

Table des matières

14 Équations différentielles	3
14.1 Généralités	3
14.1.1 Terminologie	3
14.1.2 Problème de Cauchy	4
14.1.3 Équation intégrale associée à une équation différentielle	4
14.2 Équation différentielle linéaire	4
14.2.1 Définitions	4
14.2.1.1 Version avec les endomorphismes	4
14.2.1.2 Version matricielle	4
14.2.2 Principe de superposition	4
14.2.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire	5
14.2.4 Conséquence : Structure des espaces de solutions	5
14.2.4.1 Structure	5
14.2.4.2 Système fondamental de solutions de l'équation homogène	6
14.2.4.3 Équation avec second membre : Méthode de la variation des constantes	6
14.2.5 Système différentiel linéaire à coefficients constants	7
14.2.5.1 Système homogène	7
14.2.5.2 Système avec second membre	7
14.2.5.3 Cas particulier important : A est diagonalisable.	8
14.2.6 Équation différentielle scalaire linéaire d'ordre n	10
14.2.6.1 Cas général	10
14.2.6.2 Cas $n = 2$	13
14.2.6.3 Équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants	14

Chapitre 14

Équations différentielles

Dans tout ce qui suit, E désigne un espace vectoriel normé de dimension finie.

14.1 Généralités

14.1.1 Terminologie

Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ ou un ensemble de la forme $I \times E$ où I est intervalle de $\mathbb{R}$. La donnée d'une application $f : \Omega \rightarrow E$ permet de parler de l'équation différentielle $(E) \quad y' = f(t, y)$.

Definition 14.1.1

On appelle solution de (E) tout couple (J, φ) où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ une application de J vers E dérivable sur J tel que : $\forall t \in J, (t, \varphi(t)) \in \Omega$ et $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.

Definition 14.1.2

Si (J_1, φ_1) et (J_2, φ_2) sont deux solutions de (E) tel que $J_2 \subset J_1$ et $\varphi_1|_{J_2} = \varphi_2$, on dit que (J_1, φ_1) est un prolongement de (J_2, φ_2) ou que cette dernière est une restriction de (J_1, φ_1) .

Definition 14.1.3

On appelle solution maximale de (E) toute solution (J, φ) tel que si (J_1, φ_1) est une solution de (E) tel que (J, φ) est une restriction de (J_1, φ_1) alors $J = J_1$ et $\varphi = \varphi_1$.

Remarque. Si on note $\mathcal{S}_{(E)}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = f(t, y)$$

et $\preceq$ la relation définie sur $\mathcal{S}_{(E)}$ par : pour tout $\gamma_1 = (I_1, \varphi_1)$ et $\gamma_2 = (I_2, \varphi_2)$ éléments de $\mathcal{S}_{(E)}$:

$$\gamma_1 \preceq \gamma_2 \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 \subset I_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2|_{I_1} \end{cases}$$

alors $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_{(E)}$ et une solution maximale de (E) n'est autre qu'un élément maximal de l'ensemble ordonné $(\mathcal{S}_{(E)}, \preceq)$.

Definition 14.1.4

On appelle courbe intégrale ou trajectoire associée à une solution $\gamma = (J, \varphi)$ la partie $\mathcal{C}_\gamma$ de Ω définie par :

$$\mathcal{C}_\gamma = \{(t, \varphi(t)) / t \in J\}$$

14.1.2 Problème de Cauchy

Si $(t_0, y_0) \in \Omega$, le problème $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ est appelé problème de Cauchy ou équation différentielle avec condition initiale. Une solution du problème de Cauchy ci-dessus est un couple (J, φ) tel que (J, φ) est une solution de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ et $t_0 \in J$ et $\varphi(t_0) = y_0$

14.1.3 Équation intégrale associée à une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = f(t, y)$$

où $f : \Omega \rightarrow E; (t, y) \mapsto f(t, y)$ est une application continue sur Ω .

Si (I, φ) est une solution de (E) alors pour $t_0 \in I$ fixé, on a pour tout $t \in I$:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(u, \varphi(u)) du$$

On dit que (I, φ) est solution de l'équation intégrale associée à (E) et $(t_0, y_0) \in \Omega$:

$$(\mathcal{E}\mathcal{I}) \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du$$

14.2 Équation différentielle linéaire

14.2.1 Définitions

14.2.1.1 Version avec les endomorphismes

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \rightarrow E$ des applications. L'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = a(t)(y) + b(t)$$

représente un cadre général d'équation différentielle linéaire avec second membre. L'équation différentielle :

$$(EH) \quad y' = a(t)(y)$$

est appelée équation différentielle homogène associée à (E) . On se contente de parler de (E) car (EH) en est une quand b est nulle.

Notons que si $t \in I$ alors $a(t) \in \mathcal{L}(E)$, donc $a(t)$ est un endomorphisme de E . Ainsi $a(t)(y)$ est en fait la composée de $a(t)$ et l'application y .

Si T est un endomorphisme de E , on convient parfois de noter $T.x$ au lieu de $T(x)$ pour tout vecteur x de E , l'image de x par T . Ainsi on convient d'écrire l'équation différentielle comme suit :

$$(E) \quad y' = a(t).y + b(t).$$

Une solution de (E) est un couple (J, φ) avec J un intervalle de $\mathbb{R}$ contenu dans I et $\varphi : J \rightarrow E$ une application dérivable sur J tel que : $\forall t \in J, \quad \varphi'(t) = a(t)(\varphi(t)) + b(t)$.

14.2.1.2 Version matricielle

On considère $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(K)$ et l'équation différentielle :

$$(E) \quad Y' = A(t)Y + B(t)$$

c'est la version matricielle de l'équation différentielle linéaire ci-dessus, appelé aussi système différentiel linéaire.

14.2.2 Principe de superposition

On considère un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$. On se propose de trouver les solutions d'une équation différentielle linéaire

$$(E) \quad y' = a(t)(y) + b(t)$$

dans le cas où $b(t) = b_1(t) + b_2(t)$, ce qui permet par exemple de déterminer des solutions quand c'est plus facile d'en trouver pour chacune des équations différentielles :

$$(E_k) \quad y' = a(t)(y) + b_k(t)$$

pour $k \in \{1, 2\}$. On donne la proposition suivante appelée *principe de superposition*.

Proposition 14.2.1. On considère les équations différentielles :

$$(E_1) \quad y' = a(t)(y) + b_1(t)$$

$$(E_2) \quad y' = a(t)(y) + b_2(t)$$

$$(E) \quad y' = a(t)(y) + b(t)$$

avec $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ une application de I vers $\mathcal{L}(E)$ et $b_1, b_2, b : I \rightarrow E$ des applications de I vers E . Si $b = b_1 + b_2$ et si Y_1 et Y_2 sont des solution respectives de (E_1) et (E_2) sur I alors $y = y_1 + y_2$ est une solution de (E) sur I .

Preuve. En effet si y_1 et y_2 sont des solutions respectives de (E_1) et (E_2) sur I alors elles sont dérivables sur I et pour tout $t \in I$, on a $\begin{cases} y_1'(t) = a(t)(y_1(t)) + b_1(t) \\ y_2'(t) = a(t)(y_2(t)) + b_2(t) \end{cases}$. Par sommation, et par linéarité de $a(t)$, il vient $y'(t) = (y_1 + y_2)'(t) = y_1'(t) + y_2'(t) = a(t)(y_1(t) + y_2(t)) + b_1(t) + b_2(t)$, donc $y'(t) = a(t)(y(t)) + b(t)$, donc y est bien une solution de (E) sur I . ■

14.2.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Dans tout ce qui suit I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$, $b : I \rightarrow E$ des applications et on considère l'équation différentielle : $(E) \quad y' = a(t).y + b(t)$.

Théorème 14.2.1. Si a et b sont continues sur l'intervalle I alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times E$, le problème de Cauchy

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} y' = a(t).y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale. De plus cette solution est globale, c'est-à-dire que son intervalle est I tout entier.

- Remarques.**
1. On note les différences suivantes avec le théorème de Cauchy-Lipschitz non linéaire (C.L.N.L.) :
 - Dans le cas non linéaire, Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ alors que pour le cas linéaire $\Omega = I \times E$, en particulier Ω n'est pas forcément un ouvert puisque l'intervalle I est quelconque de $\mathbb{R}$.
 - Au niveau des hypothèses, C.L.L. exige seulement la continuité de a et b , alors que C.L.N.L. exige que f soit de classe C^1 .
 - L'intervalle de la solution maximale varie dans le cas de C.L.N.L. alors que pour C.L.L. c'est toujours I (intervalle où a et b sont définies et continues)
 2. L'équation différentielle $y' = a(t).y + b(t)$ s'écrit : $y' = f(t, y)$ avec $f(t, y) = a(t)(y) + b(t)$ donc on ne sort pas du cadre général sauf que $\Omega = I \times U$ n'est pas forcément un ouvert de $\mathbb{R} \times E$.

14.2.4 Conséquence : Structure des espaces de solutions

14.2.4.1 Structure

On note $n = \dim(E)$ et on note $\mathcal{S}_{(EH)}$ et $\mathcal{S}_{(E)}$ l'ensemble des solutions maximales de (EH) et de (E) respectivement. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire montre que toutes les solutions maximales de (EH) et (E) sont définies sur I tout entier, c'est pour cela qu'on se contentera de noter φ au lieu de (I, φ) une solution ;

Théorème 14.2.2. $\mathcal{S}_{(EH)}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et si φ_0 est une solution particulière de (E) alors $\mathcal{S}_{(E)} = \varphi_0 + \mathcal{S}_{(EH)}$ est un espace affine de dimension n de direction $\mathcal{S}_{(EH)}$

Preuve. $\mathcal{S}_{(EH)}$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(I, E)$, ensemble des applications de classe C^1 de I vers E , car :

- l'application nulle $\theta : I \rightarrow E; t \mapsto \theta(t) = 0$ est une solution de (EH) .
- Si φ_1, φ_2 sont deux solutions de (EH) et $\alpha \in \mathbb{K}$ alors $\varphi = \varphi_1 + \alpha\varphi_2$ est par simple vérification une solution de (EH) .

L'application $\Psi : \mathcal{S}_{(EH)} \rightarrow E; \varphi \mapsto \varphi(t_0)$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_{(EH)}$ vers E . En effet, Ψ est une application car si $\varphi \in \mathcal{S}_{(EH)}$ alors φ est bien définie sur I , en particulier au point t_0 . L'application Ψ est linéaire car si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}_{(EH)}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $\Psi(\varphi_1 + \alpha\varphi_2) = (\varphi_1 + \alpha\varphi_2)(t_0) = \varphi_1(t_0) + \alpha\varphi_2(t_0) = \Psi(\varphi_1) + \alpha\Psi(\varphi_2)$.

Ψ est bijective car si $y \in E$, on sait d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire qu'il existe une et une unique solution φ de (EH) sur I tel que $\varphi(t_0) = y$.

Ainsi $\mathcal{S}_{(EH)}$ est un espace vectoriel de dimension n .

Soit ϕ_0 une solution particulière de (E) . Si ϕ est une solution de (E) alors pour tout $t \in I$, on a :

$$\begin{cases} \phi'(t) = a(t) \cdot \phi(t) + b(t) \\ \phi_0'(t) = a(t) \cdot \phi_0(t) + b(t) \end{cases}, \text{ de sorte que la différence } \varphi = \phi - \phi_0 \text{ est une solution de } (EH). \text{ On a bien}$$

$\phi = \varphi + \phi_0$. Réciproquement si φ est une solution de (EH) et si on pose $\phi = \varphi + \phi_0$ alors il est aisé de vérifier que ϕ est une solution de (E) , donc $\mathcal{S}_{(E)} = \phi_0 + \mathcal{S}_{(EH)}$ ■

14.2.4.2 Système fondamental de solutions de l'équation homogène

Definition 14.2.1

Soit $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille de solutions de (EH) . Si la famille Φ est libre, elle est appelée système fondamental de solutions de (EH)

Un système fondamental de solutions (S.F.S.) de (EH) est donc une base de $\mathcal{S}_{(EH)}$. Si $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est un S.F.S. de (EH) alors $\mathcal{S}_{(EH)} = \{\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k / (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n\}$

Proposition 14.2.2. Soit $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille de solutions de (EH) . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) Φ est un S.F.S. de (EH) .
- (2) Pour tout $t \in I$, la famille $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ est une famille libre de E .
- (3) Il existe $t_0 \in I$ tel que la famille $\Phi(t_0) = (\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$ est une famille libre de E .

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) : Supposons Φ est un S.F.S de (EH) et soit $t \in I$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(t) = 0$. Il en découle que $\varphi = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$ est une solution de (EH) avec la condition initiale $\varphi(t) = 0$. Or la fonction nulle θ est une solution vérifiant la même condition initiale. Par unicité, en vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, on a $\varphi = \theta$ et par liberté de Φ , on a $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3) : C'est clair.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $\Phi(t_0)$ est une famille libre de E . Alors Φ est libre car si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des scalaires tel que $\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k = \theta$, en appliquant à t_0 on a $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, ce qui prouve que l'on a (1). ■

La proposition 14.2.2 est très utile pour savoir si une famille de solutions est une base en étudiant uniquement la liberté d'une famille de vecteurs. Considérons par exemple le système différentiel : $Y' = AY$ avec $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ce qui précède nous dit que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de ce système est un espace vectoriel de dimension 2. Remarquons que $\phi_1(t) = (e^{2t}, 2e^{2t})$ et $\phi_2(t) = (e^{3t}, 3e^{3t})$ sont deux solutions du système. Par ailleurs, on a $\phi_1(0) = (1, 2)$ et $\phi_2(0) = (1, 3)$ et $\det((1, 2), (1, 3)) = 1 \neq 0$, donc la famille $(\phi_1(0), \phi_2(0))$ est libre et (ϕ_1, ϕ_2) est un S.F.S. du système ci-dessus, donc sa solution générale et $\varphi(t) = \lambda\phi_1(t) + \mu\phi_2(t); \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, soit :

$$\varphi(t) = (\lambda e^{2t} + \mu e^{3t}, 2\lambda e^{2t} + 3\mu e^{3t}), \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

14.2.4.3 Équation avec second membre : Méthode de la variation des constantes

Théorème 14.2.3. Si $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ est un système fondamental de solutions de (EH) alors

1. Pour tout application $f \in \mathcal{C}^0(I, E)$ il existe une et une seule famille $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ d'application de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ tel que $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k$.
2. Si de plus f est de classe C^1 alors les α_k sont de classe C^1 .

Une conséquence de cette proposition est de dire que si f est une solution particulière de (E) alors comme f est de classe C^1 elle s'écrit de façon unique :

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k$$

Alors f est solution de (E) , si et seulement si :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = a(t)f(t) + b(t)$$

Comme b est continue, elle s'écrit de manière unique :

$$b = \sum b_k \phi_k \quad \text{avec} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, b_k \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}).$$

Il en découle que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\sum_{k=1}^n \alpha'_k \phi_k = \sum_{k=1}^n b_k \phi_k$$

Par unicité donnée par le théorème ci-dessus, f est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{cases} f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k \\ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha'_k = b_k \end{cases}$$

Ceci permet de dire que la solution générale de (E) est

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \left(\beta_k + \int_{t_0}^t b_k(u) du \right) \phi_k(t)$$

avec $t_0 \in I$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \beta_k \in \mathbb{K}$.

14.2.5 Système différentiel linéaire à coefficients constants

Il s'agit des systèmes de la forme :

$$(E) \quad Y' = AY + B(t)$$

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

14.2.5.1 Système homogène

Théorème 14.2.4. La solution générale de (EH) est :

$$Y(t) = e^{tA} \cdot \Lambda$$

avec $\Lambda \in \mathbb{K}^n$.

Preuve. Supposons que Y est une solution de (EH) et soit Z définie par $Z(t) = e^{-tA} \cdot Y(t)$, alors $Z'(t) = -Ae^{-tA}Y(t) + e^{-tA} \cdot Y'(t) = 0$, donc Z est constante sur I , donc il existe $\Lambda \in \mathbb{K}^n$ tel que $Z(t) = \Lambda$ pour tout $t \in I$, ce qui fournit :

$$\forall t \in I, \quad Y(t) = e^{tA} \cdot \Lambda$$

■

14.2.5.2 Système avec second membre

Théorème 14.2.5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et I un intervalle.

1. Pour toute application continue $Y \in \mathcal{C}^0(I, E)$ il existe une et une seule application continue $\Theta : I \rightarrow E$ tel que $\forall t \in I, Y(t) = e^{tA} \cdot \Theta(t)$.
2. Si de plus Y est de classe C^1 alors Θ est de classe C^1 .

Si $Y \in C^0(I, E)$ alors Y s'écrit de façon unique $Y(t) = e^{tA} \cdot \Theta(t)$. Y est solution de (E) si et seulement si Θ de classe C^1 et :

$$\Theta'(t) = b(t)$$

où $b(t) = e^{-tA} B(t)$ pour tout $t \in I$, si et seulement si $\Theta(t) = \Lambda + \int_{t_0}^t e^{-uA} B(u) du$ avec $\Lambda \in E$, ce qui fournit la solution générale :

$$Y(t) = e^{tA} \left(\Lambda + \int_{t_0}^t e^{-uA} B(u) du \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t_0 \in I \\ \Lambda \in E \end{cases}$$

14.2.5.3 Cas particulier important : A est diagonalisable.

Dans tout ce qui suit on suppose que A est diagonalisable et que $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ est une base de vecteurs propres associée aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Théorème 14.2.6. La solution générale de (EH) est :

$$Y(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{\lambda_k t} \Gamma_k$$

Pour chercher la solution générale on écrit

$$Y(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(t) e^{\lambda_k t} \Gamma_k$$

avec les $\alpha_k : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues : l'existence est garantie par le fait que si (y_k) sont les composantes de Y dans la base Γ , on pose $\alpha_k(t) = y_k(t) e^{-\lambda_k t}$ pour tout $t \in I$.

On a alors Y est solution de (E) si et seulement si

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \alpha_k'(t) = B_k(t) e^{-\lambda_k t}$$

où les B_k sont les composantes de B dans la base Γ . Ceci fournit la solution générale de (E) :

$$Y(t) = \sum_{k=1}^n \left(\mu_k + \int_{t_0}^t B_k(u) e^{-\lambda_k u} du \right) e^{\lambda_k t} \Gamma_k \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t_0 \in I \\ \mu_k \in \mathbb{K}, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{cases}$$

Exemple. Résolvons le système linéaire :

$$\begin{cases} x' = x - y + z + e^t \\ y' = -x + y + z \\ z' = -x - y + 3z + e^{3t} \end{cases}$$

Le système se traduit en l'équation différentielle linéaire :

$$(E) \quad Y' = AY + B(t)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Commençons par résoudre l'équation différentielle linéaire homogène associée :

$$(EH) \quad Y' = AY.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 1 & 1 & X-3 \end{vmatrix}$$

En effectuant les opérations $L_k \leftarrow L_k - L_3$ pour $k \in \{1, 2\}$, il vient :

$$\chi_A(X) = (X-2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-2)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ X-2 & 1 & X-3 \end{vmatrix}$$

Finalement, il vient :

$$\chi_A = (X-1)(X-2)^2,$$

donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ dont des vecteurs propres associés sont $\Gamma_1 =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc la forme générale de la solution de l'équation homogène est

$Y(t) = \alpha_1 e^t \Gamma_1 + \alpha_2 e^{2t} \Gamma_2 + \alpha_3 e^{2t} \Gamma_3$. Soit Y une solution de l'équation (E) et $\lambda(t) = e^{-tA} Y(t)$ alors Λ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et comme Y est solution de (E) , on a $\Lambda'(t) = e^{-tA} B(t)$. En projetant la relation ci-dessus $\Lambda'(t) = e^{-tA} B(t)$ dans la base $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$, il vient, en notant $b_k(t)$ les composantes de $B(t)$ relativement à Γ :

$$\Lambda'(t) = e^{-tA} \sum_{k=1}^3 b_k(t) \Gamma_k = \sum_{k=1}^3 b_k(t) e^{-tA} \Gamma_k$$

et comme :

$$e^{-tA} \Gamma_k = \lambda_k e^{-\lambda_k t}$$

on a :

$$\Lambda'(t) = \sum_{k=1}^3 b_k(t) e^{-t\lambda_k} \Gamma_k$$

Les composantes $b_k(t)$ sont donnée par la relation :

$$\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

où P est la matrice de passage de la base canonique à la base B de sorte que :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et par suite on obtient :

$$\begin{aligned} \Lambda'(t) &= (e^t - e^{3t})e^{-t} \Gamma_1 + e^{3t}e^{-2t} \Gamma_2 + (e^{3t} - e^t)e^{-2t} \Gamma_3 \\ &= (1 - e^{2t})\Gamma_1 + e^t \Gamma_2 + (e^t - e^{-t})\Gamma_3 \end{aligned}$$

En intégrant, il vient :

$$\Lambda(t) = \left(\alpha_1 + t - \frac{e^{2t}}{2} \right) \Gamma_1 + (\alpha_2 + e^t) \Gamma_2 + (\alpha_3 + e^t + e^{-t}) \Gamma_3$$

avec $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$.

Il en découle que la solution générale de (E) est :

$$Y(t) = \left(\alpha_1 e^t + t e^t - \frac{e^{3t}}{2} \right) \Gamma_1 + (\alpha_2 e^{2t} + e^{3t}) \Gamma_2 + (\alpha_3 e^{2t} + e^{3t} + e^t) \Gamma_3$$

avec $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$. ce qui donne en définitif :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{2t} + t e^t + \frac{1}{2} e^{3t} \\ y(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_3 e^{2t} + t e^t + e^t + \frac{1}{2} e^{3t} \\ z(t) = \alpha_1 e^t + (\alpha_2 + \alpha_3) e^{2t} + t e^t + e^t + \frac{3}{2} e^{3t} \end{cases}$$

avec $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$.

14.2.6 Équation différentielle scalaire linéaire d'ordre n

14.2.6.1 Cas général

Les équations différentielles de la forme :

$$(E) \quad a_n(t)y^{(n)} + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)$$

où $a_0, \dots, a_n$ et b sont des applications d'un intervalle I vers $\mathbb{K}$, continues sur I . On s'intéresse uniquement au cas où :

$$\forall t \in I, \quad a_n(t) \neq 0$$

L'équation s'écrit donc :

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{a}_k(t) y^{(k)} + \widetilde{b}(t),$$

avec

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \widetilde{a}_k = -\frac{a_k}{a_n} \quad \text{et} \quad \widetilde{b} = \frac{b}{a_n}$$

Désormais on considère donc l'équation différentielle de la forme :

$$(E) \quad y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)} + b(t).$$

dont l'équation différentielle homogène associée est :

$$(EH) \quad y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)}.$$

On rappelle que $a_0, \dots, a_{n-1}$ et b sont des applications continues de I vers $\mathbb{K}$.

On associe à cette équation différentielle, le système différentiel :

$$(\widehat{E}) \quad Y' = A(t).Y + B(t)$$

$$(\widehat{EH}) : \quad Y' = A(t).Y$$

avec pour tout $t \in I$:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0(t) & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une application de classe C^n , on note :

$$\widehat{f} = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

On dispose de la proposition suivante :

Proposition 14.2.3. Avec les notations ci-dessus, on a :

1. Pour tout $f \in C^n(I, \mathbb{K})$, $\widehat{f} \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$

2. Pour tout $f \in C^n(I, \mathbb{K})$:

$$\begin{cases} f \in \mathcal{S}_{(E)} \Leftrightarrow \widehat{f} \in \mathcal{S}_{(E)} \\ \text{et} \\ f \in \mathcal{S}_{(EH)} \Leftrightarrow \widehat{f} \in \widehat{\mathcal{S}_{(EH)}} \end{cases}$$

3. L'application :

$$\Phi : \mathcal{S}_{(EH)} \rightarrow \widehat{\mathcal{S}_{(EH)}}; y \mapsto \widehat{y}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Grâce à cette proposition on peut ramener l'étude d'une équation différentielle linéaire d'ordre n à celle d'un système différentielle linéaire d'ordre n . On obtient en particulier la version du théorème de Cauchy-Lipschitz associée à ce cas.

Théorème 14.2.7. Pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{K}$, il existe une et une seule solution φ de (E) définie sur I tel que :

$$\begin{cases} \varphi(t_0) = y_0 \\ \varphi'(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

On en déduit en particulier la :

Proposition 14.2.4. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)} + b(t)$$

et l'équation différentielle homogène associés :

$$(EH) \quad y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)}$$

où les a_k et b sont des applications continues d'un intervalle I vers $\mathbb{K}$. On note $\mathcal{S}_{(E)}$.

Une solution de (E) est une application $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}$, n fois dérivable tel que :

$$\forall t \in I, \quad \varphi^{(n)}(t) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) \varphi^{(k)}(t) \right) + b(t).$$

On note $(\mathcal{S}_{(EH)})$ les ensembles de solutions respectifs de (E) et (EH) . Alors :

1. $\mathcal{S}_{(EH)}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

2. Si ϕ_1 est une solution particulière de (E) alors $\mathcal{S}_{(E)} = \phi_1 + \mathcal{S}_{(EH)}$. En particulier $\mathcal{S}_{(EH)}$ est un espace affine de direction $\mathcal{S}_{(EH)}$.

Remarque. Si $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ est une famille de solutions de (EH) . Pour tout $t \in I$, on pose :

$$W_\Phi(t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \cdots & \phi_n(t) \\ \phi_1'(t) & \cdots & \phi_n'(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

$W_\Phi(t)$ s'appelle le wronskien.

Alors, Φ est un système fondamental de solutions de (EH) si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$(1) \quad \forall t \in I, \quad W_\Phi(t) \neq 0$$

$$(1) \quad \exists t \in I, \quad W_\Phi(t) \neq 0$$

La méthode de variation des constantes conduit au résultat suivant :

Théorème 14.2.8. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)} + b(t)$$

et l'équation différentielle homogène associés :

$$(EH) \quad y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)}$$

où les a_k et b sont des applications continues d'un intervalle I vers $\mathbb{K}$.

Soit $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ un système fondamental de solutions de (EH) et φ une application de classe C^n de I vers $\mathbb{K}$.

Pour que φ soit solution de (E) , il faut et il suffit qu'il existe des applications $\alpha_k : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1 sur I tel que :

$$\phi = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k \quad \text{et} \quad (1) : \begin{cases} \alpha_1' \phi_1 + \cdots + \alpha_n' \phi_n = 0 \\ \alpha_1' \phi_1' + \cdots + \alpha_n' \phi_n' = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1' \phi_1^{(n-2)} + \cdots + \alpha_n' \phi_n^{(n-2)} = 0 \\ \alpha_1' \phi_1^{(n-1)} + \cdots + \alpha_n' \phi_n^{(n-1)} = b \end{cases}$$

Preuve. Il suffit d'appliquer la variation des constantes à (E) . On note B l'application de I vers $\mathbb{K}^n$ tel que :

$$\forall t \in I, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

On sait que B s'écrit de façon unique :

$$(2) \quad B = \sum_{k=1}^n \beta_k \widehat{\phi_k}$$

c'est-à-dire :

$$(2)' \quad \begin{cases} \beta_1 \phi_1 + \cdots + \beta_n \phi_n = 0 \\ \beta_1 \phi_1' + \cdots + \beta_n \phi_n' = 0 \\ \vdots \\ \beta_1 \phi_1^{(n-2)} + \cdots + \beta_n \phi_n^{(n-2)} = 0 \\ \beta_1 \phi_1^{(n-1)} + \cdots + \beta_n \phi_n^{(n-1)} = b \end{cases}$$

avec les β_k des applications continues de I vers $\mathbb{K}$ et que la solution générale de $(\widehat{E})$ est de la forme :

$$\widehat{\phi} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \widehat{\phi}_k$$

où les $\alpha_k : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1 tel que :

$$(3) \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \alpha_k' = \beta_k$$

Tenant compte de $(2)'$ et (3) ci-dessus, on obtient le système (1) ci-dessus du théorème. ■

14.2.6.2 Cas $n = 2$

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' = a(t)y' + b(t)y + c(t)$$

C'est un cas particulier du cas général ci-dessus. On note en particulier :

1. L'ensemble des solution $\mathcal{S}_{(EH)}$ de (EH) est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 2, c'est-à-dire un plan vectoriel sur $\mathbb{K}$.
2. l'ensemble des solutions de (E) est un plan affine de direction $\mathcal{S}_{(EH)}$ et si φ_1 est une solution particulière de (E) alors $\mathcal{S}_{(E)} = \varphi + \mathcal{S}_{(EH)}$
3. Si $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$ est une famille de solutions de (EH) et si pour tout $t \in I$, on pose :

$$W_{\Phi}(t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{vmatrix} = \phi_1(t)\phi_2'(t) - \phi_1'(t)\phi_2(t)$$

$W_{\Phi}(t)$ s'appelle le wronskien de Φ au point t .

Alors Φ est un système fondamental de solutions de (EH) si et seulement si l'une des conditions suivantes est vraie :

- (a) $\forall t \in I, \quad W_{\Phi}(t) \neq 0$
- (b) $\exists t \in I, \quad W_{\Phi}(t) \neq 0$

4. La solution générale de (E) est donnée par :

$$\varphi(t) = \alpha_1(t)\phi_1(t) + \alpha_2(t)\phi_2(t)$$

avec : $\lambda_1, \alpha_2 : I \rightarrow \mathbb{K}$ des applications de classe C^1 tel que :

$$\alpha_1, \alpha_2 \in C^1(I, \mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha_1'(t)\phi_1(t) + \alpha_2'(t)\phi_2(t) = 0 \\ \alpha_1'(t)\phi_1'(t) + \alpha_2'(t)\phi_2'(t) = c(t) \end{cases}$$

Autrement dit :

$$\alpha_1'(t) = \frac{-c(t)\phi_2(t)}{\phi_1(t)\phi_2'(t) - \phi_1'(t)\phi_2(t)} \quad \text{et} \quad \alpha_2'(t) = \frac{c(t)\phi_1(t)}{\phi_1(t)\phi_2'(t) - \phi_1'(t)\phi_2(t)}$$

et par suite la solution générale de (E) est :

$$y(t) = \left(\lambda_1 - \int_{t_0}^t \frac{c(u)\phi_2(u)}{W(u)} du \right) \phi_1(t) + \left(\lambda_2 + \int_{t_0}^t \frac{c(u)\phi_1(u)}{W(u)} du \right) \phi_2(t)$$

avec :

$$\begin{cases} \forall u \in I, W(u) = \phi_1(u)\phi_2'(u) - \phi_1'(u)\phi_2(u) \\ t_0 \in I \\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \end{cases}$$

Méthode pour la recherche d'une deuxième solution de l'équation homogène (appelée : méthode de descente de degré).

On considère l'équation différentielle homogène :

$$(EH) : y'' = a(t)y' + b(t)y$$

où $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues, et on suppose qu'elle admet une solution ϕ_1 tel que :

$$\forall t \in I, \quad \phi_1(t) \neq 0$$

Posons $y = z\phi_1$ alors :

$$y' = z'\phi_1 + z\phi_1'$$

$$y'' = z''\phi_1 + 2z'\phi_1' + z\phi_1''$$

De $y'' = ay' + by$ on déduit :

$$z''\phi_1 + 2z'\phi_1' + z\phi_1'' = az'\phi_1 + az\phi_1' + bz\phi_1$$

Or $\phi_1'' =$, donc :

$$z''\phi_1 + 2z'\phi_1' + za\phi_1' + zb\phi_1 = az'\phi_1 + az\phi_1' + bz\phi_1$$

Finalement : $z''\phi_1 + 2z'\phi_1' = az'\phi_1$ donc en posant $w = z'$, il vient :

$$w' = \frac{a\phi_1 - 2\phi_1'}{\phi_1}w$$

C'est une équation différentielle de premier ordre qu'on peut résoudre facilement, ce qui permet de déterminer z donc y donc une seconde solution $\phi_2 = y$ de l'équation différentielle (EH)

14.2.6.3 Équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants

Dans tout ce qui suit n est un entier naturel tel que $n \geq 2$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une application continue sur I . On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} + b(t)$$

où $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ donnés. On considère l'équation différentielle homogène associée :

$$(EH) : y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}$$

et on se propose de résoudre (EH) en déterminant un système fondamental de solutions de (EH) .

Théorème 14.2.9. Toute solution de (EH) est une application de classe C^∞ de I vers $\mathbb{K}$, autrement dit :

$$\mathcal{S}_{(EH)} \subset C^\infty(I, \mathbb{K})$$

Preuve. Si y est une solution de (EH) alors y est de classe C^n par définition. Une récurrence immédiate permet de prouver que y est de classe C^k pour tout $k \geq n$. ■

Soit D l'application de $C^\infty(I, \mathbb{K})$ vers $C^\infty(I, \mathbb{K})$ défini par $D(f) = f'$ pour tout $f \in C^\infty(I, \mathbb{K})$. Il est clair que l'application D est un endomorphisme de $C^\infty(I, \mathbb{K})$, par suite si on pose $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, on a $P \in \mathbb{K}[X]$ et $P(D)$ est aussi un endomorphisme de $C^\infty(I, \mathbb{K})$.

Théorème 14.2.10. On a $\mathcal{S}_{(EH)} = \ker(P(D))$

Preuve. Soit $y \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$, alors : puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $y^{(k)} = D^k(y)$, on a :

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S}_{(EH)} &\Leftrightarrow y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} \\ &\Leftrightarrow D^n(y) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k(y) \\ &\Leftrightarrow (D^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k)(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow P(D)(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow y \in \ker(D) \end{aligned}$$

■

Supposons que le polynôme P est scindé et que :

$$P = \prod_{k=1}^s (X - \lambda_k)^{m_k}$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les racines deux à deux distinctes de P et m_k leur ordres de multiplicité respectifs. Le lemme des noyaux permet d'écrire :

$$\mathcal{S}_{(EH)} = \bigoplus_{k=1}^s \ker(D - \lambda_k \text{Id})^{m_k}$$

où Id est l'application identique de $C^\infty(I, \mathbb{K})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on se propose de déterminer $\ker(D - \lambda \text{Id})^m$. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ et g l'application définie par $g(t) = f(t)e^{-\lambda t}$, alors on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g^{(k)}(t) = (D - \lambda \text{Id})^k(f)(t)e^{-\lambda t}$$

Par récurrence :

Pour $k = 0$ ça donne $g(t) = f(t)e^{-\lambda t}$, c'est la définition de g .

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que la propriété est vraie.

$$D^{k+1}(g)(t) = [D \circ (D - \lambda \text{Id})^k - \lambda(D - \lambda \text{Id})^k](f)(t)e^{-\lambda t} = (D - \lambda \text{Id})^{k+1}(f)(t)e^{-\lambda t}$$

Il en découle que $f \in \ker(D - \lambda \text{Id})^m \Leftrightarrow D^m(g) = 0 \Leftrightarrow g \in C^\infty(I, \mathbb{K}) \cap \mathbb{K}_{m-1}[t]$.

Ceci permet de dire que :

$$\ker(D - \lambda \text{Id})^m = \{Q(t)e^{\lambda t} / Q \in \mathbb{K}_{m-1}[X]\}$$

ce qui permet d'énoncer le :

Théorème 14.2.11. Un système fondamental de solutions de (EH) est :

$$(t \mapsto t^j e^{\lambda_k t})_{\substack{1 \leq k \leq s \\ 0 \leq j \leq m_k - 1}}$$

Autrement dit, la solution générale de (EH) est :

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^s \sum_{j=0}^{m_k-1} a_{kj} t^j e^{\lambda_k t}$$

où $a_{kj} \in \mathbb{K}$ pour tout $(k, j) \in \llbracket 1, s \rrbracket \times \llbracket 0, m_k - 1 \rrbracket$

Remarque. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le polynôme P est toujours scindé, donc le théorème 14.2.11 ci-dessus s'applique. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et P non scindé, on cherche les solutions complexes et on considère les parties réelles et imaginaires de $t^j e^{\lambda t}$ pour toute racine complexe non réelle λ de P . Notons que si λ est une telle racine alors $\bar{\lambda}$ aussi, il ne faut prendre qu'une seule car λ et $\bar{\lambda}$ fournissent les mêmes parties réelles et imaginaire à un signe près.

Plus précisément, si :

$$\prod_{j=1}^r (X - \mu_j)^{m_j} \prod_{k=1}^s (X - \lambda_k)^{m_k} (X - \bar{\lambda}_k)^{m_k}$$

avec $\mu_j \in \mathbb{R}$ et $\lambda_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{I}m(\lambda_k) > 0$ et les $(\mu_j)_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ et les $(\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k)_{k \in \llbracket 1, s \rrbracket}$ deux à deux distinctes alors un système fondamentale de solutions de (EH) est :

$$(t \mapsto t^\ell e^{\mu_j t}; t \mapsto t^\nu e^{\alpha_k t} \cos(b_k t), t \mapsto t^\nu e^{\alpha_k t} \sin(b_k t))_{\substack{1 \leq j \leq r \\ 0 \leq \ell < m_j \\ 1 \leq k \leq s \\ 0 \leq \nu < m_k}}$$