



DEVOIR SURVEILLÉ NO 1

Donné le : 05-10-2026

Thème : Structures algébriques et algèbre linéaire

Durée : 4 heures

Année scolaire : 2026-2027

Classes : MP1, MP2, MP3

PROBLÈME 1 : Algèbre des quaternions

1. Étude d'une symétrie

11) a) Soient $(a, b, c, d, a', b', c', d') \in \mathbb{C}^8$ puis $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $A' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$. Soit $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{C}^2$.

$$\sigma(\lambda A + \lambda' A') = \begin{bmatrix} \lambda d + \lambda' d' & -(\lambda b + \lambda' b') \\ -(\lambda c + \lambda' c') & \lambda a + \lambda' a' \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} + \lambda' \begin{bmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{bmatrix} = \lambda \sigma(A) + \lambda' \sigma(A').$$

Donc

$$\sigma \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{C})).$$

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ puis $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$\sigma(\sigma(A)) = \sigma \left(\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A.$$

Donc $\sigma^2 = \text{Id}_{M_2(\mathbb{C})}$. Ainsi, σ est une involution linéaire de l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$ et donc

σ est une symétrie du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$.

b) On a déjà $\text{card}((I, J, K, L)) = 4 = \dim(M_2(\mathbb{C})) < +\infty$. Pour montrer que la famille (I, J, K, L) est une base de $M_2(\mathbb{C})$, il suffit de montrer que la famille (I, J, K, L) est libre.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$.

$$aI + bJ + cK + dL = 0 \Rightarrow a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a - id & -b + ic \\ b + ic & a + id \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + id = 0 \\ a - id = 0 \\ b + ic = 0 \\ -b + ic = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a + id) + (a - id) = 0 \\ (a + id) - (a - id) = 0 \\ (b + ic) + (-b + ic) = 0 \\ (b + ic) - (-b + ic) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ 2id = 0 \\ 2ic = 0 \\ 2b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = b = c = d = 0.$$

Ainsi, la famille (I, J, K, L) est libre et donc

la famille (I, J, K, L) est une base de $M_2(\mathbb{C})$.

Ensuite $\sigma(I) = I, \sigma(J) = -J, \sigma(K) = -K$ et $\sigma(L) = -L$. Donc

$$\text{Mat}_{(I, J, K, L)}(\sigma) = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

12) a) Soient $(a, b, c, d, a', b', c', d') \in \mathbb{C}^8$ puis $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} \sigma(B)\sigma(A) &= \begin{bmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dd' + cb' & -bd' - ab' \\ -dc' - ca' & bc' + aa' \end{bmatrix} \\ &= \sigma \left(\begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix} \right) = \sigma \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \\ &= \sigma(AB) \end{aligned}$$

On a montré que

$$\forall (A, B) \in (M_2(\mathbb{C}))^2, \sigma(AB) = \sigma(B)\sigma(A).$$

b) Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ et $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$A\sigma(A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = (ad - bc)I = \det(A)I.$$

$$\forall A \in M_2(\mathbb{C}), A\sigma(A) = \det(A)I.$$

c) Si A est inversible, on a $\det(A) \neq 0$ et donc, d'après la question b),

$$\left(\frac{1}{\det(A)} A \right) \cdot \sigma(A) = I.$$

On en déduit que $\sigma(A)$ est inversible à gauche et donc inversible. De plus, $(\sigma(A))^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A$. Ensuite, d'après a),

$$\sigma(A^{-1})\sigma(A) = \sigma(AA^{-1}) = \sigma(I) = I.$$

On en déduit que $\sigma(A^{-1}) = (\sigma(A))^{-1}$. Finalement,

$$\forall A \in GL_2(\mathbb{C}), \sigma(A) \in GL_2(\mathbb{C}) \text{ et } (\sigma(A))^{-1} = \sigma(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} A.$$

13) a) Soient $(a, b, c, d, a', b', c', d') \in \mathbb{C}^8$ puis $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $A' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ et soit $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{C}^2$.

$$\tau(\lambda A + \lambda' A') = (\lambda a + \lambda' a') + (\lambda d + \lambda' d') = \lambda(a + d) + \lambda'(a' + d') = \lambda\tau(A) + \lambda'\tau(A').$$

Donc

$$\tau \text{ est une forme linéaire sur } M_2(\mathbb{C}).$$

b) Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ puis $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$A + \sigma(A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + d & 0 \\ 0 & a + d \end{bmatrix} = (a + d)I = \tau(A)I.$$

Ainsi,

$$\forall A \in M_2(\mathbb{C}), \sigma(A) = -A + \tau(A)I.$$

II. Une $\mathbb{R}$ -algèbre célèbre : l'algèbre des quaternions

14) a) Existence. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Posons $z_1 = \alpha - i\delta$ et $z_2 = \beta + i\gamma$ où α, β, γ et δ sont quatre réels.

$$\begin{aligned} M(z_1, z_2) &= \begin{bmatrix} \alpha - i\delta & -\beta + i\gamma \\ \beta + i\gamma & \alpha + i\delta \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \\ &= \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L. \end{aligned}$$

Donc tout élément de H est une combinaison linéaire de I, J, K et L .

Unicité. D'après la question 12b), la famille (I, J, K, L) est une base du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$. En particulier, si $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma'$ et δ' sont 8 réels tels que $\alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L = \alpha' I + \beta' J + \gamma' K + \delta' L$ alors $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$ et $\delta = \delta'$ ce qui démontre l'unicité d'une décomposition.

Toute matrice de H s'écrit de manière unique sous la forme $\alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$ où α, β, γ et δ sont des réels.

b) Il reste à constater que $I = M(1, 0)$, $J = M(0, 1)$, $K = M(0, i)$ et $L = M(-i, 0)$ sont quatre éléments de H . Ainsi, la famille (I, J, K, L) est une famille d'éléments de H telle que tout élément de H est combinaison linéaire (à coefficients réels) des éléments de cette famille. Donc

la famille (I, J, K, L) est une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel H et $\dim_{\mathbb{R}}(H) = 4$.

c) Soit $(z_1, z_2, z'_1, z'_2) \in \mathbb{C}^4$.

$$\begin{aligned} M(z_1, z_2) \times M(z'_1, z'_2) &= \begin{bmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z'_1 & -\overline{z'_2} \\ z'_2 & \overline{z'_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 z'_1 - \overline{z_2} z'_2 & -z_1 \overline{z'_2} - \overline{z_2} z'_1 \\ z_2 z'_1 + \overline{z_1} z'_2 & -z_2 \overline{z'_2} + \overline{z_1} z'_1 \end{bmatrix} \\ &= M(z_1 z'_1 - \overline{z_2} z'_2, z_2 z'_1 + \overline{z_1} z'_2) \in H. \end{aligned}$$

Donc

H est stable pour le produit matriciel.

d) On suppose acquis le fait que $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre (de dimension 8). D'après la question 14)b), $H = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(I, J, K, L)$. Par suite, H est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et H est non vide et stable pour $+$ et $\cdot$. Ensuite, H est stable pour le produit matriciel d'après la question 14)c). Enfin, H contient I l'élément neutre de $M_2(\mathbb{C})$ pour $\times$. Donc H est une sous-algèbre de la $\mathbb{R}$ -algèbre $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot, \times)$ et en particulier,

H est une $\mathbb{R}$ -algèbre.

$JK = M(0, 1)M(0, i) = M(-i, 0) = L$ et $KJ = M(0, i)M(0, 1) = M(i, 0) = -L$. Donc J et K sont deux éléments de H tels que $JK \neq KJ$ et H n'est pas une algèbre commutative.

15) a) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ puis $A = M(z_1, z_2)$.

$$\sigma(A) = \begin{bmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_2} \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{bmatrix} = M(\overline{z_1}, -\overline{z_2}) \in H.$$

D'autre part,

$$\det(A) = z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 \in \mathbb{R}^+.$$

$$\boxed{\forall A \in H, \sigma(A) \in H \text{ et } \det(A) \in \mathbb{R}^+}.$$

b) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ puis $A = M(z_1, z_2)$.

$$A \notin GL_2(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2 = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

Ainsi, toute matrice non nulle de H est inversible pour $\times$ dans $M_2(\mathbb{C})$. On sait alors que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \sigma(A)$. Or, d'après la question a), $\sigma(A) \in H$ et donc $\frac{1}{\det(A)} \sigma(A) \in H$. Ainsi,

toute matrice non nulle de H est inversible et son inverse est dans H .

c)

- $H \setminus \{0\}$ est non vide car contient I et $H \subset GL_2(\mathbb{C})$ d'après la question précédente.
- On sait déjà que $\times$ est une loi interne dans H . Plus précisément, puisque tout élément non nul de H est une matrice inversible, le produit de deux matrices non nulles de H est inversible et en particulier non nul ou encore $H \setminus \{0\}$ est stable pour $\times$.
- D'après la question b), tout élément de $H \setminus \{0\}$ possède un inverse pour $\times$ dans $H \setminus \{0\}$.

Finalement $H \setminus \{0\}$ est un sous-groupe de $(GL_2(\mathbb{C}), \times)$ et en particulier

$$\boxed{(H \setminus \{0\}, \times) \text{ est un groupe.}}$$

16) Soit $(a, b, c, d, a', b', c', d') \in \mathbb{Z}^8$ puis $A = M(a - id, b + ic) = aI + bJ + cK + dL$ et $A' = M(a' - id', b' + ic') = a'I + b'J + c'K + d'L$. On a déjà

$$\det(A) = |a - id|^2 + |b + ic|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \text{ et } \det(A') = a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2.$$

D'autre part, d'après la question 14)c)

$$\begin{aligned} AA' &= M(a - id, b + ic)M(a' - id', b' + ic') \\ &= M((a - id)(a' - id') - (b - ic)(b' + ic'), (b + ic)(a' - id') + (a + id)(b' + ic')) \\ &= M((aa' - bb' - cc' - dd') - i(ad' + bc' - cb' + da'), (ab' + ba' + cd' - dc') + i(ac' - bd' + ca' + db')) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) &= \det(A) \det(A') = \det(AA') \\ &= (aa' - bb' - cc' - dd')^2 + (ab' + ba' + cd' - dc')^2 + (ac' - bd' + ca' + db')^2 + (ad' + bc' - cb' + da')^2 \end{aligned}$$

Comme les quatre réels $aa' - bb' - cc' - dd'$, $ab' + ba' + cd' - dc'$, $ac' - bd' + ca' + db'$ et $ad' + bc' - cb' + da'$ sont des entiers relatifs, on a montré que tout produit de deux sommes de quatre carrés d'entiers est encore une somme de quatre carrés d'entiers.

III. Un produit scalaire et une projection orthogonale

17) a) Soit $(A, B) \in H^2$. D'après la question 15)a), $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ sont dans H . Puisque H est une $\mathbb{R}$ -algèbre, il en est de même de $A\sigma(B) + B\sigma(A)$. Par suite, il existe deux nombres complexes z_1 et z_2 tels que $A\sigma(B) + B\sigma(A) = M(z_1, z_2)$. On a alors

$$(A|B) = \frac{1}{4}(z_1 + \overline{z_1}) = \frac{1}{2}\text{Re}(z_1) \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\forall (A, B) \in H^2, (A|B) \in \mathbb{R}.}$$

b) Soit $A \in H$. D'après la question 12)b) et puisque τ est linéaire,

$$(A|A) = \frac{1}{4}(A\sigma(A) + \sigma(A)A) = \frac{1}{4}\tau(2\det(A)I) = \frac{1}{4}2\det(A) \cdot \tau(I) = \det(A).$$

$$\boxed{\forall A \in H, (A|A) = \det(A).}$$

c)

— D'après la question a), $(\cdot|\cdot)$ est une application de H^2 dans $\mathbb{R}$.

— Soit $(A, B) \in H^2$.

$$(B|A) = \frac{1}{4}(B\sigma(A) + A\sigma(B)) = \frac{1}{4}(A\sigma(B) + B\sigma(A)) = (A|B).$$

Donc $(\cdot|\cdot)$ est symétrique.

— τ et σ sont linéaires. On en déduit que $(\cdot|\cdot)$ est linéaire par rapport à sa première variable et donc par symétrie, $(\cdot|\cdot)$ est bilinéaire.

— Soit $A \in H$. D'après les questions 17)b) et 15)a), $(A|A) = \det(A) \in \mathbb{R}^+$. Donc $(\cdot|\cdot)$ est positive.

— Soit $A \in H$ telle que $(A|A) = 0$. Alors, $\det(A) = 0$ et A est un élément non inversible de H . D'après la question 15)b), on a nécessairement $A = 0$. Donc $(\cdot|\cdot)$ est définie.

En résumé, $(\cdot|\cdot)$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel H et donc

$$\boxed{(\cdot|\cdot) \text{ est un produit scalaire sur } H.}$$

18) Déjà, $\det(I) = \det(J) = \det(K) = \det(L) = 1$ et donc

$$\|I\| = \|J\| = \|K\| = \|L\| = 1.$$

Ensuite, on note que $\sigma(J) = -J$, $\sigma(K) = -K$ et $\sigma(L) = -L$ puis que $JK = -KJ = L$, $KL = -LK = J$ et $LJ = -JL = K$. Puisque τ est linéaire, on a

$$(I|J) = \frac{1}{4}\tau(-J + I) = \frac{1}{4}\tau(0) = 0 \text{ et de même } (I|K) = (I|L) = 0$$

et aussi

$$(J|K) = \frac{1}{4}\tau(-JK - KJ) = \frac{1}{4}\tau(0) = 0 \text{ et de même } (J|L) = (K|L) = 0.$$

Finalement, puisque (I, J, K, L) est déjà une base de H ,

$$\boxed{(I, J, K, L) \text{ est une base orthonormée de } (H, (\cdot|\cdot)).}$$

19) a) τ est une forme linéaire non nulle (car par exemple $\tau(I) = 2 \neq 0$) sur H et F est le noyau de cette forme linéaire non nulle. Donc

F est un hyperplan de H .

On en déduit que $\dim(F) = 4 - 1 = 3$. On note alors que, puisque $\tau(J) = \tau(K) = \tau(L) = 0$, J, K et L sont trois éléments de F . Ainsi, la famille (J, K, L) est une famille libre de F vérifiant de plus $\text{card}(J, K, L) = 3 = \dim(F) < +\infty$. Donc

une base (orthonormée) de F est (J, K, L) .

b) Puisque F est un hyperplan de H , $F^\perp$ est une droite vectorielle. Puisque (I, J, K, L) est une base orthonormée de H , I est une matrice non nulle orthogonale à J, K, L et donc à F . On en déduit que la famille (I) est une base de $F^\perp$ et en particulier que

$$\overline{F}^\perp = \{\alpha I, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

c) Soit $A \in H$. Posons $A = \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$ où α, β, γ et δ sont quatre réels. Alors

$$\frac{1}{2}(A - \sigma(A)) = \frac{1}{2}((\alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L) - (\alpha I - \beta J - \gamma K - \delta L)) = \beta J + \gamma K + \delta L.$$

Donc $\frac{1}{2}(A - \sigma(A)) \in F$ et d'autre part $A - \frac{1}{2}(A - \sigma(A)) = \alpha I \in F^\perp$. On a montré que

$$\forall A \in H, \pi(A) = \frac{1}{2}(A - \sigma(A)).$$

PROBLÈME 2 : Exemples de matrices semblables à leur inverse

Partie A

1. Montrons que la relation $\sim$ est réflexive. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Puisque $I_3 \in GL_3(\mathbb{R})$ et que $A = I_3^{-1}AI_3$, on a $A \sim A$. On a montré que

$$(\forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), A \sim A)$$

et donc la relation $\sim$ est réflexive.

• Montrons que la relation $\sim$ est symétrique. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$. Si $A \sim B$, il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On en déduit que $B = (P^{-1})^{-1}AP^{-1}$. Comme $P^{-1} \in GL_3(\mathbb{R})$, on a donc $B \sim A$. On a montré que

$$(\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2, (A \sim B \Rightarrow B \sim A))$$

et donc la relation $\sim$ est symétrique.

• Montrons que la relation $\sim$ est transitive. Soit $(A, B, C) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^3$. Si $A \sim B$ et $B \sim C$, il existe $(P, Q) \in (GL_3(\mathbb{R}))^2$ tel que $B = P^{-1}AP$ et $C = Q^{-1}BQ$. On en déduit que $C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$. Comme $PQ \in GL_3(\mathbb{R})$, on a donc $A \sim C$. On a montré que

$$(\forall (A, B, C) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^3, (A \sim B \text{ et } B \sim C \Rightarrow A \sim C))$$

et donc la relation $\sim$ est transitive.

Finalement, la relation $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive.

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$. Si A et B sont semblables, il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On en déduit que

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$$

car $\det(P^{-1}) = (\det P)^{-1}$. Par contraposition, on a montré que

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2, (\det A \neq \det B \Rightarrow A \not\sim B).$$

3. a. Soit $y \in \text{Im}(w)$. Il existe $x \in \text{Ker}(u^{i+j})$ tel que $y = w(x) = u^i(x)$. Mais alors, $u^j(y) = u^j(u^i(x)) = u^{i+j}(x) = 0$ et $y \in \text{Ker}(u^j)$. On a montré que $\forall y \in E, (y \in \text{Im}(w) \Rightarrow y \in \text{Ker}(u^j))$, et donc que

$$\text{Im}(w) \subset \text{Ker}(u^j).$$

b. D'après le théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker}(u^{i+j})) = \dim(\text{Ker}(w)) + \dim(\text{Im}(w)).$$

Mais d'après a), $\text{Im}(w) \subset \text{Ker}(u^j)$ et d'autre part, $\text{Ker}(w) = \text{Ker}(u^i) \cap \text{Ker}(u^{i+j}) \subset \text{Ker}(u^i)$. Donc, en passant aux dimensions

$$\dim(\text{Ker}(u^{i+j})) \leq \dim(\text{Ker}(u^i)) + \dim(\text{Ker}(u^j)).$$

4. a. L'égalité $u^3 = 0$ fournit $\dim(\text{Ker}(u^3)) = 3$ et l'égalité $\text{rang } u = 2$ fournit, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(u)) = 3 - 2 = 1$. D'après 3.b),

$$\dim(\text{Ker}(u^2)) \leq \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Ker}(u)) = 1 + 1 = 2.$$

D'autre part,

$$3 = \dim(\text{Ker}(u^3)) \leq \dim(\text{Ker}(u^2)) + \dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\text{Ker}(u^2)) + 1$$

et donc $\dim(\text{Ker}(u^2)) \geq 2$. Finalement,

$$\dim(\text{Ker}(u^2)) = 2.$$

b. D'après a), $\dim(\text{Ker}(u^2)) = 2$. En particulier, $\text{Ker}(u^2) \neq E$ et donc $u^2 \neq 0$. Il existe donc un vecteur a tel que $u^2(a) \neq 0$. Montrons que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que $\alpha u^2(a) + \beta u(a) + \gamma a = 0$. En prenant l'image des deux membres de cette égalité par u^2 , on obtient $\alpha u^4(a) + \beta u^3(a) + \gamma u^2(a) = u^2(0)$. Mais, puisque u^2 est un endomorphisme de E , on a $u^2(0) = 0$. D'autre part, $u^3 = 0$ et en particulier, $u^3(a) = 0$. Enfin, $u^4(a) = u(u^3(a)) = u(0) = 0$. Il reste donc $\gamma u^2(a) = 0$, et, puisque le vecteur $u^2(a)$ n'est pas nul, $\gamma = 0$. Par suite, $\alpha u^2(a) + \beta u(a) = 0$, et en prenant l'image des deux membres par u , on obtient, pour les mêmes raisons que précédemment, $\alpha = 0$. Enfin, il reste $\beta u(a) = 0$ et donc $\beta = 0$. Finalement,

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, ((\alpha u^2(a) + \beta u(a) + \gamma a = 0) \Rightarrow (\alpha = \beta = \gamma = 0)).$$

Par suite, la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est libre. De plus, $\text{card}(u^2(a), u(a), a) = 3 = \dim(E) < +\infty$, et donc

La famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E .

c. On a immédiatement

$$\text{Mat}_{(u^2(a), u(a), a)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mais alors, $u^2 = (E_{1,2} + E_{2,3})^2 = E_{1,2}E_{1,2} + E_{1,2}E_{2,3} + E_{2,3}E_{1,2} + E_{2,3}E_{2,3} = E_{1,3}$ et donc,

$$\text{Mat}_{(u^2(a), u(a), a)}(u^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. a. Puisque $\text{rang } u = 1$, u n'est pas nul et il existe un vecteur b tel que $u(b) \neq 0$.

b. Puisque $\text{rang } u = 1$, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(u)) = 2$ et $\text{Ker}(u)$ est un plan vectoriel. Puisque $u^2 = 0$, on a $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ ($u^2 = 0 \Rightarrow \forall x \in E, u(u(x)) = 0 \Rightarrow \forall x \in E, u(x) \in \text{Ker}(u)$).

Ainsi, $\text{Im}(u)$ est une droite vectorielle contenue dans $\text{Ker}(u)$. Le vecteur $u(b)$ est un vecteur non nul de $\text{Im}(u)$ et donc la famille $(u(b))$ est une base de $\text{Im}(u)$ ou encore une famille libre du plan $\text{Ker}(u)$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe un vecteur c de $\text{Ker}(u)$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit une base de $\text{Ker}(u)$ et en particulier une famille libre de E .

Il existe un vecteur c de $\text{Ker}(u)$ tel que la famille $(u(b), c)$ est une famille libre de E .

Montrons alors que la famille $(u(b), b, c)$ est une base de E . Il suffit pour cela de vérifier que cette famille est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$\alpha u(b) + \beta b + \gamma c = 0 \Rightarrow u(\alpha u(b) + \beta b + \gamma c) = 0 \Rightarrow \beta u(b) = 0,$$

(car $u^2 = 0$ et $c \in \text{Ker}(u)$), et donc $\beta = 0$ puisque $u(b) \neq 0$.

Il reste $\alpha u(b) + \gamma c = 0$ et donc $\alpha = \gamma = 0$ car la famille $(u(b), c)$ est libre. Finalement, la famille $(u(b), b, c)$ est libre et donc

La famille $(u(b), b, c)$ est une base de E .

c. Immédiatement,

$$\text{Mat}_{(u(b), b, c)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

puis, comme $u^2 - u = -u$,

$$\text{Mat}_{(u(b), b, c)}(u^2 - u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie B

6. A et T sont semblables. Par suite, d'après A.2, $\det A = \det T = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. La matrice A est donc bien inversible.

7. On a $N = \alpha E_{1,2} + \beta E_{1,3} + \gamma E_{2,3}$. Par suite, $N^2 = (\alpha E_{1,2} + \beta E_{1,3} + \gamma E_{2,3})^2 = \alpha \gamma E_{1,3}$ et $N^3 = N \cdot N^2 = (\alpha E_{1,2} + \beta E_{1,3} + \gamma E_{2,3}) \alpha \gamma E_{1,3} = 0$. En résumé,

$$N^3 = 0.$$

Par passage à l'inverse, on obtient alors $P^{-1}A^{-1}P = (P^{-1}AP)^{-1} = (I_3 + N)^{-1}$. Maintenant, d'après B7, $N^3 = 0$ et donc, $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 + N^3 = I_3 = (I_3 - N + N^2)(I_3 + N)$. On en déduit que l'inverse de $I_3 + N$ est $I_3 - N + N^2$. Donc,

$$P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2.$$

8. Si $N = 0$, alors $A = I_3$ et donc $A = A^{-1}$. Dans ce cas particulier, les matrices A et A^{-1} sont semblables car égales.

9. a. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice N dans la base canonique. Par hypothèse, $u^3 = 0$ et $\text{rang}(u) = 2$. D'après

A.4.c), il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ou encore

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que M est semblable à la matrice $U^2 - U$ car si $N = P^{-1}UP$,

$$M = N^2 - N = (P^{-1}UP)^2 - P^{-1}UP = P^{-1}U^2P - P^{-1}UP = P^{-1}(U^2 - U)P.$$

b. La matrice M est semblable à la matrice V et a donc même rang (puisque P et P^{-1} sont inversibles, le rang de $P^{-1}MP$ est le rang de M). Les deux dernières colonnes de V ne sont clairement pas colinéaires, ce qui montre que V est de rang au moins 2, et la première colonne de V est nulle ce qui montre que V est de rang au plus 2. Finalement, V est de rang 2 et donc,

$$\text{rang } M = 2.$$

c. M est donc également une matrice telle que $M^3 = 0$ et $\text{rang } M = 2$. Par suite, d'après B.9.a), M et N sont semblables toutes deux à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Par transitivité de $\sim$ (question A.1.), on a montré que

M et N sont semblables.

d. On a déjà $P^{-1}AP = I + N$ et $P^{-1}A^{-1}P = I + M$. Mais d'après la question précédente, il existe une matrice $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $M = Q^{-1}NQ$. Par suite

$$A^{-1} = P(I + M)P^{-1} = P(I + Q^{-1}NQ)P^{-1} = PQ^{-1}(I + N)QP^{-1} = PQ^{-1}P^{-1}APQP^{-1} = (PQP^{-1})^{-1}A(PQP^{-1}).$$

Ceci montre que

Les matrices A et A^{-1} sont semblables.

10. L'égalité $\text{rang } N = 1$ impose au mineur en haut à droite d'être nul ou encore $\alpha\gamma = 0$. D'après B.6., on a alors $N^2 = 0$. Par suite, par un raisonnement analogue à celui de la question précédente, la question A.5. montre que N est semblable

à $U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et M est semblable à $V' = -U'$. Ainsi, M et N sont toutes deux de carré nul et de rang 1 et donc

semblables, toujours d'après A.5.. Comme à la question précédente, on en déduit que A et A^{-1} sont semblables.

11. Exemple : a. Soit $x \in E$. Posons $x = \alpha a + \beta b + \gamma c$ où α, β et γ sont trois réels.

$$x \in \text{Ker}(u - \text{id}_E) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \beta + \gamma = 0.$$

Donc,

$$\text{Ker}(u - \text{id}_E) = \{\alpha a + \beta b - \beta c, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} = \{\alpha a + \beta(b - c), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(e_1, e_2) \text{ où } e_1 = a \text{ et } e_2 = b - c.$$

Les vecteurs e_1 et e_2 n'étant pas colinéaires, (e_1, e_2) est une base de $\text{Ker}(u - \text{Id})$ qui est en particulier de dimension 2. (Une autre manière d'obtenir cette dimension était la suivante : $\dim(\text{Ker}(u - \text{Id})) = 3 - \text{rang}(u - \text{Id}) = 3 - \text{rang}(A - I) = 3 - 1 = 2$.)

b. La matrice de la famille (e_1, e_2, c) dans la base (a, b, c) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Son déterminant vaut 1 et n'est donc pas nul. Par suite,

La famille (e_1, e_2, c) est une base de E .

On a déjà $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = e_2$. D'autre part, $u(c) = -b + 2c = -(b - c) + c = -e_2 + c$ (si on ne découvre pas cette relation, les formules de changement de base fournissent la matrice de u imparablement). La matrice de u dans la base

(e_1, e_2, c) s'écrit donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est, d'après b), semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + N$ où $N = -E_{2,3}$ est de carré nul et de rang 1.

D'après B.10., les matrices A et A^{-1} sont semblables.

12. La matrice $-I_3$ est inversible, égale à son inverse $((-I_3) \cdot (-I_3) = I_3)$ et en particulier semblable à son inverse. Maintenant, $\det(-I_3) = (-1)^3 = -1 \neq \det T$. $-I_3$ n'est donc pas semblable (d'après A.2.) à une matrice du type T .