d'endomorphisme

📖 **Titre :** Factorisation d'endomorphisme

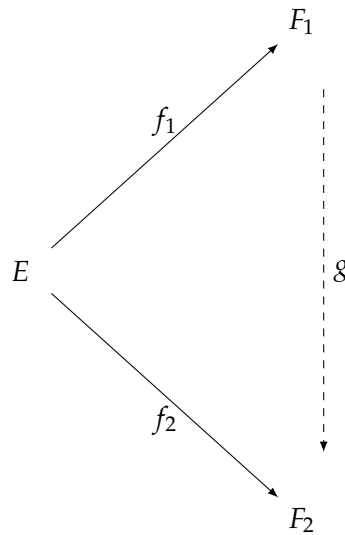
🔑 **ID :** 129 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 115

★ **Difficulté :**



1. Soient E, F_1, F_2 des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et on considère $f_1 \in \mathcal{L}(E, F_1), f_2 \in \mathcal{L}(E, F_2)$ des applications linéaires.



Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\ker f_1 \subset \ker f_2$
 - (2) $\exists g \in \mathcal{L}(F_1, F_2), \quad f_2 = g \circ f_1$
2. Soient E, F des $\mathbb{K}$ –espaces vectoriels et on considère des applications linéaires $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer que pour toute application linéaire $g \in \mathcal{L}(E, F)$, les assertions suivantes sont équivalentes :
- (1) $\ker(f_1) \cap \ker(f_2) \subset \ker(g)$.
 - (2) $\exists a, b \in \mathcal{L}(F), g = a \circ f_1 + b \circ f_2$.

EXERCICE 53

Factorisation d'applications linéaires

📖 **Titre :** Factorisation d'applications linéaires

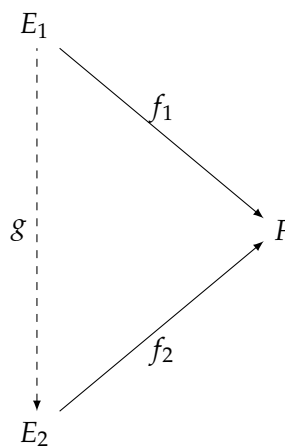
🔑 **ID :** 130 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 116

★ **Difficulté :**



1. On considère des $\mathbb{K}$ –espaces vectoriels E_1, E_2, F et des applications linéaires $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :



- (1) $\text{Im}(f_1) \subset \text{Im}(f_2)$.
 - (2) $\exists g \in \mathcal{L}(E_1, E_2) \quad f_1 = f_2 \circ g$.
2. E, F sont des espaces vectoriels et on considère des applications linéaires $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer que pour toute application linéaire $g \in \mathcal{L}(E, F)$, les assertions suivantes sont équivalentes :
- (1) $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(f_1) + \text{Im}(f_2)$.
 - (2) $\exists a, b \in \mathcal{L}(E), g = f_1 \circ a + f_2 \circ b$.

EXERCICE 54**Matrices non inversibles et son semblables**

📖 **Titre :** Matrices non inversibles et son semblables

🔖 **ID :** 472 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 455

★ **Difficulté :**



Donner un exemple de matrices non semblables non inversible et non nulles dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

EXERCICE 55**Une condition pour avoir $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = n$**

📖 **Titre :** Une condition pour avoir $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = n$

🔖 **ID :** 475 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 458

★ **Difficulté :**



Soit E un $\mathbb{K}$ —espace vectoriel et on considère deux endomorphismes f et g de E . Démontrer que si $f + g$ est inversible et $f \circ g = 0$ alors $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = n$

EXERCICE 56**Endomorphismes dont le noyau contient un sous-espace donné**

📖 **Titre :** Endomorphismes dont le noyau contient un sous-espace donné

🔖 **ID :** 476 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 459

★ **Difficulté :**



E est un $\mathbb{K}$ —espace vectoriel et U un sous-espace vectoriel de E . Soit

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{L}(E) / U \subset \ker(u)\}.$$

1. Prouver que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. Si E est de dimension finie n , calculer la dimension de $\mathcal{A}$ en fonction de n et $p = \dim(U)$.

EXERCICE 57**Une représentation des matrices non scalaires de taille 2**

📖 **Titre :** Une représentation des matrices non scalaires de taille 2

🔖 **ID :** 479 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 462

★ **Difficulté :**



Soit A une matrice carrée de taille 2. Démontrer que si A est non scalaire alors $A \simeq \begin{pmatrix} 0 & -d \\ 1 & t \end{pmatrix}$ avec $t = \text{tr}(A)$ et $d = \det(A)$

EXERCICE 58**Endomorphismes normaux**

📖 **Titre :** Endomorphismes normaux

🔖 **ID :** 480 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 463

★ **Difficulté :**



Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E . On suppose $u^* \circ u = u \circ u^*$.

1. Montrer que les endomorphismes u et u^* ont les mêmes sous-espaces propres.
2. Montrer que les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

EXERCICE 59**Dimension de l'espace des application linéaire s'annulant sur un sev de E**

📖 **Titre :** Dimension de l'espace des application linéaire s'annulant sur un sev de E

🔖 **ID :** 491 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 473

★ **Difficulté :**



On considère deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels E et F de dimensions finie et soit W un sous-espace vectoriel de E . On note $\mathcal{L}_W(E, F) = \{f \in \mathcal{L}(E, F) / \forall x \in W, f(x) = 0\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{L}_W(E, F)$ est un espace vectoriel.
2. Trouver la dimension de $\mathcal{L}_W(E, F)$.

EXERCICE 60 Une matrice en cascade inversible

📖 **Titre :** Une matrice en cascade inversible

🔖 **ID :** 493 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 475

★ **Difficulté :**



Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (\text{Min}(i, j))_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

EXERCICE 61 Un exercice qui manipule endomorphisme et sous-espace vectoriel

📖 **Titre :** Un exercice qui manipule endomorphisme et sous-espace vectoriel

🔖 **ID :** 495 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 477

★ **Difficulté :**



Soit E un espace vectoriel quelconque, f un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E .

1. Démontrer que si F est de dimension finie et $F \subset f(F)$ alors $f(F) = F$.
2. On suppose dans cette question que f est injective et $F \subset f(F)$. A-t-on $f(F) = F$? Justifier votre réponse.

EXERCICE 62 Si $\det(A + M) = \det(A) + \det(M)$ pour tout M alors $A = 0$

📖 **Titre :** Si $\det(A + M) = \det(A) + \det(M)$ pour tout M alors $A = 0$

🔖 **ID :** 508 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 490

★ **Difficulté :**



Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$(\star) \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A + M) = \det(A) + \det(M).$$

Démontrer que $A = 0$.

EXERCICE 63 Operateur difference finie sur les polynômes

📖 **Titre :** Operateur difference finie sur les polynômes

🔖 **ID :** 509 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 491

★ **Difficulté :**



Soient : $n \in \mathbb{N}^*$, et Δ (dérivée discrète), l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

- Montrer que Δ permet de définir un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, que l'on notera Δ_n .
- Montrer que : $\Delta^n \neq 0$ et $\Delta_n^{n+1} = 0$ (c'est-à-dire Δ_n est nilpotent d'indice de nilpotence $n+1$).
- En déduire qu'il existe des constantes $a_0, \dots, a_{n+1}$ (que l'on déterminera) telles que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^{n+1} a_k P(X+k) = 0.$$

On pourra faire intervenir l'endomorphisme T de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], T(P) = P(X+1)$.

EXERCICE 64

Endomorphismes f, g, h tel que $fg = h, gh = f, hf = g$

Titre : Endomorphismes f, g, h tel que $fg = h, gh = f, hf = g$

ID : 510 **Durée :** —

Niveau : L2 | **N° :** 492

★ **Difficulté :**



Soient f, g et h trois endomorphismes d'un K -espace vectoriel E , tels que : $f \circ g = h$ et $g \circ h = f$ et $h \circ f = g$.

- Montrer que f, g et h ont même image et même noyau.
- Montrer que : $f^5 = f$.
- En déduire que : $E = \text{Im}(f) \oplus \ker(f)$.

EXERCICE 65

Une technique pour calculer les puissances d'une matrice

Titre : Une technique pour calculer les puissances d'une matrice

ID : 511 **Durée :** —

Niveau : L2 | **N° :** 493

★ **Difficulté :**



Dans $\mathcal{CM}_n(\mathbb{R})$ on définit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- A l'aide de l'endomorphisme canoniquement associé à A , calculer A^k , pour tout entier : $k \in \mathbb{N}$.
- En déduire M^k , pour tout entier : $k \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 66

Exercice élémentaire sur les espaces vectoriels

Titre : Exercice élémentaire sur les espaces vectoriels

ID : 519 **Durée :** —

Niveau : L2 | **N° :** 500

★ **Difficulté :**



Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 2z = 0\}$

- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E , donner une base $\mathcal{B}_F$ de F .
- Soit $G = \text{Vect}\{(0, 1, 1)\}$ le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{(0, 1, 1)\}$ Déterminer $F \cap G$, en déduire que $E = F \oplus G$.

EXERCICE 67

Un excellent exercice de révision d'algèbre linéaire

📖 **Titre :** Un excellent exercice de révision d'algèbre linéaire

🔑 **ID :** 520 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 501

★ **Difficulté :**



Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . On considère l'endomorphisme f de E tel que :

$$f(e_1) = f(e_3) = e_3, f(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3.$$

1. Écrire la matrice A de f relativement à la base $\mathcal{B}$.

2. (a) Déterminer $\ker(f)$.

(b) Déterminer une base $\mathcal{B}_0$ de $\ker(f)$.

(c) Compléter $\mathcal{B}_0$ en une base de E .

3. Déterminer $\text{Im}(f)$ et en donner une base $\mathcal{B}_1$.

4. On considère $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ avec :

$$e'_1 = e_1 - e_3, e'_2 = e_1 - e_2, e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3$$

(a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E .

(b) Écrire la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

5. Exprimer e_1, e_2, e_3 en fonction de e'_1, e'_2, e'_3 . En déduire P^{-1} , l'inverse de P .

6. Écrire la matrice A' de f dans $\mathcal{B}'$

7. Calculer A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 68

Une inspiration des matrices de transvections

📖 **Titre :** Une inspiration des matrices de transvections

🔑 **ID :** 521 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 502

★ **Difficulté :**



1. Soit a, b, c, d sont dans $\mathbb{K}$ avec $a \neq 0$. Montrer que :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

2. Plus généralement, si A et D sont des matrices carrées sur $\mathbb{K}$ d'ordre p et q telles que A soit inversible, trouver les matrices B_1, C_1, D_1 telles que

$$\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ C_1 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & B_1 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

3. On garde les notations de la question précédente.

(a) Quel est l'inverse de la matrice $\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ C_1 & I_q \end{bmatrix}$?

(b) Si D_1 est inversible, quel est l'inverse de $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$?

EXERCICE 69

Operations sur les sous-espaces vectoriels

📖 **Titre :** Operations sur les sous-espaces vectoriels

🔑 **ID :** 522 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 503

★ **Difficulté :**



Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E .

1. Montrer que $(A \cap C) + (B \cap C) \subset (A + B) \cap C$. Donner un exemple dans $\mathbb{R}^2$ pour lequel l'inclusion est stricte.
2. Montrer que, si $A + B = A + C$, $A \cap B = A \cap C$ et $B \subset C$, alors $B = C$.

EXERCICE 70

Determinant se ramenant à un vandermonde

📖 **Titre :** Determinant se ramenant à un vandermonde

🔖 **ID :** 675 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 656

★ **Difficulté :**



Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes. Calculer pour $k = 1, \dots, n-1$

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$