

Table des matières

7	Fonction vectorielles à variable réelle	3
7.1	Dérivation	3
7.1.1	Définitions	3
7.1.1.1	Dérivabilité en un point	3
7.1.1.2	Interpretation géométrique	4
7.1.1.3	Utilisation des coordonnées	4
7.1.1.4	Fonction dérivée	4
7.1.2	Opérations	4
7.1.2.1	linéarité	4
7.1.2.2	Composé avec une application linéaire	5
7.1.2.3	Application bilinéaire	5
7.1.2.4	Composée	5
7.1.3	Dérivées d'ordre supérieur, fonction de classe C^k	5
7.1.3.1	interpretation de la dérivée seconde	6
7.1.3.2	Formule de Leibnitz	6
7.1.3.3	Composition	6
7.2	Intégrales	6
7.2.1	Définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction $\mathcal{CM}$	6
7.2.2	Linéarité et additivité de l'intégrale	7
7.2.3	Sommes de Riemann	7
7.2.4	Inégalité triangulaire	8
7.2.5	Intégrale et primitive	8
7.2.6	Techniques d'intégration	8
7.2.6.1	Changement de variables	8
7.2.6.2	Intégration par parties	9
7.2.7	Inégalité des accroissements finis	9
7.2.8	Formules de Taylor	9
7.2.8.1	Taylor avec reste intégrale	9
7.2.8.2	Taylor avec reste Lagrange	10
7.2.8.3	Taylor-Young	10
7.2.8.4	Comparaison des trois formules	10
7.3	Arcs paramétrés	10

Chapitre 7

Fonction vectorielles à variable réelle

7.1 Dérivation

7.1.1 Définitions

7.1.1.1 Dérivabilité en un point

Definition 7.1.1

Soit t_0 un point intérieur de I . On dit que $f : I \rightarrow F$ est dérivable au point t_0 si $F_{t_0} : t \mapsto \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ admet une limite quand $t \rightarrow t_0$ et $t \in I \setminus \{t_0\}$. Cette limite si elle existe est appelé vecteur dérivée de f au point t_0 et notée $\ell = f'(t_0)$.

On peut donc dire que f est dérivable au point t_0 si et seulement si il existe un vecteur $\ell \in F$ et une fonction ϕ définie sur un voisinage pointé V de t_0 tel que :

$$\begin{cases} \forall t \in V, & f(t) = f(t_0) + (t - t_0)\ell + (t - t_0)\phi(t) \\ \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in V}} \phi(t) = 0 \end{cases}$$

En particulier si f est dérivable au point t_0 alors au voisinage de t_0 , on a :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + o((t - t_0))$$

ce qui revient à dire que pour h voisin de 0, on a :

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + hf'(t_0) + o(h)$$

En particulier :

Proposition 7.1.1. f dérivable au point t_0 alors f est continue au point t_0

Definition 7.1.2

Soit $t_0 \in I$ tel qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $[t_0, t_0 + \alpha] \subset I$. On dit que f est dérivable au point t_0 à droite si $t \mapsto F_{t_0}(t) = \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ admet une limite quand t tends vers t_0 et $t > t_0$. Si c'est le cas on note $f'_d(t_0)$ cette limite nommé vecteur dérivé à droite.

On définit aussi la dérivabilité à gauche avec la notation $f'_g(t_0)$.

Proposition 7.1.2. Soit t_0 un point intérieur à I , alors f est dérivable au point t_0 si et seulement si f est dérivable au point t_0 à droite et à gauche et $f'_d(t_0) = f'_g(t_0)$.

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et l'application : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); t \mapsto \exp(tA)$
 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = A \exp(tA)$.

En effet, soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(t_0 + h) - f(t_0) &= \exp(t_0 A)(\exp(hA) - I_n) \\ &= \exp(t_0 A) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{h^k A^k}{k!} \\ &= hA \exp(t_0 A) + \exp(t_0 A) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{h^k A^k}{k!} \end{aligned}$$

Donc si $h \in \mathbb{R}^*$ alors :

$$\frac{1}{h}(f(t_0 + h) - f(t_0)) = A \exp(t_0 A) + \exp(t_0 A) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{h^{k-1} A^k}{k!}$$

Si on pose $\varphi(h) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{h^{k-1} A^k}{k!}$, on a $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$ car (on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme d'algèbre) :

$$\begin{aligned} \|\varphi(h)\| &\leq \|\exp(t_0 A)\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|h|^{k-1} \|A\|^k}{k!} \\ &= \|\exp(t_0 A)\| \frac{1}{|h|} (\exp(|h| \|A\|) - |h| \|A\| - 1) \\ &\sim \frac{\|\exp(t_0 A)\| \|A\|^2}{2} |h| \end{aligned}$$

de sorte que $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$.

Par définition de la dérivabilité, et compte tenu de

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + h \exp(t_0 A) + h \varphi(h) \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0,$$

on a f dérivable au point t_0 et $f'(t_0) = A \exp(t_0 A)$.

7.1.1.2 Interpretation géométrique

Si (I, f) représente un mouvement $f'(t_0)$ est le vecteur vitesse instantanée à l'instant t_0 .

7.1.1.3 Utilisation des coordonnées

Si F est de dimension p non nulle et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F , notons $f_k, k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ les fonctions coordonnées de f dans $\mathcal{B}$, alors :

Proposition 7.1.3. f est dérivable au point t_0 si et seulement si chaque f_k est dérivable au point t_0 , auquel cas $f(t_0) = \sum_{k=1}^p f'_k(t_0) e_k$.

C'est une conséquence immédiate de la propriété générale sur les limites en dimension finie.

7.1.1.4 Fonction dérivée

Definition 7.1.3

f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point intérieur à I et à droite (resp. gauche) des éventuelles bornes finies de I .

Si $f : I \rightarrow F$ dérivable sur I , l'application $f' : I \rightarrow F, t \mapsto f'(t)$ s'appelle fonction dérivée de f .

7.1.2 Opérations

7.1.2.1 linéarité

Proposition 7.1.4. Soient f et g deux applications d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers F .

Si t_0 est un point intérieur à I , alors, si f et g sont dérivables au point t_0 alors $f + \lambda g$ est dérivable au point t_0 et $(f + \lambda g)'(t_0) = f'(t_0) + \lambda g'(t_0)$.

Si f et g sont dérivables sur I alors $f + \lambda g$ dérivable sur I et $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$

On a les mêmes résultats pour la dérivabilité au point t_0 à droite (rep. à gauche) avec la condition $[t_0, t_0 + \alpha[\subset I$ et $\alpha > 0$ (resp. $]t_0 - \alpha, t_0] \subset I$).

7.1.2.2 Composé avec une application linéaire

F et G sont deux evn de dimension finie et $L \in \mathcal{L}(F, G)$ et $f : I \rightarrow F$ une application.

Si f est dérivable au point t_0 alors $L \circ f$ est dérivable au point t_0 et $(L \circ f)'(t_0) = L(f'(t_0))$.

Si f est dérivable sur I alors $L \circ f$ est dérivable sur I et $(L \circ f)' = L \circ f'$.

Exemple : Soit A une matrice donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et pour tout nombre réel t , on pose : $f(t) = \text{tr}(tA)$. Alors f est dérivable et $f'(t) = \text{tr}(A)$. Chose qu'on retrouve en remarquant que $f(t) = t \text{tr}(A)$

7.1.2.3 Application bilinéaire

Proposition 7.1.5. E, F et G sont trois espaces vectoriels normés et I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \rightarrow E$ et $g : I \rightarrow F$ deux applications et $B : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire. Soit $h = B(f, g)$, l'application de I vers G définie par ;

$$\forall t \in I, h(t) = B(f, g)(t) = B(f(t), g(t)).$$

Alors, pour tout $t_0 \in I$, si f et g dérivables en t_0 alors $B(f, g)$ est dérivable au point t_0 et :

$$(B(f, g))'(t_0) = B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0)).$$

En particulier si E est un espace euclidien et $f, g : I \rightarrow E$ dérivables au point t alors $\langle f, g \rangle$ est dérivable au point t et $\langle f, g \rangle'(t) = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle$, de même $\|f\|^2$ est dérivable au point t et $\|f\|^{2'}(t) = \langle f(t), f'(t) \rangle$

7.1.2.4 Composée

I et J sont deux intervalles, $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I tel que $\varphi(I) \subset J$ et $f : J \rightarrow F$ dérivable, alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur I et $(f \circ \varphi)' = f'(\varphi) \circ \varphi'$

7.1.3 Dérivées d'ordre supérieur, fonction de classe C^k

Definition 7.1.4

Si $f : I \rightarrow F$ une application. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f^{(n)}$ si elle existe comme suit :

- Pour $n = 0$, on définit : $f^{(0)} = f$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on définit l'application $f^{(n)} : I \rightarrow F$ et si $f^{(n)}$ est dérivable, alors : $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

On dit que f est au moins n fois dérivable sur I si les $f^{(k)}$ existent pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

On dit que f est infiniment dérivable sur I , si f est n fois dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$

Proposition 7.1.6. Soit $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$ tel que $p + q = n$ et $f : I \rightarrow F$ une application. Si f est au moins n fois dérivable et $m, q \in \mathbb{N}$ tel que $m + q = n$ alors $f^{(p)}$ et $f^{(q)}$ existent et

$$(f^{(p)})^{(q)} = (f^{(q)})^{(p)} = f^{(p+q)} = f^{(n)}.$$

Definition 7.1.5

Soit $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est de classe C^n sur I si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I .

On dit que f est de classe C^∞ sur I si f est de classe C^n sur I , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : que f est de classe C^∞ si et seulement si f est infiniment dérivable.

Notations : On note :

$D^n(I, F)$: l'ensemble des applications de I vers F , n fois dérivables.

$C^n(I, F)$: l'ensemble des applications de I vers F de classe C^n .

$D^\infty(I, F)$: l'ensemble des applications infiniment dérivables ;

$C^\infty(I, F)$: l'ensemble des applications C^∞

Remarques :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^\infty(I, F) \subset D^{n+1}(I, F) \subset D^n(I, F) \\ C^\infty(I, F) \subset C^{n+1}(I, F) \subset C^n(I, F) \\ C^n(I, F) \subset D^n(I, F) \\ D^\infty(I, F) = C^\infty(I, F) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D^n(I, F) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I, F) \end{array} \right.$$

2. $D^n(I, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^I et $D^{n+1}(I, F)$ et $C^n(I, F)$ sont des sev de $D^n(I, F)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $f : I \rightarrow F$ une application. Si F est muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et si $(f_k)_{1 \leq k \leq p}$ sont les composantes de f alors f est n fois dérivable (rep. de classe C^n) si et seulement si tous les f_k sont n fois dérivables (resp. de classe C^n), auquel cas on a $(\forall m \in \llbracket 0, n \rrbracket) \quad f^{(m)} = \sum_{k=1}^p f_k^{(m)} e_k$.

7.1.3.1 interprétation de la dérivée seconde

Si $f : t \mapsto f(t)$ est la loi horaire d'un mouvement sur F dans l'intervalle de temps I alors si f est deux fois dérivable au point $t_0 \in I$, le vecteur $f''(t_0)$ est le vecteur accélération à l'instant t_0 .

7.1.3.2 Formule de Leibnitz

Proposition 7.1.7. E, F, G sont des espaces vectoriels normés de dimensions finies et $B : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire.

Soit $f : I \rightarrow E$ et $g : I \rightarrow F$ deux applications n fois dérivables (resp. de classe C^n) alors $B(f, g)$ est n fois dérivable (resp. de classe C^n) et :

$$(B(f, g))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(f^{(n-k)}, g^{(k)})$$

7.1.3.3 Composition

Proposition 7.1.8. Soit $f : J \rightarrow F$ et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\varphi(I) \subset J$. Si φ est n fois dérivables (resp. de classe C^n) sur I et f est n fois dérivable (resp. de classe C^n) sur J alors $f \circ \varphi$ est n fois dérivable (resp. de classe C^n) sur I .

7.2 Intégrales

Dans tout ce qui suit F est un espace vectoriel de dimension finie non nulle et $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$.

7.2.1 Définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction $\mathcal{CM}$

Definition 7.2.1

Soit $f : [a, b] \rightarrow F$ une application. On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si les fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_p$ de f relativement à une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ sont continues par morceaux sur $[a, b]$.

Cette définition a un sens car si $\hat{\mathcal{B}} = (\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_p)$ est une autre base de F et $P = \mathcal{P}_{\hat{\mathcal{B}}}^{\mathcal{B}}$ la matrice de passage alors si $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p$ sont les fonctions coordonnées de f relativement à $\hat{\mathcal{B}}$ alors :

$$f = \sum_{k=1}^p f_k e_k = \sum_{k=1}^p \hat{f}_k \hat{e}_k$$

et

$$(1) \quad \forall t \in I, \quad \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_p(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \widehat{f}_1(t) \\ \vdots \\ \widehat{f}_p(t) \end{pmatrix}$$

Montre que les f_k sont $\mathcal{CM}$ sur $[a, b]$ si et seulement si les $\widehat{f}_k$ le sont.

Remarques :

1. On note $\mathcal{CM}([a, b], F)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ vers F . C'est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $F^{[a, b]}$ des applications de $[a, b]$ vers F .
2. Si I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, une application $f : I \rightarrow F$ est continue par morceaux sur I si f est continue par morceaux sur tout segment contenu dans I . On note $\mathcal{CM}(I, F)$ le sous-espace vectoriel de telles applications.

Le (1) ci dessus montre que l'on a :

$$\begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_p(t) dt \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \int_a^b \widehat{f}_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^b \widehat{f}_p(t) dt \end{pmatrix}$$

et par suite :

$$\sum_{k=1}^p \left(\int_a^b f_k(t) dt \right) e_k = \sum_{k=1}^p \left(\int_a^b \widehat{f}_k(t) dt \right) \widehat{e}_k$$

ce qui permet de donner :

Proposition-Définition 7.2.1. Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], F)$ de coordonnées $f_1, \dots, f_p$ relativement à une base $\mathcal{B}$ de F . Alors le vecteur :

$$\sum_{k=1}^p \left(\int_a^b f_k(t) dt \right) e_k$$

ne dépends pas de la base $\mathcal{B}$. On l'appelle l'intégrale de f sur le segment $[a, b]$

Notation : On note $\int_{[a, b]} f$ ou $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t) dt$

7.2.2 Linéarité et additivité de l'intégrale

Proposition 7.2.1. 1. Linéarité : Pour tout $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], F)$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a : $\int_a^b (f + \lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$

2. Relation de Chasles : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{CM}(I, F)$ et $a, b, c \in I$, alors : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Proposition 7.2.2. E et F sont deux espaces vectoriels normés de dimensions finies.

Soit $L : E \rightarrow F$ une application linéaire et $f : [a, b] \rightarrow E$ une application continue par morceaux, alors $L \circ f$ est continue par morceaux de $[a, b]$ vers F et

$$\int_a^b L \circ f = L \left(\int_a^b f \right)$$

7.2.3 Sommes de Riemann

Proposition 7.2.3. Pour tout $f \in \mathcal{CM}([a, b], F)$, on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right)$$

Preuve. Il suffit de raisonner sur les fonctions coordonnées relativement à une base de F . ■

Remarque : Valable si on remplace $\sum_{k=0}^{n-1}$ par $\sum_{k=1}^n$

7.2.4 Inégalité triangulaire

Proposition 7.2.4. Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], F)$, alors : $\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left\| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right\| \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right\|$$

Le résultat en découle par passage à la limite. ■

7.2.5 Intégrale et primitive

Definition 7.2.2

Soit $f : I \rightarrow F$ une application. On appelle primitive de f sur I toute application $\Phi : I \rightarrow F$ tel que Φ est dérivable sur I et $\Phi' = f$ sur I .

Proposition 7.2.5. si $(f_k)_{1 \leq k \leq p}$ sont les composantes de f dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, donc : $f = \sum_{k=1}^p f_k e_k$, et Φ_k une primitive de f_k sur I , pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ alors $\Phi = \sum_{k=1}^p \Phi_k e_k$ est une primitive de f sur I .

Preuve. En posant $\Phi = \sum_{k=1}^p \Phi_k e_k$, on sait que : $\Phi' = \sum_{k=1}^p \Phi'_k e_k$ et comme $\Phi'_k = f_k$, on a $\Phi' = \sum_{k=1}^p f_k e_k = f$. ■

Proposition 7.2.6. Soit $f : I \rightarrow F$ une application. Alors :
Si Φ_1 et Φ_2 sont deux primitives de f sur I alors $\Phi_2 - \Phi_1 = C$ où C est un vecteur constant de F .
Si Φ est une primitive de f alors les primitives de f sont $\Phi_c = \Phi + c$ avec $c \in F$

Preuve. Il suffit de raisonner en utilisant les composantes et le même résultat pour les fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$, vu en première année. ■

Proposition 7.2.7. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \rightarrow F$ une application continue sur I . l'application F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f . C'est l'unique primitive de f qui s'annule au point a .

Preuve. Il suffit de raisonner en utilisant les composantes et le même résultat pour les fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$, vu en première année. ■

7.2.6 Techniques d'intégration

7.2.6.1 Changement de variables

Théorème 7.2.1. I et J sont deux intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \rightarrow J$ une application de classe C^1 . Soit $f : J \rightarrow F$

une application continue, alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s) ds = \int_a^b \varphi'(t) \cdot f(\varphi(t)) dt$$

Preuve. Comme f est continue elle admet une primitive Φ sur J et on a :

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s) ds &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \Phi'(s) ds \\ &= \Phi(\varphi(b)) - \Phi(\varphi(a)) \\ &= \int_a^b (\Phi \circ \varphi)'(t) dt \\ &= \int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt \end{aligned}$$

■

7.2.6.2 Intégration par parties

E, F et G sont des espaces vectoriels normés de dimensions finies.

Théorème 7.2.2. Soit $B : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire et $u : I \rightarrow E$ et $v : I \rightarrow F$ des applications de classe C^1 . Alors :

$$\forall (a, b) \in I^2 \quad \int_a^b B(u'(t), v(t)) = [B(u(t), v(t))]_a^b - \int_a^b B(u(t), v'(t)) dt$$

Preuve. Conséquence immédiate de la formule de dérivation de $B(u, v)$.

■

7.2.7 Inégalité des accroissements finis

Théorème 7.2.3. Soit $f : [a, b] \rightarrow F$ une application de classe C^1 et soit

$$M = \sup_{t \in [a, b]} \|f'(t)\|$$

Alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a)$$

Preuve. Comme f est de classe C^1 sur $[a, b]$, on a $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$, donc : $\|f(b) - f(a)\| = \|\int_a^b f'(t) dt\| \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt \leq \int_a^b M dt = M(b - a)$.

■

Remarques :

1. Si M est un majorant de $\|f'\|([a, b])$, l'inégalité est valable.
2. Si $f : I \rightarrow F$ de classe C^1 et f' est bornée sur I alors on a :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad \|f(y) - f(x)\| \leq M|y - x|$$

pour tout majorant M de $\|f'\|$ sur I .

3. Il est possible de ne jamais avoir l'égalité : exemple $f(t) = e^{it}$ de $[0, 2\pi]$ vers $\mathbb{C}$. Si on a une égalité il vient : $\|f(2\pi) - f(0)\| = M \cdot 2\pi$ par suite $M = 0$, chose fautive car $\|f'(t)\| = 1$, montre que $M \geq 1$.

7.2.8 Formules de Taylor

7.2.8.1 Taylor avec reste intégrale

Théorème 7.2.4. Soit $f : [a, b] \rightarrow F$ de classe C^{n+1} alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

7.2.8.2 Taylor avec reste Lagrange

Théorème 7.2.5. Soit $f : I \rightarrow F$ de classe C^{n+1} . Si $f^{(n+1)}$ est bornée sur I alors :

$$\forall (a, b) \in I^2 \quad \left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in I} \|f^{(n+1)}(t)\|$$

Remarque : C'est une généralisation de l'inégalité des accroissements finis.

7.2.8.3 Taylor-Young

Théorème 7.2.6. Soit $f : I \rightarrow F$ de classe C^n et $a \in I$, alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

ε étant définie sur $I \cap]a - \alpha, a + \alpha[$, avec $\alpha > 0$

Remarque : On écrit :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

et on l'appelle un développement limité de f au voisinage de a d'ordre n .

7.2.8.4 Comparaison des trois formules

La formule de Taylor-Young est locale : comportement asymptotique de f au voisinage de a . Les deux autres formules sont globales : comportement de f sur tout l'intervalle, elles nécessitant plus d'hypothèses.

7.3 Arcs paramétrés

Un arc paramétré est un couple $\gamma = (I, f)$ où I est un intervalle et f une application de I vers F . Si f est de classe C^k , on dit que γ est un arc de classe C^k .

Le sous ensemble $f(I)$ de F s'appelle support de l'arc paramétré γ

Si $x \in f(I)$ et $f^{-1}(\{x\})$ est fini, son cardinal s'appelle la multiplicité du point x .

Si γ est de classe C^1 , un point de paramètre est dit régulier si $f'(t) \neq 0$. Si c'est le cas alors $f'(t)$ est un vecteur tangent au support.