



DEVOIR LIBRE NUMÉRO 1

Donné le : 12-9-2026
A rendre le : 18-9-2026
Durée : 1 semaine

Année scolaire : 2026-2027
Classe : MP*

Partie I

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note E_{ij} la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la ligne i et la colonne j qui vaut 1.

Si $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ on note $T_{ij}(\alpha) = I_n + \alpha E_{ij}$.

1. Que constitue la famille $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
2. Donner, pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ fixé, le terme $(E_{ij})_{k\ell}$ de la ligne k et la colonne ℓ de la matrice E_{ij} , à l'aide des symboles de Kronecker, pour tout $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.
3. Montrer que pour tout $i, j, k, \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$E_{ij} \times E_{k\ell} = \delta_{jk} E_{i\ell}.$$

Que vaut en particulier E_{ii}^2 et E_{ij}^2 pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $i \neq j$?

4. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.
 - (a) Calculer explicitement le produit matriciel $E_{23} \times A$. Quelle operation sur les lignes de A correspond-t-elle à ce produit ?
 - (b) Même question avec $A \times E_{23}$.
 - (c) Quelles relations satisfont les coefficients de A si $E_{23} \times A = A \times E_{23}$?
5. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
 - (a) En s'inspirant de la question ci-dessus, décrire les opérations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes) de A correspondant au produit $E_{ij} \times A$ (resp. $A \times E_{ij}$).
 - (b) En déduire les opérations élémentaires associées aux produits $T_{ij}(\alpha) \times A$ et $A \times T_{ij}(\alpha)$
 - (c) Quelles relations a-t-on entre les coefficients de A si $A \times E_{ij} = E_{ij} \times A$?
 - (d) En déduire que si

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AX = XA$$

alors A est une matrice scalaire ($A = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.)

6. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $i, j, k, h \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $i \neq j$ et $h \neq k$.
 - (a) Calculer $\det(T_{ij}(\lambda))$.
 - (b) Calculer le produit matriciel $T_{ij}(\lambda) \times T_{hk}(\mu)$. En déduire que l'inverse de $T_{ij}(\lambda)$ est de la forme $T_{ij}(\lambda')$ où $\lambda' \in \mathbb{K}$ à déterminer en fonction de λ .
7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de coefficients a_{ij} . On suppose de plus que la première ligne de A ou la première colonne de A possède un élément non nul.
Montrer qu'il existe deux matrices P et Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ produits de matrices de la forme $T_{ij}(\lambda); i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket; i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, telle que la matrice $B = PAQ$ soit une matrice de coefficients b_{ij} telle que $b_{11} = 1$ et $b_{i1} = b_{1i} = 0$, pour $2 \leq i \leq n$.
(Indication : on pourra envisager successivement les cas suivants :
 - i) $a_{11} = 1$.
 - ii) $\exists i > 1$ tel que $a_{i1} \neq 0$ ou $a_{1i} \neq 0$.
 - iii) $a_{11} \neq 1$ et $\forall i > 1, a_{i1} = 0$ et $a_{1i} = 0$)

8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et r le rang de A . On suppose $r > 0$. Montrer qu'il existe deux matrices P et Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ produits de matrices de la forme $T_{ij}(\lambda); i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket; i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, telles que la matrice $B = PAQ$ soit une matrice diagonale de coefficients b_{ij} telle que :
- (i) $b_{ii} = 1$ pour $1 \leq i < r$.
 - (ii) $b_{ii} = 0$ pour $r < i \leq n$.
 - (iii) $b_{rr} = d$ avec $\begin{cases} d = 1 & \text{si } r < n \\ d = \det(A) & \text{si } r = n \end{cases}$.
- (**Indication** : faire une démonstration par récurrence sur n , en commençant par envisager le cas $n = 2$)
9. Montrer que le groupe des matrices carrées d'ordre n à déterminant égal à 1 est engendré par les matrices de la forme $T_{ij}(\lambda); i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket; i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
10. On suppose dans cette question uniquement que $n \geq 3$. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$ telle que :
- i) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad f(AB) = f(A)f(B)$.
 - ii) Pour toute matrice diagonale A on a $f(A)$ est égal au produit des coefficients de la diagonale de A .
- (a) Montrer que toute matrice de la forme $T_{\alpha\beta}(a)$ avec $\alpha, \beta \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $a \in \mathbb{K}$ peut s'écrire sous la forme :
- $$T_{\alpha\beta}(a) = T_{ij}(\lambda)T_{hk}(\mu)T_{ij}(\lambda)^{-1}T_{hk}(\mu)^{-1}.$$
- expression dans laquelle on précisera les valeurs de λ, μ, i, j, h et $k, i \neq j$ et $h \neq k$.
- (b) Calculer $f(T_{ij}(\alpha))$ pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
- (c) En déduire que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad f(A) = \det(A)$.

Partie II

Si $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $[X, Y] = XY - YX$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathcal{H}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \text{tr}(A) = 0\},$$

et

$$\mathcal{H}'_n(\mathbb{K}) = \{[X, Y] / X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}.$$

On se propose dans cette partie de démontrer que $\mathcal{H}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{H}'_n(\mathbb{K})$

1. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(x, u(x))$ est liée pour tout $x \in E$. Démontrer que u est une homothétie. (On pourra utiliser une base $b = (e_1, \dots, e_n)$ de E et le vecteur $e = \sum_{k=1}^n e_k$)
2. Qu'en est-il si E n'est pas de dimension finie?
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & B \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K}); C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}); B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$$

Soit $Q \in \mathbf{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$.

- (a) Déterminer P^{-1} sous forme de matrice par blocs similaire à P ci-dessus.

- (b) Démontrer que $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & L' \\ C' & B' \end{pmatrix}$ où $B' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et C', L' à décrire. Exprimer B', C', L' en fonction de B, C, L et Q .
4. Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension 2 et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{tr}(u) = 0$.
- (a) Prouver que si u est une homothétie alors u est nul.
- (b) Prouver que si u n'est pas une homothétie alors il existe une base b de E tel que $\text{mat}_b(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$
5. (a) Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension n tel que $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{tr}(u) = 0$. Démontrer qu'il existe une base b de E tel que $\text{mat}_b(u)$ est à diagonale principale nulle. (On pourra raisonner par récurrence et utiliser 1) et 3) ci-dessus.)
- (b) Donner une interprétation matricielle du résultat ci-dessus.
6. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et

$$\Delta = \text{diag}(1, 2, \dots, n) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix},$$

la matrice diagonale dont les coefficients de la diagonale sont les entiers naturels consécutifs $1, 2, \dots, n$. On fixe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on considère l'équation

$$(\mathcal{E}_B) \quad [\Delta, X] = B$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on note $\mathcal{S}_B$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_B)$.

- (a) Démontrer que $\mathcal{S}_B$ est non vide si et seulement si la matrice B est à diagonale principale nulle.
- (b) Vérifier que : $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}), \quad [PXP^{-1}, PYP^{-1}] = P[X, Y]P^{-1}$.
- (c) En déduire que : $\forall A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{K}), \exists U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad A = [U, V]$.
- (d) Conclure que $\mathcal{H}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{H}'_n(\mathbb{K})$.

Partie III

Dans cette partie n est un entier naturel tel que $n \geq 2$. On rappelle que la forme linéaire tr vérifie $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour simplifier, On notera désormais $\mathcal{H} = \ker(\text{tr})$ le noyau de l'application linéaire tr . On pose $\mathcal{D} = \mathbb{K}I_n$, la droite vectorielle engendrée par I_n .

- Montrer que $\mathcal{H}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $\mathcal{H} \oplus \mathcal{D} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- Soit g une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), g(AB) = g(BA)$.
 - Calculer $g(E_{ij})$ pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $i \neq j$.
 - Comparer $g(E_{ii})$ et $g(E_{jj})$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.
 - En déduire que $\exists \lambda \in \mathbb{K}, g = \lambda \text{tr}$.
- Pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $F_{ij} = I_n + E_{ij}$. Calculer le produit matriciel $F_{hk}^{-1}F_{i,j}F_{h,k}$, pour tout $(i, j, h, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$, tel que $h \neq k$.
- Soit θ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall B \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \theta(AB) = \theta(BA).$$

Démontrer que $\exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad \theta = \lambda \text{tr}$.

Partie IV

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

1. Montrer que $\mathbf{SL}(E)$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}(E)$.
2. Soit H un sous-espace vectoriel de E .

(a) Montrer que si H est un hyperplan alors, pour tout $a \in E$, on a

$$H \oplus \mathbb{K}a = E \Leftrightarrow a \notin H.$$

- (b) Montrer que H est un hyperplan si et seulement s'il existe une forme linéaire non nulle φ sur E tel que $H = \ker(\varphi)$. On dira que φ définit l'hyperplan H .
- (c) Montrer que si $\varphi, \psi \in E^*$ définissent le même hyperplan H alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \alpha\varphi$. On dit que φ et ψ sont proportionnelles.

3. Montrer que si F_1 et F_2 sont deux sous-espace vectoriels de E alors :

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)$$

4. Soit t une transvection non triviale de E .

- (a) On se propose de prouver que l'hyperplan H qui apparaît dans la définition (2) de t dans l'entête ci-dessus est unique. On l'appellera alors l'hyperplan de la transvection non triviale t .

Pour cela on suppose qu'il existe deux hyperplans distincts H_1 et H_2 vérifiant (1) pour la transvection non triviale t . Que peut-on dire de $H_1 + H_2$? Conclure.

- (b) Prouver qu'il existe une droite vectorielle unique D contenue dans H telle que :

$$(3) \quad \forall x \in E, \quad t(x) - x \in D,$$

D est appelée droite de la transvection non triviale t .

- (c) Si φ est une forme linéaire définissant H , trouver un vecteur a de E tel que :

$$(4) \quad \forall x \in E, \quad t(x) = x + \varphi(x).a$$

- (d) Réciproquement, montrer que si φ est une forme linéaire non nulle sur E et a un vecteur non nul du noyau de φ , l'application

$$t : E \rightarrow E; x \mapsto x + \varphi(x).a$$

est une transvection non triviale de E dont on déterminera l'hyperplan et la droite.

5. Montrer que l'ensemble $T(H)$ constitué de Id_E et des transvections non triviales d'hyperplan H est un groupe pour la composition des applications isomorphe au groupe additif $(H, +)$.
6. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que deux transvections non triviales commutent.

Partie V

Dans cette partie E est toujours un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel de dimension $n, n \geq 2$. Si u est une involution de E ; pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on notera $E_\lambda(u) = \{x \in E / u(x) = \lambda x\}$. On rappelle que si $E_\lambda(u) \neq \{0\}$ alors λ est une valeur propre de u et $E_\lambda(u)$ est le sous-espace propre associé. On dira que u est une involution minimale si $\dim(E_1(u)) = 1$.

1. Soit u une involution de E tel que $u \neq \pm \text{Id}_E$.
 - (a) Prouver que $\text{Sp}(u) = \{-1, 1\}$
 - (b) Montrer que $E = E_{-1}(u) \oplus E_1(u)$.
 - (c) Montrer que si u est une involution minimale, on peut trouver une forme linéaire non nulle θ et un vecteur a tel que :

$$(5) \quad \forall x \in E, \quad u(x) = -x + \theta(x).a$$

- (d) Montrer qu'une transvection non triviale est la composée de deux involutions minimales ayant un sous-espace propre commun.
2. Dédurre de V.1) le déterminant d'une transvection non triviale.
3. Soit t une transvection non triviale de E et $\sigma \in \mathbf{GL}(E)$ un automorphisme. Montrer que $\sigma \circ t \circ \sigma^{-1}$ est une transvection non triviale de E . Déterminer son hyperplan et sa droite. Prouver que si t et t' sont deux transvections non triviales de E , il existe un automorphisme $\sigma \in \mathbf{GL}(E)$ tel que

$$t' = \sigma \circ t \circ \sigma^{-1}.$$

Montrer que si $n \geq 3$, on peut choisir $\sigma \in \mathbf{SL}(E)$.

4. E étant rapporté à une base $\beta = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$. Démontrer que si $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$ alors la matrice $T_{ij}(\lambda)$ est la matrice, dans la base β , d'une transvection non triviale. Déterminer son hyperplan et sa droite.
5. Démontrer que le groupe $\mathbf{SL}(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections.
6. On note $Z(\mathbf{SL}(E)) = \{A \in \mathbf{SL}(E) / \forall X \in \mathbf{SL}(E), AX = XA\}$ (appelé centre de $\mathbf{SL}(E)$).
 - (a) Déterminer les éléments de $\mathbf{SL}(E)$ qui commutent avec toutes les transvections.
 - (b) En déduire que $Z(\mathbf{SL}(E))$ est un groupe cyclique isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{U}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{U}_n(\mathbb{K}) = \{x \in \mathbb{K} / x^n = 1\}$