

# Table des matières

|                                                            |          |
|------------------------------------------------------------|----------|
| <b>11 Séries entières</b>                                  | <b>3</b> |
| 11.1 Définitions : Séries entières, convergence            | 3        |
| 11.1.1 Définition, lemme d'Abel                            | 3        |
| 11.1.2 Rayon de convergence                                | 3        |
| 11.1.3 Disque, Intervalle de convergence                   | 4        |
| 11.1.4 Quelques propriétés du rayon de convergence         | 5        |
| 11.1.4.1 Propriétés diverses                               | 5        |
| 11.1.4.2 Règle de D'Alembert                               | 5        |
| 11.1.5 Somme et produit de deux séries entières            | 6        |
| 11.2 Propriétés de la fonction somme                       | 7        |
| 11.2.1 Continuité                                          | 7        |
| 11.2.2 Comportement au bord de l'intervalle de convergence | 7        |
| 11.2.3 Dérivabilité et intégration                         | 7        |
| 11.3 Développement en série entière                        | 8        |
| 11.3.1 Généralités                                         | 8        |
| 11.3.2 Développements en série entière usuels              | 9        |



# Chapitre 11

## Séries entières

Dans tout ce chapitre  $\mathbb{K}$  désigne l'un de corps  $\mathbb{R}$ , le corps des réels ou  $\mathbb{C}$ , le corps des nombres complexes.

### 11.1 Définitions : Séries entières, convergence

#### 11.1.1 Définition, lemme d'Abel

##### Definition 11.1.1

On appelle série entière toute série  $\sum f_n$  de fonctions définies de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}$  par  $f_n(t) = a_n t^n$  où  $(a_n)_n$  est une suite d'éléments de  $\mathbb{K}$ .

**Remarque.** On convient de noter  $\sum a_n z^n$  (resp.  $\sum a_n x^n$ ) suivant les cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  (resp.  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ).

**Lemme 11.1.1.** (*d'Abel*) Si  $\rho \in ]0, +\infty[$  tel que  $(a_n \rho^n)_{n \geq 0}$  est bornée alors la série entière  $\sum a_n t^n$  converge absolument sur  $\Delta_\rho = \{t \in \mathbb{K} / |t| < \rho\}$ .

**Preuve.** Par hypothèse, il existe  $M$  réel tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n \rho^n| \leq M$ . Soit  $t \in \mathbb{K}$  tel que  $|t| < \rho$ ; alors  $|a_n t^n| = |a_n \rho^n| \left| \frac{t}{\rho} \right|^n \leq M q^n$  où  $q = \left| \frac{t}{\rho} \right|$ , en particulier  $|q| < 1$ , donc la série géométrique  $\sum q^n$  est convergente, ce qui assure la convergence absolue de  $\sum a_n t^n$ . ■

#### 11.1.2 Rayon de convergence

**Proposition-Définition 11.1.1.** Soit  $a = \sum a_n t^n$  une série entière à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . L'ensemble

$$X_a = \{r \in \mathbb{R}_+ / (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\}$$

est une partie non vide de  $\mathbb{R}_+$ . On note  $R_a$  la borne supérieure de  $X_a$  si  $X_a$  est majorée et  $R_a = +\infty$  si  $X_a$  n'est pas majorée.  $R_a$  s'appelle le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n t^n$ .

**Exemples.** Voici trois exemples correspondant aux cas où  $R$  est nul, strictement positifs, puis infini :

1. Le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 0} n^n z^n$  est  $R = 0$
2. Le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 0} z^n$  est  $R = 1$ .
3. Le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$  est  $R = +\infty$ .

**Proposition 11.1.1.** Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) Le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n t^n$  est égal à  $R$ .
- (2) Pour tout  $t \in \mathbb{K}$ , La série  $\sum a_n t^n$  converge absolument si  $|t| < R$  et diverge grossièrement si  $|t| > R$

**Preuve.**

• Supposons que  $R$  est le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n t^n$ . Si  $R = 0$  alors la suite  $(a_n t^n)$  est non bornée pour tout  $t \neq 0$  donc la série  $\sum a_n t^n$  diverge grossièrement. Par ailleurs l'assertion  $|t| < 0$  est fausse pour tout  $t \in \mathbb{K}$ , d'où la vérité de  $|t| < 0 \Rightarrow$  la série  $\sum a_n t^n$  converge absolument. Si  $R = +\infty$  alors l'assertion  $|t| > R$  est fausse pour tout  $t \in \mathbb{K}$ , donc  $|t| > R \Rightarrow$  la série  $\sum a_n t^n$  diverge grossièrement est vraie. Par ailleurs si  $|t| < R$  alors en prenant  $r = |t| + 1$ , on a la suite  $(a_n r^n)$  est bornée et par le lemme d'Abel la série  $\sum a_n t^n$  CVA.

Si  $R > 0$ , soit  $t \in \mathbb{K}$ . Posons :  $r = \frac{R+|t|}{2}$ .

Si  $|t| < R$  alors  $|t| < r < R$  la suite  $(a_n r^n)$  est bornée et par le lemme d'Abel, la série  $\sum a_n t^n$  CVA.

Si  $|t| > R$  alors  $R < r < |t|$ , donc la suite  $(a_n r^n)$  est non bornée, et comme  $|a_n r^n| \leq |a_n t^n|$ , la suite  $(a_n t^n)$  est non bornée et la série  $\sum a_n t^n$  diverge grossièrement.

• Réciproquement, si on a (2), notons  $X_a$  l'ensemble de  $r \geq 0$  tel que  $(a_n r^n)$  bornée et  $R_a$  le rayon de convergence de la série entière. Supposons que  $R > 0$  et soit  $\Delta_R = \{t \in \mathbb{K} / |t| < R\}$ , on a  $\Delta_R \subset X_a$ . Donc  $\sup(X_a) \geq R$ . Donc  $R_a \geq R$ . Par ailleurs si  $R_a > R$  alors pour  $t = \frac{R+R_a}{2}$ , la série  $\sum a_n t^n$  converge absolument, ce qui n'est pas le cas, donc  $R = R_a$ . Si  $R = +\infty$  alors  $(a_n r^n)$  est bornée pour tout  $r \geq 0$  car elle converge vers 0, donc  $R_a = +\infty$ . Si  $R = 0$  alors pour tout  $r > 0$  la suite  $(a_n r^n)$  n'est pas bornée car sinon, par Abel on aurait  $\sum a_n t^n$  converge absolument pour  $t = \frac{r}{2}$ , ce qui n'est pas le cas. ■

**Remarque.** On dispose de plusieurs autres manières qui expriment le rayon de convergence. Si pour un série entière  $a = \sum a_n t^n$ , on note :

- $\mathfrak{X}_a = \{r \geq 0 / (a_n r^n) \text{ est bornée}\}.$
- $\mathfrak{Y}_a = \{r \geq 0 / (a_n r^n) \text{ est convergente}\}.$
- $\mathfrak{C}_a = \{r \geq 0 / (a_n r^n) \text{ est convergente vers } 0\}.$
- $\mathfrak{T}_a = \{r \geq 0 / \text{la série } \sum a_n r^n \text{ est convergente}\}.$
- $\mathfrak{U}_a = \{r \geq 0 / \text{la série } \sum a_n r^n \text{ est absolument convergente}\}.$

alors en notant  $R_a$  le rayon de convergence de la série entière  $a$ , on a :

$$R_a = \sup(\mathfrak{X}_a) = \sup(\mathfrak{Y}_a) = \sup(\mathfrak{C}_a) = \sup(\mathfrak{T}_a) = \sup(\mathfrak{U}_a).$$

En effet, on peut facilement remarquer que :

$$\mathfrak{U}_a \subset \mathfrak{T}_a \subset \mathfrak{C}_a \subset \mathfrak{Y}_a \subset \mathfrak{X}_a,$$

donc si on note :

$$M_1 = \sup(\mathfrak{X}_a), M_2 = \sup(\mathfrak{Y}_a), M_3 = \sup(\mathfrak{C}_a), M_4 = \sup(\mathfrak{T}_a), M_5 = \sup(\mathfrak{U}_a),$$

alors on a

$$M_5 \leq M_4 \leq M_3 \leq M_2 \leq M_1,$$

il en découle que le preuve se ramène à démontrer que  $M_1 \leq M_5$ , chose qu'on va faire. Sinon, on aurait  $M_1 > M_5$ , donc par définition de  $M_1 = \sup(\mathfrak{X}_a)$ , il existe  $r \geq 0$  tel que  $M_5 < r < M_1$  et  $r \in \mathfrak{X}_a$ , donc  $(a_n r^n)$  est bornée, par suite si  $\rho$  est un réel tel que  $M_5 < \rho < r$ , on a par le théorème d'Abel, la série  $\sum a_n \rho^n$  est absolument convergente, donc  $\rho \leq M_5$ , en contradiction avec  $M_5 < \rho$ . Ainsi  $M_1 = M_5$ .

### 11.1.3 Disque, Intervalle de convergence

#### Definition 11.1.2

Soit  $\sum a_n t^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ . En supposant  $R \neq 0$ ,

$$\Delta_R = \{t \in \mathbb{K} / |t| < R\}$$

est appelé disque ouvert de convergence (rep. intervalle ouvert de convergence) de la série entière  $\sum a_n t^n$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ( si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ).

**Remarques.** On retient les remarques suivantes :

1. Le disque (intervalle) ouvert de convergence de la série entière  $\sum a_n t^n$  est le plus grand ouvert de  $\mathbb{K}$  sur lequel elle converge absolument.
2. Si  $t \notin \overline{\Delta_R}$  (adhérence) alors la série  $\sum a_n t^n$  diverge grossièrement.
3. On ne peut rien dire a priori sur les points de la frontière du disque ouvert de convergence : Il est possible que la SE converge en tout point de la frontière comme en aucun point comme en certains points seulement. Exemples :  $\sum \frac{z^n}{n^2}$ ,  $\sum \frac{z^n}{n}$ ,  $\sum n z^n$  sont toutes de rayon de convergence 1, mais le comportement à la frontière n'est pas le même.

### 11.1.4 Quelques propriétés du rayon de convergence

#### 11.1.4.1 Propriétés diverses

**Proposition 11.1.2.** Soit  $a = \sum a_n t^n$  et  $b = \sum b_n t^n$  deux séries entières. Alors :

1. Si à partir d'un certain rang on a  $|a_n| \leq |b_n|$  alors  $R_a \geq R_b$ .
2. Si  $a_n = O(b_n)$  alors  $R_a \geq R_b$ .
3. Si  $a_n = o(b_n)$  alors  $R_a > R_b$ .
4. Si  $|a_n| \sim |b_n|$  alors  $R_a = R_b$ .
5. Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  les séries entières  $\sum a_n t^n$  et  $\sum n^\alpha a_n t^n$  ont le même rayon de convergence.

**Preuve.** On note que le point 2 se déduit directement du point 1 et que 3 et 4 se déduisent de 2.

1. Supposons qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq p, |a_n| \leq |b_n|$ , alors pour tout  $t \in \mathbb{K}$ , on a  $|a_n t^n| \leq |b_n t^n|$ , donc si la série  $\sum |b_n t^n|$  converge alors la série  $\sum |a_n t^n|$ , donc  $R_b \leq R_a$ .
2. Si  $a_n = O(b_n)$  alors il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|a_n| \leq M|b_n|$ . En appliquant la 1) ci-dessus, on a  $R_b \leq R_a$ .
3. Si  $a_n = o(b_n)$  alors  $a_n = O(b_n)$ . On conclut en appliquant 2) ci-dessus.
4. Si  $|a_n| \sim |b_n|$  alors on a  $a_n = O(b_n)$  et  $b_n = O(a_n)$ , en appliquant 2), on a  $R_a \leq R_b$  et  $R_b \leq R_a$ , donc  $R_a = R_b$ .
5. On a  $a_n = O(n^\alpha a_n)$  donc si on appelle  $R$  et  $R'$  les rayons de convergence respectifs de  $\sum a_n t^n$  et  $\sum n^\alpha a_n t^n$ , on a  $R \geq R'$ . Réciproquement soit  $t \in \mathbb{K}^*$  tel que la série  $\sum a_n t^n$  est absolument convergente. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|n^\alpha a_n t^n| = n^\alpha q^n |a_n t^n|$  où  $q = |t|$ . Comme la série  $\sum a_n t^n$  est absolument convergente la suite  $(a_n t^n)$  est bornée, donc il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|n^\alpha a_n t^n| \leq M n^\alpha q^n$ . Par la règle de D'Alembert, la série  $\sum n^\alpha q^n$  est convergente puisque si on pose  $\beta_n = n^\alpha q^n$ , alors  $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha q \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} q$  et  $q < 1$ . Il en découle que la série  $\sum n^\alpha a_n t^n$  est convergente et on a en conséquence prouvé que  $R \leq R'$ , donc  $R = R'$ . ■

#### 11.1.4.2 Règle de D'Alembert

**Proposition 11.1.3.** Soit  $\sum a_n t^n$  série entière et soit  $R$  son rayon de convergence. On suppose que les coefficients  $a_n$  sont non nuls à partir d'un certain rang. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

alors

$$R = \frac{1}{\ell}$$

avec  $R = +\infty$  si  $\ell = 0$  et  $R = 0$  si  $\ell = +\infty$ .

**Preuve.** Nous allons étudier trois cas suivant la valeur de  $\ell$  :

- Supposons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$  et  $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ . Soit  $t \in \mathbb{K}^*$  et on lui associe la série numérique  $\sum u_n$ , avec  $u_n = a_n t^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |t| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell |t|$ . Par la règle de D'Alembert pour les séries, on a la série  $\sum u_n$  est absolument convergente si  $\ell |t| < 1$  et grossièrement divergente si  $\ell |t| > 1$ , donc, pour tout  $t \in \mathbb{K}$ , la série  $\sum a_n t^n$  est absolument convergente si  $|t| < \frac{1}{\ell}$  et grossièrement divergente si  $|t| > \frac{1}{\ell}$ , donc le rayon de convergence de la série  $\sum a_n t^n$  est  $R = \frac{1}{\ell}$ .
- Supposons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ . Soit  $t \in \mathbb{K}^*$  et on lui associe la série numérique  $\sum u_n$ , avec  $u_n = a_n t^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |t| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . Par la règle de D'Alembert pour les séries, on a la série  $\sum u_n$  est grossièrement divergente pour tout  $t \in \mathbb{K}^*$ , donc le rayon de convergence de la série  $\sum a_n t^n$  est  $R = 0$ .
- Supposons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ . Soit  $t \in \mathbb{K}^*$  et on lui associe la série numérique  $\sum u_n$ , avec  $u_n = a_n t^n$ ,

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |t| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Par la règle de D'Alembert pour les séries, on a la série  $\sum u_n$  est absolument convergente pour tout  $t \in \mathbb{K}^*$ , donc le rayon de convergence de la série  $\sum a_n t^n$  est  $R = +\infty$ .

• Dans tous les cas on a bien la relation  $R = \frac{1}{\ell}$ , ce qui termine la preuve de la proposition. ■

### 11.1.5 Somme et produit de deux séries entières

Si  $a = \sum a_n t^n$  et  $b = \sum b_n t^n$  sont deux séries entières à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , on définit la somme et le produit comme suit :

$$a + b = \sum (a_n + b_n) t^n \quad \text{et} \quad ab = \sum c_n t^n, \text{ avec } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

**Proposition 11.1.4.** Si  $R_a$  et  $R_b$  sont les rayons de convergence respectifs des séries entières  $a$  et  $b$  alors  $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$  et  $R_{ab} \geq \inf(R_a, R_b)$ . Pour tout  $t \in \mathbb{K}$ , on a :

1. Si  $|t| < \min(R_a, R_b)$  alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n.$$

2. Si  $|t| < \min(R_a, R_b)$  alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n,$$

où  $c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Preuve.** On conserve toutes les notations adoptées ci-dessus.

• Si  $R = \inf(R_a, R_b)$  alors pour tout  $t \in \mathbb{K}$ , si  $|t| < R$  alors  $|t| < R_a$  et  $|t| < R_b$ , donc les séries  $\sum a_n t^n$  et  $\sum b_n t^n$  sont absolument convergentes, donc leur série somme et leur série produit de Cauchy sont absolument convergentes, d'où les séries  $\sum (a_n + b_n) t^n$  et  $\sum c_n t^n$  où  $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$  sont absolument convergentes. Ainsi la  $R \leq R_{a+b}$  et  $R \leq R_{ab}$ .

• Les dernières relations sont des conséquences immédiates de la définition de la somme de deux séries numériques convergentes et celle du produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes. ■

**Remarque.** Si  $R_a \neq R_b$  alors  $R_{a+b} = \inf(R_a, R_b)$ .

**Preuve.** Si par exemple  $R_a < R_b$ , soit  $r$  est un nombre réel tel que  $r > R_a$ . Si  $R_a < r < R_b$  alors la série  $\sum a_n r^n$  est grossièrement divergente et la série  $\sum b_n r^n$  est absolument convergente, donc la série somme est divergente. Ainsi  $R_{a+b} \leq R_a$  donc  $R_{a+b} = R_a$ . ■

**Remarque.** Il ne faut pas croire que la règle de D'Alembert est valable pour toutes les séries entières. Voici deux exemples où la règle n'est pas valable ou nécessite une démarche préliminaire avant de l'appliquer :

• La série entière  $\sum \cos(n) t^n$ , dans laquelle le coefficient générale de la série est  $a_n = \cos(n)$  et par suite le rapport  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cos(n+1)}{\cos(n)}$  n'a pas de limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Pour déterminer le rayon de convergence dans ce cas, on peut procéder comme suit :

• Tout d'abord pour  $\rho = 1$ , la suite  $(a_n \rho^n) = (\cos(n))$  est bornée, donc le rayon de convergence  $R$  réalise  $R \geq 1$ . Par ailleurs la série  $\sum \cos(n)$  est grossièrement divergente donc  $R \leq 1$ , d'où  $R = 1$ .

• La série entière  $\sum 3^n n x^{2n}$  dont les coefficients sont  $a_n = n$  si  $3^n n$  est pair et  $a_n = 0$  si  $n$  est impair. Il en découle que la condition  $a_n$  est non nul à partir d'un certain rang n'est pas réalisée. On procède comme suit :

• Soit on considère la série entière  $\sum n x^n$  dont le rayon de convergence est donné par la règle de D'Alembert qui est  $R = \frac{1}{3}$ . Il en découle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la série  $\sum 3^n n x^{2n}$  est absolument convergente si  $|x|^2 < \frac{1}{3}$  et grossièrement divergente si  $|x|^2 > \frac{1}{3}$ , donc le rayon de convergence est  $r = \sqrt{R} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

• Soit on applique la règle de D'Alembert à la série numérique  $\sum u_n$  avec  $u_n = 3^n n t^{2n}$  avec  $t$  un réel non nul fixé. On trouve que  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 3 \frac{n+1}{n} |t|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3|t|^2$ , donc il y a convergence absolue si  $3|t|^2 < 1$  et divergence grossière si  $3|t|^2 > 1$ , ce qui donne le rayon de convergence :  $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

## 11.2 Propriétés de la fonction somme

### 11.2.1 Continuité

**Proposition 11.2.1.** Si  $\sum a_n t^n$  est une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  alors la série  $\sum a_n t^n$  converge normalement sur tout compact contenu dans le disque(intervalle) ouvert de convergence de la série entière.

**Preuve.** Soit  $A$  une partie compacte tel que  $A \subset \Delta_R$ . L'application  $: A \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto |t|$  est continue sur le compact  $A$  donc elle est bornée et atteint ses borne, en particulier sa borne supérieure, donc il existe  $a \in A$  tel que  $|t| \leq |a| = r$ . Comme  $a \in A$ , on a  $r < R$ , donc la série  $\sum a_n r^n$  est ACV, par suite et compte tenu de  $|a_n t^n| \leq |a_n r^n|, \forall t \in A$ , on a la convergence normale de  $\sum a_n t^n$  sur  $A$ . ■

**Attention :** Il est possible de ne pas avoir la convergence normale sur le disque(intervalle) ouvert de convergence lui même.

**Proposition 11.2.2.** La somme  $S : t \mapsto f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  est continue sur le disque ouvert de convergence.

**Preuve.** Soit  $t_0 \in \Delta_R$  et  $r > 0$  tel que  $|z_0| < r < R$ . Alors  $\sum_n a_n t^n$  converge normalement sur  $\overline{\Delta_r}$  donc,  $t \mapsto a_n t^n$  étant continue pour tout entier  $n$  sur  $\overline{\Delta_r}$ , sa somme l'est aussi d'où  $f$  est continue sur  $\overline{\Delta_r}$  et donc en particulier en  $z_0$ . ■

### 11.2.2 Comportement au bord de l'intervalle de convergence

**Théorème 11.2.1.** Soit  $a = \sum a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$  tel que  $0 < R < +\infty$ . Pour tout  $x \in ]-R, R[$ , on note  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ . Si la série  $\sum a_n R^n$  est convergente alors  $\lim_{\substack{x \rightarrow R \\ x < R}} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ .

**Remarque.** On a la même résultat dans le cas où la série  $\sum a_n (-R)^n$  est convergente alors  $\lim_{\substack{x \rightarrow -R \\ x > -R}} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n$ .

**Exemple d'application :** La série entière  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$  a pour rayon de convergence  $R = 1$ , de plus sa somme est  $\forall x \in ]-1, 1[$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(x+1)$ , et comme la série converge pour  $x = 1$  car on a une série alternée qui vérifie les conditions du critère spécial des séries alternée, et compte tenu de  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \ln(1+x) = \ln 2$ , on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

### 11.2.3 Dérivabilité et intégration

#### Definition 11.2.1

On appelle série dérivée d'une série entière  $\sum a_n t^n$ , la série entière  $\sum (n+1)a_{n+1} t^n$ .

**Proposition 11.2.3.** Une série  $\sum a_n t^n$  et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.

**Proposition 11.2.4.** Soit  $\sum a_n t^n$  une série entière à coefficients dans  $\mathbb{K}$  de rayon de convergence  $R > 0$  et de somme  $f$ . Notons aussi  $f$  la restriction de  $f$  à l'intervalle ouvert  $] -R, R[$ . Alors :

1.  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $] -R, R[$  et :

$$\forall t \in ] -R, R[, \frac{f^{(k)}(t)}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n t^{n-k}$$

2. Si  $[a, b] \subset ]-R, R[$  alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b t^{n+1} dt$$

**Conséquence :** Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$  une série entière réelle de rayon de convergence  $R > 0$  et de somme  $f$ . Pour tout entier  $n$ , le coefficient  $a_n$  est égal à  $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ .

**Proposition 11.2.5.** Soient  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$  deux séries entières de rayons  $R > 0$  et  $R' > 0$ . On suppose que les sommes de ces deux séries coïncident sur un voisinage de 0. Alors ces deux séries sont identiques :  $\forall n \in \mathbb{N} a_n = b_n$ .

**Conséquences :** La somme  $f$  de la série entière  $\sum a_n t^n$  est une fonction paire (resp. impaire) si et seulement si les  $a_n$  de rang impair (resp. pair) sont nuls.

**Preuve.** Si  $\sum_n a_n z^n$  est paire,  $\sum_n a_n z^n = \sum_n a_n (-z)^n$  pour tout  $n$  donc  $\forall n \in \mathbb{N} a_n = (-1)^n a_n$  et en particulier  $\forall k \in \mathbb{N} a_{2k+1} = (-1)a_{2k+1}$  ce qui implique  $a_{2k+1} = 0$ . ■

## 11.3 Développement en série entière

### 11.3.1 Généralités

#### Definition 11.3.1

Soit  $f$  une application définie sur un intervalle ouvert  $] -a, a[$ ,  $a > 0$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On dit que  $f$  est développable en série entière en un point 0 s'il existe une série entière  $\sum a_n t^n$  de rayon de convergence  $R > 0$  et un réel  $\rho \in ]0, \min(R, a)[$  tels que :

$$\forall t \in ] -\rho, \rho[, f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

#### Definition 11.3.2

Soit  $\Omega$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  tel que  $0 \in \Omega$  et  $f$  infiniment dérivable sur  $\Omega$ . La série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$  est appelée série de Taylor de  $f$  en 0.

**Proposition 11.3.1.** Si  $f$  est développable en série entière au voisinage de 0, alors  $f$  est de classe  $C^\infty$  à l'origine et la série entière égale à  $f$  au voisinage de 0 est nécessairement la série de Taylor de  $f$ . Autrement dit,

$$\exists r > 0, \forall t \in ] -r, r[, f(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

**Remarque.** Même si  $f$  est de classe  $C^\infty$  au voisinage de 0, et même si la série de Taylor de  $f$  a un rayon de convergence strictement positif, on ne peut affirmer que  $f$  est développable en série entière en 0. Considérer  $f : x \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$ .

**Exercice :** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant 0 et  $f$  une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est de classe  $C^\infty$  au voisinage de 0 et que :

$$\exists r > 0, \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in ] -r, r[ |f^{(p)}(x)| \leq M$$

Alors  $f$  est développable en série entière en 0 avec un rayon de convergence au moins égal à  $r$ .

**Solution :** Soit  $\rho$  un réel tel que  $0 < \rho < r$ . D'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre  $n$  puisque  $f$  est de classe  $C^{n+1}$  sur  $] -\rho, \rho[$  où on a :

$$\forall t \in ] -\rho, \rho[ \exists c \in ] -\rho, \rho[ |f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k| \leq \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} (2\rho)^{n+1}$$

donc

$$\forall t \in ] - \rho; \rho[ \quad |f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k| \leq \frac{M}{(n+1)!} (2\rho)^{n+1}$$

ce qui montre que lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  la série de Taylor de  $f$  converge vers  $f$  pour tout  $t$  dans  $] - \rho; \rho[$  et par suite dans  $] - r; r[$ .

### 11.3.2 Développements en série entière usuels

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}; R = +\infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; R = +\infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; R = +\infty$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}; R = +\infty$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; R = +\infty$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, R = 1 \text{ où } \binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n; R = 1$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n; R = 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}; R = 1$$

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}; R = 1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}; R = 1$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; R = 1$$