



DEVOIR LIBRE NUMÉRO 2

Donné le : 03-10-2026

A rendre le : 06-10-2026

Durée : 05 jours

Année scolaire :

2026-2027

Classe : MP*

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre sur $\mathbb{C}$ des matrices carrées $n \times n$ à coefficients complexes. On rappelle que deux matrices A et B sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$ et que l'on définit ainsi une relation d'équivalence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Enfin pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on identifie la matrice A et l'endomorphisme $X \mapsto AX$ de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ rapporté à sa base canonique (les vecteurs de $\mathbb{C}^n$ étant notés en colonne).

PREMIÈRE PARTIE

On adopte les notations suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$
$$\Delta_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu} \\ \mu & 0 \end{pmatrix}, \quad D_\mu = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{C}^*, \quad \Omega = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid A^2 = I\}$$

1. Donner le nombre des classes d'équivalence de matrices semblables contenues dans Ω . Préciser un représentant pour chaque classe.
2. Quelle classe d'équivalence particulière contenue dans Ω peut être caractérisée, parmi toutes les classes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, par la donnée du déterminant et de la trace ? Donner toutes les matrices de cette classe.
3. On désigne par Σ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ semblables à leur inverse. Donner un représentant pour chaque classe de matrices semblables contenue dans Σ . Caractériser les matrices de Σ par leur trace et leur déterminant.
4. Trouver B et C dans la classe de S telles que $J_1 = BC$.
Donner tous les couples $(B, C) \in \Omega \times \Omega$ tels que $BC = J_1$.
On note Ω^2 l'ensemble des produits BC lorsque B et C parcourent Ω . Comparer Ω^2 et Σ (on pourra calculer le produit $\Delta_b \Delta_c$, $b, c \in \mathbb{C}^*$).

DEUXIÈME PARTIE

On désigne par A , B et C trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant

$$A = BC, \quad B^2 = C^2 = I,$$

où I est à partir de maintenant la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que A est inversible et que son inverse A^{-1} est semblable à A .
2. Montrer que si $V \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre pour A il en est de même de BV et CV .
3. Montrer que si 1 est valeur propre de A et si le sous-espace propre associé est de dimension 1 alors les trois matrices A , B et C ont une direction propre commune.

4° On suppose que

$$A = J_{n,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & 1 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $A = (a_{ij})$ avec $a_{ii} = a_{j,j+1} = 1$ pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, n-1$, tous les autres coefficients de A étant nuls.

- Montrer que B et C ont une seule direction propre commune que l'on précisera.
- Montrer que B et C sont semblables. Préciser suivant la parité de n la dimension des sous-espaces propres de B et C en indiquant dans quel sous-espace est la direction propre commune.
- Donner un couple (B, C) pour $n = 3, 4, 5$.
- Montrer l'existence d'un tel couple pour tout n .

TROISIÈME PARTIE

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible semblable à son inverse.

- Montrer que si A admet une et une seule valeur propre et si le sous-espace propre associé est de dimension 1 alors il existe B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A = BC$, $B^2 = C^2 = I$.
- On suppose que A admet deux valeurs propres distinctes λ et μ et deux seulement, que λ n'est égale ni à 1 ni à -1 et que le sous-espace propre associé à λ est de dimension 1.
 - Exprimer μ en fonction de λ .
 - Comparer les dimensions des sous-espaces caractéristiques W_λ et W_μ associés respectivement à λ et μ . Qu'en déduit-on sur la parité de n ?
 - En considérant les restrictions aux sous-espaces caractéristiques de l'endomorphisme $X \mapsto AX$ de $\mathbb{C}^n$ établir que A est semblable à une matrice qui s'exprime simplement en fonction de λ et $J_{k,1}$ pour un entier k à préciser en fonction de n .
 - En s'inspirant du calcul proposé dans le 4° de la première partie montrer qu'il existe B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A = BC$, $B^2 = C^2 = I$.

FIN