

Table des matières

5	Espaces préhilbertiens réels.	3
5.1	Généralités	3
5.1.1	Produit scalaire, espaces préhilbertiens réels	3
5.1.2	Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de Minkowski	4
5.1.3	Identités	4
5.1.3.1	Identités remarquables	4
5.1.3.2	Identité du parallélogramme	4
5.1.3.3	Identités de polarisation	4
5.2	Orthogonalité	5
5.2.1	Généralités	5
5.2.2	Orthogonal d'une partie	5
5.2.3	Familles orthogonales, familles orthonormées	6
5.2.3.1	Définition, exemples	6
5.2.3.2	Existence des bases orthonormées : Procédé de Gram-Schmidt	7
5.2.4	Expression du produit scalaires dans une base orthonormée	7
5.2.5	Conséquences : Théorème de représentation, supplémentaire orthogonal d'une sous-espace vectoriel de dimension finie	8
5.2.5.1	Théorème de représentation	8
5.2.5.2	Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finies	8
5.3	Projection orthogonale	9
5.3.1	Généralités	9
5.3.1.1	Définition, caractérisation	9
5.3.1.2	Caractérisation métrique	10
5.3.2	Cas où F est de dimension finie	10
5.3.2.1	Expression du projeté orthogonale	10
5.3.2.2	Inégalité de Bessel	10
5.3.2.3	Gram-Schmidt et les projections orthogonales	11
5.4	Espaces euclidiens : rappels et compléments	11
5.4.1	Matrices orthogonales, endomorphismes orthogonaux	11
5.4.1.1	Matrices orthogonales	11
5.4.1.2	Endomorphismes orthogonaux	13
5.4.2	Réduction des matrices et endomorphismes orthogonaux	13
5.4.2.1	Résultats généraux	13
5.4.2.2	Réduction des matrices et endomorphismes orthogonaux	15
5.4.3	Endomorphismes et matrices symétriques	17
5.4.3.1	Endomorphisme symétrique d'un espace préhilbertien réel.	17
5.4.3.2	Adjoint d'un endomorphisme, endomorphisme auto-adjoint	17
5.4.3.3	Caractérisation d'un endomorphisme orthogonal par son adjoint	18
5.4.3.4	Endomorphismes symétriques en dimension finie	18
5.4.3.5	Réduction des endomorphismes et matrices symétriques en dimension finie	18
5.4.4	Endomorphisme et matrice symétriques définis positifs	19

Chapitre 5

Espaces préhilbertiens réels.

Dans tout ce qui suit tous les espace vectoriels considérés sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

5.1 Généralités

5.1.1 Produit scalaire, espaces préhilbertiens réels

Definition 5.1.1

On appelle produit scalaire sur E toute application de E^2 vers $\mathbb{R}$ bilinéaire symétrique positive définie. On dit forme bilinéaire sur E symétrique positive définie. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une telle forme. Pour tout $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a alors :

1. $\langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle$.
2. $\langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \lambda \langle x, y_2 \rangle$.
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$.
5. $\langle x, x \rangle \Rightarrow x = 0$.

Remarques. 1. On note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, pour tout $x \in E$.

Exemples. Dans chacun des exemples ci-dessus, E est un espace vectoriel réel et $\langle \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

1. $E = \mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n}, y = (y_k)_{1 \leq k \leq n} \in E$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

2. $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$. Pour tout $f, g \in E$ on pose :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

3. $E = \mathbb{R}[X]$, $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$, $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application positive non identiquement nulle et continue sur $[a, b]$. Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\langle P, Q \rangle_\omega = \int_a^b \omega(t)P(t)Q(t)dt$$

4. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$), pour $A, B \in E$, on pose :

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t AB)$$

5. $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ une famille de nombres réels deux à deux distincts.

Pour $P, Q \in E$:

$$\langle P, Q \rangle_a = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$$

5.1.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de Minkowski

Proposition 5.1.1. Soit E un espace préhilbertien réel, alors :

1. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

avec égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée.

2. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si et seulement si $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Proposition 5.1.2. L'application $E \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E , appelée norme euclidienne associée au produit scalaire de E ;

5.1.3 Identités

Dans tout ce qui suite E est un espace préhilbertien réel.

5.1.3.1 Identités remarquables

Proposition 5.1.3. Pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + \lambda^2 \|y\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle$$

En particulier, pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\begin{cases} \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \\ \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle \end{cases}$$

5.1.3.2 Identité du parallélogramme

Proposition 5.1.4. Pour tout $x, y \in E$ on a :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Remarque. Pour démontrer qu'une norme n'est pas une norme euclidienne (c'est-à-dire elle ne provient pas d'un produit scalaire), il suffit de prouver que l'identité du parallélogramme n'est pas satisfaite pour un certain couple (x, y) de E^2 .

5.1.3.3 Identités de polarisation

Proposition 5.1.5. Pour tout $x, y \in E$ on a :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

5.2 Orthogonalité

5.2.1 Généralités

Dans tout ce paragraphe E est un espace préhilbertien réel.

Definition 5.2.1

Soit $(x, y) \in E^2$. On dit que x est orthogonal à y si $\langle x, y \rangle = 0$.

Remarque. x est orthogonale à y si et seulement si y est orthogonale à x . On dit que x et y sont orthogonaux et on note $x \perp y$.

Proposition 5.2.1. Soit $x, y \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors :

1. $0 \perp x$
2. $x \perp x \Leftrightarrow x = 0$
3. Si $x \perp y$ alors $\alpha x \perp \beta y$.

5.2.2 Orthogonal d'une partie

Definition 5.2.2

Soit A une partie de E . On appelle orthogonal de A et on note $A^\perp$ la partie de E définie par :

$$A^\perp = \{x \in E / \forall a \in A, x \perp a\} = \{x \in E / \forall a \in A, \langle a, x \rangle = 0\}$$

Proposition 5.2.2. Pour toutes parties A et B de E on a :

1. $A \subset A^{\perp\perp}$
2. $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$
3. Si F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels alors $(F_1 + F_2)^\perp = (F_1)^\perp \cap (F_2)^\perp$

Preuve. 1. Soit $x \in A$, donc pour tout $y \in A^\perp$, on a $\langle x, y \rangle = 0$, donc $x \in A^{\perp\perp}$ et finalement $A \subset A^{\perp\perp}$.
 2. Supposons que $A \subset B$, soit $x \in B^\perp$ alors pour tout $a \in A$, on a $a \in B$, donc $\langle x, a \rangle = 0$, donc pour tout $x \in B^\perp$ on a $x \in A^\perp$ donc $B^\perp \subset A^\perp$.
 3. On a $F_1 \subset F_1 + F_2$ et $F_2 \subset F_1 + F_2$, donc d'après le résultat ci-dessus, on a $(F_1 + F_2)^\perp \subset F_1^\perp$ et $(F_1 + F_2)^\perp \subset F_2^\perp$, donc $(F_1 + F_2)^\perp \subset F_1^\perp \cap F_2^\perp$. Inversement soit $x \in F_1^\perp \cap F_2^\perp$, pour tout $y \in F_1 + F_2$ il existe $(y_1, y_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $y = y_1 + y_2$, donc $\langle x, y \rangle = \langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle = 0$. ■

Remarques. On donne les remarques suivantes :

1. $E^\perp = \{0\}$, en particulier pour démontrer qu'un vecteur a de E est nul, il suffit de prouver que $\forall x \in E, \langle x, a \rangle = 0$.
2. $\{0\}^\perp = E$
3. Pour toute partie A de E , $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E .
4. Pour toute partie A de E , on a $A^\perp = (\text{Vect } A)^\perp$
5. Si A et B sont deux parties de E , on dit que A et B sont orthogonales et on note $A \perp B$ si :

$$\forall (a, b) \in A \times B, \quad \langle a, b \rangle = 0$$

Remarquons que :

$$A \perp B \Leftrightarrow A \subset B^\perp \Leftrightarrow B \subset A^\perp$$

Preuve. On va donner les preuves de toutes les remarques ci-dessus :

1. Soit $x \in E^\perp$ alors $x \in E$ et pour tout $y \in E$, on a $\langle x, y \rangle = 0$, en particulier pour $y = x$, on a $\langle x, x \rangle = 0$, donc $\|x\| = 0$ donc $x = 0$. Ainsi $E^\perp \subset \{0\}$ et comme $0 \in E^\perp$, on conclut que $E^\perp = \{0\}$.
2. On a $\forall x \in E$, $\langle x, 0 \rangle = 0$, donc $E \subset \{0\}^\perp$ et comme $\{0\}^\perp \subset E$, on a $\{0\}^\perp = E$.
3. Soit A une partie non vide de E . On a $A^\perp \neq \emptyset$ car $0 \in A^\perp$. Si $a, b \in A^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $a + \lambda b \in A^\perp$ car pour tout $x \in A$, on a $\langle a + \lambda b, x \rangle = \langle a, x \rangle + \lambda \langle b, x \rangle = 0$. Donc $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E . Soit (x_n) une suite à valeurs dans $A^\perp$ tel que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ avec $\ell \in E$. On va prouver que $\ell \in A^\perp$. Soit $a \in A$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle a, x_n \rangle = 0$. Par continuité de l'application $x \mapsto \langle a, x \rangle$, le passage à la limite donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle a, x_n \rangle = \langle a, \ell \rangle$. Il en découle que $\langle a, \ell \rangle = 0$, pour tout $a \in A$, donc que $\ell \in A^\perp$, ce qui achève la preuve du fait que $A^\perp$ est fermée.
4. Comme $A \subset \text{Vect } A$, on a $(\text{Vect } A)^\perp \subset A^\perp$. Réciproquement, soit $x \in A^\perp$, on va prouver que $x \in (\text{Vect } A)^\perp$, pour cela considérons $y \in \text{Vect } A$, donc il existe $a_1, \dots, a_m \in A$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tel que $y = \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k$. On a $\langle x, y \rangle = \langle x, \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k \rangle = \sum_{k=1}^m \lambda_k \langle x, a_k \rangle = 0$ puisque $\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\langle x, a_k \rangle = 0$. Ainsi on a prouvé que $A^\perp = (\text{Vect } A)^\perp$, pour toute partie non vide de E .
5. Si $A \perp B$, soit $x \in A$ alors pour tout $b \in B$, on a $\langle x, b \rangle = 0$ puisque $A \perp B$, donc $x \in B^\perp$ donc $A \subset B^\perp$. Ainsi $A \perp B \Rightarrow A \subset B^\perp$. Par symétrie des rôles on a aussi $A \perp B \Rightarrow B \subset A^\perp$. Si $A \subset B^\perp$ alors par définition, pour tout $(a, b) \in A \times B$, on a $\langle a, b \rangle = 0$, donc $A \perp B$.

ce qui achève les preuves de toutes les remarques ci-dessus. ■

5.2.3 Familles orthogonales, familles orthonormées

5.2.3.1 Définition, exemples

Definition 5.2.3

Soit I un ensemble non vide fini ou dénombrable et $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On dit que $\mathcal{F}$ est une famille orthogonale si

$$\forall i, j \in I, \quad i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0.$$

On dit que $\mathcal{F}$ est une famille orthonormée si :

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

Remarques. On fait les remarques suivantes :

1. Si de plus la famille $\mathcal{F}$ est une base de E , on parle de base orthogonale (resp. base orthonormée.)
2. On appellera suite orthonormée de vecteurs de E toute famille orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indexées par $\mathbb{N}$. Une telle famille n'existe que si E est de dimension infinie.

Proposition 5.2.3. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Alors, toute famille orthogonale de vecteurs de E formée de vecteurs non nuls est une famille libre, en particulier toute famille orthonormée de E est une famille libre de E .

Preuve. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une telle famille. Si J est une partie finie non vide de I et $(\alpha_i)_{i \in J}$ une famille de scalaires tel que :

$$\sum_{i \in J} \alpha_i e_i = 0$$

soit $k \in J$, alors :

$$\langle e_k, \sum_{i \in J} \alpha_i e_i \rangle = 0$$

donc

$$\alpha_k \|e_k\|^2 = 0$$

et comme $e_k \neq 0$ on a $\alpha_k = 0$. ■

Exemples :

1. On considère $E = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues périodiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ muni de produit scalaires :

$$(f, g) \in E^2; \quad \langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

Les familles $\mathcal{C} = (t \mapsto \cos(nt))_{n \in \mathbb{N}}$ et $\mathcal{S} = (t \mapsto \sin(nt))_{n \in \mathbb{N}}$ sont des familles orthogonales de E . Bien entendu, ce ne sont pas des bases orthonormées.

2. On sait que si $n \in \mathbb{N}^*$ alors le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ est défini par : Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Pour ce produit scalaire la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

3. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire : Pour $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ et $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$, on pose $\langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$. Alors la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n, \dots)$ est une base orthonormée de E .

5.2.3.2 Existence des bases orthonormées : Procédé de Gram-Schmidt

On rappelle le théorème donnant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt :

Théorème 5.2.1. Soit E un espace euclidien de dimension n ; $n \neq 0$ et $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E . Alors il existe une et une seule base orthonormée $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E tel que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \begin{cases} \text{Vect}\{u_1, \dots, u_k\} = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\} \\ \langle u_k, e_k \rangle > 0 \end{cases}.$$

Remarques. On donne les remarques suivantes :

1. Tout espace euclidien de dimension non nulle admet des bases orthonormées.
2. Si E est un espace préhilbertien réel alors tout sous-espace vectoriel F de dimension finie non nulle de E admet des bases orthonormées pour le produit scalaire sous-jacent de E .
3. Si $\mathcal{U} = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille libre d'un espace préhilbertien E alors il existe une famille orthonormée $\mathcal{E} = (e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tel que $\text{Vect}(u_j)_{j \in \llbracket 0, k \rrbracket} = \text{Vect}(e_j)_{j \in \llbracket 0, k \rrbracket}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Si $\mathcal{U} = (u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une famille libre d'un espace préhilbertien E alors il existe une famille orthonormée $\mathcal{E} = (e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ tel que $\text{Vect}(u_j)_{j \in \llbracket -k, k \rrbracket} = \text{Vect}(e_j)_{j \in \llbracket -k, k \rrbracket}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$, pour tout $P, Q \in E$ et $\mathcal{U} = (U_0, U_1, U_2)$ avec $U_k = X^k$ pour tout $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$. Déterminer l'orthonormalisé de Gram-Schmidt $\mathcal{E} = (E_0, E_1, E_2)$ de $\mathcal{U}$.

5.2.4 Expression du produit scalaires dans une base orthonormée

Proposition 5.2.4. Soit E un espace euclidien de dimension non nulle n et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Alors si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ sont deux vecteurs de E , on a :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = {}^t X Y = {}^t Y X$$

où

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

sont les colonnes des coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{E}$

Proposition 5.2.5. Soit E un espace euclidien de dimension non nulle n et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E , alors :

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Preuve. Si on pose $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ alors d'après la proposition ci-dessus $\langle x, e_k \rangle = x_k$, d'où le résultat. ■

Remarque. Si E est un espace préhilbertien réel admettant une base orthonormée dénombrable $(e_i)_{i \in I}$ alors si :

$$\begin{cases} x = \sum_{i \in I} x_i e_i \\ y = \sum_{i \in I} y_i e_i \end{cases}$$

sont deux vecteurs de E alors :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} x_i y_i \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i \in I} x_i^2}$$

5.2.5 Conséquences : Théorème de représentation, supplémentaire orthogonal d'une sous-espace vectoriel de dimension finie

5.2.5.1 Théorème de représentation

Théorème 5.2.2. Soit E un espace euclidien de dimension non nulle n . Pour toute forme linéaire f sur E , il existe un et un seul vecteur a de E tel que $f = \langle a, \cdot \rangle$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle a, x \rangle$$

Preuve. Unicité : Si a, a' répondent au problème alors pour tout $x \in E$ on a $f(x) = \langle a, x \rangle = \langle a', x \rangle$, donc $\langle a - a', x \rangle = 0$ et par suite $a - a' \in E^\perp = \{0\}$ d'où $a = a'$.

Existence : Comme E est de dimension finie, E admet une base orthonormée $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $x \in E$ tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ alors $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \langle a, x \rangle$ où $a = \sum_{i=1}^n f(e_i) e_i$. ■

Exercice Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$. Déterminer, après avoir justifié son existence et unicité le polynôme $A \in \mathbb{R}_2[X]$, tel que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on aie : $P'(0) = \langle A, P \rangle$.

Exercice Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue par morceaux sur $[a, b]$.

1. Démontrer qu'il existe un et un seul $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_a^b g(t)P(t)dt = \sum_{k=0}^n \alpha_k P^{(k)}(0).$$

On note $\varphi(g)$ l'unique α ci-dessus.

2. On note $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues par morceaux de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ et on le munit de la norme de convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Démontrer que l'application $\varphi : \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}; g \mapsto \varphi(g)$ est continue de $(\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ vers $\mathbb{R}^{n+1}$.

5.2.5.2 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finies

Definition 5.2.4

On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E admet un supplémentaire orthogonal si $F + F^\perp = E$.

- Il est aisé de voir que $F \cap F^\perp = \{0\}$, donc si F admet un supplémentaire orthogonal on a $F \oplus F^\perp = E$.

Proposition 5.2.6. Si F admet un supplémentaire orthogonal alors $F^{\perp\perp} = F$. En particulier $F^\perp$ admet aussi un supplémentaire orthogonal.

Preuve. Supposons que F admet un supplémentaire orthogonal, alors $F \oplus F^\perp = E$. On sait déjà que $F \subset F^{\perp\perp}$. Réciproquement soit $x \in F^{\perp\perp}$ écrivons $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$. Alors $0 = \langle x, x_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \|x_2\|^2 = \|x_2\|^2$, donc $x_2 = 0$ et par suite $x = x_1$ donc $x \in F$. ■

Théorème 5.2.3. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien quelconque E alors F admet un supplémentaire orthogonal. Autrement dit $F \oplus F^\perp = E$ et $F = F^{\perp\perp}$.

Preuve. Si $F = \{0\}$ ou $F = E$, le résultat est banal puisque $E \oplus \{0\} = E$.

Si $F \neq \{0\}$ soit $p = \dim(F)$ et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F . Soit $a \in E$. L'application $f : F \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(x) = \langle a, x \rangle$ est une forme linéaire sur F . Comme F est de dimension finie, il existe $b \in F$ tel que $f = \langle b, \cdot \rangle$. Donc pour tout $x \in F$, on a $\langle a, x \rangle = \langle b, x \rangle$ donc $a - b \in F^\perp$. Posons alors $a - b = b'$ avec $b' \in F^\perp$. Alors $a = b + b'$ avec $(b, b') \in F \times F^\perp$. Ainsi on a

$$(\forall a \in E)(\exists (b, b') \in F \times F^\perp) \quad a = b + b'$$

donc $E = F + F^\perp$, ce qui termine la preuve de la proposition. ■

L'exercice ci-dessous montre qu'un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien peut ne pas admettre de supplémentaire orthogonal.

Exercice Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ et $F = \{f \in E / f(0) = 0\}$. On munit E du produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Démontrer que dans l'espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ on a $F^\perp = \{\theta\}$ où θ est l'application nulle de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$.

Réponse Soit $g \in F^\perp$ et considérons f définie par $f(t) = tg(t)$ alors $f \in F$, donc $\langle f, g \rangle = 0$, donc $\int_0^1 tg^2(t)dt = 0$. Comme $t \mapsto tg^2(t)$ est continue positive sur $[0, 1]$, elle est nulle donc g est nulle sur $]0, 1]$, et par continuité, g est nulle sur $[0, 1]$.

5.3 Projection orthogonale

Dans toute cette section E désigne un espace préhilbertien réel non forcément de dimension finie.

5.3.1 Généralités

5.3.1.1 Définition, caractérisation

Definition 5.3.1

Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \oplus F^\perp = E$. La projection orthogonale p_F sur F parallèlement à $F^\perp$ s'appelle projection orthogonale sur F .

On a donc $p_F \in \mathcal{L}(E)$ et $\forall x \in E$,
$$\begin{cases} p_F(x) \in F \\ x - p_F(x) \in F^\perp \end{cases}$$

Avec les notations ci-dessus, on a la :

Proposition 5.3.1. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a : $p_F(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases}$

Preuve. Si $p_F(x) = y$ alors $y \in \text{Im}(p_F) = F$. Par ailleurs, comme $x = y + (x - y)$ alors $x - y \in F^\perp$. Réciproquement, si $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$, comme en plus $x = y + (x - y)$ on a bien $p_F(x) = y$. ■

5.3.1.2 Caractérisation métrique

Théorème 5.3.1. (Pythagore)

Soit E un espace préhilbertien réel, alors :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Preuve. On a $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$ et le résultat en découle immédiatement. ■

Remarque. Généralement si $m \geq 2$ et $x_1, \dots, x_m$ des vecteurs deux à deux orthogonaux avec $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$, alors :

$$\left\| \sum_{k=1}^m x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^m \|x_k\|^2.$$

Attention ! La réciproque n'est pas vraie si $m \geq 3$.

Théorème 5.3.2. Soit F un sous-espace vectoriel de E admettant un supplémentaire orthogonal. Alors :

1. Pour tout $x \in E$, on a $d(x, F) = d(x, p_F(x)) = \|x - p_F(x)\|$
2. Si z est un vecteur de E tel que
$$\begin{cases} z \in F \\ d(x, F) = \|x - z\| \end{cases} \quad \text{alors } z = p_F(x).$$

Preuve. 1. Rappelons que $d(x, F) = \inf\{d(x, y) / y \in F\}$. Soit $y \in F$, on a $(p_F(x) - y) \perp (x - p_F(x))$, donc par le théorème de Pythagore, on a : $\|x - y\|^2 = \|p_F(x) - y\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$. Il en découle que $\|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|$, et comme en plus $p_F(x) \in F$, on a $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$

2. Si $z \in F$ et $d(x, F) = \|x - z\|$ alors $\|x - z\| \leq \|x - p_F(x)\|$ puisque $p_F(x) \in F$. Or, ce qui précède montre que

$$\|x - z\|^2 = \|p_F(x) - z\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$$

donc

$$\|p_F(x) - z\|^2 = \|x - z\|^2 - \|x - p_F(x)\|^2$$

donc $\|p_F(x) - z\|^2 \leq 0$ donc $\|p_F(x) - z\| = 0$ et par suite $z = p_F(x)$. Ce qui achève la preuve du théorème 5.3.2 ■

5.3.2 Cas où F est de dimension finie

Soit E un espace préhilbertien. Selon Le théorème 5.2.3, si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E alors $F \oplus F^\perp = E$, ce qui eut dire que la projection orthogonale p_F existe pour un tel sous-espace vectoriel.

5.3.2.1 Expression du projeté orthogonale

Proposition 5.3.2. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie non nulle p de E et $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F , alors si p_F est la projection orthogonale de E sur F on a :

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{k=1}^p \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Preuve. Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, alors $e_k \perp (x - p_F(x))$, donc : $\langle e_k, x \rangle = \langle e_k, p_F(x) \rangle$ et comme $p_F(x) \in F$ et $\mathcal{C}$ est une base orthonormée de F , on a : $p_F(x) = \sum_{k=1}^n \langle p_F(x), e_k \rangle e_k$ et le résultat en découle. ■

5.3.2.2 Inégalité de Bessel

Proposition 5.3.3. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien de dimension infinie. Si $\mathcal{E} = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite orthonormée de vecteurs de E alors pour tout vecteur x de E , la série $\sum |\langle x, e_n \rangle|^2$ est convergente dans E et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$, et notons $V_n = \text{Vect}(e_k)_{0 \leq k \leq n}$ et π_n la projection orthogonale sur V_n . Soit $x \in E$. Par le théorème de Pythagore, on a : $\|x\|^2 = \|\pi_n(x)\|^2 + \|x - \pi_n(x)\|^2$, et comme $\|\pi_n(x)\|^2 = \sum_{k=0}^n |\langle x, e_k \rangle|^2$, on peut dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Il en découle que la série à termes positifs $\sum |\langle x, e_n \rangle|^2$ est convergente puisque la suite de ses sommes partielles est majorée. Comme de plus $\|x\|^2$ est un majorant des sommes partielles, la somme de la série réalise :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

■

5.3.2.3 Gram-Shmidt et les projections orthogonales

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\mathcal{U} = (u_i, \dots, u_n)$ une famille libre de E . On peut exprimer l'orthonormée de Gram-Shmidt de $\mathcal{U}$ comme suit : $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ avec

$$\begin{cases} e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \\ \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, e_{k+1} = \frac{u_{k+1} - \pi_k(u_{k+1})}{\|u_{k+1} - \pi_k(u_{k+1})\|} \end{cases}$$

où pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note π_j est la projection orthogonale de E sur $V_j = \text{Vect}(u_i)_{1 \leq i \leq j}$.

5.4 Espaces euclidiens : rappels et compléments

Dans tout ce qui suit E est un espace euclidien de dimension non nulle.

5.4.1 Matrices orthogonales, endomorphismes orthogonaux

5.4.1.1 Matrices orthogonales

Proposition-Définition 5.4.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes

- (1) ${}^t A A = I_n$
- (2) $A {}^t A = I_n$
- (3) A est inversible et $A^{-1} = {}^t A$
- (4) Les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- (5) Les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.
- (6) Il existe deux bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ tel que A est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Si l'une des assertions est vérifiée, on dit que A est une matrice orthogonale.

Preuve. Rappelons que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors M est inversible à droite si et seulement si M est inversible à gauche si et seulement si M est inversible, auquel cas, les trois inverses sont égaux. En effet si M est inversible il est clair que M est inversible à droite et à gauche et les trois inverses sont égaux. Réciproquement, si M est inversible à droite par exemple, il existe $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $MM' = I_n$, donc $\det(MM') = 1$, donc $\det(M)\det(M') = 1$, en particulier, $\det(M) \neq 0$ et M est inversible. Comme $MM' = I_n$, on a $M^{-1}(MM') = M^{-1}$, donc $M' = M^{-1}$. Le même raisonnement est valable si on suppose que M est inversible à gauche.

Ce rappel nous donne immédiatement :

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$$

Notons

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{et} \quad {}^t A = (a'_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

On a alors :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a'_{ij} = a_{ji}$$

Si $i, j \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, les produits scalaires respectifs des colonnes C_i et C_j et des lignes L_i et L_j de la matrice A sont :

$$\begin{cases} \langle C_i, C_j \rangle = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \sum_{k=1}^n a'_{ik} a_{kj} \\ \langle L_i, L_j \rangle = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a'_{kj} \end{cases}$$

Il en découle que le terme général de la matrice ${}^t AA$ est :

$$c_{ij} = \langle C_i, C_j \rangle$$

et le terme général de la matrice $A^t A$ est :

$$d_{ij} = \langle L_i, L_j \rangle$$

Donc : ${}^t AA = I_n$ si et seulement si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a $c_{ij} = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker), si et seulement si la famille $(C_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc $(1) \Leftrightarrow (4)$. De même : $A^t A = I_n$ si et seulement si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a $d_{ij} = \delta_{ij}$ si et seulement si la famille $(L_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, donc $(2) \Leftrightarrow (5)$. Il en découle que l'on a à présent démontré que :

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5)$$

Pour terminer, on va démontrer que $(4) \Leftrightarrow (6)$.

- Supposons qu'on a (6), et soit : $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $\mathcal{B}' = (e'_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont deux bases orthonormées tel que $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ alors, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la colonne i de A est $C_i = (p_{ki})_{1 \leq k \leq n}$, donc si $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ alors :

$$\langle C_i, C_j \rangle = \sum_{k=1}^n p_{ki} p_{kj} = \langle e'_i, e'_j \rangle = \delta_{ij}$$

ce qui prouve (4).

- Supposons qu'on a (4) : Soit $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ une base orthonormée de E et soit $\mathcal{B}' = (e'_k)_{1 \leq k \leq n}$ tel que :

$$(\star) \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad e'_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k$$

Alors :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \langle e'_i, e'_j \rangle = \langle C_i, C_j \rangle = \delta_{ij}$$

Donc $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E . Il est clair par $(\star)$ ci-dessus que A est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, ce qui achève la preuve de (6). ■

Proposition 5.4.1. L'ensemble des matrices orthogonales est un sous-groupe du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$, noté $O_n(\mathbb{R})$. La partie de $O_n(\mathbb{R})$:

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) / \det(A) = 1\}$$

est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$ appelé le groupe spécial orthogonal.

Attention ! L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant -1 ne forment pas un groupe puisque le produit de deux de ces matrices est dans $SO_n(\mathbb{R})$.

Proposition 5.4.2. Soit A est une matrice orthogonale alors $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Remarque. Si $B \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $\det(B) = -1$ alors

$$O_n(\mathbb{R}) = SO_n(\mathbb{R}) \cup (B \cdot SO_n(\mathbb{R})) = SO_n(\mathbb{R}) \cup (SO_n(\mathbb{R}) \cdot B)$$

5.4.1.2 Endomorphismes orthogonaux

E est un espace euclidien de dimension n avec $n \geq 1$.

Proposition-Définition 5.4.2. Soit u un endomorphisme de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

(2) u conserve la norme, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|$$

(3) Il existe une base orthonormée $\mathcal{E}$ de E tel que $\text{mat}_{\mathcal{E}}(u)$ est une matrice orthogonale.

(4) Pour toute base orthonormée $\mathcal{E}$ la matrice $\text{mat}_{\mathcal{E}}(u)$ est une matrice orthogonale.

(5) u transforme au moins une base orthonormée de E en une base orthonormée de E .

(6) u transforme toute base orthonormée de E en une base orthonormée de E .

Si l'une des assertions ci-dessus est vérifiée on dit que u est un automorphisme orthogonal.

Proposition 5.4.3. Pour tout endomorphisme orthogonal u de E , on a $\det(u) \in \{-1, 1\}$.

Remarque. En particulier les endomorphismes orthogonaux sont des automorphismes, d'où l'appellation : Automorphismes orthogonaux.

Proposition 5.4.4. L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est un sous-groupe du groupe linéaire $GL(E)$ isomorphe à $O_n(\mathbb{R})$. On le note $O(E)$.

5.4.2 Réduction des matrices et endomorphismes orthogonaux

5.4.2.1 Résultats généraux

Théorème 5.4.1. Soit u un automorphisme orthogonal et F un sous-espace vectoriel de E , alors F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u .

Preuve. Supposons que F est stable par u et soit $v = u_F$ l'endomorphisme induit. Notons que v est un automorphisme de F car v est injectif et F de dimension finie. Il en découle que F est stable par u^{-1} car car si $b \in F$ alors $v^{-1}(b) = a \in F$, or $b = v(a) = u(a)$, donc $a = u^{-1}(b)$, donc $u^{-1}(b) \in F$. Soit $x \in F^\perp$ alors pour tout $y \in F$, on a :

$$\langle u(x), y \rangle = \langle u(x), u(u^{-1}(y)) \rangle = \langle x, u^{-1}(y) \rangle = 0$$

en vertu de la remarque ci-dessus que F est stable par u^{-1} . Ainsi pour tout $x \in F^\perp$, on a $u(x) \in F^\perp$, donc $F^\perp$ est stable par u . ■

Proposition 5.4.5. Soit $u \in O(E)$ un automorphisme orthogonal. Alors $\text{Sp}(u) \in \{-1, 1\}$.

Preuve. Si $\lambda \in \text{Sp}(u)$ alors, il existe $x \in E$ tel que $x \neq 0$ et $u(x) = \lambda x$. On a :

$$\langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, x \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle$$

donc $(\lambda^2 - 1) \|x\|^2 = 0$, et comme $x \neq 0$, on a $\lambda^2 = 1$, donc $\lambda \in \{-1, 1\}$. ■

Lemme 5.4.1. Soit u un endomorphisme orthogonal de E et $E_1 = \ker(u - \text{Id}_E)$ et $E_{-1} = \ker(u + \text{Id}_E)$, et notons $F = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$ et $G = F^\perp$, alors :

1. $E_1(u) \perp E_{-1}(u)$.
2. F et G sont stables par u .
3. Si $v = u_G$ est l'endomorphisme de G induit par u alors $\text{Sp}(v) = \emptyset$.

Preuve. Démontrons les trois points de la proposition :

1. Soit $x \in E_1(u)$ et $y \in E_{-1}(u)$, alors d'une part $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ car u est un automorphisme orthogonal ; d'autre part : $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, -y \rangle$, donc $\langle x, y \rangle = -\langle x, y \rangle$ et $\langle x, y \rangle = 0$.
2. F est stable par u car $E_1(u)$ et $E_{-1}(u)$ sont stables par u . Le théorème ?? permet de dire que G est stable par u .
3. Supposons que v admet une valeur propre λ , alors λ serait une valeur propre de u donc $\lambda \in \{-1, 1\}$. Comme il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $v(x) = \lambda x$, on aurait $x \in F$, chose impossible car $F \cap G = \{0\}$. ■

Proposition 5.4.6. On a

$$O_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \varepsilon \sin \theta \\ \sin \theta & -\varepsilon \cos \theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \{-1, 1\} \right\}$$

Preuve. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si $A \in O_2(\mathbb{R})$ alors les colonnes de A forment une base ortho-

normée de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, donc :
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$
 . L'égalité $ac + bd = 0$ s'écrit aussi $\begin{vmatrix} a & d \\ b & -c \end{vmatrix} = 0$, donc les

vecteurs $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$ sont colinéaires, et comme $X \neq 0$ car $\|X\| = 1$, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel

que $Y = \varepsilon X$, donc
$$\begin{cases} \varepsilon = \pm 1 \\ c = -\varepsilon b \\ d = \varepsilon a \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$
 . On sait que $a^2 + b^2 = 1$ si et seulement si $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = a \\ \sin(\theta) = b \end{cases}$

donc $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Réciproquement il est aisé de voir que de telles matrices sont orthogonales (les colonnes sont orthogonales entre elles et chacune de norme 1), ce qui finit la preuve de la proposition. ■

Remarque. Il y'a donc deux types de matrices orthogonales de taille 2, à savoir :

1. Les matrices de la forme $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ appelées matrices de rotation.
2. Les matrices de la forme $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ appelées matrices de symétrie.

Il est aisé de voir que :

$$SO_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta / \theta \in \mathbb{R}\}$$

Proposition 5.4.7. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ alors :

1. la matrice de rotation R_θ est diagonalisable si et seulement si $\theta \equiv 0[\pi]$. Précisément :
 - Si $\theta \not\equiv 0[\pi]$ alors R_θ n'a aucune valeur propre réelle.
 - Si $\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ alors $R_\theta = I_n$.
 - Si $\theta = (2k+1)\pi$ alors $R_\theta = -I_n$.
2. La matrice de symétrie S_θ est diagonalisable. Précisément S_θ est orthogonalement semblable à la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $S_\theta = {}^t P J P$ où $P \in O_2(\mathbb{R})$.

Preuve. On va étudier les deux matrices R_θ et S_θ

1) Le polynôme caractéristique de R_θ est $\chi_{R_\theta} = X^2 - 2\cos\theta X + 1$, qui est un trinôme de discriminant : $\delta = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta$, donc $\text{Sp}(R_\theta) \neq \emptyset \Leftrightarrow \delta = 0 \Leftrightarrow \theta \equiv 0[\pi]$.

• Si $\theta = 0[2\pi]$ alors $R_\theta = I_n$.

• Si $\theta = \pi[2\pi]$, alors $R_\theta = -I_2$.

• Si $\theta \not\equiv 0[\pi]$ alors R_θ n'a aucune valeur propre donc n'est pas diagonalisable.

2) Le polynôme caractéristique de S_θ est $\chi_{S_\theta} = X^2 - 1$, donc $\chi_{S_\theta} = (X-1)(X+1)$ ■

Lemme 5.4.2. Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie n avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si u est un endomorphisme de E , alors u admet une droite ou un plan stable.

Preuve. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'endomorphisme u est trigonalisable donc u admet une valeur propre λ . Si e est un vecteur propre associé à λ , alors la droite $\mathbb{K}e$ est stable par u .

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\text{Sp}(u) \neq \emptyset$, le raisonnement ci dessus est valable.

Si $\text{Sp}(u) = \emptyset$ alors le polynôme minimal de u s'écrit $\pi_u = P_1 \cdots P_s$. avec $s \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$, le polynôme P_j s'écrit $P_j = X^2 - a_j X - b_j$ avec $\Delta_j = a_j^2 + 4b_j < 0$. ; comme $\pi_u(u) = 0$, on a $P_1(u) \circ \cdots \circ P_s(u) = 0$, donc les endomorphismes $P_j(u)$ ne sont pas tous injectifs, il existe alors $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$ tel que $P_k(u)$ et non injectif, donc il existe $x_0 \in E$ tel que $x_0 \neq 0$ et $P_k(u)(x_0) = 0$, donc $u^2(x_0) = a_k u(x_0) + b_k x_0$, en particulier si $F = \text{Vect}\{x_0, u(x_0)\}$, on a F est stable par u et $\dim(F) = 2$ car u n'ayant pas de vecteur propre, la famille $(x_0, u(x_0))$ est libre. ■

5.4.2.2 Réduction des matrices et endomorphismes orthogonaux

Nous allons démontrer que tout endomorphisme orthogonal est représenté par une matrice diagonale par blocs avec des termes diagonaux ayant une des formes suivantes : I_m , $-I_m$ ou R_θ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Nous allons commencer par le cas particulier important où u n'a aucune valeur propre réelle.

Théorème 5.4.2. Soit E un espace euclidien de dimension non nulle n et u un endomorphisme orthogonal de E tel que $\text{Sp}(u) = \emptyset$. Alors n est pair et il existe une base orthonormée $\mathcal{E}$ de E tel que

$$\text{mat}_{\mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & R_{\theta_s} \end{pmatrix},$$

avec $2s = n$ et pour tout $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $\theta_k \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Preuve. Comme $\text{Sp}(u) = \emptyset$, le polynôme caractéristique χ_u de u est pair car tout polynôme impair à coefficients réels admet au moins une racine réelle, donc $n = \dim(E) = \deg(\chi_u)$ est pair. Il en découle qu'il existe $s \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2s$. On va démontrer le reste du théorème par récurrence sur s .

• Si $s = 1$, alors $\dim(E) = 2$, donc si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E alors $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathbf{O}(2)$ et comme $\text{Sp}(u) = \emptyset$, forcément, A est de la forme R_θ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, en vertu de la proposition 5.4.7.

• Soit $s \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété à démontrer est vraie pour tout espace euclidien de dimension $2s$. Soit E un espace euclidien de dimension $2s+2$ et $u \in \mathbf{O}(E)$ tel que $\text{Sp}(u) = \emptyset$. D'après le lemme 5.4.2, et le fait que $\text{Sp}(u) = \emptyset$, il existe un plan F de E stable par u , et d'après le théorème 5.4.1, $F^\perp$ est stable par u et

on a $F \oplus F^\perp = E$. Comme $\dim(F) = 2$, on a $\dim(F^\perp) = 2s$ et l'hypothèse de récurrence permet de dire qu'il existe deux bases orthonormées $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de F et $F^\perp$ tel les endomorphismes induits u_1 et u_2 sur F et $F^\perp$ réalisent $\text{mat}_{\mathcal{B}_1}(u_1) = R_{\theta_1}$ et $\text{mat}_{\mathcal{B}_2}(u_2) = \text{diag}(R_{\theta_2}, \dots, R_{\theta_{s+1}})$ où $\theta_k \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, pour tout $k \in \llbracket 1, s+1 \rrbracket$. Si $\mathcal{B}$ est la base de E obtenue par concaténation de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, on a $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_{s+1}})$, ce qui termine la preuve. ■

Théorème 5.4.3. Soit E un espace euclidien de dimension n avec $n \neq 0$ et soit $u \in O_n(E)$ un endomorphisme orthogonal de E . Alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E tel que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont parmi les suivants :

1. le bloc I_p avec $p \in \mathbb{N}^*$ qui apparaît 0 ou 1 fois.
2. le bloc $-I_q$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ qui apparaît 0 ou 1 fois.
3. des blocs R_θ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ qui apparaissent 0 ou s fois avec $s \in \mathbb{N}^*$.

Autrement dit :

$$M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix}$$

avec $(p, q, s) \in \mathbb{N}^3$ et $p + q + 2s = n$ avec la convention $p = 0$ (resp. $q = 0$ (resp. $s = 0$))) si un bloc de la forme I_p (resp. $-I_q$ (resp. R_θ))) apparaît 0 fois dans M .

Preuve. Soit u un endomorphisme orthogonal de E .

- Si $\text{Sp}(u) = \emptyset$, c'est terminé en vertu du théorème 5.4.2 ci-dessus.
- Si $\text{Sp}(u) = \{1\}$ alors $E = E_1(u) \oplus G$ avec $G = (E_1(u))^\perp$ et on a vu dans le lemme 5.4.1 que $\text{Sp}(u_G) = \emptyset$. Donc, en vertu du théorème 5.4.2, la matrice de u dans une base orthonormée adaptée est de la forme $A = \text{diag}(I_p, R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_s})$.
- Si $\text{Sp}(u) = \{-1\}$ alors $E = E_{-1}(u) \oplus G$ avec $G = (E_{-1}(u))^\perp$ et on a vu que dans le lemme 5.4.1 que $\text{Sp}(u_G) = \emptyset$. Donc, en vertu du théorème 5.4.2, la matrice de u dans une base orthonormée adaptée est de la forme $A = \text{diag}(-I_q, R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_s})$.
- Si $\text{Sp}(u) = \{-1, 1\}$ alors $E = E_1(u) \oplus E_{-1}(u) \oplus G$ avec $G = (E_1(u) + E_{-1}(u))^\perp$ et on a vu dans le lemme 5.4.1 que $\text{Sp}(u_G) = \emptyset$. Donc, en vertu du théorème 5.4.2, la matrice de u dans une base orthonormée adaptée est de la forme $A = \text{diag}(I_p, -I_q, R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_s})$. ■

Remarque. La version matricielle de ce théorème est : pour toute matrice orthogonale Ω il existe une matrice orthogonale P tel que $\Omega = P\Delta^t P$ avec Δ une matrice de la forme :

$$\Delta = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix}$$

avec $(p, q, s) \in \mathbb{N}^3$ et $p + q + 2s = n$ avec la convention $p = 0$ (resp. $q = 0$ (resp. $s = 0$))) si un bloc de la forme I_p (resp. $-I_q$ (resp. R_θ))) apparaît 0 fois dans M .

5.4.3 Endomorphismes et matrices symétriques

5.4.3.1 Endomorphisme symétrique d'un espace préhilbertien réel.

Definition 5.4.1

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel de dimension finie ou infinie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est symétrique si

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x, u(y) \rangle = \langle u(x), y \rangle$$

Proposition 5.4.8. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel de dimension finie ou infinie et u un endomorphisme symétrique de E et F un sous-espace vectoriel de E . Si F est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u .

Preuve. Soit $x \in F^\perp$, montrons que $u(x) \in F^\perp$ pour cela soit $y \in F$ alors $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle = 0$ car $u(y) \in F$ par stabilité de F et $x \in F^\perp$ par hypothèse. ■

5.4.3.2 Adjoint d'un endomorphisme, endomorphisme auto-adjoint

Dans tout ce qui suit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.

Théorème-Définition 5.4.1. Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E . Il existe un et un seule endomorphisme v de E tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

L'endomorphisme v s'appelle l'endomorphisme adjoint de u et on le note u^*

Preuve. On va prouver l'existence et l'unicité de v :

• **Existence** : Soit $y \in E$ et l'application :

$$\varphi_y : E \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \varphi_y(x) = \langle u(x), y \rangle,$$

alors φ_y est une forme linéaire sur E car pour tout $x_1, x_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\varphi_y(x_1 + \lambda x_2) = \langle u(x_1 + \lambda x_2), y \rangle = \langle u(x_1) + \lambda u(x_2), y \rangle = \langle u(x_1), y \rangle + \lambda \langle u(x_2), y \rangle = \varphi_y(x_1) + \lambda \varphi_y(x_2)$. Par le théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien, il existe un vecteur unique v_y tel que : $\forall x \in E, \varphi_y(x) = \langle v_y, x \rangle$. Cela permet de définir une application $v : E \rightarrow E$ tel que $\forall y \in E, v(y) = v_y$ réalisant : $\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$. Montrons que v ainsi définie est linéaire. Soit $y_1, y_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in E$ on a : $\langle x, v(y_1 + \lambda y_2) \rangle = \langle u(x), y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle u(x), y_1 \rangle + \lambda \langle u(x), y_2 \rangle = \langle x, v(y_1) \rangle + \lambda \langle x, v(y_2) \rangle = \langle x, v(y_1) + \lambda v(y_2) \rangle$ et par unicité on a : $v(y_1 + \lambda y_2) = v(y_1) + \lambda v(y_2)$, d'où v est linéaire.

• **Unicité** : Si v et w sont deux solutions du problème alors :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, v(y) \rangle = \langle x, w(y) \rangle = \langle u(x), y \rangle$$

Il en découle que $\forall y \in E, \forall x \in E, \langle x, v(y) - w(y) \rangle = 0$ donc : $\forall y \in E, v(y) - w(y) \in E^\perp = \{0\}$ donc $v = w$. ■

Proposition 5.4.9. Soit u et v deux endomorphismes de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $v = u^*$
2. Pour toute base orthonormée $\mathcal{E}$ de E $\text{mat}_{\mathcal{E}}(v) = {}^t(\text{mat}_{\mathcal{E}}(u))$.
3. Il existe une base orthonormée $\mathcal{E}$ de E tel que $\text{mat}_{\mathcal{E}}(v) = {}^t(\text{mat}_{\mathcal{E}}(u))$.

Proposition-Définition 5.4.3. Soit u un endomorphisme de E , alors u est symétrique si et seulement si $u = u^*$. On dit aussi que u est autoadjoint.

Proposition 5.4.10. Soit u, v des endomorphismes de E et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

1. $(u^*)^* = u$
2. $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
3. $(u + \lambda v)^* = u^* + \lambda v^*$
4. $\ker(u^*) = (\operatorname{Im}(u))^\perp$ et $\operatorname{Im}(u^*) = (\ker(u))^\perp$.

5.4.3.3 Caractérisation d'un endomorphisme orthogonal par son adjoint

Proposition 5.4.11. un endomorphisme u est orthogonal si et seulement si u est inversible et $u^{-1} = u^*$

Preuve. Si u est inversible et $u^{-1} = u^*$, soit $x \in E$, alors $\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, u^*(u(x)) \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$, donc pour tout $x \in E$, on a : $\|u(x)\| = \|x\|$ donc u est un endomorphisme orthogonal. Réciproquement, si u est un endomorphisme orthogonal alors u est inversible. Soit $(x, y) \in E^2$. Puisque u conserve le produit scalaire, on a : $\langle u(x), y \rangle = \langle u(x), u(u^{-1}(y)) \rangle = \langle x, u^{-1}(y) \rangle$. Cela veut dire que $u^* = u^{-1}$. ■

5.4.3.4 Endomorphismes symétriques en dimension finie

Proposition 5.4.12. Soit u un endomorphisme de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) u est un endomorphisme symétrique.
- (2) Il existe une base orthonormée $\mathcal{E}$ de E tel que la matrice relativement à $\mathcal{E}$ de u est réelle symétrique.
- (3) Pour toute base orthonormée $\mathcal{E}$ de E , la matrice relativement à $\mathcal{E}$ de u est réelle symétrique.

Remarque. Il faut donc faire attention au fait que la base adoptée doit être orthonormée. Si la matrice de u relativement à une base quelconque est symétrique réelle, cela ne suffit pas pour dire que u est symétrique.

5.4.3.5 Réduction des endomorphismes et matrices symétriques en dimension finie

Proposition 5.4.13. Soit u un endomorphisme symétrique de E . Alors u admet au moins une valeur propre.

Preuve. On va faire la preuve en trois étapes :

- Si $\dim(E) = 1$ alors u est une homothétie, donc si λ est le rapport de cette homothétie, alors λ est une valeur propre de u .
- Si $\dim(E) = 2$, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E tel que $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique. Posons

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = X^2 - (a + d)X + ad - b^2$$

C'est un trinôme de discriminant : $\delta = (a + d)^2 - 4(ad - b^2) = a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + b^2 = (a - d)^2 + b^2$, donc $\delta \geq 0$ et χ_A admet au moins une racine λ , donc u admet une valeur propre.

- Si E est de dimension n avec $n \geq 1$ selon le lemme 5.4.2, l'endomorphisme u admet un sous-espace stable F tel que $1 \leq \dim(F) \leq 2$. Les résultats des étapes ci-dessus permet de dire que l'endomorphisme induit u_F admet une valeur propre λ , donc u admet au moins une valeur propre. ■

Proposition 5.4.14. Soit u un endomorphisme symétrique de E . Si λ et μ sont deux valeurs propres de u , alors :

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$$

Preuve. Considérons $\lambda, \mu \in \text{Sp}(u)$ tel que $\lambda \neq \mu$ et montrons que $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$. Pour cela soit $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$ deux vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres distinctes λ et μ de u . On a $\langle u(x), y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, u(y) \rangle = \mu \langle x, y \rangle$, donc $(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$. Comme $\lambda - \mu \neq 0$, on a : $\langle x, y \rangle = 0$. Ainsi $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$. ■

Le théorème ci-dessous s'appelle le théorème spectral

Théorème 5.4.4. Soit u un endomorphisme symétrique de E , alors u est diagonalisable dans une base orthonormée, c'est-à-dire que E admet une base formée de vecteurs propres de u .

Preuve. Par récurrence sur la dimension de E .

- Si $\dim(E) = 1$, un endomorphisme symétrique u de E est une homothétie. Si $\mathcal{B} = (e_1)$ avec $e_1 \in E$ tel que $\|e_1\| = 1$, alors $\mathcal{B}$ est base orthonormée de diagonalisation de u .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout espace euclidien F de dimension n , tout endomorphisme symétrique de F admet une base orthonormée de diagonalisation. Soit alors E un espace euclidien de dimension $n + 1$ et u un endomorphisme symétrique de E . D'après la proposition 5.4.13, l'endomorphisme u admet au moins une valeur propre λ_1 . Soit e un vecteur propre associé à λ_1 et notons $e_1 = \frac{1}{\|e_1\|}e$. Il est clair que e_1 est un vecteur propre de u associé à λ_1 et que $\|e_1\| = 1$. Soit $F = (\mathbb{R}e_1)^\perp$ alors $E = \mathbb{R}e_1 \oplus F$ et $\mathbb{R}e_1$ et F sont stables par u . F muni du produit scalaire induit par celui de E est un espace euclidien de dimension n . Comme $n \geq 1$, on a, par hypothèse de récurrence, l'endomorphisme induit u_F est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathcal{B}' = (e_k)_{2 \leq k \leq n+1}$. Soit $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n+1}$, alors $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E et c'est bien une base de vecteurs propres de u , donc $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de diagonalisation de u . ■

Voici la version matricielle du théorème spectral qui s'applique à une matrice réelle symétrique. Il faut, chaque fois que l'on veut l'utiliser, faire attention et s'assurer que la matrice symétrique concernée est réelle.

Théorème 5.4.5. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée réelle symétrique d'ordre n avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle Δ toutes de taille n tel que $A = {}^tP\Delta P$. On dit que A est orthogonalement diagonalisable.

5.4.4 Endomorphisme et matrice symétriques définis positifs

Dans tout ce paragraphe E est un espace euclidien de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Definition 5.4.2

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On dit que u est symétrique positif si et seulement si u est symétrique et réalise :

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \geq 0$$

2. On dit que u est symétrique défini positif si et seulement si u est symétrique et réalise :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \langle u(x), x \rangle > 0$$

3. On dit que la matrice A est symétrique positive si et seulement si A est symétrique et :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \langle AX, X \rangle \geq 0.$$

4. On dit que la matrice A est symétrique définie positive si et seulement si A est symétrique et :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \langle AX, X \rangle \geq 0$$

On note $\mathcal{S}^+(E)$ (resp $\mathcal{S}^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs (resp. définis positifs) de E et $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.