

Thème : Groupes, anneaux : Rappels et compléments

EXERCICE 1

Morphisme de groupe et images direct et réciproque

📖 Titre : Morphisme de groupe et images direct et réciproque

🔖 ID : 22 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 2

★ Difficulté :



Soit G un groupe additif et $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes.

1. Montrer que pour tout sous-groupe H de G , on a $f^{-1}(f(H)) = H + \ker(f)$
2. Montrer que pour tout sous-groupe H' de G' , on a $f(f^{-1}(H')) = H' \cap \text{Im}(f)$

EXERCICE 2

Groupes non isomorphes

📖 Titre : Groupes non isomorphes

🔖 ID : 30 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 17

★ Difficulté :



1) Soient (G_1, T) et $(G_2, *)$ deux groupes. On note $G = G_1 \times G_2$ et pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de G , on pose $x \perp y = (x_1 T y_1, x_2 * y_2)$. Démontrer que $(G, \perp)$ est un groupe et préciser son élément neutre et le symétrique de chaque élément

2) Démontrer que les groupes additifs $G = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ et $G' = ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, +)$ ne sont pas isomorphes.

EXERCICE 3

Bases du groupe $\mathbb{Z}^2$ en tant que $\mathbb{Z}$ -module

📖 Titre : Bases du groupe $\mathbb{Z}^2$ en tant que $\mathbb{Z}$ -module

🔖 ID : 37 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 24

★ Difficulté :



1. Démontrer que le groupe $(\mathbb{Z}^2, +)$ n'est pas monogène.
2. Démontrer que le groupe $(\mathbb{Z}^2, +)$ admet une partie génératrice à deux éléments.
3. Soit $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$. A quelle condition sur a, b, c, d , on a $\mathbb{Z}^2 = \langle (a, b), (c, d) \rangle$?

EXERCICE 4

Produit cartésien de deux groupes cycliques et ordre

📖 Titre : Produit cartésien de deux groupes cycliques et ordre

🔖 ID : 38 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 25

★ Difficulté :



1. Soit $(G, .)$ un groupe et $a, b \in G$ tel que $ab = ba$ et $\text{ordre}(a) = m$ et $\text{ordre}(b) = n$ et $m \wedge n = 1$. Démontrer que $\text{ordre}(ab) = mn$.
2. Soient G_1 et G_2 deux groupes cycliques tel que $\text{card}(G_1) = m$ et $\text{card}(G_2) = n$. Démontrer que si $n \wedge m = 1$ alors $G_1 \times G_2$ est cyclique et si $G_1 = \langle a_1 \rangle$ et $G_2 = \langle a_2 \rangle$ alors $G_1 \times G_2 = \langle (a_1, a_2) \rangle$

EXERCICE 5

Groupe dans lequel $x^2 = e$ pour tout élément x

📖 **Titre :** Groupe dans lequel $x^2 = e$ pour tout élément x

🔑 **ID :** 43 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 30

★ **Difficulté :**



1. Soit $(G, \cdot)$ un groupe tel que

$$(\star) \quad \forall x \in G, x^2 = e.$$

Démontrer que G est commutatif.

2. Donner des exemples de groupe G vérifiant la condition $(\star)$ dans les cas :

(a) G fini.

(b) G infini.

3. Démontrer que si G est un groupe fini qui vérifie la condition $(\star)$ ci-dessus alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\text{card}(G) = 2^m$.

EXERCICE 6

Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

📖 **Titre :** Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

🔑 **ID :** 46 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 33

★ **Difficulté :**



Démontrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ est de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 7

Union de deux sous-groupes

📖 **Titre :** Union de deux sous-groupes

🔑 **ID :** 49 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 35

★ **Difficulté :**



Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G, \star)$.

A quelle condition l'ensemble $H \cup K$ est-il un sous-groupe de $(G, \star)$?

EXERCICE 8

Les plus petits groupes

📖 **Titre :** Les plus petits groupes

🔑 **ID :** 50 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 36

★ **Difficulté :**



Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer le nombre de lois de composition internes sur G et le nombre maximale de celles d'entre elles qui fait de G un groupe :

1. $G = \{a\}$ est un singleton

2. $G = \{a, b\}$ est une paire

3. $G = \{a, b, c\}$ est un ensemble à trois éléments.

EXERCICE 9

Exemple de générateurs d'un groupe fini

📖 **Titre :** Exemple de générateurs d'un groupe fini

🔑 **ID :** 51 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 37

★ **Difficulté :**



G désigne le groupe additif $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

1. Préciser les générateurs de G .

2. Sans faire des calculs, quels sont les ordres possibles des éléments de G ?
3. Dresser le tableau donnant les ordres des éléments de G et expliciter le sous-groupe engendré par chaque élément de G .
4. Montrer que si A est l'ensemble des générateurs de G alors $(A, \times)$ est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

EXERCICE 10 Groupe fini et ordre d'un élément

📖 Titre : Groupe fini et ordre d'un élément

🔖 ID : 52 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 38

★ Difficulté :



Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} / z^n = 1\}$ et soit $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$

1. Prouver que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Démontrer que G est un sous-groupe infini de $(\mathbb{C}^*, \times)$, dans lequel tout élément est d'ordre fini.
3. Donner un exemple de groupe G infini dans lequel tout élément différent de l'élément neutre est d'ordre 2.

EXERCICE 11 Matrices de transvections et groupes

📖 Titre : Matrices de transvections et groupes

🔖 ID : 53 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 39

★ Difficulté :



Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. On appelle matrice de transvection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme $T_{i,j,a} = I_n + aE_{i,j}$ où $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $i \neq j$. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble de telles matrices

1. Est ce que $\mathcal{T}$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$?
2. Même question pour $\mathcal{T}_{ij} = \{T_{i,j,a} / a \in \mathbb{K}\}$ pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ fixé tel que $i \neq j$

EXERCICE 12 loin duale et structure de groupe

📖 Titre : loin duale et structure de groupe

🔖 ID : 54 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 40

★ Difficulté :



1. Soit $(G, \perp)$ un groupe et $\top$ la loi de composition interne définie par :

$$\forall (x, y) \in G^2, x \top y = y \perp x$$

Montrer que $(G, \top)$ est un groupe isomorphe au groupe $(G, \perp)$.

2. Déterminer tous les morphismes de groupe de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer tous les morphismes de groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$.

EXERCICE 13 Un groupe G injecté dans $S(G)$

📖 Titre : Un groupe G injecté dans $S(G)$

🔖 ID : 55 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 41

★ Difficulté :



1. Soit $(G, \star)$ un groupe. Démontrer qu'il existe un morphisme injectif Φ , de $(G, \star)$ vers $(\mathcal{S}(G), \circ)$ où $(\mathcal{S}(G), \circ)$ est le groupe des bijections de G vers G pour la composition des applications.
2. Précise les cas où Φ est un isomorphisme.

EXERCICE 14

Des exemples sur l'existence d'éléments d'ordre fini

📖 **Titre :** Des exemples sur l'existence d'éléments d'ordre fini

🔖 **ID :** 56 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 42

★ **Difficulté :**



Donner un exemple de groupe(non trivial) où :

1. Tout élément est d'ordre fini.
2. Aucun élément différent de l'élément neutre n'est d'ordre fini.
3. Il y'a en même temps des éléments différents de l'élément neutre, d'ordres finis et d'autres qui ne sont pas d'ordre fini.
4. G est infini et tout élément est d'ordre fini.
5. G est infini et tous les éléments différents de l'élément neutre sont d'ordre fini et ont le même ordre.

EXERCICE 15

Centre d'un groupe : études

📖 **Titre :** Centre d'un groupe : études

🔖 **ID :** 57 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | **N° :** 43

★ **Difficulté :**



Soit $(G, .)$ un groupe et pour tout $a \in G$, on note φ_a l'application :

$$\varphi_a : G \rightarrow G; x \mapsto \varphi_a(x) = axa^{-1}$$

et

$$C_a = \{x \in G / xa = ax\}.$$

On note : $\mathcal{S}(G)$ le groupe des bijections de G vers G , $\text{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G ,

$$\text{Int}(G) = \{\varphi_a / a \in G\}$$

et

$$Z(G) = \{x \in G / \forall g \in G, xg = gx\},$$

appelé le centre de G .

1. (a) Montrer que pour tout $a \in G$, C_a est un sous-groupe de G .
(b) En déduire que $Z(G)$ est un sous-groupe de G .
(c) Soit $g \in G$. On pose

$$gZ(G)g^{-1} = \{gxg^{-1} / x \in Z(G)\}.$$

Prouver que $gZ(G)g^{-1} = Z(G)$.

2. Démontrer que $\text{Aut}(G)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}(G), \circ)$ et que $\text{Int}(G)$ est un sous-groupe de $(\text{Aut}(G), \circ)$.
3. Démontrer que $\Phi : G \rightarrow \mathcal{S}(G); x \mapsto \Phi(x) = \varphi_x$ est un morphisme et préciser son image et son noyau.
4. **Exemple de détermination du centre d'un groupe :**
Démontrer que $Z(\text{GL}_2(\mathbb{R})) = \mathbb{R}I_2$.

EXERCICE 16

Etude de $x \mapsto x^k$ de G vers G

📖 **Titre :** Etude de $x \mapsto x^k$ de G vers G

🔖 **ID :** 58 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 44

★ **Difficulté :**



Soit G un groupe fini de cardinal n et $k \in \mathbb{N}$. On considère l'application :

$$\varphi_k : G \rightarrow G; x \mapsto x^k$$

1. Démontrer que si le groupe G est commutatif alors φ_k est un morphisme, et que φ_k est un isomorphisme si et seulement si $k \wedge n = 1$.
2. Donner un exemple de groupe G de cardinal n et d'entier naturel k tel que $k \wedge n = 1$ et φ_k n'est pas un morphisme.

EXERCICE 17

Sous-groupes du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$

📖 **Titre :** Sous-groupes du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$

🔖 **ID :** 59 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 45

★ **Difficulté :**



1. Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Prouver que soit H est de la forme $H = \omega\mathbb{Z}$ avec $\omega \in \mathbb{R}_+$ (on dit que H est discret), soit H est partout dense dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $H = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $b \neq 0$. Montrer que H est discret si et seulement si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.
3. Démontrer que pour tout $(x, y) \in [-1, 1]^2$, tel que $x < y$, il existe au moins un entier naturel n tel que $x < \cos n < y$.

EXERCICE 18

Condition pour que HK soit un sous-groupe

📖 **Titre :** Condition pour que HK soit un sous-groupe

🔖 **ID :** 60 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 46

★ **Difficulté :**



G est un groupe multiplicatif. Soient H et K deux sous-groupes de G et on note

$$HK = \{hk / (h, k) \in H \times K\}.$$

1. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) $HK \subset KH$
 - (ii) $KH \subset HK$
 - (iii) $HK = KH$
 - (iv) HK est un sous-groupe de G .
2. En considérant le groupe symétrique $\mathcal{S}_3$, donner un contre exemple où HK n'est pas un sous-groupe.

EXERCICE 19

Moins d'hypothèse donnent un groupe

📖 **Titre :** Moins d'hypothèse donnent un groupe

🔖 **ID :** 61 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 47

★ **Difficulté :**



Soit $(G, \star)$ un magma tel que G est fini et $\star$ est associative et tout élément est régulier dans $(G, \star)$. Démontrer que $(G, \star)$ est un groupe.

EXERCICE 20

Groupe de cardinal premier

📖 Titre : Groupe de cardinal premier

🔖 ID : 62 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 48

★ Difficulté :



Soit G un groupe de cardinal p avec p un entier naturel premier. Démontrer que G est cyclique.

EXERCICE 21

Les groupe d'ordre 4 à isomorphisme près

📖 Titre : Les groupe d'ordre 4 à isomorphisme près

🔖 ID : 63 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 49

★ Difficulté :



1. Démontrer que les groupes $G_1 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $G_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ne sont pas isomorphes.
2. Démontrer que tout groupe H de cardinal 4 est isomorphe à G_1 ou G_2 .

EXERCICE 22

Générateurs du groupe symétrique S_n

📖 Titre : Générateurs du groupe symétrique S_n

🔖 ID : 64 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 50

★ Difficulté :



On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions.

1. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Démontrer que pour toute transposition $\tau_{i,j}$ de $\mathcal{S}_n$, on a

$$\sigma \tau_{i,j} \sigma^{-1} = \tau_{\sigma(i), \sigma(j)}$$

2. (a) Prouver que les transpositions de la forme $\tau_{1,k}$, $2 \leq k \leq n$ engendrent $\mathcal{S}_n$.
(b) Même question pour les transpositions de la forme $\tau_{k,k+1}$, $1 \leq k \leq n-1$,
(c) Montrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par le cycle $s = (1, 2, \dots, n)$ et la transposition $\tau = (1, 2)$.

Indication : Considérer pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le composé : $s^k \tau s^{-k}$.

3. Déterminer tous les morphismes de groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$.

EXERCICE 23

Groupe engendré par deux matrices

📖 Titre : Groupe engendré par deux matrices

🔖 ID : 65 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 51

★ Difficulté :



On considère les matrices carrées de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ suivantes : $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et soit $G = \langle R, S \rangle$ le sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ engendré par $\{R, S\}$ et $H = \langle A \rangle$ le sous-groupe engendré par R .

1. Démontrer que $\langle R \rangle$ est cyclique de cardinal 4 et que tout élément de G est de la forme $\prod_{k=1}^m M_k$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $M_k \in \{R, R^3, S\}$
2. Démontrer que $\forall p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z}, R^p S = S R^q$.
3. En déduire que $\text{card}(G) = 8$ et préciser les éléments de G .
4. Dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_4$, on considère le cycle $s = (1, 2, 3, 4)$ et la permutation $t = (1, 2) \circ (3, 4)$ produit des transpositions $(1, 2)$ et $(3, 4)$. Démontrer que $G \simeq \langle s, t \rangle$.

EXERCICE 24

$\mathbb{Z}$ non monogène et $\mathbb{Q}$ non de type fini

📖 Titre : $\mathbb{Z}$ non monogène et $\mathbb{Q}$ non de type fini

🔑 ID : 66 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 52

★ Difficulté :



1. Démontrer que le groupe $(\mathbb{Z}^2, +)$ n'est pas monogène.
2. Soit A une partie finie de $\mathbb{Q}$. Démontrer que le sous-groupe $\langle A \rangle$ du groupe additif $(\mathbb{Q}, +)$ engendré par A est *strictement* inclus dans $\mathbb{Q}$.

EXERCICE 25

L'anneau $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

📖 Titre : L'anneau $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

🔑 ID : 67 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 53

★ Difficulté :



Soit $A = \{m + n\sqrt{2}/m, n \in \mathbb{Z}\}$.

1. Prouver que A est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$. On note $U(A)$ le groupe des inversibles de A .
2. Pour tout $x = m + n\sqrt{2} \in A$, on pose $N(x) = |m^2 - 2n^2|$. Démontrer que pour tout $x, y \in A$, on a $N(xy) = N(x)N(y)$.
3. Démontrer que $U(A) = \{\varepsilon(1 + \sqrt{2})^n / \varepsilon \in \{-1, 1\}, n \in \mathbb{Z}\}$.

EXERCICE 26

Anneau avec nombre fini d'idéaux

📖 Titre : Anneau avec nombre fini d'idéaux

🔑 ID : 68 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 54

★ Difficulté :



Soit A un anneau commutatif non réduit à un singleton et on note $\mathcal{U}(A)$ le groupe des inversibles de A .

- 1) Démontrer que si I est un idéal de A tel que $I \cap \mathcal{U}(A) \neq \emptyset$ alors $I = A$.
- 2) Montrer que si les seuls idéaux de A sont A et $\{0_A\}$ alors A est un corps.
- 3) Montrer que si A est intègre et n'admet qu'un nombre fini d'idéaux alors A est un corps.

EXERCICE 27

Générateurs de $\mathbb{Z}^2$ et de ceux de $\mathbb{Q}$

📖 Titre : Générateurs de $\mathbb{Z}^2$ et de ceux de $\mathbb{Q}$

🔑 ID : 69 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 55

★ Difficulté :



1. Prouver que le groupe additif $\mathbb{Z}^2$ n'est pas monogène.
2. Démontrer que si A est une partie finie de $\mathbb{Q}$ alors le groupe $\langle A \rangle$ engendré par A est strictement inclus dans $\mathbb{Q}$.
3. Soit $A = \left\{ \frac{1}{p^\alpha} / p \in \mathbb{P}, \alpha \in \mathbb{N} \right\}$ où $\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers positifs. Démontrer que $\langle A \rangle = \mathbb{Q}$.

EXERCICE 28

Ordre du composé de deux éléments

📖 Titre : Ordre du composé de deux éléments

🔑 ID : 70 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 56

★ Difficulté :



Soit G un groupe. On considère deux éléments a et b de G d'ordres respectifs p et q et on suppose de plus que $ab = ba$ et $p \wedge q = 1$. Démontrer que ab est d'ordre pq .

EXERCICE 29 Monoides et groupes

📖 Titre : Monoides et groupes

🔖 ID : 71 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 57

★ Difficulté :



Soit E un ensemble non vide et $\star$ une loi de composition interne associative et admettant un élément neutre e (on dit que $(E, \star)$ est un monoïde). Pour tout élément a de E et tout entier naturel n non nul, on note :

$$a^n = \underbrace{a \star \cdots \star a}_{n \text{ fois}}$$

1. Donner un exemple de monoïde fini qui n'est pas un groupe.
2. Démontrer que si $(G, \star)$ est un groupe fini alors on a :

$$(1) : \quad \forall x \in G, \forall v \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, \begin{cases} p \geq v \\ x^p = x \end{cases}$$

3. Démontrer que (1) peut ne pas être vrai si on suppose juste que $(G, \star)$ est un monoïde fini (on pourra donner un contre-exemple).
4. Soit M un ensemble non vide et $\star$ une loi de composition interne sur M (On dit que $(M, \star)$ est un magma). On suppose que M est fini et que la loi $\star$ est associative. Démontrer que :

$$(2) : \quad \exists x \in M, \forall p \in \mathbb{N}^*, x^p = x$$

EXERCICE 30 Morphisme de S_n vers $\mathbb{C}^*$

📖 Titre : Morphisme de S_n vers $\mathbb{C}^*$

🔖 ID : 72 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 58

★ Difficulté :



Déterminer tous les morphismes du groupe $\mathcal{S}_n$ vers le groupe $\mathbb{C}^*$

EXERCICE 31 Morphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

📖 Titre : Morphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

🔖 ID : 73 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 59

★ Difficulté :



Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer tous les morphismes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$, et notamment leur nombre.

EXERCICE 32 Transvections de $GL_2(\mathbb{R})$ engendrent $SL_2(\mathbb{R})$

📖 Titre : Transvections de $GL_2(\mathbb{R})$ engendrent $SL_2(\mathbb{R})$

🔖 ID : 74 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 60

★ Difficulté :



$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels. On rappelle que $GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \det(A) \neq 0\}$ et on note $SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) / \det(A) = 1\}$. Pour tout nombre réel α , on note

$\Gamma_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ et $\Lambda_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On appelle matrice de transvection de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, toute matrice de la forme Γ_α ou Λ_α avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\gamma(\gamma - 1) \neq 0$. On pose $M_\gamma = \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$.
 - Démontrer que M_γ ne peut être produit de m matrices de transvection pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \leq 3$.
 - Démontrer que M_γ est un produit de matrices de transvections.
- Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $a \neq 0$ et $ad - bc = 1$.
 - Soit $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}$ la matrice obtenue à partir de A par l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{b}{a}L_1$. Démontrer qu'il existe une matrice de transvection T_1 à préciser tel que $A_1 = T_1 A$.
 - Démontrer que si la matrice A_2 est celle obtenue à partir de A_1 par l'opération élémentaire $C_2 \leftarrow C_2 - \frac{c}{a}C_1$ alors il existe une matrice de transvection T_2 tel que $A_2 = A_1 T_1$.
- Déduire de tout ce qui précède que toute matrice $A \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ est un produit de matrices de transvections.

EXERCICE 33

Un exercice sur les parties génératrices de $\mathbb{Q}$

📖 **Titre :** Un exercice sur les parties génératrices de $\mathbb{Q}$

🔑 **ID :** 75 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 61

★ **Difficulté :**



Si X est une partie de $\mathbb{Q}$, on note $\langle X \rangle$, le sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$ engendré par X .
Soit A une partie de $\mathbb{Q}$ tel que

$$\langle A \rangle = \mathbb{Q}.$$

Démontrer que :

$$\forall a \in A, \quad \langle A \setminus \{a\} \rangle = \mathbb{Q}.$$

EXERCICE 34

Ordre du produit de deux transpositions du groupe symétrique

📖 **Titre :** Ordre du produit de deux transpositions du groupe symétrique

🔑 **ID :** 76 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 62

★ **Difficulté :**



n est un entier naturel tel que $n \geq 2$ et $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique. On considère deux transpositions t et τ éléments de $\mathfrak{S}_n$ et soit $\sigma = t \circ \tau$. Quelles sont les valeurs possibles de l'ordre de la permutation σ ?

EXERCICE 35

Sous-groupe engendré par le complémentaire d'un sous-groupe propre

📖 **Titre :** Sous-groupe engendré par le complémentaire d'un sous-groupe propre

🔑 **ID :** 77 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 63

★ **Difficulté :**



Soit G un groupe et H un sous-groupe de G tel que H est strictement inclus dans G . On pose $A = G \setminus H$. Démontrer que $\langle A \rangle = G$

EXERCICE 36

Élément nilpotent d'un anneau

📖 Titre : Élément nilpotent d'un anneau

🔑 ID : 78 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 64

★ Difficulté :



Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On note 0_A et 1_A respectivement, l'élément neutre de la première et la deuxième loi de A . Un élément x de A est dit nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^k = 0_A$. On appelle indice de nilpotence de x , l'entier naturel $\nu = \min\{k \in \mathbb{N}^* / x^k = 0_A\}$.

1. Démontrer que pour tout élément nilpotent x de A , d'indice de nilpotence ν , on a $1 - x$ est inversible et exprimer son inverse $(1 - x)^{-1}$ en fonction de x et ν .
2. Démontrer que si a et b sont deux éléments nilpotents de A tel que $ab = ba$, il en est de même de $a + b$ et ab .
3. Démontrer que si A est commutatif l'ensemble $\mathcal{N}(A)$ des éléments nilpotents de A est un idéal de A .

EXERCICE 37 Moins d'hypothèses donnent un anneau

📖 Titre : Moins d'hypothèses donnent un anneau

🔑 ID : 79 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 65

★ Difficulté :



Soit $(A, +, \times)$ un ensemble non vide tel que tous les axiomes d'un anneau sont satisfait sauf celui de la commutativité de la première loi $+$. Démontrer que $(A, +, \times)$ est tout de même un anneau.

EXERCICE 38 Conditions suffisantes d'inversibilité

📖 Titre : Conditions suffisantes d'inversibilité

🔑 ID : 80 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 66

★ Difficulté :



Soit A un anneau et x un élément de A .

1. Démontrer que si x est inversible à gauche et régulier à droite. Démontrer que x est inversible.
2. Démontrer que s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que x^n est inversible alors x est inversible.

EXERCICE 39 Nombre d'anneaux à quatre éléments

📖 Titre : Nombre d'anneaux à quatre éléments

🔑 ID : 81 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 67

★ Difficulté :



1. Démontrer qu'il existe au moins un corps $\mathbb{K}$ ayant quatre éléments.
2. Pour tout $x = (x_1, x_2) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et $y = (y_1, y_2) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, on pose $x \otimes y = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2y_1)$. Démontrer que $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, +, \otimes)$ est un anneau.
3. Démontrer qu'il y'a au moins quatre anneaux non isomorphes à quatre éléments.

EXERCICE 40 Sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ isomorphe à un autre connu

📖 Titre : Sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ isomorphe à un autre connu

🔑 ID : 82 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 68

★ Difficulté :



On note :

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / a + b = c + d \right\}.$$

Démontrer que $\mathcal{A}$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ isomorphe au sous-anneau $\mathcal{T}(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

EXERCICE 41

A est un anneau et $u, v \in A$ tel que $Au = Av$

📖 **Titre :** A est un anneau et $u, v \in A$ tel que $Au = Av$

🔑 **ID :** 83 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 69

★ **Difficulté :**



Soit A un anneau et u et v deux éléments de A tel que $Au = Av$. Démontrer qu'il existe une et une seule application $f : uA \rightarrow vA$ telle que :

$$\begin{cases} f(u) = v \\ \forall (x, y) \in (uA)^2, \forall (\lambda, \mu) \in A^2, \quad f(x\lambda + y\mu) = f(x)\lambda + f(y)\mu \end{cases}.$$

EXERCICE 42

Anneau de Gauss

📖 **Titre :** Anneau de Gauss

🔑 **ID :** 84 ⌚ **Durée :** —

📖 **Niveau :** L2 | N° : 70

★ **Difficulté :**



Soit $\mathbb{Z}(i) = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. $\mathbb{Z}(i)$ est un anneau. On pose :

$$N(a + ib) = a^2 + b^2$$

1. Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}(i)^2, \quad N(xy) = N(x)N(y).$$

En déduire les éléments inversibles de $\mathbb{Z}(i)$.

2. Si $x \in \mathbb{Z}(i)$ et si $N(x)$ est un entier premier, montrer que x est irréductible (i.e. $x = \alpha\beta \Rightarrow \alpha$ ou β inversible). La réciproque est-elle vraie ?

3. **Division euclidienne dans $\mathbb{Z}(i)$:**

Soient $x \in \mathbb{Z}(i), y \in \mathbb{Z}(i)^*$. On pose $\frac{x}{y} = u + iv$, où $(u, v) \in \mathbb{Q}^2$. On prend $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $|u - u_0| \leq \frac{1}{2}$ et $|v - v_0| \leq \frac{1}{2}$. Montrer qu'on a : $x = y(u_0 + iv_0) + r$ avec $N(r) < N(y)$. Dans quel cas $u_0 + iv_0$ et r sont-ils uniques ?

4. En déduire que $\mathbb{Z}(i)$ est principal.

5. Soit p un nombre premier dans $\mathbb{Z}$. Montrer que p est irréductible ssi il n'existe pas $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p = a^2 + b^2$

6. Montrer que si p est un nombre premier tel que $p \equiv 3 \pmod{4}$, alors

$$a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow a \equiv 0 \pmod{p} \text{ et } b \equiv 0 \pmod{p}$$

En déduire que tout nombre premier ≥ 3 est irréductible dans $\mathbb{Z}(i)$ ssi $p \equiv 3 \pmod{4}$.

7. Montrer qu'un entier n peut se mettre sous la forme d'une somme de 2 carrés ssi il est de la forme :

$$n = \left(\prod_j p_j^{\alpha_j} \right) \left(\prod_{4k+3 \text{ premier}} (4k+3)^{2\beta_k} \right)$$

où p_j est un nombre premier tel que $p_j \not\equiv 3 \pmod{4}$, i.e. les exposants des facteurs premiers de la forme $4k+3$ sont pairs.

8. Donner une C.N.S. pour que $x \in \mathbb{Z}(i)$ soit irréductible.

EXERCICE 43 Sous-groupes d'un groupe cyclique

📖 Titre : Sous-groupes d'un groupe cyclique

💎 ID : 85 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 71

★ Difficulté :



Soit $G = \langle \omega \rangle$ un groupe cyclique de cardinal n . Pour tout diviseur d de n on note $\tilde{d}$ l'unique entier naturel tel que $d\tilde{d} = n$ et on note $\omega_d = \omega^{\tilde{d}}$ et $G_d = \{x \in G / x^d = e\}$.

1. Démontrer que pour tout diviseur d de n , l'ordre de ω_d est égal à d et que G admet au moins un sous-groupe H de cardinal d .
2. Démontrer que si H est un sous-groupe de G alors H est cyclique et $d = |H|$ divise n .
3. Démontrer que pour tout diviseur d de n , on a G_d est un sous-groupe de G , et en déduire qu'il existe un seul sous-groupe H de G de cardinal d et expliciter un générateur de H en fonction de a , n et d .

EXERCICE 44 Produit cartésien de deux groupes monogènes

📖 Titre : Produit cartésien de deux groupes monogènes

💎 ID : 86 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 72

★ Difficulté :



On considère deux groupes monogènes G_1 et G_2 dont les lois sont notées multiplicativement et les éléments neutres respectifs sont notés e_1 et e_2 .

1. On suppose de plus que $G_1 \neq \{e_1\}$ et $G_2 \neq \{e_2\}$. Démontrer que si $G_1 \times G_2$ est monogène alors G_1 et G_2 sont cycliques.
2. On suppose que G_1 et G_2 sont cycliques de cardinaux respectifs n_1 et n_2 . Démontrer que $G_1 \times G_2$ est cyclique si et seulement si $n_1 \wedge n_2 = 1$.

EXERCICE 45 Groupe des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$

📖 Titre : Groupe des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$

💎 ID : 87 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 73

★ Difficulté :



1. Soit x un entier relatif impair. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 3 \Rightarrow x^{2^{n-2}} \equiv 1 [2^n]$$

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$, le groupe $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ n'est pas cyclique.

EXERCICE 46 Extension de corps

📖 Titre : Extension de corps

💎 ID : 88 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 74

★ Difficulté :



Pour toute partie A de $\mathbb{C}$, et tout sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$, on note $\mathbb{K}(A)$ le plus petit sous-corps $\mathbb{L}$ de $\mathbb{C}$ tel que $A \subset \mathbb{L}$ et $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$. Si A est finie non vide, $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ on notera $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ au lieu de $\mathbb{K}(A)$.

1. Démontrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$ et que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) + \mathbb{Q}(\sqrt{2})\sqrt{3}$.
2. Démontrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
3. Démontrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2} + \mathbb{Q}\sqrt{3} + \mathbb{Q}\sqrt{6}$
4. Soit $\theta = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
 - (a) Démontrer que $\mathfrak{I}_\theta = \{P \in \mathbb{Q}[X] / P(\theta) = 0\}$ est un idéal non nul de $\mathbb{Q}[X]$. En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire $\pi_\theta \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\mathfrak{I}_\theta = \pi_\theta \mathbb{Q}[X]$.
 - (b) Démontrer que π_θ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. En déduire que la famille $(1, \theta, \theta^2, \theta^3)$ est libre dans le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$
 - (c) Démontrer que :

$$\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\theta + \mathbb{Q}\theta^2 + \mathbb{Q}\theta^3.$$

EXERCICE 47

Sous-groupes de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

📖 Titre : Sous-groupes de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

🔖 ID : 477 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 460

★ Difficulté :



Trouver tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Soignez vos réponses

EXERCICE 48

Morphisme d'anneau de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

📖 Titre : Morphisme d'anneau de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

🔖 ID : 483 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 465

★ Difficulté :



Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un morphisme d'anneaux non nul.

1. Calculer $f(0), f(1), f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis $\mathbb{Z}$, puis $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que $x \geq 0$ entraîne $f(x) \geq 0$ (dans $\mathbb{R}$, tout positif est un carré).
3. En déduire f croissante, puis $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

EXERCICE 49

Partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est un groupe

📖 Titre : Partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est un groupe

🔖 ID : 502 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 484

★ Difficulté :



Soit G une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non réduite à la matrice nulle. On suppose que $(G, \times)$ est un groupe. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que le groupe $(G, \times)$ soit isomorphe à un sous-groupe de $(\text{GL}_r(\mathbb{R}), \times)$

EXERCICE 50

Partie multiplicative de matrices, caractérisations diverses

📖 Titre : Partie multiplicative de matrices, caractérisations diverses

🔖 ID : 512 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 494

★ Difficulté :



Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Etablir que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe une partie $\mathcal{G}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par le produit des matrices tel que $(\mathcal{G}, \circ)$ est un groupe et $A \in \mathcal{G}$.
- (ii) $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2)$
- (iii) $\ker(A) = \ker(A^2)$

- (iv) $\text{Im}(A) \oplus \ker(A) = \mathbb{R}^n$
 (v) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AB = BA$ et $A^2B = A$ et $B^2A = B$.

EXERCICE 51 Une fraction rationnelle qui est un polynôme

📖 Titre : Une fraction rationnelle qui est un polynôme

📌 ID : 515 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 496

★ Difficulté :



Soient $\mathbb{K}$ un corps et

$$f(X) = \frac{(1+X)(1+X^{15})}{(1+X^3)(1+X^5)}$$

1. Montrer que $f(X) \in \mathbb{K}[X]$.
2. En calculant modulo X^9 , montrer que

$$f(X) = X^8 + X^7 - X^5 - X^4 - X^3 + X + 1$$

EXERCICE 52 Isomorphes en tant que $\mathbb{Q}$ -ev et non comme corps

📖 Titre : Isomorphes en tant que $\mathbb{Q}$ -ev et non comme corps

📌 ID : 516 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 497

★ Difficulté :



1. Démontrer que si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ alors $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{Q}$ espace vectoriel pour l'addition naturelle et la loi externe induite par la multiplication naturelle.
2. Donner des exemple de sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ pour lesquels :
 - (a) $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension finie .
 - (b) $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension infinie .

Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ tel que $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{K})$ est finie, on notera $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{K})$. Pour tout $\theta \in \mathbb{C}$, on notera $\mathbb{Q}(\theta)$ le plus petits sous corps de $\mathbb{C}$ contenant $\{\theta\}$. On dit que θ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si $\mathbb{Q}(\theta)$ est de dimension finie. Dans ce cas on dira que $[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}]$ est le degré de l'extension $\mathbb{Q}(\theta)$.

3. Soit $\theta \in \mathbb{C}$ et $\mathfrak{I}_{\theta} = \{P \in \mathbb{Q}[X] / P(\theta) = 0\}$. Montrer que $\mathfrak{I}_{\theta}$ est un idéal de l'anneau $\mathbb{Q}[X]$ et que $\mathfrak{I}_{\theta} \neq \{0\}$ si et seulement si θ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.
4. Démontrer que si $\theta \in \mathbb{C}$ est algébrique alors il existe un et unseul polynôme unitaire π_{θ} tel que $\mathfrak{I}_{\theta} = \pi_{\theta}\mathbb{Q}[X]$. Démontrer alors que π_{θ} est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et que $\deg(\pi_{\theta}) = [\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}]$.
5. Démontrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ sont isomorphes en tant que $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels mais ne sont pas isomorphes en tant que corps.

EXERCICE 53 Un excellent exercice sur l'arithmétique et les polynômes

📖 Titre : Un excellent exercice sur l'arithmétique et les polynômes

📌 ID : 517 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 498

★ Difficulté :



Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

avec $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ premiers dans leur ensemble, $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$.

1. On suppose que $\alpha \in \mathbb{Z}$, montrer que α divise a_0 .
2. On suppose que $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$, la fraction p/q étant irréductible, démontrer que p divise a_0 et que q divise a_n . Démontrer que pour tout entier m , l'entier $p - mq$ divise $f(m)$. (En particulier $p - q$ divise $f(1)$ et $p + q$ divise $f(-1)$). Énoncer le résultat obtenu lorsque $a_n = 1$.
3. Soit

$$\varphi(Y) = Y^n + a_{n-1}Y^{n-1} + a_n a_{n-2}Y^{n-2} + \cdots + a_n^{n-2}a_1Y + a_n^{n-1}a_0$$

Montrer que $a_n^{n-1}f(X) = \varphi(Y)$ avec $Y = a_nX$. En déduire le lien entre les racines rationnelles de $f(X)$ et celles de $\varphi(Y)$.

4. Déterminer les racines rationnelles de $f_1(X) = 2X^3 - 12X^2 + 13X - 15$ et de $f_2(X) = 4X^3 - 8X^2 + 15X - 3$.

EXERCICE 54

Un peu de théorie de corps

📖 Titre : Un peu de théorie de corps

🔖 ID : 518 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 499

★ Difficulté :



Soit $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible de degré ≥ 3 .

1. On suppose que $f(X)$ admet exactement deux racines non réelles $z_1 = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \bar{z}_1$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\beta \notin \mathbb{Q}$.
2. On suppose que $f(X)$ admet une seule racine réelle r . Soit $z = \alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ une autre racine de f . Montrer que $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

EXERCICE 55

Eléments superflus : étude importante

📖 Titre : Eléments superflus : étude importante

🔖 ID : 523 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 504

★ Difficulté :



Soit $(G, \star)$ un groupe et $\omega \in G$.

1. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall A \subset G, \langle A \rangle = G \Rightarrow \langle A \setminus \{\omega\} \rangle = G$.

(ii) $\forall A \subset G, \langle A \cup \{\omega\} \rangle = G \Rightarrow \langle A \rangle = G$.

(iii) $\forall A \subset G, \langle A \rangle = G \Rightarrow \langle \omega A \rangle = \langle \omega^{-1}A \rangle = G$.

Si ω satisfait l'une des conditions (i), (ii), (iii) on dit que ω est *superflu*.

2. On note $\mathfrak{T}_G$ l'ensemble des éléments superflus de G . Démontrer que $\mathfrak{T}_G$ est un sous groupe de $(G, \star)$.
3. Déterminer $\mathfrak{T}_G$ dans chacun des cas suivants :
 - (a) $G = \mathbb{Z}$ muni de l'addition.
 - (b) $G = \mathbb{Q}$ muni de l'addition.
 - (c) $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ muni de l'addition.

EXERCICE 56

Un groupe avec $\mathbb{Z}$

📖 Titre : Un groupe avec $\mathbb{Z}$

🔖 ID : 676 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 657

★ Difficulté :



1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, on pose $x \perp y = x + y + 1$.
 - (a) Montrer que $(\mathbb{Z}, \perp)$ est un groupe commutatif.

- (b) Montrer que les groupes $(\mathbb{Z}, \perp)$ et $(\mathbb{Z}, +)$ sont isomorphes ?
- (c) Retrouver l'élément neutre de $(\mathbb{Z}, \perp)$ et le symétrique de 2025 dans $(\mathbb{Z}, \perp)$ en utilisant l'isomorphisme.
2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, on pose $x \star y = x + (-1)^x y$.
- (a) Montrer que $(\mathbb{Z}, \star)$ est un groupe.
- (b) Les groupes $(\mathbb{Z}, \star)$ et $(\mathbb{Z}, \perp)$ sont-ils isomorphes ?

EXERCICE 57

Un groupe de matrices

📖 Titre : Un groupe de matrices

🔑 ID : 677 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 658

★ Difficulté :



Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $G = \{xA/x \in \mathbb{R}^*\}$.

- Démontrer que G est stable par la multiplication des matrices carrées.
- Démontrer que $(G, \times)$ est un groupe commutatif. Préciser l'élément neutre E de $(G, \times)$ et pour tout $M = xA \in G$ préciser M' le symétrique de M .
- Démontrer que les groupes $(G, \times)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont isomorphes.

EXERCICE 58

Le produit de deux éléments d'ordre fini n'est pas forcément d'ordre fini

📖 Titre : Le produit de deux éléments d'ordre fini n'est pas forcément d'ordre fini

🔑 ID : 678 ⌚ Durée : —

📖 Niveau : L2 | N° : 659

★ Difficulté :



Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on note M_x la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que

$$M_x = \begin{pmatrix} 0 & x \\ \frac{1}{x} & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calculer $M_x M_y$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^*$.
- Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la matrice M_x est d'ordre fini d dans le groupe $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$, déterminer d .
- Donner un exemple de matrices A et B de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que A et B d'ordres finis et AB n'est pas d'ordre fini.