

PROPOSITION DE CORRIGÉ POUR LE DL 1

Partie I

1. C'est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

2. $(E_{ij})_{k\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$

3. On a

$$\begin{aligned}(E_{ij}E_{k\ell})_{pq} &= \sum_{s=1}^n (E_{ij})_{ps}(E_{k\ell})_{sq} = \sum_{s=1}^n \delta_{ip}\delta_{js}\delta_{ks}\delta_{\ell q} = \delta_{kj}\delta_{ip}\delta_{\ell q} \\ &= \delta_{jk}(E_{i\ell})_{pq} = (\delta_{jk}(E_{i\ell}))_{pq}\end{aligned}$$

Ce qui justifie : $E_{ij} \times E_{k\ell} = \delta_{jk}E_{i\ell}$.

En particulier si $i \neq j$, on a $E_{ij}^2 = 0$ et $E_{ii}^2 = E_{ii}$

4a.

$$E_{23} \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{L'opération associée : } \begin{cases} L_1 \leftarrow 0 \\ L_2 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow 0 \end{cases}$$

b. De même :

$$A \times E_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{22} \\ 0 & 0 & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\text{L'opération associée : } \begin{cases} C_1 \leftarrow 0 \\ C_2 \leftarrow 0 \\ C_3 \leftarrow C_2 \end{cases}$$

c. On a $E_{23} \times A = A \times E_{23} \Leftrightarrow a_{31} = a_{32} = a_{12} = a_{32} = 0$ et $a_{33} = a_{22}$

5a. $E_{ij} \times A$ correspond à $\begin{cases} L_k \leftarrow 0 & \text{si } k \neq i \\ L_i \leftarrow L_j \end{cases}$

$A \times E_{ij}$ correspond à $\begin{cases} C_k \leftarrow 0 & \text{si } k \neq j \\ C_j \leftarrow C_i \end{cases}$

b. $T_{ij}(\alpha) \times A$ correspond à l'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$
 $A \times T_{ij}(\alpha)$ correspond à l'opération $C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i$

c. $(A \times E_{ij})_{k\ell} = \sum_{s=1}^n a_{ks}(E_{ij})_{s\ell} = \sum_{s=1}^n a_{ks}\delta_{is}\delta_{j\ell} = a_{ki}\delta_{j\ell}$

$$(E_{ij} \times A)_{k\ell} = \sum_{s=1}^n (E_{ij})_{ks}a_{s\ell} = \sum_{s=1}^n \delta_{ik}\delta_{js}a_{s\ell} = \delta_{ik}a_{j\ell}$$

Il en découle que :

$$\forall (i, j, k, \ell) \in [1, n]^4, \quad a_{ki}\delta_{j\ell} = \delta_{ik}a_{j\ell}$$

d. Si $k = i$ et $j = \ell$, on obtient

$$\forall (i, j) \in [0, 1]^2, \quad a_{ii} = a_{jj}$$

Si $k \neq i$ et $j = \ell$, on obtient $\forall (k, i) \in [1, n]^2; \quad k \neq i \Rightarrow a_{ki} = 0$.

Il en découle que les termes diagonaux de A sont égaux et ses termes non diagonaux sont nuls, ce qui veut dire que A est une matrice scalaire.

6. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $i, j, k, h \in [1, n]$ tel que $i \neq j$ et $h \neq k$.

a. $\det(T_{ij}(\lambda)) = 1$ car c'est une matrice triangulaire dont les termes diagonaux valent 1.

b. $T_{ij}(\lambda) \times T_{hk}(\mu) = (I_n + \lambda E_{ij}) \times (I_n + \mu E_{hk}) = I + \lambda E_{ij} + \mu E_{hk} + \lambda \mu \delta_{jh} E_{ik}$.

En particulier $T_{ij}(\lambda) \times T_{ij}(\lambda') = I_n + (\lambda + \lambda') E_{ij} = I_n$ si $\lambda' = -\lambda$; donc $(T_{ij}(\lambda))^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$.

7. (i) Si $a_{11} = 1$, on effectue les opérations

$$C_j \leftarrow C_j - a_{1j} C_1$$

pour $j \in [2, n]$ et

$$L_i \leftarrow L_i - a_{i1} L_1$$

pour $i \in [2, n]$. On obtient :

$$T_{21}(-a_{21}) \times \cdots \times T_{n1}(-a_{n1}) \times A \times T_{12}(-a_{12}) \times \cdots \times T_{1n}(-a_{1n}) = A'$$

où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

(ii) Si $a_{11} \neq 1$ et $\exists i > 1$, $a_{i1} \neq 0$ ou $a_{1i} \neq 0$, par exemple $a_{i1} \neq 0$, on effectue l'opération

$$L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1 - a_{11}}{a_{i1}} L_i$$

ce qui nous ramène au cas (1) précédent.

(iii) Si $a_{11} \neq 1$ et $\forall i > 1$, $a_{i1} = a_{1i} = 0$, alors, compte tenu du fait que la première ligne ou la première colonne de la matrice A est non nulle, on a forcément $a_{11} \neq 0$. On effectue alors l'opération

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

et on se ramène au cas (ii) ci-dessus.

Ceci démontre que dans tous les cas on trouve qu'il existe des matrices

$$P = \prod_{\substack{(i,j) \in U \\ \alpha \in V}} T_{ij}(\alpha) \quad \text{et} \quad Q = \prod_{\substack{(i,j) \in U' \\ \alpha \in V'}} T_{ij}(\alpha)$$

où $U, U' \subset [0, 1]^2 \setminus \{(i, i) / i \in [1, n]\}$ et $V, V' \subset \mathbb{K}$, tel que $PAQ = B$ où B est la matrice ci-dessus; on voit bien que ses coefficients réalisent $b_{11} = 1$ et $b_{1i} = b_{i1} = 0$ pour tout $i \in [2, n]$.

8. On va raisonner par récurrence comme suggéré par l'indication. Pour $n = 2$, d'après la question précédente il existe P, Q produits de $T_{ij}(\alpha)$ tel que $A = PBQ$ où $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $b \in \mathbb{K}$. Si $\text{rg}(A) = 1$ alors B n'est pas inversible donc $\det(B) = b = 0$ donc $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si $\text{rg}(A) = 2$ alors comme $\det(T_{ij}(\alpha)) = 1$ pour tout $i, j \in [1, n], i \neq j$ et tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on a $\det(B) = b = \det(A)$.

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ tel que la propriété désirée est vraie pour $n - 1$.

Si la première ligne et la première colonne de A sont nulles, comme $A \neq 0$, il existe $i, j \in [2, n]$ tel que $a_{ij} \neq 0$. La matrice $A_1 = AT_{j1}(1)$ est obtenue à partir de A par l'opération

$$C_1 \leftarrow C_1 + C_j$$

La première colonne de A_1 est non nulle, donc on se ramène toujours aux conditions d'application de la question précédente : il existe P_1, Q_1 matrices produits de $T_{\ell k}(\alpha)$ tel que

$$B = P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{avec } B' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}).$$

On a $\text{rg}(B) = \text{rg}(A) = r = 1 + \text{rg}(B')$, donc $\text{rg}(B') = r - 1$ et $\det(A) = \det(B)$ car $\det(P_1) = \det(Q_1) = 1$ puisque ce sont des produits de matrices de déterminant 1, à savoir des $T_{ij}(\alpha)$. Comme $\det(B) = 1 \cdot \det(B')$, on a $\det(B') = \det(A)$.

Si $r = 1$ alors $B' = 0$ et on a la forme demandée.

Si $r \geq 2$, en appliquant l'hypothèse de récurrence à B' , $\exists P', Q'$ matrices d'ordre $n-1$ produit de matrices de la forme $T_{ij}(\alpha)$ tel que $P'B'C' = C'$ et $C' = \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si $r < n$ et $C' = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ si $r = n$.

Soit $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}$ et $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q' \end{pmatrix}$; alors $P_2 B Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}$ est de la forme recherchée.

Par ailleurs la matrice P' est un produit de matrices de la forme $T_{ij}(\alpha)$ de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, donc P_2 est un produit de matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_{ij}(\alpha) \end{pmatrix}$ qui est de la forme $T_{kl}(\alpha)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; raisonnement valable aussi pour Q_2 .

Comme $P_2 B Q_2 = P_2 (P_1 A Q_1) Q_2 = (P_2 P_1) A (Q_1 Q_2)$ on a le résultat recherché, à savoir, il existe P et Q des matrices chacune étant un produit de matrices de la forme $T_{ij}(\alpha)$ tel que $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si $r < n$ et $PAQ = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ si $r = n$ et $d = \det(A)$.

9. Ce groupe est noté $\mathbf{SL}_n(\mathbb{K})$. Soit $A \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{K})$ alors, d'après la question ci-dessus, il existe P, Q matrices de la forme

$$P = \prod_{\substack{(i,j) \in U \\ \alpha \in V}} T_{ij}(\alpha) \quad \text{et} \quad Q = \prod_{\substack{(i,j) \in U' \\ \alpha \in V'}} T_{ij}(\alpha)$$

avec $U, U' \subset [1, n] \setminus \{(i, i) / i \in [1, n]\}$ et $V, V' \subset \mathbb{K}$, tel que $PAQ = I_n$ donc

$$A = P^{-1} Q^{-1} = \left(\prod_{\substack{(i,j) \in U \\ \alpha \in V}} T_{ij}(-\alpha) \right) \times \left(\prod_{\substack{(i,j) \in U' \\ \alpha \in V'}} T_{ij}(-\alpha) \right) = \prod_{\substack{(i,j) \in U'' \\ \alpha \in V''}} T_{ij}(\alpha).$$

où $U'' \subset [1, n]^2 \setminus \{(i, i) / i \in [1, n]\}$ et $V'' \subset \mathbb{K}$.

10. On suppose dans cette question uniquement que $n \geq 3$. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$ telle que :

i) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad f(AB) = f(A)f(B)$.

ii) Pour toute matrice diagonale A on a $f(A)$ est égal au produit des coefficients de la diagonale de A .

- a. Notons tout d'abord que puisque $n \geq 3$ et $\alpha \neq \beta$, il existe $\gamma \in [1, n]$ tel que $\gamma \notin \{\alpha, \beta\}$.

Posons $M = T_{ij}(\lambda) T_{hk}(\mu) T_{ij}(\lambda)^{-1} T_{hk}(\mu)^{-1}$. Le calcul donne

$$M = I_n + \lambda \mu \delta_{jh} (1 + \lambda \mu \delta_{ki}) E_{ik} - \lambda \mu \delta_{ki} E_{hj} - \lambda^2 \mu \delta_{jh} \delta_{ki} E_{ij} + \lambda \mu^2 \delta_{jh} \delta_{ki} E_{hk}$$

Il en résulte que :

$$M = I_n + \lambda \mu \delta_{jh} E_{ik} + \delta_{ki} M'$$

avec : $M' = \lambda^2 \mu^2 \delta_{jh} E_{ik} - \lambda \mu E_{hj} - \lambda^2 \mu \delta_{jh} E_{ij} + \lambda \mu^2 \delta_{jh} E_{hk}$, ce qui permet de dire que si on choisit i, j, h, k de sorte que $j \neq h$, alors $M = I_n + \lambda \mu \delta_{jh} E_{ik}$, ce qui inspire le choix :

$$(*) \quad \begin{cases} i = \alpha \\ k = \beta \\ j = h = \gamma \\ \lambda = 1 \\ \mu = a \end{cases}$$

On remarque, en effet que ce choix $(*)$ donne la relation désirée, à savoir :

$$M = T_{\alpha\beta}(a) = T_{ij}(\lambda) T_{hk}(\mu) T_{ij}(\lambda)^{-1} T_{hk}(\mu)^{-1}$$

b. La question ci-dessus permet d'écrire $M = T_{ij}(\alpha) = P Q P^{-1} Q^{-1}$ avec

$$P = T_{s\ell}(\lambda) \quad \text{et} \quad Q = T_{hk}(\mu)$$

pour un certain $(s, \ell, h, k) \in [1, n]^4$ avec $s \neq \ell$ et $h \neq k$ et un certain $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors :

$$f(T_{ij}(\alpha)) = f(P Q P^{-1} Q^{-1}) = f(P) f(Q) f(P^{-1}) f(Q^{-1}) = 1$$

car, I_n étant une matrice diagonale à termes diagonaux valant 1, on a $1 = f(I_n) = f(P P^{-1}) = f(P) f(P^{-1}) = f(Q) f(Q^{-1})$

Ainsi :

$$(\star\star) \quad \forall (i, j) \in [1, n] \setminus \{(k, k) / 1 \leq k \leq n\}, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad f(T_{ij}(\alpha)) = 1$$

c. Si $A = 0$ alors $f(A) = 0$ car A diagonale (produit des coefficients diagonaux). Si A de rang r avec $r > 0$, on applique la question 7) ci-dessus : Si $r < n$ alors $f(C) = f(P) f(A) f(Q) = 0$ donc $f(A) = 0 = \det(A)$. Si $r = n$ alors $d = f(C) = f(P) f(A) f(Q) = f(A)$ et comme $d = \det(A)$ on a $f(A) = \det(A)$.

Partie II

1. Soit $\mathcal{E} = (e_i)$ une base de E . Pour tout $i \in [1, n]$ il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $f(e_i) = \lambda_i e_i$. Posons $e = \sum_{i=1}^n e_i$; alors

$$f(e) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \lambda e = \sum_{i=1}^n \lambda e_i$$

donc $\lambda = \lambda_i, \forall i \in [1, n]$.

2. C'est vrai aussi : En effet, soit $a \in E$ tel que $a \neq 0$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $f(a) = \alpha a$; soit $x \in E$, si la famille (x, a) est liée posons $x = \beta a$ alors $f(x) = \beta f(a) = \beta \alpha a = \alpha x$. Si (a, x) est libre posons $f(x) = \xi x$ et $f(x + a) = \gamma(x + a)$ donc $\gamma x + \gamma a = \xi x + \alpha a$, par liberté on a $\xi = \gamma = \alpha$ donc

$$\forall x \in E \quad f(x) = \alpha x$$

et $f = \alpha \text{Id}_E$ est une homothétie.

3a. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$

b. On a $PA = \begin{pmatrix} 0 & L \\ QC & QB \end{pmatrix}$, par suite $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & LQ^{-1} \\ QC & QBQ^{-1} \end{pmatrix}$; il en découle que

$$B' = QBQ^{-1}; L' = LQ^{-1}; C' = QC$$

4. Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension 2 et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{tr}(u) = 0$.
- Si $u = \lambda \text{Id}_E$ alors $\text{tr}(u) = 2\lambda$; comme $\text{tr}(u) = 0$, on a $\lambda = 0$ donc $u = 0$.
 - Si u n'est pas une homothétie, d'après la question II.1), il existe un vecteur $e_1 \in E$ tel que la famille $(e_1, u(e_1))$ est libre; si on note $b = (e_1, e_2)$ et $e_2 = u(e_1)$, alors b est une base de E et $\text{mat}_b(u) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ avec $u(e_2) = \alpha e_1 + \gamma e_2$, et comme $\text{tr}(u) = 0$ on a $\gamma = 0$ donc, finalement :

$$\text{mat}_b(u) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

5a. On raisonne par récurrence sur la dimension n de E .

Pour $n = 2$, le résultat est vrai d'après la question II.4) ci-dessus.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$ et la propriété est vraie pour $n - 1$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{tr}(u) = 0$; deux cas sont possibles :

- Si u est une homothétie, $u = \lambda \text{Id}_E$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\text{tr}(u) = n\lambda = 0$, donc $\lambda = 0$ et $u = 0$.
- Sinon, d'après II.1), il existe un vecteur $e_1 \in E$ tel que la famille $(e_1, u(e_1))$ est libre. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à la famille (e_1, e_2) (théorème de la base incomplète); alors la matrice de u relativement à $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & B \end{pmatrix}$$

avec $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$; $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$.

On a $\text{tr}(B) = \text{tr}(A)$ donc $\text{tr}(B) = 0$; en appliquant l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme canoniquement associé à B , la matrice B est semblable à une matrice B' à diagonale nulle, donc il existe $Q \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ tel que $B' = QBQ^{-1}$ est à diagonale nulle. Si on pose :

$$L' = LQ^{-1} \quad \text{et} \quad C' = QC \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

la question II.3) montre que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & L' \\ C' & B' \end{pmatrix} = A'.$$

Puisque B' est à diagonale principale nulle, il en est de même pour A' .

Soit $\mathcal{C}$ la base de E tel que P est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$, alors :

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(u) = A' \quad \text{et} \quad A' \text{ est à diagonale principale nulle.}$$

- Toute matrice carrée de trace nulle est semblable à une matrice à diagonale principale nulle.
- 6a. Supposons que $\mathcal{S}_B$ est non vide, donc il existe une matrice carrée M tel que

$$[\Delta, M] = B;$$

pour tout $i \in [1, n]$, on a $b_{ii} = (\Delta M)_{ii} - (M\Delta)_{ii} = m_{ii}i - im_{ii} = 0$.

Réciproquement si $b_{ii} = 0$ pour tout $i \in [1, n]$, soit $X = (x_{ij})$ une matrice carrée; alors X est solution de $(\mathcal{D}_B)$ si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2 \quad \begin{cases} ix_{ij} - jx_{ij} = b_{ij} & \text{si } i \neq j \\ x_{ii}i - ix_{ii} = b_{ii} = 0 \end{cases}$$

si et seulement si pour tout $i, j \in [1, n]$ tel que $i \neq j$, $x_{ij} = \frac{b_{ij}}{i-j}$. Il en découle que l'équation $(\mathcal{D}_B)$ admet des solutions qui sont les matrices (x_{ij}) tel que x_{ii} est quelconque et $x_{ij} = \frac{b_{ij}}{i-j}$ pour tout $(i, j) \in [1, n]^2$ tel que $i \neq j$.

b. On a :

$$\begin{aligned}
 [PXP^{-1}, PYP^{-1}] &= PXP^{-1}PYP^{-1} - PYP^{-1}PXP^{-1} \\
 &= PXY P^{-1} - PYX P^{-1} \\
 &= P(XY - YX)P^{-1} \\
 &= P[X, Y]P^{-1}.
 \end{aligned}$$

c. Soit $\forall A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{K})$, alors A est semblable à une matrice B à diagonale principale nulle. Écrivons $A = PBP^{-1}$ avec $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$. D'après la question II.6.a), il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $[D, X] = B$; donc $A = P[D, X]P^{-1}$ et d'après la question II.6.b), on a $A = [PXP^{-1}, PYP^{-1}] = [U, V]$ où $U = PXP^{-1}$ et $V = PYP^{-1}$.

d. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $M \in \mathcal{H}'_n(\mathbb{K})$ alors il existe $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = XY - YX$, donc $\text{tr}(M) = \text{tr}(XY) - \text{tr}(YX) = 0$.

Réciproquement, on a démontré ci-dessus que si $M \in \mathcal{H}_n(\mathbb{K})$ alors $M \in \mathcal{H}'_n(\mathbb{K})$; donc $\mathcal{H}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{H}'_n(\mathbb{K})$.

Partie III

1. tr est une forme linéaire non nulle car $\text{tr}(E_{11}) = 1 \neq 0$, donc $\text{Im}(\text{tr}) = \mathbb{K}$. Par le théorème du rang, $\dim(\mathcal{H}) = n^2 - 1$, donc $\mathcal{H}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On a : $\mathcal{H} \cap (\mathbb{K}I_n) = \{0\}$ car si $M \in \mathcal{H} \cap (\mathbb{K}I_n)$, alors $M = \alpha I_n$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\text{tr}(M) = 0 = \alpha n$, donc $\alpha = 0$.

Par ailleurs $\dim(\mathbb{K}I_n) + \dim(\mathcal{H}) = n^2$, donc $\mathcal{H} \oplus \mathbb{K}I_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2a. Soit $i, j \in [1, n]$ tel que $i \neq j$. On a $E_{ij} = E_{ii}E_{ij} - E_{ij}E_{ii}$, donc $g(E_{ij}) = 0$.

b. Soit $i, j \in [1, n]$, alors $g(E_{ii}) = g(E_{ij}E_{ji}) = g(E_{ji}E_{ij}) = g(E_{jj})$

c. Si on pose $\lambda = g(E_{11})$ alors pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ on a, compte tenu de la linéarité de g et le fait que $g(E_{ij}) = 0$ pour $i \neq j$ et $g(E_{ii}) = g(E_{11}) = \lambda$ pour tout $i \in [1, n]$:

$$g(M) = \sum_{i=1}^n m_{ii}g(E_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^n m_{ii} = \lambda \text{tr}(M),$$

donc $g = \lambda \text{tr}$.

3. On a :

$$F_{ij}F_{hk} = (I_n + E_{ij})(I_n + E_{hk}) = I_n + E_{ij} + E_{hk} + \delta_{jh}E_{ik}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 F_{hk}^{-1}F_{ij}F_{hk} &= (I_n - E_{hk})(I_n + E_{ij} + E_{hk} + \delta_{jh}E_{ik}) \\
 &= I_n + E_{ij} + E_{hk} + \delta_{jh}E_{ik} - E_{hk} - \delta_{ki}E_{hj} - \delta_{jh}\delta_{ki}E_{hk} \\
 &= I_n + E_{ij} + \delta_{jh}E_{ik} - \delta_{ki}E_{hj} - \delta_{jh}\delta_{ki}E_{hk} \\
 &= F_{ij} + \delta_{jh}E_{ik} - \delta_{ki}E_{hj} - \delta_{jh}\delta_{ki}E_{hk}
 \end{aligned}$$

4. On a $\theta(F_{hk}^{-1}F_{ij}F_{hk}) = \theta(F_{ij}F_{hk}F_{hk}^{-1}) = \theta(F_{ij})$

Compte tenu de la relation ci dessus, et par linéarité de θ , on a :

$$\delta_{jh}\theta(E_{ik}) - \delta_{ki}\theta(E_{hj}) - \delta_{jh}\delta_{ki}\theta(E_{hk}) = 0$$

Si $i \neq k$ et $j = h$, on obtient : $\theta(E_{ik}) = 0$.

Ensuite comme $h \neq k$; si de plus $i = k$ et $h = j$, il vient : $\theta(E_{ii}) = \theta(E_{jj})$

Ainsi θ vérifie $\forall i, j \in [1, n], i \neq j \Rightarrow \begin{cases} \theta(E_{ii}) = \theta(E_{jj}) \\ \theta(E_{ij}) = 0 \end{cases}$, donc θ vérifie les mêmes conditions que g ci-dessus et par suite, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\theta = \lambda \text{tr}$

Partie IV

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$ —espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

1. Montrer que $\mathbf{SL}(E)$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}(E)$. Soit $\delta : \mathbf{GL}(E) \rightarrow \mathbb{K}^*; X \mapsto \delta(X) = \det(X)$; alors δ est un morphisme de $\mathbf{GL}(E)$ vers $\mathbb{K}^*$. On remarque que $\mathbf{SL}(E) = \ker(\delta)$, donc $\mathbf{SL}(E)$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}(E)$.

2. H un sous-espace vectoriel de E .

a. Supposons que H est un hyperplan et soit $a \in E$.

• Si $a \notin H$ alors $a \neq 0$ et $\mathbb{K}a$ est une droite vectorielle de E . On a $\dim(H) + \dim(\mathbb{K}a) = n$. Par ailleurs si $x \in H \cap \mathbb{K}a$ alors $x = \alpha a$, pour un certain $\alpha \in \mathbb{K}$, et comme $a \notin H$, on a $\alpha = 0$ donc $x = 0$. Ainsi

on a $\begin{cases} \mathbb{K}a \cap H = \{0\} \\ \dim(H) + \dim(\mathbb{K}a) = n \end{cases}$, donc $H \oplus \mathbb{K}a = E$.

• Réciproquement si $a \in H$ alors $H \oplus \mathbb{K}a = H$ donc $E \neq H \oplus \mathbb{K}a$. Par contraposée, si $E = H \oplus \mathbb{K}a$, alors $a \notin H$.

Conclusion :

$$\forall a \in E \quad H \oplus \mathbb{K}a = E \Leftrightarrow a \notin H.$$

b. Supposons qu'il existe une forme linéaire non nulle φ sur E tel que $H = \ker(\varphi)$, alors par le théorème du rang, on a $\dim(H) = n - \text{rg}(\varphi)$. Or $\text{rg}(\varphi) \in \{0, 1\}$ et comme $\varphi \neq 0$, forcément $\text{rg}(\varphi) = 1$ et par suite $\dim(H) = n - 1$ et H est un hyperplan.

Réciproquement, si H est un hyperplan, soit $a \in E \setminus H$; d'après la question ci-dessus, on a $H \oplus \mathbb{K}a = E$. Posons $e_1 = a$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E obtenue en complétant (e_1) (théorème de la base incomplète). Soit φ l'application linéaire de E vers $\mathbb{K}$ tel que $\varphi(e_1) = 1$ et $\varphi(e_j) = 0$ pour tout $j \in [2, n]$; alors φ est une forme linéaire sur E et $\ker(\varphi) = \text{Vect}\{e_2, \dots, e_n\} = H$.

c. Si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles tel que $\ker(\varphi) = \ker(\psi) = H$; écrivons $E = H \oplus \mathbb{K}a$ avec $a \in E \setminus H$. Soit $x \in E$ tel que $x = h + \lambda a$ avec $(h, \lambda) \in H \times \mathbb{K}$; alors $\varphi(x) = \lambda\varphi(a)$ et $\psi(x) = \lambda\psi(a) = \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}(\lambda\varphi(a)) = \alpha\varphi(x)$ avec $\alpha = \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}$. Finalement $\psi = \alpha\varphi$.

3. $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de F_1 ; soit F'_1 un supplémentaire de $F_1 \cap F_2$ dans F_1 ; donc $F_1 = F'_1 \oplus (F_1 \cap F_2)$. Soit $F = F_1 + F_2$. On a

$$F'_1 \oplus F_2 = F$$

car si $x \in F'_1 \cap F_2$; comme $F'_1 \subset F_1$, on a $x \in (F_1 \cap F_2)$ et $x \in F'_1$ donc $x = 0$. Par ailleurs, si $x \in F$ alors il existe $(v_1, v_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $x = v_1 + v_2$; ensuite il existe $w_2 \in (F_1 \cap F_2)$ et $w'_1 \in F'_1$ tel que $v_1 = w_2 + w'_1$ donc $x = w_2 + w'_1 + v_2 = x_2 + x'_1$ avec $x'_1 = w'_1 \in F'_1$ et $x_2 = w_2 + v_2 \in F_2$. Ainsi, on a :

$$\begin{cases} F'_1 \oplus (F_1 \cap F_2) = F_1 \\ F'_1 \oplus F_2 = F \end{cases}$$

Il en résulte que

$$\begin{cases} \dim(F'_1) + \dim(F_1 \cap F_2) = \dim(F_1) \\ \dim(F'_1) + \dim(F_2) = \dim(F) = \dim(F_1 + F_2) \end{cases}$$

En combinant ces relations, on obtient :

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)$$

4. Soit t une transvection non triviale de E .

a. • Comme H_1 et H_2 sont supposés différents alors il existe $a \in H_2$ tel que $a \notin H_1$ (en fait, puisque $\dim(H_1) = \dim(H_2)$, on a $H_1 \not\subset H_2$ et $H_2 \not\subset H_1$). D'après la question IV.2.a, on a : $H_1 \oplus \mathbb{K}a = E$, et comme $H_1 + \mathbb{K}a \subset H_1 + H_2$, on a $H_1 + H_2 = E$.

• Soit alors $x \in E$, tel que $x = x_1 + x_2$; $(x_1, x_2) \in H_1 \times H_2$, alors $t(x) = t(x_1) + t(x_2) = x_1 + x_2 = x$ donc $t = \text{Id}_E$, absurde. Il n découle que $H_1 = H_2$.

- b. Existence :** Soit $a \in E \setminus H$ donc $E = H \oplus \mathbb{K}a$. Soit $x \in E$ tel que $x = h + \lambda_x a$ avec $h \in H$ et $\lambda_x \in \mathbb{K}$. On a $t(x) = t(h) + \lambda_x t(a)$, et comme $h \in H$, on a $t(h) = h$, par suite, $t(x) - x = \lambda_x(t(a) - a)$. On a ainsi prouvé que :

$$\forall x \in E \quad t(x) - x = \lambda_x(t(a) - a)$$

Si $t(a) - a = 0$ alors $t(x) = x$ pour tout $x \in E$, ce qui n'est pas le cas, donc $t(a) - a \neq 0$ et la droite $D = \mathbb{K}(t(a) - a)$ satisfait à :

$$\forall x \in E, \quad t(x) - x \in D$$

Unicité : Si $D = \text{Vect}(u)$ et $D' = \text{Vect}(u')$ sont deux solutions alors comme $t \neq \text{Id}_E$, il existe $x_0 \in E$ tel que $t(x_0) - x_0 \neq 0$. Or il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tel que $t(x_0) - x_0 = \lambda u = \mu u'$. Alors $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$ et par suite $v = \frac{\mu}{\lambda} u$ et $D = D'$.

- c.** Soit φ est une forme linéaire définissant H . Soit v un vecteur directeur de la droite D de la transvection non triviale t . Pour tout $x \in E$, on a $t(x) - x = \lambda_x v$ avec $\lambda_x \in \mathbb{K}$, donc $x = \lambda_x v + t(x)$; le scalaire λ_x est unique, ce qui permet de définir l'application $\psi : E \rightarrow \mathbb{K}; x \mapsto \lambda_x$. L'application ψ ainsi définie est linéaire car si $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ alors de $\begin{cases} t(x) - x = \psi(x)v \\ t(y) - y = \psi(y)v \end{cases}$, on déduit : $x + \lambda y = [\psi(x) + \lambda \psi(y)]v$, donc $\psi(x + \alpha y) = \psi(x) + \alpha \psi(y)$. Pour tout $x \in E$, on a $\psi(x) = 0$ si et seulement si $t(x) = x$ si et seulement si $x \in H$, donc $\ker \psi = \ker \varphi$ donc il existe $\beta \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \beta \varphi$, en particulier si on pose $a = \beta v$ alors

$$\forall x \in E, \quad t(x) = x + \varphi(x)a$$

- d.** Réciproquement, soit φ est une forme linéaire non nulle sur E et $a \in E$ tel $a \neq 0$ et $a \in \ker \varphi = H$. Soit t l'application

$$t : E \rightarrow E; x \mapsto x + \varphi(x).a$$

D'abord t est une application linéaire, ensuite, pour tout $x \in E$, on a $t(x) - x = \varphi(x).a \in H$ et si $x \in H$ alors $t(x) = x + \varphi(x)a \in H$; finalement $t \neq \text{Id}_E$ car $a \neq 0$; donc t est une transvection non triviale de E dont l'hyperplan est H et la droite est $\mathbb{K}a$.

- 5.** Montrer que l'ensemble $T(H)$ constitué de Id_E et des transvections non triviales d'hyperplan H est un groupe pour la composition des applications isomorphe au groupe additif $(H, +)$.

On a $T(H) \neq \emptyset$ car $\text{Id}_E \in T(H)$.

Si $t_1, t_2 \in T(H)$ alors si on note $t = t_1 \circ t_2$ alors $t \in T(H)$ si $t_1 = \text{Id}_E$ ou $t_2 = \text{Id}_E$; sinon, d'après la question IV.4.c, si φ est une forme linéaire définissant H , il existe des vecteurs a_1, a_2 de H non nuls tel que pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{cases} t_1(x) = x + \varphi(x)a_1 \\ t_2(x) = x + \varphi(x)a_2 \end{cases}$$

Il en découle que, pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} (t_1 \circ t_2)(x) &= t_1(x + \varphi(x)a_2) \\ &= t_1(x) + \varphi(x)t(a_2) \\ &= x + \varphi(x)a_1 + \varphi(x)a_2 + \varphi(x)\varphi(a_2)a_1 \\ &= x + \varphi(x)(a_1 + a_2) \end{aligned}$$

Si le vecteur $a = a_1 + a_2$ est non nul ($a \neq 0$), alors t est une la transvection non triviale d'hyperplan H et de droite $\mathbb{K}a$; sinon alors $t = \text{Id}_E$; dans tous les cas $t \in T(H)$. Finalement si $t \in T(H)$ alors $t^{-1} \in T(H)$ puisque :

- Si $t = \text{Id}_E$ alors $t^{-1} = \text{Id}_E \in T(H)$.

- Sinon, il existe a non nul tel que $t(x) = x + \varphi(x)a$; comme t est bijective $b = t^{-1}(a)$ est non nul, et pour tout $x \in E$, comme $t(x) = x + \varphi(x)a$, on a : $x = t^{-1}(x) + \varphi(x)t^{-1}(a)$, donc

$$t^{-1}(x) = x - \varphi(x)b$$

ce qui explique que t^{-1} est la transvection non triviale d'hyperplan H et de droite $\mathbb{K}b$.

Soit $\Psi : E \rightarrow T(H); a \mapsto \Psi(a) = t_a$ avec $\forall x \in E, \quad t_a(x) = x + \varphi(x)a$.

Il est clair qu'effectivement Ψ est une application de E vers $T(H)$. Par ailleurs, si $(a, b) \in E^2$ alors, pour tout $x \in E$, on a : $t_{a+b}(x) = x + \varphi(x)(a + b)$ et $(t_a \circ t_b)(x) = x + \varphi(x)(a + b)$ (déjà fait ci-dessus ; donc

$$\forall (a, b) \in E^2 \quad \Psi(a + b) = \Psi(a) + \Psi(b)$$

donc Ψ est un morphisme de groupe de $(E, +)$ vers $(T(H), \circ)$

– Montrons que Ψ est un isomorphisme :

– On a Ψ est surjectif car 0 est un antécédant de Id_E et si t est une transvection non triviale, on a $t = t_a$ où a est le vecteur donné par la question IV.4.c ci-dessus.

– Soit $a \in E$ tel que $\Psi(a) = \text{Id}_E$ alors $t_a(x) = x = x + \varphi(x)a$ pour tout $x \in E$, donc $\varphi(x)a = 0$, pour tout $x \in E$, or φ est non nulle, donc il existe $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$ ce qui fournit $a = 0$. Donc Ψ est un isomorphisme et les groupes $T(H)$ et E sont isomorphes.

6. Soit t_1, t_2 deux transvections non triviales, et notons φ_1, φ_2 des formes linéaires définissant les hyperplans respectifs H_1, H_2 de t_1 et t_2 et a_1, a_2 les vecteurs non nuls tel que :

$$\forall x \in E \quad \begin{cases} t_1(x) = x + \varphi_1(x)a_1 \\ t_2(x) = x + \varphi_2(x)a_2 \end{cases}$$

Alors :

$$(*) \quad t_1 \circ t_2 = t_2 \circ t_1 \Leftrightarrow \forall x \in E, \quad \varphi_2(x)\varphi_1(a_2)a_1 = \varphi_1(x)\varphi_2(a_1)a_2$$

Il en découle d'une condition suffisante pour que t_1 et t_2 commutent est :

$$(**) \quad (a_1, a_2) \in (H_1 \cap H_2)^2$$

En effet si $(a_1, a_2) \in (H_1 \cap H_2)^2$, cela veut dire simplement que $a_1 \in H_2$ et $a_2 \in H_1$ donc $\varphi_1(a_2) = \varphi_2(a_1) = 0$, ce qui fournit $t_1 \circ t_2 = t_2 \circ t_1$ en vertu de l'équivalence (*) ci-dessus.

Réciproquement si (**) n'est pas réalisée alors $a_1 \notin H_2$ ou $a_2 \notin H_1$. Si par exemple $a_1 \notin H_2$ donc

$$(***) \quad \varphi_2(a_1) \neq 0,$$

en particulier la famille (a_1, a_2) libre. Si on suppose que t_1 et t_2 commutent on aurait pour un vecteur x_0 tel que $\varphi_1(x_0) \neq 0$ (x_0 existe car φ_1 non nulle),

$$[\varphi_2(x_0)\varphi_1(a_2)]a_1 - [\varphi_1(x_0)\varphi_2(a_1)]a_2 = 0$$

donc la famille (a_1, a_2) est liée, ce qui contredit (***) ci-dessus, par suite t_1 et t_2 ne commutent pas.

Conclusion : t_1 et t_2 commutent si et seulement si les droites associées sont contenues dans $H_1 \cap H_2$.

Partie V

1. u une involution de E tel que $u \neq \pm \text{Id}_E$.

- a. Comme $u^2 = \text{Id}_E$, le polynôme $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de u , donc $\{-1, 1\} \subset \text{Sp}(u)$. Par ailleurs si $-1 \notin \text{Sp}(u)$, l'endomorphisme $u + \text{Id}_E$ serait bijectif et comme $u^2 = \text{Id}_E$, on a $(u + \text{Id}_E) \circ (u - \text{Id}_E) = 0$ et par composition à gauche avec $u + \text{Id}_E$, on aurait $u = \text{Id}_E$, chose fautive. De même pour 1 , donc $\text{Sp}(u) = \{-1, 1\}$.

- b. Le lemme des noyaux permet d'avoir :

$$E = \ker(u - \text{Id}_E) \oplus \ker(u + \text{Id}_E) = E_1(u) \oplus E_{-1}(u).$$

- c. Soit $x \in E$, alors $u(x) = -x + (x + u(x))$; remarquons que $x + u(x) \in E_1(u)$ puisque $u(x + u(x)) = u(x) + u^2(x) = u(x) + x$. Or $E_1(u)$ est une droite vectorielle, soit a un vecteur directeur de $E_1(u)$, alors il existe une application θ de E vers $\mathbb{K}$ tel que $\forall x \in E, u(x) + x = \theta(x).a$. L'application θ est linéaire car si $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a $u(x) + x = \theta(x).a$ et $u(y) + y = \theta(y).a$ donc $u(x + \alpha y) + x + \alpha y = (u(x) + x) + \alpha(u(y) + y) = \theta(x) + \alpha\theta(y)).a$, ce qui montre que $\theta(x + \alpha y) = \theta(x) + \alpha\theta(y)$.

θ est non nulle car $u(a) + a = 2a$ donc $\theta(a) = 2$.

Ainsi θ est une forme linéaire non nulle et

$$(5) \quad \forall x \in E, \quad u(x) = -x + \theta(x).a$$

- d. Soit t une transvection non triviale d'hyperplan H et de droite D ; soit φ une forme linéaire définissant H et a le vecteur non nul de H tel que $t(x) = x + \varphi(x).a$ pour tout $x \in E$.

Notons que si $u : E \rightarrow E$ est une application tel que $u(x) = -x + \theta(x).a$ avec $(\theta, a) \in E^* \times E$ tel que $\theta(a) = 2$ alors u est une involution minimale. En effet, il est clair que u est linéaire. On a $u(a) = a$.

Si $x \in E$ alors : $u^2(x) = -u(x) + \theta(x)u(a) = -u(x) + \theta(x).a = x - \theta(x).a + \theta(x).a = x$

Finalement on remarque que $\mathbb{K}a \subset E_1(u)$ car $a \neq 0$ et $u(a) = a$. Réciproquement, pour tout $x \in E$, si $u(x) = x$, alors $2x = \theta(x).a$, donc $x \in \mathbb{K}a$. Ainsi 1 est une valeur propre de u et $E_1(u)$ est une droite vectorielle, donc u est une involution minimale.

Soit alors $u_1, u_2 : E \rightarrow E$ définies par

$$\forall x \in E, \quad \begin{cases} u_1(x) = -x + \theta_1(x).a \\ u_2(x) = -x + \theta_2(x).a \end{cases}$$

où θ_1, θ_2 sont deux formes linéaires sur E tel que $\theta_1(a)\theta_2(a) = 2$. u_1 et u_2 sont des involutions minimales. Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} (u_1 \circ u_2)(x) &= -u_2(x) + (\theta_1(u_2(x)).a \\ &= x - \theta_2(x).a + (-\theta_1(x) + 2\theta_1(x)).a \\ &= x + (\theta_1 - \theta_2)(x).a \end{aligned}$$

Si on veut avoir $t = u_1 \circ u_2$, il suffit de choisir θ_1 et θ_2 tel que $\varphi = \theta_1 - \theta_2$, pour cela, considérons une forme linéaire γ tel que $\gamma(a) = 2$ et posons

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{1}{2}\varphi - \gamma \\ \theta_2 = -\frac{1}{2}\varphi + \gamma \end{cases}$$

On a alors $\theta_1(a) = \theta_2(a) = 2$ et $\theta_1 - \theta_2 = \varphi$, par conséquent on a $u_1 \circ u_2 = t$.

2. En écrivant $t = u_1 \circ u_2$, il vient $\det(t) = \det(u_1)\det(u_2)$. Comme $E_1(u) \oplus E_{-1}(u) = E$ pour tout $u \in \{u_1, u_2\}$, on a $\det(u) = (-1)^{n-1}$, puisque dans une base b , adaptée à la somme directe ci-dessus, on a $\text{mat}_b(u) = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$. Ainsi $\det(t) = (-1)^{n-1}(-1)^{n-1} = 1$.

3. Soit t une transvection non triviale d'hyperplan H et de droite D ; soit φ une forme linéaire définissant H et a le vecteur non nul de H tel que $t(x) = x + \varphi(x).a$ pour tout $x \in E$.

Pour tout $x \in E$, on a : $t(\sigma^{-1}(x)) = \sigma^{-1}(x) + \varphi(\sigma^{-1}(x)).a$, donc

$$(\sigma \circ t \circ \sigma^{-1})(x) = x + (\varphi \circ \sigma^{-1})(x).a$$

Comme σ est un isomorphisme, $\varphi' = \varphi \circ \sigma^{-1}$ est une forme linéaire non nulle, on remarque que φ' définit l'hyperplan $H' = \sigma(H)$. Par ailleurs, le vecteur $a' = \sigma(a)$ vérifie $a' \in \ker(\varphi')$, donc $t' = \sigma \circ t \circ \sigma^{-1}$ est la transvection non triviale d'hyperplan $H' = \sigma(H)$ et de droite $D' = \mathbb{K}\sigma(a) = \sigma(D)$.

- Soit t et t' sont deux transvections non triviales de E d'hyperplans et droites respectifs H, H', D, D' s'il existe un automorphisme $\sigma \in \mathbf{GL}(E)$ tel que

$$t' = \sigma \circ t \circ \sigma^{-1}.$$

alors $\sigma(D) = D'$ et $\sigma(H) = H'$ et cela suffit d'ailleurs d'après la question précédente.

Construisons un tel automorphisme, pour cela, posons $D = \mathbb{K}e_1$ et $D' = \mathbb{K}e'_1$ et soit $e = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $e' = (e'_k)_{1 \leq k \leq n}$ des bases de E obtenues en complétant (e_1) en une base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de H puis cette dernière en une base e de E , de même pour e' . Soit alors $\sigma \in \mathbf{GL}(E)$ tel que $\text{mat}_{e,e'}(\sigma) = I_n$. Alors σ convient.

- Supposons que $n = \dim(E) \geq 3$, Soit t, t' deux transvections, on sait qu'il existe $\sigma \in \mathbf{GL}(E)$ tel que $t' = \sigma \circ t \circ \sigma^{-1}$. Notons H' et D' l'hyperplan et la droite de t' , donc il existe une forme linéaire φ' de noyau H' et $w_{n-1} \in D'$ tel que pour tout $x \in E$, $t'(x) = x + \varphi'(x)w_{n-1}$. Comme $D' \subset H'$ et que $n \geq 3$ (donc $(n-1) \geq 2$), on peut compléter (w_{n-1}) en une base $(w_1, \dots, w_{n-1})$ de H' , laquelle, on complète en une base $\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_n)$ de E , où w_n est choisi tel que $\varphi'(w_n) = 1$ (chose possible, car il suffit de prendre $w \in E \setminus H'$ et poser $w_n = \frac{w'}{\varphi'(w')}$). On a donc

$$\begin{cases} t'(w_n) = w_{n-1} + w_n \\ \forall k \in [1, n-1], t'(w_k) = w_k \end{cases}$$

.Par suite la matrice de t' relativement à $\mathcal{W}$ est

$$T' = \text{mat}_{\mathcal{W}}(t') = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posons $d = \det(\sigma)$, et soit $s \in \mathbf{GL}(E)$ tel que.

$$S = \text{mat}_{\mathcal{W}}(s) = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & d^{-1}I_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ & \ddots \\ & & 1 \\ (0) & & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{K})$$

Remarquons que $\det(s) = d^{-1}$, donc $\det(s \circ \sigma) = d^{-1} \cdot d = 1$, par suite $s \circ \sigma \in \mathbf{SL}(E)$. Par ailleurs, on a

$$T'S = ST' = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & d^{-1}J \end{pmatrix}$$

donc s et t' commutent, ce qui s'écrit aussi : $t' = s \circ t' \circ s^{-1}$. Finalement, et compte tenu de : $t' = \sigma \circ t \circ \sigma^{-1}$, on a $t' = \gamma \circ t \circ \gamma^{-1}$ où $\gamma = s \circ \sigma$ est un élément de $\mathbf{SL}(E)$.

4. Soit $t \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{mat}_{\beta}(t) = T_{ij}(\lambda)$. Soit $x \in E$ et X, X' les colonnes des coordonnées respectives de x et $t(x)$ relativement à β . Alors

$$X' = T_{ij}(\lambda)X = X + \lambda E_{ij} \cdot X = X + \lambda x_j E_i = X + \varphi(X) \cdot E_i$$

avec $\varphi(X) = \lambda x_j$ forme linéaire de noyau l'hyperplan $H : x_j = 0$ (car $\lambda \neq 0$). Comme, de plus, $E_i \in H$, l'application t est la transvection d'hyperplan $H = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}} \mathbb{K}e_k$ et de droite $D = \mathbb{K}e_i$.

5. $\mathbf{SL}(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections : c'est une conséquence de la question I.9.
6. $Z(\mathbf{SL}(E)) = \{A \in \mathbf{SL}(E) / \forall X \in \mathbf{SL}(E), AX = XA\}$: centre de $\mathbf{SL}(E)$.

- a. Déterminer les éléments de $\sigma \in \mathbf{SL}(E)$ qui commutent avec toutes les transvections. Alors pour toute transvection non triviale $\sigma t \sigma^{-1} = t$, en particulier pour toute droite D , en prenant une transvection de droite D on a $\sigma(D) = D$. Réciproquement si $\sigma(D) = D$ pour toute droite D alors pour tout $x \in E$, la famille $(x, \sigma(x))$ est liée. D'après la question II.1., σ est une homothétie, donc elle commute avec tout endomorphisme et à fortiori avec toute transvection.

Conclusion : σ commute avec toutes les transvections si et seulement si $\sigma(D) = D$ pour toute droite vectorielle D .

- b. Soit $\sigma \in Z(\mathbf{SL}(E))$, donc σ commute avec toutes les transvections donc $\sigma(D) = D$ pour toute droite D ; d'après la question V.6.a, c'est une homothétie de rapport λ non nul et comme $\det(\sigma) = 1$ on a $\lambda^n = 1$ donc λ est une racine n ème de l'unité

Donc

$$Z(\mathbf{SL}(E)) = \{\xi \text{Id}_E \mid \xi \in \mathbb{U}_n(\mathbb{K})\}$$

Il est clair que $z \mapsto z \text{Id}_E$ est un isomorphisme de $(\mathbb{U}_n(\mathbb{K}), \times)$ vers $(Z(\mathbf{SL}(E)), \circ)$.

est un groupe cyclique isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{U}_n(\mathbb{K})$ où

$$\mathbb{U}_n(\mathbb{K}) = \{x \in \mathbb{K} \mid x^n = 1\}$$