

# Table des matières

|          |                                                                                                            |          |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>6</b> | <b>Intégrales généralisées, séries numériques.</b>                                                         | <b>3</b> |
| 6.1      | Intégrales généralisées                                                                                    | 3        |
| 6.1.1    | Fonctions continues par morceaux : Rappels                                                                 | 3        |
| 6.1.1.1  | Définitions                                                                                                | 3        |
| 6.1.1.2  | Exemples et contre-exemples                                                                                | 4        |
| 6.1.2    | Intégrales généralisées                                                                                    | 4        |
| 6.1.2.1  | Définition                                                                                                 | 4        |
| 6.1.2.2  | Exemples                                                                                                   | 4        |
| 6.1.2.3  | Propriétés                                                                                                 | 5        |
| 6.1.3    | Cas des fonctions positives                                                                                | 5        |
| 6.1.4    | Intégrales de références usuelles                                                                          | 6        |
| 6.1.4.1  | L'intégrale $\int_0^1 \ln t dt$                                                                            | 6        |
| 6.1.4.2  | L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ , $\lambda$ réel                                          | 6        |
| 6.1.4.3  | Les intégrales de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$ | 6        |
| 6.1.5    | Conséquences : Les tests $t^\alpha$ et $ t-a ^\alpha$                                                      | 7        |
| 6.1.5.1  | Exemples                                                                                                   | 7        |
| 6.1.6    | Techniques d'intégration                                                                                   | 8        |
| 6.1.6.1  | Changement de variable                                                                                     | 8        |
| 6.1.6.2  | Intégration par parties                                                                                    | 8        |
| 6.2      | Séries numériques                                                                                          | 9        |
| 6.2.1    | Rappels                                                                                                    | 9        |
| 6.2.2    | Séries à termes positifs                                                                                   | 10       |
| 6.2.2.1  | Rappel                                                                                                     | 10       |
| 6.2.2.2  | Critères de comparaison                                                                                    | 10       |
| 6.2.3    | Série de référence                                                                                         | 10       |
| 6.2.3.1  | Séries géométriques                                                                                        | 10       |
| 6.2.3.2  | Série de Riemann                                                                                           | 10       |
| 6.2.4    | Regle de D'Alembert pour les séries numériques                                                             | 11       |
| 6.2.5    | Séries alternées                                                                                           | 11       |
| 6.2.6    | Séries absolument convergentes                                                                             | 12       |
| 6.3      | Sommation des relations de comparaison. Comparaison séries et intégrales.                                  | 12       |
| 6.3.1    | Sommation des relations de comparaison pour les séries                                                     | 13       |
| 6.3.2    | Sommation des relations de comparaison pour les intégrales                                                 | 13       |
| 6.3.3    | Série et intégrales                                                                                        | 14       |
| 6.3.3.1  | Transformation d'une intégrale en une série                                                                | 14       |
| 6.3.3.2  | Comparaison série intégrale                                                                                | 14       |



# Chapitre 6

## Intégrales généralisées, séries numériques.

Les chapitres en questions sont déjà fait en première année. Vue leur importance en deuxième année, on propose des de donner les rappels essentiels sur les deux chapitres.

### 6.1 Intégrales généralisées

Le chapitre des intégrales généralisée ou intégrale sur un intervalle quelconque est traité en première année. Le cadre était celui des application  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  continues par morceaux d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{K}$  (avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .)

#### 6.1.1 Fonctions continues par morceaux : Rappels

La notion de fonction intégrable sur un intervalle  $I$  est plus vaste que celle des fonctions continues par morceaux intégrales, mais le programme des classes préparatoires se limite à ces fonctions. Vu l'importance de cette notion par la suite, on donne des rappels dans ce sous-paragraphe.

##### 6.1.1.1 Définitions

On considère des applications  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

On rappelle que si  $[a, b]$  est un segment de  $\mathbb{R}$ , on appelle subdivision de  $[a, b]$  toute suite  $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$  de nombres réels tel que :  $a = a_0 \leq \dots \leq a_n = b$ .

Si  $\mathcal{A} = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$  et  $\mathcal{B} = (b_k)_{0 \leq k \leq m}$ , on dit que  $\mathcal{A}$  est moins fine que  $\mathcal{B}$  si  $\{a_0, \dots, a_n\} \subset \{b_0, \dots, b_m\}$ .

##### Definition 6.1.1

Soit  $[a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une application de  $[a, b]$  vers  $\mathbb{K}$ . On dit que  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$  s'il existe une subdivision  $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$  de  $[a, b]$  tel que pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $f$  est continue sur  $]a_k, a_{k+1}[$  et se prolonge en une fonction continue sur  $[a_k, a_{k+1}]$ . Une telle subdivision est appelée subdivision adaptée à  $f$ .

**Remarques.** On fait les remarques suivantes :

1. Si  $f$  est  $\mathcal{CM}$  sur  $[a, b]$  et  $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une subdivision adaptée alors  $f$  admet une limite à droite et une limite à gauche en tout point  $a_k$  tel que  $0 < k < n$  et une limite à droite au point  $a$  et une limite à gauche au point  $b$ .
2. Si  $\mathcal{A} = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une subdivision adaptée à une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $[a, b]$  il en est de même pour toute subdivision  $\mathcal{B} = (b_k)_{0 \leq k \leq m}$  plus fine que  $\mathcal{A}$ .
3. Si  $f$  est une fonction de  $[a, b]$  vers  $\mathbb{K}$ , continue par morceaux, alors la subdivision la moins fine adaptée à  $f$  est celle formée par  $a, b$  et les points de discontinuité de  $f$ . En particulier, si  $f$  est continue sur  $]a, b[$  alors cette subdivision est  $(a, b)$ .

### 6.1.1.2 Exemples et contre-exemples

1. Soit  $f : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto E(x)$  (partie entière). Alors  $f$  est continue par morceaux sur  $[-2, 1]$  : les points de discontinuité de  $f$  sont :  $-1, 0$  et  $1$ . On voit que :

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

En particulier les limites à droites et à gauche aux points de discontinuité sont :

$$\begin{cases} f(-1-) = -2 \\ f(-1+) = -1 \end{cases} ; \begin{cases} f(0-) = -1 \\ f(0+) = 0 \end{cases} ; f(1-) = 0.$$

2. L'application  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  n'est pas continue par morceaux car  $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$  n'admet pas de limite quand  $x$  tends vers 0 à droite.

3. L'application  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  n'est pas continue par morceaux car :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ .

#### Definition 6.1.2

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  une application d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{K}$ . On dit que  $f$  est continue par morceaux si la restriction de  $f$  à tout segment contenu dans  $I$  est continue par morceaux.

**Proposition 6.1.1.** Toute application  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  continue sur  $I$  est continue par morceaux sur  $I$ .

**Notation :** On notera  $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$  l'ensemble des applications de  $I$  vers  $\mathbb{K}$  continues par morceaux sur  $I$ .

**Exemples.**  $x \mapsto \ln(x)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

L'application  $f$  de  $\mathbb{R}_+$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  n'est pas continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$  car elle n'est pas  $\mathcal{CM}$  sur  $[0, 1]$  : elle n'a pas de limite en 0 à droite.

## 6.1.2 Intégrales généralisées

Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  continue par morceaux est intégrable sans aucun soucis. Le problème se pose si à la place du segment  $[a, b]$  on a un intervalle  $I$  non borné ou un intervalle de la forme  $]a, b[$  ou  $]a, b]$  ou  $[a, b[$ , c'est-à-dire un intervalle borné mais non fermé. Une intégrale d'une fonction continue par morceaux sur de tels intervalle quand elle existe s'appelle intégrale généralisée ou impropre.

### 6.1.2.1 Définition

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  de bornes  $\alpha$  et  $\beta$  finies ou infinies. Soit  $f$  une application de  $I$  vers  $\mathbb{K}$  et  $a \in I$ . On considère l'application  $F_a : I \rightarrow \mathbb{K}$  tel que  $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$  pour tout  $x \in I$ . Si  $F_a$  admet une limite  $L_1$  en  $\alpha$  à droite et une limite  $L_2$  en  $\beta$  à gauche on dit que l'intégrale  $\int_I f$  converge et on pose :  $\int_I f = L_2 - L_1$ . On note aussi  $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ . Ainsi  $\int_\alpha^\beta f(t)dt = F_a(\beta-) - F_a(\alpha+)$ . On écrit aussi :  $\int_\alpha^\beta f(t)dt = [F_a(t)]_\alpha^\beta = F_a(\beta-) - F_a(\alpha+)$ . Si  $b \in I$  on remarque que pour tout  $x \in I$ , on a  $F_b(x) = \int_b^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_b^a f(t)dt$  donc  $F_b = F_a + c$  où  $c$  est une constante, ce qui permet de dire que la définition ci-dessus et la valeur de  $\int_I f$  quand elle existe ne dépendent que de  $I$  et  $f$ .

### 6.1.2.2 Exemples

**Exemples. 1)**  $f(x) = \ln x$  pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $F_1(x) = \int_1^x \ln t dt = x \ln x - x$  vérifie  $F(1-) = F(1) = -1$  et  $F(0+) = 0$  donc  $\int_0^1 \ln t dt = -1$

**Exemples. 2)** Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  on pose  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } 1 < x \end{cases}$ . On voit que  $f$  est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$  car continue.  $F_1(x) = \int_1^x f(t) dt = \begin{cases} 2\sqrt{x} - 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si } 1 < x \end{cases}$ , donc  $F_1(+\infty) = 1$  et  $F_1(0+) = -1$ , donc  $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1 + 1 = 2$

### 6.1.2.3 Propriétés

Dans tout ce qui suit  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  de bornes éventuellement infinies  $a$  et  $b$ .

**Proposition 6.1.2.** Soit  $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$  et  $c \in I$ . L'intégrale  $\int_a^b f$  converge si et seulement si les intégrales  $\int_a^c f$  et  $\int_c^b f$  convergent, auquel cas on a  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

**Proposition 6.1.3.** Soient  $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Si les intégrales  $\int_I f$  et  $\int_I g$  convergent alors  $\int_I (f + \lambda g)$  converge et  $\int_I (f + \lambda g) = \int_I f + \lambda \int_I g$

**Proposition 6.1.4.** Soit  $f \in \mathcal{MC}(I, \mathbb{K})$  alors  $|f| \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$  et si  $\int_I |f|$  converge il en est de même de  $\int_I f$  et dans ce cas on a  $|\int_I f| \leq \int_I |f|$

#### Definition 6.1.3

Soit  $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ . Si  $\int_I |f|$  converge on dit que l'intégrale  $\int_I f$  est absolument convergente

#### Definition 6.1.4

Soit  $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ . On dit que  $f$  est intégrable ou sommable sur  $I$  si  $\int_I f$  est absolument convergente.

### 6.1.3 Cas des fonctions positives

Dans tout ce qui suit  $f$  est une application d'un intervalle  $I$  vers  $\mathbb{R}$ , positive et continue par morceaux sur  $I$ .

**Proposition 6.1.5.**  $I = [a, b[$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  avec  $a < b$ . Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  positive et  $\mathcal{CM}$  sur  $[a, b[$ . Alors l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente si et seulement si  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$  si et seulement si l'ensemble

$$X_f = \left\{ \int_a^x f(t) dt / x \in [a, b[ \right\}$$

est majoré, auquel cas on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \sup(X_f).$$

**Exemples.** l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} e^{-x \cos^2 x} dx$  est divergente car la fonction  $x \mapsto f(x) = e^{-x \cos^2 x}$  étant continue sur  $\mathbb{R}_+$  il suffit de prouver que  $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  n'est pas majorée, et pour cela, on considère pour tout  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 10$  les réels  $a_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$  et  $b_n = \frac{\pi}{2} + n\pi + \frac{1}{n}$  et posons  $I_n = \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx$ . On va démontrer que la série  $\sum I_n$  est divergente et cela donnera en particulier le fait que la suite  $\left( \int_0^{b_n} f(t) dt \right)$  est non

majorée car son terme général est majoré par une somme partielle de la série. La fonction  $x \mapsto \cos^2 x$  est croissante sur l'intervalle  $[a_n, b_n]$  donc la fonction  $x \mapsto -x \cos^2 x$  est décroissante sur cet intervalle et par suite pour tout  $x \in [a_n, b_n]$ , on a  $f(x) \geq f(b_n)$  et par suite  $I_n \geq \frac{1}{n} f(b_n)$ . Or un simple calcul montre que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = 1$ , donc la série  $\sum I_n$  est divergente or sa somme partielle  $S_n = \sum_{k=10}^n I_k \leq \int_0^{b_n} f(x) dx$ , ce qui prouve que  $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  n'est pas majorée donc l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  est divergente.

**Remarques.** Généralement, si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R}_+)$  alors :

1)  $f$  est intégrable sur  $I$  si et seulement si l'ensemble

$$X = \left\{ \int_J f/J \text{ segment contenu dans } I \right\}$$

est majoré, auquel cas  $\sup(X) = \int_I f$ .

2) On note  $a$  et  $b$  les bornes éventuellement infinies de  $I$ . S'il existe une suite  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$  de segments contenus dans  $I$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on aie :

$$a_{n+1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n+1}$$

et  $\lim a_n = a$  et  $\lim b_n = b$  et si la suite  $\left( \int_{a_n}^{b_n} f(t) dt \right)$  est majorée alors  $f$  est intégrable et

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(t) dt$$

**Proposition 6.1.6.** Soit  $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R}_+)$ .

1. Si  $f \leq g$  alors  $\int_I g$  convergente  $\Rightarrow \int_I f$  convergente.
2. Si  $I = [a, b[$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $a < b \leq +\infty$  (resp.  $I = ]a, b]$  avec  $-\infty \leq a < b$  et  $b \in \mathbb{R}$ ) et  $f = O(g)$  au voisinage de  $b$  à gauche (resp. au voisinage de  $a$  à droite) alors :  $\int_a^b g(t) dt$  converge  $\Rightarrow \int_a^b f(t) dt$  converge.
3. Si  $I = [a, b[$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $a < b \leq +\infty$  (resp.  $I = ]a, b]$  avec  $-\infty \leq a < b$  et  $b \in \mathbb{R}$ ) et  $f = o(g)$  au voisinage de  $b$  à gauche (resp. au voisinage de  $a$  à droite) alors :  $\int_a^b g(t) dt$  converge  $\Rightarrow \int_a^b f(t) dt$  converge.
4. Si  $I = ]a, b[$  (resp.  $I = [a, b]$ ) et  $f \sim g$  au voisinage de  $b$  à gauche (resp. au voisinage de  $a$  à droite) alors les intégrales  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_a^b g(t) dt$  sont de même nature.

**Remarque.** Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est continue par morceaux négative sur  $I$ , en étudiant  $-f$  on trouve des résultats similaires à ceux des fonctions positives.

## 6.1.4 Intégrales de références usuelles

### 6.1.4.1 L'intégrale $\int_0^1 \ln t dt$

L'application  $t \mapsto \ln t$  est continue négative sur  $]0, 1]$ . L'intégrale  $\int_0^1 \ln t dt$  est convergente de valeur  $-1$ . Précisément,  $\int_0^1 \ln t dt = [t \ln t - t]_0^1 = -1$

### 6.1.4.2 L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ , $\lambda$ réel

**Proposition 6.1.7.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$  est convergente si et seulement si  $\lambda > 0$ , auquel cas, on a  $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$ .

**Preuve.** En effet pour tout  $x > 0$ , on a  $F(x) = \int_0^x e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda x})$ , donc  $F$  admet une limite en  $+\infty$  si et seulement si  $\lambda > 0$ , auquel cas, cette limite est  $\frac{1}{\lambda}$ . ■

### 6.1.4.3 Les intégrales de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$

**Proposition 6.1.8.** Soit  $\alpha$  un nombre réel, alors :

1. L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$  est convergente si et seulement si  $\alpha > 1$ .
2. Si  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$  alors  $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$  est convergente si et seulement si  $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$  est convergente si et seulement si  $\alpha < 1$ .

### 6.1.5 Conséquences : Les tests $t^\alpha$ et $|t - a|^\alpha$

**Proposition 6.1.9.** Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{K}$  une application continue par morceaux : S'il existe un nombre réel  $\alpha > 1$  tel que  $t^\alpha f(t)$  est bornée sur un intervalle de la forme  $[b, +\infty[$  ( $b \geq a$ ) alors l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  est absolument convergente. C'est le cas en particulier si  $t \mapsto t^\alpha f(t)$  admet une limite  $\ell$  ( $\ell \in \mathbb{K}$ ), quand  $t$  tends vers  $+\infty$ .

**Preuve.** Supposons  $t \mapsto t^\alpha f(t)$  bornée sur  $[b, +\infty[$ , cela veut dire que  $|f(t)| = O(t^{-\alpha})$  au voisinage de  $+\infty$ . D'après les critères de comparaison ci-dessus on a la convergence de l'intégrale  $\int_b^{+\infty} |f(t)| dt$ . Si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t)$  existe dans  $\mathbb{K}$  alors  $t \mapsto t^\alpha f(t)$  est bornée au voisinage de  $+\infty$ . C'est donc un cas particulier du précédent. ■

Pour les deux propositions qui suivent  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels tel que  $a < b$ .

**Proposition 6.1.10.** Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{K}$  une application continue par morceaux : S'il existe un nombre réel  $\alpha < 1$  tel que  $(b-t)^\alpha f(t)$  est bornée sur un intervalle de la forme  $[c, b[$  ( $a \leq c < b$ ) alors l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  est absolument convergente. C'est le cas en particulier si  $t \mapsto (b-t)^\alpha f(t)$  admet une limite  $\ell$  ( $\ell \in \mathbb{K}$ ), quand  $t$  tends vers  $b$  à gauche.

**Proposition 6.1.11.** Soit  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  une application continue par morceaux : S'il existe un nombre réel  $\alpha < 1$  tel que  $(t-a)^\alpha f(t)$  est bornée sur un intervalle de la forme  $]a, c]$  ( $a < c \leq b$ ) alors l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  est absolument convergente. C'est le cas en particulier si  $t \mapsto (t-a)^\alpha f(t)$  admet une limite  $\ell$  ( $\ell \in \mathbb{K}$ ), quand  $t$  tends vers  $a$  à droite.

#### 6.1.5.1 Exemples

**Exemples. 1)** Convergence de l'intégrale  $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ . Tout d'abord l'application  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$  est  $\mathcal{CM}$  sur  $]0, 1[$ . Au voisinage de 0 à droite, on a  $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$  donc l'intégrale  $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$  est convergente. Au voisinage de 1 à gauche, on a  $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{1-x}}$  donc l'intégrale  $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$  converge. En conclusion, l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$  est convergente.

**Exemples. 2)** Convergence de l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x(1+\cos^2 x)}} dx$ . L'application  $f : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x(1+\cos^2 x)}}$  est  $\mathcal{CM}$  sur  $]0, 1]$ . Le problème se pose uniquement au voisinage de 0 à droite. Pour tout  $x \in ]0, 1]$ , on a :  $|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ , donc  $x \mapsto \sqrt{x} f(x)$  est bornée sur  $]0, 1]$ , d'où l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x(1+\cos^2 x)}} dx$  est absolument convergente.

**Exemples. 3)** Convergence de l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx$ . L'application  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^4 e^{-x}$  est continue, le problème se pose uniquement à la borne  $+\infty$ . On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 e^{-x} = 0$ , donc l'intégrale en question converge absolument.

**Exemples. 4)** Convergence de l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^2}} dx$ . L'application  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}$  est continue sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

- Au voisinage de 0 à droite on a  $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$  et comme l'intégrale de Riemann  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  est convergente, on a  $\int_0^1 f(x) dx$  est convergente.
- Au voisinage de  $+\infty$ , on a  $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$  et l'intégrale de Riemann  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  est convergente donc  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  est convergente.

Il découle de ce qui précède que  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  est convergente.

- Pour calculer cette intégrale on fait le changement de variable  $t = \sqrt{x}$ , ce qui fournit  $I = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+1} dt$ . La décomposition en élément simple de la fraction rationnelle  $F(X) = \frac{1}{X^3+1}$  s'écrit :

$$F(X) = \frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta X + \gamma}{X^2 - X + 1}$$

et on a :

- $\lim_{t \rightarrow -1} (t+1)F(t) = \alpha = \frac{1}{3}$ .
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} tF(t) = 0 = \alpha + \beta \Rightarrow \beta = -\frac{1}{3}$ .
- $F(0) = 1 = \alpha + \gamma \Rightarrow \gamma = \frac{2}{3}$ .

Il en découle que  $I = \frac{2}{3} \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{t+1} - \frac{t-2}{t^2-t+1} \right) dt$ , donc

$$I = \frac{2}{3} \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{t+1} - \frac{1}{2} \frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{1}{2} \frac{3}{t^2-t+1} \right) dt$$

On a :

$$\int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{t+1} - \frac{1}{2} \frac{2t-1}{t^2-t+1} \right) dt = \frac{2}{3} \left[ \ln \frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+1}} \right]_0^{+\infty} = 0.$$

Donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2-t+1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \left[ \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(t - \frac{1}{2}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \frac{4\pi}{6} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

## 6.1.6 Techniques d'intégration

### 6.1.6.1 Changement de variable

Si  $I$  et  $J$  sont deux intervalle de  $\mathbb{R}$  non vides et non réduits en un singleton, on appelle  $C^1$ -difféomorphisme de  $I$  vers  $J$  tout application  $\varphi : I \rightarrow J$  tel que :

- $\varphi$  est bijective.
- $\varphi$  et de classe  $C^1$  sur  $I$ .
- $\varphi^{-1}$  sont est de classe  $C^1$  sur  $J$ .

On peut démontrer que  $\varphi$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $I$  vers  $J$  si et seulement si :

- $\varphi$  et de classe  $C^1$  sur  $I$ .
- $\forall x \in I, \varphi'(x) \neq 0$ .

Il en découle que  $\varphi$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $I$  vers  $J$  si et seulement si  $\varphi$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  et  $\varphi'$  est strictement positive ou strictement négative sur  $I$ .

**Proposition 6.1.12.** Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  non vides et non réduits à un singleton et  $\varphi : I \rightarrow J$  une application de  $I$  vers  $J$ , bijective et de classe  $C^1$  sur  $I$ . Soit  $f \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{R})$  alors les intégrales  $\int_J f(t) dt$  et  $\int_I |\varphi'(t)| f(\varphi(t)) dt$  sont de même nature et en cas de convergence elles sont égales, c'est-à-dire que :

$$\int_J f(s) ds = \int_I |\varphi'(t)| f(\varphi(t)) dt$$

### 6.1.6.2 Intégration par parties

Si  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  tel que  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  et  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{K}$  une application. alors :

- $f(a+)$  désigne la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $a$  à droite si  $a \in \mathbb{R}$  et la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  si  $a = -\infty$ .

- $f(b-)$  désigne la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $b$  à gauche si  $b \in \mathbb{R}$  et la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si  $b = +\infty$ .

**Proposition 6.1.13.** Soit  $(a, b) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  tel que  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  et  $u$  et  $v$  deux application de l'intervalle  $]a, b[$  vers  $\mathbb{K}$  toutes les deux de classe  $C^1$  sur  $]a, b[$ . Si les limites  $L_a = f(a+)$  et  $L_b = f(b-)$  existent dans  $\mathbb{K}$  alors :

1. Les intégrales  $\int_a^n u'(t)v(t)dt$  et  $\int_a^b u(t)v'(t)dt$  sont de même nature.
2. En cas de convergence on a :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

où

$$[u(t)v(t)]_a^b = L_b - L_a = f(b-) - f(a+)$$

## 6.2 Séries numériques

On appelle série numérique une série  $\sum u_n$  avec  $u_n \in \mathbb{K}$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On donne dans ce paragraphe les rappels essentiels des notions vues en première année.

### 6.2.1 Rappels

Si  $(u_n)_{n \geq 0}$  est une suite à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , on lui associe la suite des sommes  $(S_n)_{n \geq 0}$  définie par  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

on dit que  $(S_n)$  est la suite des sommes partielles de la série  $\sum u_n$ .

Si la suite  $(S_n)$  est convergente de limite  $S$ , on dit que la série numérique  $\sum u_n$  est convergente de somme  $S$  et

on note  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

Si  $(a_n)_{n \geq 0}$  est une suite numérique il existe une et une seule suite numérique  $(u_n)_{n \geq 0}$  tel que  $(a_n)$  est la suite des sommes partielles de la série  $\sum u_n$ . Elle est définie par :

$$u_0 = a_0; \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = a_n - a_{n-1}$$

Cela nous donne un critère de convergence des suites :

La suite  $(a_n)$  est convergente si et seulement si la série de terme général  $u_n = a_{n+1} - a_n$  est convergente. Attention elles n'ont pas forcément la même limite. Précisément, en cas de convergence si on note  $\ell = \lim a_n$  et

$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  on a  $S = \ell - a_0$  ;

**Exemples.** Montrons que la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  définie par  $a_n = H_n - \ln(n)$  où  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  (série harmonique) est convergente. Pour cela estimons  $u_n = a_{n+1} - a_n$ . On a

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Il en découle que la série  $\sum u_n$  est convergente, donc la suite  $(a_n)$  est convergente.

**A retenir :** Si une série numérique  $\sum u_n$  est convergente de somme  $S$  alors :

- Son terme général  $u_n$  converge vers 0.
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $R_n = S - S_n$  où  $S_n$  est la somme partielle d'ordre  $n$  ;  $R_n$  s'appelle le reste d'ordre  $n$ . On a  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$  et  $R_n$  converge vers 0.

## 6.2.2 Séries à termes positifs

### 6.2.2.1 Rappel

Une série à terme positifs est une série numérique  $\sum u_n$  tel que  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Une telle série est soit convergente soit sa somme partielle tends vers  $+\infty$ , auquel cas on posera  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ .

**Proposition 6.2.1.** Une série  $\sum u_n$  à termes positifs est convergente si et seulement si sa somme partielle  $(S_n)$  est majorée, auquel cas on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

### Definition 6.2.1

On dit qu'une série  $\sum u_n$  est absolument convergente si la série  $\sum |u_n|$  est convergente.

**Proposition 6.2.2.** Si la série  $\sum u_n$  est absolument convergente elle est convergente et :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

### 6.2.2.2 Critères de comparaison

**Proposition 6.2.3.** Soient  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  deux séries à termes positifs. Si  $a_n \leq b_n$  à partir d'un certain rang alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ convergente} &\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ convergente.} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty &\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty \end{aligned}$$

**Remarque.** Si  $a_n \leq b_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$

**Proposition 6.2.4.** Soit  $\sum u_n$  une série numérique et  $\sum a_n$  une série à termes positifs.

Si  $u_n = O(a_n)$  alors :  $\sum a_n$  convergente  $\Rightarrow \sum u_n$  est absolument convergente.

Si  $u_n = o(a_n)$  alors :  $\sum a_n$  convergente  $\Rightarrow \sum u_n$  est absolument convergente.

Si  $u_n \sim a_n$  alors :  $\sum a_n$  et  $\sum u_n$  sont de même nature.

## 6.2.3 Série de référence

### 6.2.3.1 Séries géométriques

Une série de terme général  $q^n$  avec  $q \in \mathbb{C}$  est appelée série géométrique de raison  $q$ .

**Proposition 6.2.5.** La série géométrique  $\sum q^n$  est convergente si et seulement si  $|q| < 1$ , auquel cas , on

$$a : \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

**Remarque.** Si  $|q| < 1$  alors pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on a  $\sum_{n=m}^{+\infty} q^n = \frac{q^m}{1-q}$

### 6.2.3.2 Série de Riemann

Une série de terme général  $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$  ( $n \geq 1$ ) où  $\alpha \in \mathbb{R}$  est appelée série de Riemann. Si  $\alpha = 1$  on l'appelle série harmonique.

**Proposition 6.2.6.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  est convergente si et seulement si  $\alpha > 1$ .

### 6.2.4 Règle de D'Alembert pour les séries numériques

**Proposition 6.2.7.** Soit  $(u_n)$  une suite de nombre complexes non nuls tel qu'il existe  $\ell \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell$$

Alors :

1. Si  $\ell < 1$  alors la série  $\sum u_n$  est absolument convergente.
2. Si  $\ell > 1$  alors la série  $\sum u_n$  est grossièrement divergente.

**Preuve.** - Si  $\ell < 1$ , pour  $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq N+1$ , on a :

$$\left| \frac{u_n}{u_{n-1}} - \ell \right| < \frac{1-\ell}{2}$$

En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N+1 \Rightarrow \frac{|u_n|}{|u_{n-1}|} < \frac{1-\ell}{2} + \ell = \frac{\ell+1}{2}$$

Donc en posant  $q = \frac{\ell+1}{2}$ , on a  $0 < q < 1$  et pour tout  $n \geq N+1$ , on a  $|u_n| \leq q|u_{n-1}|$ , en particulier :  $|u_n| \leq |u_N|q^{n-N} = Cq^n$ , avec  $C = |u_N|q^{-N}$ . Comme la série géométrique  $\sum_{n \geq N} q^n$  est convergente, la convergence absolue de  $\sum u_n$  en découle.

- Si  $\ell > 1$ , on a pour  $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2}$ , il existe  $N$  entier tel que si  $n \geq N+1$  alors  $\frac{|u_n|}{|u_{n-1}|} \geq \ell - \frac{\ell-1}{2} = \frac{\ell+1}{2}$ , donc  $|u_n| \geq |u_N|q^{n-N} = Cq^n$  avec  $C = |u_N|q^{-N}$  donc  $u_n$  tends vers  $+\infty$ , ce qui justifie la divergence grossière de la série. ■

### 6.2.5 Séries alternées

#### Definition 6.2.2

On dit que la série numérique réelle  $\sum u_n$  est alternée si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n u_{n+1} \leq 0$$

**Proposition 6.2.8.** La série  $\sum u_n$  est alternée si et seulement si il existe une suite  $(\alpha_n)$  de signe constant tel que  $u_n = (-1)^n \alpha_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Remarque.** On peut toujours se ramener à  $u_n = (-1)^n \alpha_n$  avec  $\alpha_n \geq 0$  : il suffit de considérer la série opposée.

On donne le théorème suivant appelé le critère spécial des séries alternées (C.S.S.A.) qui donne une condition suffisante de convergence d'une série alternée et une estimation du reste d'ordre  $n$  :

**Théorème 6.2.1.** Soit  $u_n = (-1)^n \alpha_n$  avec les condition suivantes :

1. La suite  $(\alpha_n)$  est positive décroissante.
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$ .

Alors on a :

1. La série alternée  $\sum u_n$  est convergente.
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|R_n| \leq |u_{n+1}|$  où  $R_n$  est le reste d'ordre  $n$  de la série  $\sum u_n$ .

**Exemples.** On donne les exemples suivants :

1.  $\sum (-1)^n n$  est une série alternée divergente.
2.  $\sum \frac{(-1)^n}{n}; n \geq 1$  est une série alternée convergente mais non absolument convergente appelée la série harmonique alternée. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $|R_n| \leq \frac{1}{n+1}$ .

3.  $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}; n \geq 1$  est une série alternée absolument convergente. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$ .

### 6.2.6 Séries absolument convergentes

#### Definition 6.2.3

Une série numérique  $\sum u_n$  est dite absolument convergente si la série des modules (ou valeurs absolues)  $\sum |u_n|$  est convergente.

**Exemples.** On donne les exemple suivants :

1. La série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$  est absolument convergente car son terme général  $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$  réalise  $|u_n| = \frac{1}{n^2}$  et la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  est convergente.
2. La série  $\sum u_n$  avec  $u_n = \frac{\sin(\sqrt{n})}{n^2 + (-1)^n \sqrt{n+2}}$  est absolument convergente car pour tout  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n > 2$ , on a  $|u_n| \leq \frac{1}{n^2 - \sqrt{n+2}}$  et la série  $\sum \alpha_n$  est convergente car  $\alpha_n \sim \frac{1}{n^2}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Théorème 6.2.2.** Si une série  $\sum u_n$  est absolument convergente alors elle est convergente et on a :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

**Preuve.** Pour tout nombre réel  $x$ , on définit les nombres réels  $x^+ = \max(x, 0)$  et  $x^- = \max(-x, 0)$ . On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x^+ + x^- = |x| \\ x^+ - x^- = x \end{cases}$$

Si une série  $\sum u_n$  est absolument convergente alors comme on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n^+ \leq |u_n| \\ u_n^- \leq |u_n| \end{cases}$$

les deux séries  $\sum u_n^+$  et  $\sum u_n^-$  sont deux séries à termes positifs convergentes, donc leur différence est convergente et comme  $u_n = u_n^+ - u_n^-$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum u_n$  est convergente et sa somme est  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S^+ - S^-$  où  $S^+ = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+$  et  $S^- = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^-$ .

• Remarquons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k|,$$

donc, par passage à la limite, on a :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

■

## 6.3 Sommation des relations de comparaison. Comparaison séries et intégrales.

Ce paragraphe est d'une importance particulière car il traite deux points importants : D'une part, la sommation des relations de comparaison pour les séries et pour les intégrales qui ont des applications importantes et d'autre part, la relation entre les intégrales et les séries, notamment comment l'un se ramène à l'autre quand des hypothèses sont vérifiées.

### 6.3.1 Sommation des relations de comparaison pour les séries

Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont deux séries numériques tel que  $v_n = o(u_n)$  ou  $v_n = O(u_n)$  ou  $u_n \sim v_n$ , on sait que les natures des deux séries sont liée, mais on approfondira en étudiant les liens entre les sommes partielles ou les restes des deux séries. On résume tout dans la proposition suivante :

**Proposition 6.3.1.** Soient  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  deux séries à termes positifs. On note  $S_n$  et  $S'_n$  les sommes partielles respectives et en cas de convergence on note  $R_n$  et  $R'_n$  les restes respectifs.

- On suppose que  $a_n = O(b_n)$  quand  $n$  tends vers  $+\infty$ . Alors :
  - Si  $\sum b_n$  est convergente alors  $\sum a_n$  est convergente et  $R_n = O(R'_n)$ .
  - Si  $\sum a_n$  est divergente alors  $\sum b_n$  est divergente et  $S_n = O(S'_n)$
- On suppose que  $a_n = o(b_n)$  quand  $n$  tends vers  $+\infty$ . Alors :
  - Si  $\sum b_n$  est convergente alors  $\sum a_n$  est convergente et  $R_n = o(R'_n)$ .
  - Si  $\sum a_n$  est divergente alors  $\sum b_n$  est divergente et  $S_n = o(S'_n)$
- On suppose que  $a_n \sim b_n$  quand  $n$  tends vers  $+\infty$ . Alors :  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  sont de même nature et :
  - En cas de convergence on a :  $R_n \sim R'_n$ .
  - En cas de divergence on a :  $S_n \sim S'_n$ .

### 6.3.2 Sommation des relations de comparaison pour les intégrales

**Proposition 6.3.2.** Soient  $f$  et  $g$  deux applications continues par morceaux et positives sur un intervalle de la forme  $[a, b[$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $a < b \leq +\infty$ .

- On suppose que  $f = O(g)$  au voisinage de  $b$  (à gauche si  $b$  est fini).
  - Si  $\int_a^b g(t)dt$  converge alors  $\int_a^b f(t)dt$  converge et, au voisinage de  $b$  (à gauche si  $b$  est fini), on a :  $\int_x^b f(t)dt = O\left(\int_x^b g(t)dt\right)$ .
  - Si  $\int_a^b f(t)dt$  diverge alors  $\int_a^b g(t)dt$  diverge et, au voisinage de  $b$  (à gauche si  $b$  est fini), on a :  $\int_a^x f(t)dt = O\left(\int_a^x g(t)dt\right)$ .
- On suppose que  $f = o(g)$  au voisinage de  $b$  (à gauche si  $b$  est fini).
  - Si  $\int_a^b g(t)dt$  converge alors  $\int_a^b f(t)dt$  converge et, au voisinage de  $b$  (à gauche si  $b$  est fini), on a :  $\int_x^b f(t)dt = o\left(\int_x^b g(t)dt\right)$ .
  - Si  $\int_a^b f(t)dt$  diverge alors  $\int_a^b g(t)dt$  diverge et, au voisinage de  $b$  (à gauche si  $b$  est fini), on a :  $\int_a^x f(t)dt = o\left(\int_a^x g(t)dt\right)$ .
- On suppose que  $f \sim g$  au voisinage de  $b$  (à gauche si  $b$  est fini). Alors les intégrales  $\int_a^b f(t)dt$  et  $\int_a^b g(t)dt$  sont de même nature et :
  - En cas de convergence, on a :  $\int_x^b f(t)dt \sim \int_x^b g(t)dt$ , au voisinage de  $b$  (à gauche si  $b$  est fini).
  - En cas de divergence, on a :  $\int_a^x f(t)dt \sim \int_a^x g(t)dt$ , au voisinage de  $b$  (à gauche si  $b$  est fini).

**Proposition 6.3.3.** Soient  $f$  et  $g$  deux applications continues par morceaux et positives sur un intervalle de la forme  $]a, b]$  avec  $b \in \mathbb{R}$  et  $-\infty \leq a < b$ .

- On suppose que  $f = O(g)$  au voisinage de  $a$  (à droite si  $a$  est fini).
  - Si  $\int_a^b g(t)dt$  converge alors  $\int_a^b f(t)dt$  converge et, au voisinage de  $a$  (à droite si  $a$  est fini), on a :  $\int_a^x f(t)dt = O\left(\int_a^x g(t)dt\right)$ .
  - Si  $\int_a^b f(t)dt$  diverge alors  $\int_a^b g(t)dt$  diverge et, au voisinage de  $a$  (à droite si  $a$  est fini), on a :  $\int_x^b f(t)dt = O\left(\int_x^b g(t)dt\right)$ .
- On suppose que  $f = o(g)$  au voisinage de  $a$  (à droite si  $a$  est fini).
  - Si  $\int_a^b g(t)dt$  converge alors  $\int_a^b f(t)dt$  converge et, au voisinage de  $a$  (à droite si  $a$  est fini), on a :  $\int_a^x f(t)dt = o\left(\int_a^x g(t)dt\right)$ .
  - Si  $\int_a^b f(t)dt$  diverge alors  $\int_a^b g(t)dt$  diverge et, au voisinage de  $a$  (à droite si  $a$  est fini), on a :  $\int_x^b f(t)dt = o\left(\int_x^b g(t)dt\right)$ .
- On suppose que  $f \sim g$  au voisinage de  $a$  (à droite si  $a$  est fini). Alors les intégrales  $\int_a^b f(t)dt$  et  $\int_a^b g(t)dt$  sont de même nature et :
  - En cas de convergence, on a :  $\int_a^x f(t)dt \sim \int_a^x g(t)dt$ , au voisinage de  $a$  (à gauche si  $a$  est fini).
  - En cas de divergence, on a :  $\int_x^b f(t)dt \sim \int_x^b g(t)dt$ , au voisinage de  $a$  (à gauche si  $a$  est fini).

### 6.3.3 Série et intégrales

#### 6.3.3.1 Transformation d'une intégrale en une série

**Proposition 6.3.4.** Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux et positive ( $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  avec  $a < b$ ). Soit  $(a_n)$  une suite tel que  $a_0 = a$  et  $(a_n)$  croissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = b$ . On note  $u_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)dt$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors l'intégrale  $\int_a^b f(t)dt$  est convergente si et seulement si la série  $\sum u_n$  est convergente, auquel cas, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)dt.$$

**Exemple.** L'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$  est divergente. En effet si on prends  $a_n = n\pi$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a bien  $a_0 = 0$  et  $(a_n)$  croissante de limite  $+\infty$ . Il suffit donc de prouver que  $\sum u_n$  est divergente où  $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ . Par le changement de variable  $\theta = t - n\pi$ , on a  $u_n = \int_0^\pi \frac{\sin(\theta)}{n\pi + \theta} d\theta$ , donc  $u_n \geq \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{(n+1)\pi} d\theta = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n+1}$  qui est le terme d'une série divergente (série harmonique), donc la série  $\sum u_n$  est divergente.

#### 6.3.3.2 Comparaison série intégrale

**Proposition 6.3.5.** Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une application positive continue par morceaux décroissante. Soit  $p = \min\{k \in \mathbb{N} / a \leq k\}$ , et pour tout  $n \geq p$ , on pose :

$$u_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt$$

Alors la série  $\sum u_n$  est convergente.

**Preuve.** Comme  $f$  est décroissante,  $\int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)$  pour tout  $n \geq p$ , donc  $u_n \geq 0$  et par suite la série  $\sum u_n$  est une série à termes positifs. Il suffit de prouver que sa somme partielle est majorée. Soit  $n \geq p$ , alors  $u_n \leq f(n) - f(n+1)$  par suite,  $S_n = \sum_{k=p}^n u_k \leq f(p) - f(n+1) \leq f(p) \leq f(a)$ . ■

**Corollaire 6.3.1.** Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une application positive continue par morceaux décroissante. Soit  $p = E(a) + 1$ . Alors :

1. Les séries  $\sum f(n), n \geq p$  et  $\sum \int_n^{n+1} f(t)dt, n \geq p$  sont de même nature.
2. La série  $\sum f(n), n \geq p$  et l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  sont de même nature.