

Table des matières

10 Suites et séries de fonctions (II) :

Dérivabilité et Intégration.	3
10.1 Convergence uniforme et intégration	3
10.1.1 Segment , convergence uniforme	3
10.1.2 Intervalle quelconque	4
10.1.2.1 Théorème de convergence dominée	4
10.1.2.2 Intégration terme à terme	4
10.2 Dérivation	5
10.2.1 Théorème pour les fonctions de classe C^1	5
10.2.2 Extension des théorèmes ci-dessus : classe $C^k, k \geq 1$.	5
10.3 Intégrale avec paramètre	6
10.3.1 Continuité	6
10.3.1.1 Énoncés des théorèmes	6
10.3.1.2 Exemples	6
10.3.2 Dérivabilité	7
10.3.2.1 Dérivées partielles	7
10.3.2.2 Les théorèmes	7

Chapitre 10

Suites et séries de fonctions (II) : Dérivabilité et Intégration.

10.1 Convergence uniforme et intégration

10.1.1 Segment , convergence uniforme

Proposition 10.1.1. Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I et $(f_n : I \rightarrow F)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions continues de I dans F . On suppose que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur tout segment $[a, b]$ contenu dans I vers une fonction $f : I \rightarrow F$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans I , on pose : $g_n(x) = \int_{x_0}^x f_n(t)dt$ et $g(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$. Alors la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers g sur tout segment contenu dans I . En particulier si $(f_n : [a, b] \rightarrow E)_{n \geq 0}$ avec les f_n continues sur le segment $[a, b]$ et la suite (f_n) converge uniformément vers $f : [a, b] \rightarrow E$ sur $[a, b]$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Preuve. Soit $(a, b) \in I$ tel que $a < b$ et $[a, b] \subset I$. Comme $x_0 \in I$, il existe $\alpha, \beta \in I$ tel que $[\alpha, \beta] \subset I$ et $x_0, a, b \in [\alpha, \beta]$. Pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned} \|g_n(x) - g(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^x (f_n(t) - f(t))dt \right\| \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} \|f_n(t) - f(t)\|dt \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} \sup_{u \in [\alpha, \beta]} \|f_n(u) - f(u)\|dt \\ &= (\beta - \alpha) \|f_n - f\|_{\infty, [\alpha, \beta]} \end{aligned}$$

et comme (f_n) converge uniformément vers f sur le segment $[\alpha, \beta]$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n - g\|_{\infty, [a, b]} = 0.$$

■

Proposition 10.1.2. Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I et $(f_n : I \rightarrow F)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions continues de I dans F . On suppose que la suite $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment $[a, b]$ contenu dans I vers une fonction $f : I \rightarrow F$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans I , on pose : $g_n(x) = \int_{x_0}^x f_n(t)dt$ et $g(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$. Alors la série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément vers g sur tout segment contenu dans I . En particulier si $(f_n : [a, b] \rightarrow E)_{n \geq 0}$ avec les f_n continues sur le segment

$[a, b]$ et la série $\sum f_n$ converge uniformément vers $f : [a, b] \rightarrow E$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)dt \right).$$

10.1.2 Intervalle quelconque

10.1.2.1 Théorème de convergence dominée

Théorème 10.1.1. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $(f_n : I \rightarrow \mathbb{K})_n$ une suite d'applications continues par morceaux tel que :

1. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur I .
2. Il existe une application $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux intégrable sur I tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leq \varphi; \text{ (hypothèse de domination)}$$

Alors :

1. les f_n et f sont intégrables sur I .
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f = \int_I \lim f_n$.

10.1.2.2 Intégration terme à terme

On rappelle que $[0, +\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une application positive non intégrable alors $\int_I f(t)dt = +\infty$. On va donner deux théorèmes concernant l'intégration terme à terme.

Le premier théorème concerne les fonctions positives $\mathcal{CM}$ sur l'intervalle I .

Théorème 10.1.2. Soit $(f_n : I \rightarrow \mathbb{K})_{n \geq 0}$ une suite d'applications $\mathcal{CM}$ sur I tel que la série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une application $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. Alors dans $[0, +\infty]$, on a

$$(1) \quad \int_I f(t)dt = \int_I \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt$$

De plus f est intégrable sur I si et seulement si la série $\sum \int_I f_n(t)dt$ est convergente et dans ce cas on a l'égalité (1) ci-dessus dans $\mathbb{R}_+$.

Le deuxième théorème concerne les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, qui sont $\mathcal{CM}$ sur I non forcément positives.

Théorème 10.1.3. Soit $(f_n : I \rightarrow \mathbb{K})_n$ une suite de fonctions de l'intervalle I vers $\mathbb{K}$ tel que :

1. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une application $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur I .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est continue par morceaux sur I et f_n est intégrable sur I .
3. La série numérique $\sum \int_I |f_n|$ est convergente.

Alors :

1. La fonction f est intégrable sur I .
2. On a : $\int_I f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt$. Autrement dit :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t)dt \right)$$

10.2 Dérivation

10.2.1 Théorème pour les fonctions de classe C^1

Proposition 10.2.1. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite d'applications de I vers F tel que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^1 sur I ;
2. La suite (f_n) converge simplement sur I vers une application $f : I \rightarrow F$.
3. La suite de fonctions (f'_n) converge simplement vers une application $g : I \rightarrow F$ et la convergence est uniforme sur tout segment contenu dans I

Alors :

1. La convergence de (f_n) vers f est uniforme sur tout segment $[a, b] \subset I$.
2. La fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle I .
3. $f' = g$, c'est-à-dire : $\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n$.
4. La convergence de (f_n) vers f est uniforme sur tout segment $[a, b] \subset I$.

Proposition 10.2.2. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite d'applications de I vers F tel que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^1 sur I ;
2. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une application $f : I \rightarrow F$.
3. La suite de fonctions $\sum f'_n$ converge simplement vers une application $g : I \rightarrow F$ et la convergence est uniforme sur tout segment contenu dans I

Alors :

1. La fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle I .
2. $f' = g$, c'est-à-dire :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$$

3. La convergence de $\sum f_n$ vers f est uniforme sur tout segment $[a, b] \subset I$.

10.2.2 Extension des théorèmes ci-dessus : classe $C^k, k \geq 1$.

Théorème 10.2.1. Soit $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ et $(f_n : I \rightarrow F)_n$ une suite d'applications de $I \rightarrow F$ tel que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^k sur I .
2. Pour tout $p \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, la suite de fonctions $((f_n)^{(p)})_n$ converge simplement vers une fonction $f_p : I \rightarrow F$.
3. La suite de fonctions $((f_n)^{(k)})_n$ converge simplement vers une fonction $g : I \rightarrow F$ et la convergence est uniforme sur tout segment contenu dans I .

Alors :

1. $f = f_0$ est de classe C^k sur I .
2. $f^{(k)} = g$. Autrement dit :

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)^{(k)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n)^{(k)}.$$

3. La convergence de $(f_n^{(j)})$ vers $f^{(j)}$ est uniforme sur tout segment $[a, b] \subset I$ pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$.

Théorème 10.2.2. Soit $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ et $(f_n : I \rightarrow F)_n$ une suite d'applications de $I \rightarrow F$ tel que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^k sur I .
2. Pour tout $p \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, la série de fonctions $\sum (f_n)^{(p)}$ converge simplement vers une fonction

$$f_p : I \rightarrow F.$$

3. La série de fonctions $\sum (f_n)^{(k)}$ converge simplement vers une fonction $g : I \rightarrow F$ et la convergence est uniforme sur tout segment contenu dans I .

Alors :

1. $f = f_0$ est de classe C^k sur I .
2. $f^{(k)} = g$. Autrement dit :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (f_n)^{(k)}.$$

3. Pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ la convergence de $\sum (f_n)^{(j)}$ vers g_p est uniforme sur tout segment $[a, b] \subset I$.

10.3 Intégrale avec paramètre

10.3.1 Continuité

10.3.1.1 Énoncés des théorèmes

Théorème 10.3.1. Soit A une partie de E , I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ une application tel que :

- (1) Pour tout $x \in A$, l'application $f(x, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{K}; t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I .
- (2) Pour tout $t \in I$, l'application $f(\cdot, t) : A \rightarrow \mathbb{K}; x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A .
- (3) Il existe une application $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, intégrable tel que :

$$\forall (x, t) \in A \times I, \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t) \text{ (hypothèse de domination)}$$

Alors : la fonction $F : A \rightarrow \mathbb{K}; x \mapsto F(x) = \int_I f(x, t) dt$ est bien définie et continue sur A .

Remarques. Les remarque suivantes sont les plus utilisées en pratique :

1. Si on remplace l'hypothèse de domination (3) par :
- (3)' : Pour toute partie compacte K de E tel que $K \subset A$, il existe une application $\varphi_K : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I tel que :

$$\forall (x, t) \in K \times I, \quad |f(x, t)| \leq \varphi_K(t)$$

La conclusion du théorème 10.3.1 reste valable.

2. Si $I = [a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$, la condition
- (4) : L'application $(x, t) \mapsto f(x, t)$ est continue sur $A \times [a, b]$ implique les conditions (1),(2) et (3)' par suite la conclusion du théorème 10.3.1 reste valable
3. Une conséquence immédiate : Si $f : [c, d] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est une application continue alors $F : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ est continue sur $[c, d]$.

10.3.1.2 Exemples

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t^2 + x} dt$$

Alors $f(x, t) = \frac{\sin(xt)}{t^2 + x}$ vérifie

- $\forall x > 0, t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- $\forall t > 0, x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- Hypothèse de domination : Pour tout $a > 0$, on a :

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[\quad |f(x, t)| \leq \frac{1}{t^2 + a} = \varphi_a(t)$$

avec φ_a continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

10.3.2 Dérivabilité

10.3.2.1 Dérivées partielles

Si $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$ est une application et $A = (a, b) \in I \times J$.

- L'application : $\varphi_A : x \mapsto f(x, b)$ de I vers $\mathbb{K}$ est une fonction d'une variable réelle définie sur I .

Si φ_A est dérivable au point a , on note

$$\varphi'_A(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

le nombre dérivée de φ_A au point a .

Si φ_A est k fois dérivable au point a avec $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$\varphi_A^{(k)}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, b)$$

- L'application : $\psi_A : y \mapsto f(a, y)$ de J vers $\mathbb{K}$ est une fonction d'une variable réelle définie sur J .

Si ψ_A est dérivable au point b , on note

$$\psi'_A(b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

le nombre dérivée de ψ_A au point b .

Si ψ_A est k fois dérivable au point b avec $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$\psi_A^{(k)}(b) = \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(a, b)$$

10.3.2.2 Les théorèmes

Théorème 10.3.2. Soit I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \rightarrow K$ une application tel que :

- (1) Pour tout $x \in J$, l'application $f(x, \cdot) : I \rightarrow K; t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I .
- (2) Pour tout $t \in I$, l'application $f(\cdot, t) : J \rightarrow \mathbb{K}; x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur J et pour tout $x \in J$, l'application $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot); t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I .
- (3) Il existe une application $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, intégrable tel que :

$$\forall (x, t) \in A \times I, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t) \text{ (hypothèse de domination)}$$

Alors :

1. L'application $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe C^1 sur l'intervalle J .
2. Pour tout $x \in J$, on a (Formule de Leibniz) :

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

Remarque. Si $(J_k)_{k \in K}$ est une famille d'intervalles de $\mathbb{R}$ tel que $\bigcup_{k \in K} \text{Int}(J_k) = J$ (où $\text{Int}(J_k)$ désigne l'intérieur de J_k), et si on remplace la condition (3) ci-dessus par la condition (3)' suivante : Pour tout $k \in K$, il existe une application $\psi_k, \mathcal{CM}$ sur et intégrable sur I tel que :

$$\forall (x, t) \in J_k \times I, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi_k(t)$$

alors la conclusion reste la même.

Théorème 10.3.3. Soit k un entier naturel non nul, I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$ une application à valeurs réelles ou complexes tel que :

1. Pour tout $p \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, et tout $t \in I$, l'application $f(\cdot, t) : J \rightarrow \mathbb{K}; x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^p et pour tout $x \in J$, l'application $\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, \cdot) : t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I .
2. Pour tout $t \in I$, l'application $f(\cdot, t)$ est de classe C^k et pour tout $x \in J$, l'application $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \cdot)$ est continue par morceaux.

3. Il existe $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I tel que :

$$\forall (x, t) \in J \times I, \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \psi(t)$$

Alors :

1. $F : J \rightarrow \mathbb{K}; x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe C^k sur J .
2. On a la formule de Leibniz :

$$\forall x \in J, \quad F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$$