



DEVOIR SURVEILLÉ NO 1

Donné le : 05-10-2026

Thème : Structures algébriques et algèbre linéaire

Durée : 4 heures

Année scolaire : 2026-2027

Classes : MP1, MP2, MP3

- L'épreuve comporte deux problèmes indépendants.
- Dans le premier problème on étudie l'algèbre des quaternions.
- Dans le deuxième problème on étudie la question quand est ce qu'une matrice carrée et son inverse sont semblables

PROBLÈME 1

$\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

$\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$.

On pose :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

I. Étude d'une symétrie

On notera bien, que dans toute cette partie, $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est muni de sa structure de $\mathbb{C}$ -algèbre.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ on pose : $\sigma(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et $\tau(A) = a + d$.

- (a) Montrer que σ est une symétrie du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
(b) Établir que (I, J, K, L) est une base du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ puis donner la matrice de l'endomorphisme σ dans cette base.
- On considère A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
(a) Montrer que : $\sigma(AB) = \sigma(B)\sigma(A)$.
(b) Justifier l'égalité : $A\sigma(A) = \det(A)I$.
(c) Montrer que si A est inversible alors $\sigma(A)$ l'est aussi. Exprimer les matrices $\sigma(A)^{-1}$ et $\sigma(A^{-1})$ en fonction de A .
- (a) Vérifier que τ est une forme linéaire sur le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
(b) Soit A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Exprimer $\sigma(A)$ à l'aide des matrices A , I et du complexe $\tau(A)$.

II. Une $\mathbb{R}$ -algèbre célèbre : l'algèbre des quaternions

On notera bien, que dans toute cette partie, $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est muni de sa structure de $\mathbb{R}$ -algèbre.

À tout couple (z_1, z_2) de nombres complexes on associe la matrice

$$M(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ \overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix}.$$

On désigne par $\mathbb{H}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme $M(z_1, z_2)$, le couple (z_1, z_2) décrivant $\mathbb{C}^2$.

- (a) Montrer que toute matrice de $\mathbb{H}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des réels.

- (b) En déduire que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Préciser une base et la dimension du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{H}$.
 - (c) Montrer que $\mathbb{H}$ est stable pour le produit matriciel.
 - (d) Montrer que $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre. La $\mathbb{R}$ -algèbre $\mathbb{H}$ est-elle commutative ?
2. (a) Vérifier que : $\forall A \in \mathbb{H}, \sigma(A) \in \mathbb{H}$ et $\det(A) \in \mathbb{R}^+$.
- (b) Montrer qu'une matrice non nulle de $\mathbb{H}$ est inversible et que son inverse est dans $\mathbb{H}$.
- (c) Vérifier que $(\mathbb{H} \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe.
3. Montrer que si deux entiers naturels peuvent tous deux s'écrire comme une somme de quatre carrés d'entiers naturels alors il en est de même de leur produit.
- On pourra exprimer $\det(M(z_1, z_2))$ comme une somme de quatre carrés de réels.

III. Un produit scalaire et une projection orthogonale

Pour A et B dans $\mathbb{H}$ on pose :

$$(A | B) = \frac{1}{4} \tau (A\sigma(B) + B\sigma(A)).$$

1. On considère A et B dans $\mathbb{H}$.
 - (a) Prouver que $(A | B) \in \mathbb{R}$. On pourra utiliser la question 5)a).
 - (b) Montrer que $(A | A) = \det(A)$.
2. Montrer que pour toutes matrices $A_1, A_2, A, B \in \mathbb{H}$ et tout scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :
 - (a) $\langle A | B \rangle = \langle B | A \rangle$
 - (b) $\langle A_1 + \alpha A_2 | B \rangle = \langle A_1 | B \rangle + \alpha \langle A_2 | B \rangle$
 - (c) $\langle A | A \rangle \geq 0$, avec égalité si et seulement si $A = 0$.

On exprime ça en disant que $\langle | \rangle$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{H}$

3. Vérifier que $\forall X, Y \in \{I, J, K, L\}, \langle X, Y \rangle = \delta_{X,Y}$ où $\delta_{X,Y} = \begin{cases} 1 & \text{si } X = Y \\ 0 & \text{si } X \neq Y \end{cases}$. On dit que (I, J, K, L) est une base orthonormale de $\mathbb{H}$.
4. On pose $F = \{A \in \mathbb{H} \mid \tau(A) = 0\}$.
 - (a) Montrer que F est un hyperplan du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{H}$. En donner une base.
 - (b) Montrer que si on note : $G = \{\alpha I, \alpha \in \mathbb{R}\}$, alors $F \oplus G = \mathbb{H}$ et que :

$$\forall (X, Y) \in F \times G, \quad \langle X | Y \rangle = 0$$

- (c) On désigne par π la projection sur F parallèlement à G . Montrer que :

$$\forall A \in \mathbb{H}, \pi(A) = \frac{1}{2}(A - \sigma(A)).$$

PROBLÈME 2

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3.

Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \dots \circ u$ (n fois).

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.

Pour deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on dira que la matrice A est semblable à la matrice B s'il existe une matrice P de $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$.

On rappelle que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E , si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, si u est un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$ et de matrice A' dans la base $\mathcal{B}'$ alors $A' = P^{-1}AP$ (en particulier, la matrice A' est semblable à la matrice A).

Partie A

1. On notera $A \sim B$ pour dire que la matrice A est semblable à la matrice B . Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pourra désormais dire que les matrices A et B sont semblables.
2. Démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de déterminants différents ne sont pas semblables.
3. Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels.
On considère l'application w de $\text{Ker } u^{i+j}$ vers E définie par : $w(x) = u^i(x)$.
 - (a) Montrer que $\text{Im } w \subset \text{Ker } u^j$.
 - (b) En déduire que $\dim(\text{Ker } u^{i+j}) \leq \dim(\text{Ker } u^i) + \dim(\text{Ker } u^j)$.
4. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\text{rg } u = 2$.
 - (a) Montrer que $\dim(\text{Ker } u^2) = 2$. (On pourra utiliser deux fois la question 3b.)
 - (b) Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E .
 - (c) Écrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.
5. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\text{rg } u = 1$.
 - (a) Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.
 - (b) Justifier l'existence d'un vecteur c de $\text{Ker } u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E .
 - (c) Écrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie B

Soit désormais une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1} .

On pose alors $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et soit une matrice P de $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$P^{-1}AP = T = I_3 + N.$$

1. Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.
2. Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.
3. On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
4. On suppose dans cette question que $\text{rg}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.
 - (a) Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et en déduire, en utilisant la question 4., une matrice semblable à la matrice M .
 - (b) Calculer M^2 et déterminer $\text{rg}(M)$.
 - (c) Montrer que les matrices M et N sont semblables.
 - (d) Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

5. On suppose dans cette question que $\text{rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$. Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
6. Exemple : soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note (a, b, c) une base de E et u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.

- Montrer que $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2) .
 - Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E , et écrire la matrice de u dans cette base.
 - Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
7. Réciproquement, toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

FIN DU SUJET