

Table des matières

3	RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES	3
3.1	Polynômes d'endomorphismes, polynôme minimal	3
3.1.1	Définitions	3
3.1.1.1	Exemples	4
3.1.1.2	Cas de la dimension finie	4
3.1.1.3	Contre-exemple	4
3.1.2	Cas des matrices carrées	5
3.1.3	Quelques remarques importantes	5
3.2	Stabilité	6
3.2.1	Définitions et premières propriétés	6
3.2.1.1	La sous-algèbre $\mathcal{L}_F(E)$ des endomorphismes stabilisant F	7
3.2.2	Interprétation matricielle	7
3.2.2.1	base adaptée à un sous-espace stable et à une somme directe	7
3.2.2.2	Interprétation matricielle de la stabilité	7
3.2.3	Polynôme minimal et stabilité	8
3.3	Lemme de décomposition des noyaux	8
3.3.1	Le lemme	8
3.3.2	Cas particulier intéressant : Si $P(u) = 0$	9
3.3.3	Exemples fondamentaux	9
3.3.3.1	Exemple 1 :	9
3.3.3.2	Exemple 2 :	9
3.4	Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	9
3.4.1	Définitions et premières propriétés	10
3.4.1.1	Endomorphismes	10
3.4.1.2	Matrices	11
3.4.1.3	Premières propriétés	11
3.4.2	Cas de la dimension finie, polynôme caractéristique	12
3.4.2.1	Polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme	12
3.4.2.2	Polynôme caractéristique et stabilité	13
3.4.2.3	Polynôme caractéristique et spectre	14
3.4.2.4	Cas où χ_u est scindé	14
3.5	Valeurs propres et polynômes annulateur	15
3.5.1	Théorème de Cayley-Hamilton	15
3.5.2	Autres liens entre χ_A et π_A	17
3.6	Diagonalisation	17
3.6.1	Endomorphisme, matrice diagonalisable	17
3.6.1.1	Endomorphismes diagonalisables	17
3.6.1.2	Matrice carrée diagonalisable	19
3.6.2	Autres caractérisation des endomorphismes diagonalisables	19
3.6.2.1	Décomposition spectrale	19
3.6.2.2	Conséquences	19
3.7	Trigonalisation	20
3.7.1	Définitions	20
3.7.1.1	Endomorphisme trigonalisable	20
3.7.1.2	Matrice trigonalisable	21
3.7.2	Caractérisation par les polynômes caractéristique	21
3.7.2.1	Caractérisation	21
3.7.2.2	Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$	22
3.7.3	Endomorphismes et matrices nilpotents	22

3.7.3.1	Rappel	22
3.7.3.2	Caractérisation	22
3.7.4	Une autre réduction d'endomorphisme trigonalisable	23

Chapitre 3

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

3.1 Polynômes d'endomorphismes, polynôme minimal

3.1.1 Définitions

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit :

$$\begin{cases} u^0 = \text{Id}_E \\ \forall k \in \mathbb{N}, u^{k+1} = u \circ u^k \end{cases}$$

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, tel que

$$P = \sum_{k=0}^m a_k X^k = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0,$$

on définit :

$$P(u) = \sum_{k=0}^m a_k u^k = a_m u^m + \cdots + a_1 u + a_0 \text{Id}_E.$$

Soit Θ_u l'application :

$$\Theta_u : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$$

tel que

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \Theta_u(P) = P(u)$$

Proposition 3.1.1. Θ_u est un morphisme d'algèbre.

$\text{Im}(\Theta_u)$ noté $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

$\ker(\Theta_u)$ noté $\mathcal{I}_u$ où $\text{Ann}(u)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Preuve. Il s'agit de démontrer que :

1. $\Theta_u(1) = \text{Id}_E$
2. $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall \lambda \in \mathbb{K}, \Theta_u(P + \lambda Q) = \Theta_u(P) + \lambda \Theta_u(Q)$
3. $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall \lambda \in \mathbb{K}, \Theta_u(PQ) = \Theta_u(P) \circ \Theta_u(Q)$

Considérons deux polynômes :

$$\begin{cases} P = \sum_{k=0}^m a_k X^k \\ Q = \sum_{k=1}^q b_k X^k \end{cases}$$

et si, par exemple, $q < m$, on peut écrire :

$$Q = \sum_{k=1}^m b_k X^k$$

avec $b_k = 0$ pour tout k tel que $k > q$, la même chose si $q > m$ avec interversion des rôles.

• Le premier point est immédiat par définition.

- Avec les notations ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned}
 \Theta_u(P + \lambda Q) &= \sum_{k=0}^m (a_k + \lambda b_k) u^k \\
 &= \sum_{k=0}^m a_k u^k + \lambda \sum_{k=0}^q b_k u^k \\
 &= \Theta_u(P) + \lambda \Theta_u(Q)
 \end{aligned}$$

- Commençons par le cas simple $Q = X^j$, alors $PQ = \sum_{k=0}^m a_k X^{k+j}$, par suite $\Theta_u(PQ) = PQ(u) = \sum_{k=0}^m a_k u^{k+j} = \sum_{k=0}^m a_k u^k \circ u^j = \left(\sum_{k=0}^m a_k u^k \right) \circ u^j = P(u) \circ Q(u) = \Theta_u(P) \circ \Theta_u(Q)$.

Pour le cas général : $\Theta(PQ) = \sum_{j=0}^q b_j P X^j$, donc

$$\begin{aligned}
 \Theta_u(PQ) &= PQ(u) \\
 &= \sum_{j=0}^q b_j P(u) \circ u^j \\
 &= P(u) \circ \sum_{j=0}^q b_j u^j \\
 &= P(u) \circ Q(u) \\
 &= \Theta_u(P) \circ \Theta_u(Q)
 \end{aligned}$$

■

Corollaire 3.1.1. Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ alors :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u) = PQ(u)$$

Le corollaire ci-dessus est très important en pratique, par exemple si on sait que $P(u)(x) = 0$, pour un certain vecteur x de E et on part de l'expression $P(u)(Q(u)(x))$, en utilisant le résultat du corollaire on aurait : $P(u)(Q(u)(x)) = Q(u)(P(u)(x)) = Q(u)(0) = 0$

Proposition-Définition 3.1.1. Si $\mathcal{I}_u \neq \{0\}$ alors il existe un unique polynôme unitaire $\pi_u \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\mathcal{I}_u = \pi_u(u) \mathbb{K}[X].$$

Le polynôme π_u s'appelle le polynôme minimal de l'endomorphisme u .

3.1.1.1 Exemples

1. Le polynôme minimal de l'endomorphisme nul est $\pi_0 = X$
2. Soit $h = \alpha \text{Id}_E$ une homothétie ; alors $\pi_h = X - \alpha$
3. Soit u un projecteur de E ; alors $\pi_u = X^2 - X$ si $u \notin \{0, \text{Id}_E\}$.
4. Soit s une symétrie de E non triviale ; alors $\pi_s = X^2 - 1$.

3.1.1.2 Cas de la dimension finie

Proposition 3.1.2. Si E est de dimension finie alors le polynôme minimal existe pour tout endomorphisme de E

3.1.1.3 Contre-exemple

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $D : E \rightarrow E$ défini par $D(P) = P'$. Alors D n'admet pas de polynôme minimal.

Preuve. En effet si π_D existe alors $m = \deg(\pi_D) \geq 1$. Posons $\pi_D = \sum_{k=s}^m a_k X^k = a_m X^m + \cdots + a_s X^s$ tel que $a_s \neq 0$ et $a_m = 1$; donc $\pi_D(D) = D^m + \cdots + a_s D^s$. Comme $\pi_D(D) = 0$, on a en particulier $\pi_D(D)(X^s) = 0$. Or $D^k(X^s) = 0$ pour tout $k > s$, donc $\pi_D(D)(X^s) = s!a_s$, donc $s!a_s = 0$, chose fausse puisque $a_s \neq 0$. ■

3.1.2 Cas des matrices carrées

On donne de la même manière les définitions suivantes :

Definition 3.1.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

1. $\mathbb{K}[A] = \{P(A)/P \in \mathbb{K}[X]\}$ la sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices qui sont des polynômes en A .
2. $\mathcal{I}_A = \{P \in \mathbb{K}[X]/P(A) = 0\}$: l'idéal des polynômes annulateurs de A .

Proposition-Définition 3.1.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'idéal $\mathcal{I}_A$ est non nul, en particulier il existe un et un seul polynôme unitaire π_A tel que $\mathcal{I}_A = \pi_A \mathbb{K}[X]$. Le polynôme π_A s'appelle le polynôme minimal de la matrice carrée A .

Proposition 3.1.3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A , alors :

$$\mathcal{I}_u = \mathcal{I}_A \quad \text{et} \quad \pi_u = \pi_A$$

Proposition 3.1.4. Si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, précisément $B = U^{-1}AU$ avec $U \in GL_n(\mathbb{K})$ alors :

1. $\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad P(B) = U^{-1}P(A)U$.
2. $\pi_A = \pi_B$ et $\mathcal{I}_A = \mathcal{I}_B$.

Exemple. Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), n \geq 2$, tel que $\text{rg}(A) = 1$, alors

$$\pi_A = X^2 - \text{tr}(A)X$$

Preuve. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A alors comme $\text{rg}(A) = 1$, on a $\text{rg}(u) = 1$, donc par le théorème du rang, on a : $\dim(\ker(u)) = n - 1$. Soit $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ adaptée à une somme directe :

$$\mathbb{K}^n = \ker(u) \oplus \mathbb{K}v_n$$

La matrice de u relativement à la base $\mathcal{V}$ est de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Remarquons que $B^2 = a_n B$ et que $a_n = \text{tr}(B) = \text{tr}(A) = t$, donc le polynôme $X^2 - tX$ est un polynôme annulateur de B , donc de A , donc $\pi_A \in \{X, X - t, X^2 - tX\}$. Si $\pi_A = X$ alors $A = 0$ et si $\pi_A = X - t$ alors $A = tA$ choses non vraies donc $\pi = X^2 - tX = X^2 - \text{tr}(A)X$. ■

3.1.3 Quelques remarques importantes

Proposition 3.1.5. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme annulateur non nul. Si $d = \deg(\pi_u)$ alors la famille $(\text{Id}_E, u, \dots, u^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[u]$. En particulier $\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\pi_u)$.

Preuve. La famille est libre car si $\sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k u^k = 0$ le polynôme $Q = \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k X^k$ est un polynôme annulateur de u et si Q est non nulle cela contredirait la définition du polynôme minimal, donc $Q = 0$ et les α_k sont nuls. La famille est génératrice car si $P \in \mathbb{K}[X]$ et R le reste de la division euclidienne de P par π_u alors $P(u) = R(u)$ or $R \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$, ce qui établit le résultat. ■

Remarques. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathcal{J}_u \neq \{0\}$ (donc le polynôme minimal de u existe). On donne les remarques suivantes :

1. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on a $P = \pi_u$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :
 - (a) P est unitaire.
 - (b) $P(u) = \theta$ (autrement dit $P \in \mathcal{J}_u$ où $\mathcal{J}_u$ est l'idéal annulateur de u .)
 - (c) $\forall Q \in \mathbb{K}[X], \quad Q(u) = \theta \Rightarrow P|Q$.
2. Le polynôme minimal π_u de u est l'unique polynôme annulateur de u unitaire de degré minimal.
3. On a $\deg(\pi_u) \geq 1$.
4. u est inversible si et seulement si $\pi_u(0) \neq 0$.

Preuve. 1. Par définition du polynôme minimal.

2. Si P est un polynôme annulateur unitaire de u alors $\pi_u|P$, donc $\deg(\pi_u) \leq \deg(P)$. Si P est un polynôme unitaire annulateur de u est de degré minimal on aurait $\deg(P) \leq \deg(\pi_u)$, et comme par ailleurs $\pi_u|P$, on a aussi $\deg(\pi_u) \leq \deg(P)$, donc P et π_u sont unitaires de même degré donc égaux.
3. Sinon π_u serait constant et comme $\pi_u(u) = \theta$, on aurait $\pi_u = 0$, ce qui n'est pas le cas.
4. On va démontrer deux implications :
 - Si $\pi_u(0) = 0$ alors $X|\pi_u$, donc $\pi_u = XQ(X)$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$, donc $u \circ Q(u) = \theta$. Si u est inversible alors en composant avec u^{-1} on a $Q(u) = 0$ ce qui est impossible car $\deg(Q) < \deg(\pi_u)$.
 - Réciproquement si $\pi_u(0) \neq 0$ alors $\pi_u = a_0 + XQ(X)$ avec $a_0 = \pi_u(0) \in \mathbb{K}^*$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, donc $\theta = \pi_u(u) = a_0 \text{Id}_E + u \circ Q(u)$, donc en posant $v = -\frac{1}{a_0}Q(u)$ on a $u \circ v = v \circ u = \text{Id}_E$, donc u est inversible et $u^{-1} = v$.

3.2 Stabilité

3.2.1 Définitions et premières propriétés

Definition 3.2.1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E . On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$. Si c'est le cas u induit l'endomorphisme $u_F \in \mathcal{L}(F)$ tel que $u_F(x) = u(x)$ pour tout $x \in F$ appelé l'endomorphisme de F induit par u .

Exemples :

1. $\{0\}$ et E sont stables par tout endomorphisme de E .
2. Si h est une homothétie alors tout sous-espace vectoriel de E est stable par h .

Proposition 3.2.1. Si u et v sont deux endomorphismes de E tel que $u \circ v = v \circ u$ alors $\ker v$ et $\text{Im } v$ sont stables par u .

Preuve. Soit $x \in \ker v$ alors $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$, donc $v(x) \in \ker v$. Soit $x \in \text{Im } v$ alors $\exists y \in E$

tel que $x = u(y)$ donc $v(x) = v(u(y)) = u(v(y)) \in \text{Im } u$ ■

Remarques. En particulier si P est un polynôme alors :

1. $\ker P(u)$ et $\text{Im } P(u)$ sont stables par u .
2. $\ker u$ et $\text{Im } u$ sont stables par $P(u)$.
3. un cas très pratique est quand $P = (X - \lambda)^m$, donc $P(u) = (u - \lambda \text{Id})^m$.

3.2.1.1 La sous-algèbre $\mathcal{L}_F(E)$ des endomorphismes stabilisant F

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $\mathcal{L}_F(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) / u(F) \subset F\}$

Proposition 3.2.2. $\mathcal{L}_F(E)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Remarque. Si $u \in \mathcal{L}_F(E)$ alors $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}_F(E)$

3.2.2 Interprétation matricielle

3.2.2.1 base adaptée à un sous-espace stable et à une somme directe

On utilisera par la suite les définitions suivantes de base adaptée :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension p tel que $1 \leq p < n$ et $\mathcal{B}_F = (v_1, \dots, v_p)$ est une base de F , alors toute base de la forme

$$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n),$$

est appelé base de E adaptée à F .

- Si $F = \{0\}$ alors F n'admet pas de base, toute base de E sera donc appelée base adaptée à F .
- Si $F = E$, alors toute base de E sera appelée aussi base adaptée à F .
- Si F et G sont deux sous espace vectoriels de E tel que $F \oplus G = E$ alors on appelle base de E adaptée à la somme directe $F \oplus G = E$ toute base de E obtenue par concaténation d'une base $\mathcal{B}_F$ de F et une base $\mathcal{B}_G$ de G si F et G en possèdent. Si $F = \{0\}$ ou $G = \{0\}$, toute base de E sera donc dite adaptée à la somme directe $F \oplus G = E$.
- Généralement si $(E_i)_{1 \leq i \leq m}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E tel que $E = \bigoplus_{i=1}^m E_i$, avec $m \in \mathbb{N}$ et $m \geq 2$ et si pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on a $\mathcal{B}_i$ est une base de E_i alors la famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_m$ obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_i$ dans l'ordre croissant de l'indice i est appelée base de E adaptée à la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^m E_i$.

3.2.2.2 Interprétation matricielle de la stabilité

La stabilité se traduit matriciellement par des représentations matricielles de l'endomorphisme par des matrices particulière, triangulaires par blocs ou diagonales par blocs, comme le précisent les énoncés qui suivront :

Proposition 3.2.3. Soit u un endomorphisme de E . les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) F est stable par u .
- (ii) il existe une base $\mathcal{B}$ adaptée tel que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $p = \dim(F)$
- (iii) Pour toute base $\mathcal{B}$ adaptée tel que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $p = \dim(F)$

Proposition 3.2.4. Si $E = \bigoplus_{k=1}^s F_k$ et si u est un endomorphisme de E tel que F_k est stable par u pour tout $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$ alors la matrice de u dans une base $\mathcal{B} = \bigcup_{k=1}^s \mathcal{B}_k$ adaptée à la somme directe ci-dessus est de la

forme $A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_s \end{pmatrix}$, c'est-à-dire diagonale par blocs, où les A_k sont les matrices respectives des endomorphismes induits u_k relativement à $\mathcal{B}_k$

Remarque. réciproquement s'il existe une base de la forme ci-dessus tel que la matrice de u dans cette base est diagonale par blocs alors les sous espaces $F_k = \text{Vect}(\mathcal{B}_k)$ sont u -stables et $\bigoplus_{k=1}^s F_k = E$.

3.2.3 Polynôme minimal et stabilité

Proposition 3.2.5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Alors $\mathcal{J}_u \subset \mathcal{J}_{u_F}$. Cela veut dire en particulier que tout polynôme annulateur de u annule u_F . En particulier si le polynôme minimal de u existe il annule u_F , par suite :

Preuve. Soit $P \in \mathcal{J}_u$, donc $P(u) = \theta$ ou θ est l'endomorphisme nul de E .

• Soit $x \in E$, alors si on pose $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$, on a $P(u_F) = \sum_{k=0}^m a_k u_F^k$, donc pour tout $x \in F$, on a

$$P(u_F)(x) = \sum_{k=0}^m a_k u_F^k(x).$$

• Démontrons par récurrence que pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a $u_F^j(x) = u^j(x)$.

• Pour $j = 0$ on a $u^0 = \text{Id}_E$ et $u_F^0 = \text{Id}_F$, donc le résultat est vrai.

• Soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $u_F^j(x) = u^j(x)$, alors $u_F^{j+1}(x) = u_F(u_F^j(x)) = u_F(u^j(x))$. On a F est stable par u , donc F est aussi stable par u^j , donc $u_F^j(x) \in F$, donc $u_F(u^j(x)) = u(u^j(x)) = u^{j+1}(x)$.

• Il découle de tout ça que $P(u_F)(x) = \sum_{k=0}^m a_k u^k(x) = P(u)(x) = 0$, donc $P(u_F) = \theta_F$, et par suite $P \in \mathcal{J}_{u_F}$, ce finit complètement la preuve du fait que $\mathcal{J}_u \subset \mathcal{J}_{u_F}$. ■

Proposition 3.2.6. Soit u un endomorphisme de E tel que $\mathcal{J}_u \neq \{0\}$, et F un sous-espace stable par u . Alors $\mathcal{J}_{u_F} \neq \{0\}$ et $\pi_{u_F}|_{\pi_u}$.

Preuve. Si P est un polynôme comme F est stable par u on aussi F est stable par $P(u)$ car $u^k(F) \subset F$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et par suite $\sum a_k u^k(F) \subset F$. Si de plus $P(u) = 0$ alors $P(u_F) = 0$, donc $\pi_{u_F}|_P$. Comme $\pi(u) = 0$, on a $\pi_{u_F}|_{\pi_u}$. ■

3.3 Lemme de décomposition des noyaux

3.3.1 Le lemme

Théorème 3.3.1. Si $P_1, \dots, P_s$ (avec $s \in \mathbb{N}, s \geq 2$) sont des polynômes 2 à 2 premiers entre eux et $P = \prod_{k=1}^s P_k$, alors, pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$\ker(P(u)) = \bigoplus_{k=1}^s \ker(P_k(u)).$$

Preuve. Par récurrence sur s .

• Pours $s = 2$, alors $P = P_1 P_2$ avec $P_1 \wedge P_2 = 1$. Par le théorème de Bezout, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tel que $UP_1 + VP_2 = 1$, donc $(UP_1)(u) + (VP_2)(u) = \text{Id}_E$. Soit $x \in E' = \ker(P(u))$ alors :

$$x = \text{Id}_E(x) = (VP_2)(u)(x) + (UP_1)(u)(x)$$

Posons $x_1 = (VP_2)(u)(x)$ et $x_2 = (UP_1)(u)(x)$ alors $P_1(u)(x_1) = (UP_1 P_2)(u)(x) = UP(u)(x) = (U(u) \circ P(u))(x) = U(u)(0) = 0$ car $P(u) = 0$ puisqu'on a supposé que $x \in E' = \ker(P(u))$. De la même façon,

$P_2(u)(x_2) = 0$, donc $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \ker(P_1(u))$ et $x_2 \in \ker(P_2(u))$

Soit $x \in \ker(P_1(u)) \cap \ker(P_2(u))$. Par la relation $(\star)$ ci-dessus, on a :

$$x = \text{Id}_E(x) = U(u)(P_1(u)(x)) + V(u)(P_2(u)(x)) = 0$$

donc $x = 0$. Ainsi on a :

$$\ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u)) = \ker(P_1 P_2(u))$$

• Soit $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$ tel que la propriété en question est vraie et soit $P_1, \dots, P_{s+1}$ des polynômes deux à deux premiers entre eux, posons $P = \prod_{k=1}^{s+1} P_k$ et $Q = \prod_{k=1}^s P_k$ alors $Q \wedge P_{s+1} = 1$ car si R est un polynôme irréductible qui divise Q et P_{s+1} alors R divise un des P_k pour $1 \leq k \leq s$ et P_{s+1} , ce qui contredit le fait que P_k et P_{s+1} sont premiers entre eux. D'après le résultat pour $s = 2$, on a :

$$\ker(P(u)) = \ker(Q(u)) \oplus \ker(P_{s+1}(u)).$$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\ker(Q(u)) = \bigoplus_{k=1}^s \ker(P_k(u))$$

Donc :

$$\ker(P(u)) = \bigoplus_{k=1}^{s+1} \ker(P_k(u))$$

■

Exercice : En s'inspirant de la preuve démontrer que si (π_j) est la famille des projecteurs associés à la somme directe ci-dessus, alors $\pi_j \in \mathbb{K}[u]$ pour tout j .

3.3.2 Cas particulier intéressant : Si $P(u) = 0$

Proposition 3.3.1. Si $P_1, \dots, P_s$ sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux et u un endomorphisme de E tel que $P(u) = 0$ avec $P = \prod_{k=1}^s P_k$, alors

$$E = \bigoplus_{k=1}^s \ker(P_k(u))$$

Preuve. Conséquence immédiate du théorème 3.3.1 ci-dessus. Ici $\ker(P(u)) = \ker(0) = E$. ■

3.3.3 Exemples fondamentaux

3.3.3.1 Exemple 1 :

Soit π un projecteur alors $P = X^2 - X$ est un polynôme annulateur de π . Comme $P = X(X - 1)$, on a : $E = \ker \pi \oplus \ker(\pi - \text{Id}_E)$. En remarquant que $\ker(\pi - \text{Id}_E) = \text{Im}(\pi)$, on retrouve : $\ker(\pi) \oplus \text{Im}(\pi) = E$.

3.3.3.2 Exemple 2 :

Par le même raisonnement, si s est un symétrie de E , on a :

$$E = \ker(s - \text{Id}_E) \oplus \ker(s + \text{Id}_E).$$

3.4 Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Dans tout ce qui suit $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel non réduit à $\{0\}$.

3.4.1 Définitions et premières propriétés

3.4.1.1 Endomorphismes

Definition 3.4.1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $x \neq 0$ et $u(x) = \lambda x$.
- On note $\text{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u .
- Soit $x \in E$. On dit que x est un vecteur propre de u si $x \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Notation : $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \text{Id}_E)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 3.4.1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, on a :

$$\lambda \in \text{Sp}(u) \Leftrightarrow (u - \lambda \text{Id}_E) \text{ non injectif} \Leftrightarrow E_\lambda(u) \neq \{0\}.$$

Definition 3.4.2

si λ est une valeur propre de u , $E_\lambda(u)$ s'appelle sous-espace propre

Il en découle que $E_\lambda(u)$ existe pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, mais il ne porte le nom de sous-espace propre que si λ est une valeur propre de u , c'est le cas où $E_\lambda(u)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Exemples. 1. On suppose que E est non réduit à $\{0\}$. Si u est l'homothétie de rapport α alors l'unique valeur propre de u est α .

Preuve. Comme E est non réduit à $\{0\}$, soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$. On a $u(x) = \alpha x$, donc α est une valeur propre de u . Réciproquement, soit λ une valeur propre de u , alors $\exists x \in E, x \neq 0$ et $u(x) = \lambda x$. Or $u(x) = \alpha x$, donc $\alpha x = \lambda x$. Comme $x \neq 0$, on a $\alpha = \lambda$. ■

2. $u : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]; P \mapsto u(P) = XP'$, alors les valeurs propres de u sont les entiers naturels. Autrement dit $\text{Sp}(u) = \mathbb{N}$.

Preuve. Remarquons que $u(X^n) = X(nX^{n-1}) = nX^n$. Comme $X^n \neq 0$, l'entier naturel n est une valeur propre de u . Réciproquement, soit λ une valeur propre de u , alors il existe un polynôme P non nul tel que $u(P) = \lambda P$. Notons $n = \deg(P)$ et posons $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On a $XP'(X) = \lambda P(X)$, donc :

$$\sum_{k=1}^n k a_k X^k = \sum_{k=0}^n \lambda a_k X^k,$$

et par identification des coefficients : $\lambda a_0 = 0$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, (k - \lambda) a_k = 0$. Comme $a_n \neq 0$, on a $\lambda = n$ et $a_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En conclusion $\text{Sp}(u) = \mathbb{N}$. ■

3. Soit $E = C^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications infiniment dérivables de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Soit $u : E \rightarrow E, f \mapsto u(f) = f'$; alors $\text{Sp}(u) = \mathbb{R}$.

Preuve. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, si on pose $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = e^{\lambda t}$ alors $u(f) = \lambda f$. ■

4. De même pour $E = C^\infty(\mathbb{R})$ et l'application linéaire $v : E \rightarrow E, f \mapsto f''$ on a : $\text{Sp}(v) = \mathbb{R}$.

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \geq 0$ et $f_\lambda(t) = \cos \sqrt{\lambda} t$ alors $v(f_\lambda) = -\lambda f_\lambda$ et f_λ est non nulle ; donc $-\lambda$ est une valeur propre de v . Par ailleurs si on pose $g_\lambda(t) = \text{ch}(\sqrt{\lambda} t)$, on a $v(g_\lambda) = \lambda g_\lambda$ et $g_\lambda \neq 0$, donc λ est une valeur propre de v . On a démontré que pour tout $\lambda \geq 0$, les réels λ et $-\lambda$ sont des valeurs propres de v , donc $\text{Sp}(v) = \mathbb{R}$. ■

5. L'endomorphisme $D : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X], P \mapsto P'$ admet une et une seule valeur propre à savoir 0.

Preuve. Remarquons que pour $P = 1$, par exemple, on a $D(P) = 0 = 0.P$ donc $0 \in \text{Sp}(D)$. Réciproquement, si λ est une valeur propre de D , il existe un polynôme non nul P tel que $D(P) = \lambda P$, donc $P' = \lambda P$. Forcément P est constant car sinon, on aurait $\deg(P') = \deg(P)$, donc $P' = 0$ et alors $\lambda = 0$. ■

Remarques. On fait les remarques suivantes :

1. $0 \in \text{Sp}(u) \Leftrightarrow u$ non injectif. (En dimension finie c'est équivalent à u non bijectif). En effet, ce n'est qu'un cas particulier de la proposition 3.4.1.
2. Soit θ l'endomorphisme nul de E , alors : $\text{Sp}(\theta) = \{0\}$. En effet ce n'est qu'un cas particulier de l'exemple d'une homothétie. Directement, si $\alpha \in \text{Sp}(\theta)$ alors il existe un vecteur non nul x tel que $\theta(x) = \alpha x$. Or $\theta(x) = 0$, donc $\alpha x = 0$ et $x \neq 0$, donc $\alpha = 0$.

3.4.1.2 Matrices

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme, lorsqu'ils existent sont appelés éléments propres de l'endomorphisme. On donne la définition suivante qui définit les éléments propres d'une matrice carrée :

Definition 3.4.3

les éléments propres de A sont ceux de l'endomorphisme canoniquement associé.

Remarques. Comme conséquence de cette définition, on a :

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. λ est une valeur propre de A si :

$$\exists X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}), \quad \begin{cases} X \neq 0 \\ AX = \lambda X \end{cases}.$$

2. $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ de A si $X \neq 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda X$
3. On note aussi $\text{Sp}(A)$ ensemble des valeurs propres de A . $E_\lambda(A) = \{X / AX = \lambda X\}$, alors $\lambda \in \text{Sp}(A)$ si et seulement si $E_\lambda \neq \{0\}$, dans ce cas E_λ s'appelle le sous-espace propre associé à λ . On note parfois $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$ en identifiant une matrice à son endomorphisme canoniquement associé.
4. Si $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ sont deux sous-corps de $\mathbb{C}$ tel que $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ alors pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$ on a : $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subset \text{Sp}_{\mathbb{L}}(A)$
5. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, λ est une valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n$ est non inversible si et seulement si $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
6. En particulier, 0 est une valeur propre de A si et seulement si A est non inversible si et seulement si $\det(A) = 0$.
7. $\text{Sp}(O_n) = \{0\}$ (où O_n est la matrice carrée nulle d'ordre n .)

3.4.1.3 Premières propriétés

Proposition 3.4.2. si $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sont des valeurs propres 2 à 2 distinctes de u alors la somme des sous-espaces propres est directe.

Preuve. Comme les λ_k sont deux à deux distincts les polynômes $X - \lambda_k$ sont deux à deux premiers entre eux et le lemme des noyaux permet d'écrire en posant $Q = \prod_{k=1}^s (X - \lambda_k)$:

$$\ker(Q(u)) = \bigoplus_{k=1}^s \ker(u - \lambda_k \text{Id}_E),$$

ce qui termine la preuve de la proposition. ■

Corollaire 3.4.1. une famille de vecteurs propres associée à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre.

Preuve. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ des valeurs propres deux à deux distinctes d'un endomorphisme u et $x_1, \dots, x_s$ des vecteurs propres respectifs associés. Pour tout $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{K}$, si $\sum_{k=1}^s \alpha_k x_k = 0$, comme $\alpha_k x_k \in E_{\lambda_k}(u)$, pour tout $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$ et que la somme de $E_{\lambda_k}(u)$ est directe, en vertu de la proposition 3.4.2, on a $\forall k \in \llbracket 1, s \rrbracket, \alpha_k x_k = 0$, et comme $x_k \neq 0$, on a $\alpha_k = 0$, d'où la liberté de la famille $(x_k)_{1 \leq k \leq s}$. ■

Proposition 3.4.3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E_\lambda(u), P(u)(x) = P(\lambda)x,$$

en particulier, si $\lambda \in \text{Sp}(u)$ alors $P(\lambda) \in \text{Sp}(P(u))$ et $E_\lambda(u) \subset E_{P(\lambda)}(P(u))$, donc si x est un vecteur propre de u associé à λ , alors x est vp de $P(u)$ associé à $P(\lambda)$.

Corollaire 3.4.2. Toute valeur propre de u est une racine de π_u

Preuve. En effet si $\lambda \in \text{Sp}(u)$ alors $\pi(\lambda) \in \text{Sp}(\pi(u)) = \{0\}$, donc $\pi(\alpha) = 0$ ■

Remarque. On a les propriétés similaires pour les matrices

3.4.2 Cas de la dimension finie, polynôme caractéristique

Dans tout ce qui suit E de dim n non nulle.

Motivation : Si λ est une valeur propre d'une matrice A , on remarque que c'est une racine d'un polynôme de degré n .

3.4.2.1 Polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme

Proposition 3.4.4. $f(x) = \det(xI - A)$ est une fonction polynômiale. Le polynôme associé noté χ_A vérifie ce qui suit :

- (i) il est unitaire de degré n .
- (ii) $\chi_A = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$.

Preuve. Soit $x \in \mathbb{K}$ et si on pose $A = (a_{ij})$, posons $\widehat{a_{ij}} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{si } i \neq j \\ x - a_{ii} & \text{si } i = j \end{cases}$; alors

$$f(x) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} D_\sigma \quad \text{avec} \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \quad D_\sigma = \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \widehat{a_{i\sigma(i)}}$$

On voit facilement que D_σ est polynômiale en x , on confondra désormais polynôme et fonction polynômiale associée.

On suppose à présent que $n \geq 2$ (le cas $n = 1$ étant très facile à vérifier) ; soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que $\sigma \neq \text{Id}$; posons

$$Y = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket / \sigma(i) \neq i\}$$

alors $\text{card}(Y) \geq 2$; en effet $Y \neq \emptyset$ car $\sigma \neq \text{Id}$, et si $i \in Y$, posons $j = \sigma(i)$ alors $i \neq j$ et par injectivité de σ , on a $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ donc $j \neq \sigma(j)$ donc $j \in Y$. Il en découle que $\deg(D_\sigma) \leq n - 2$. Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que $\sigma \neq \text{Id}$. Sauf D_{Id} , tous les monômes D_σ sont de degré plus petit ou égal à $n - 2$. Comme par ailleurs, $\deg(D_{\text{Id}}) = n$, les monômes de $f(x)$ de degré n et celui de degré $n - 1$ se trouvent dans D_{Id} . Comme

$$D_{\text{Id}}(X) = \prod_{i=1}^n (X - a_{ii}) = X^n - \left(\sum_{i=1}^n a_{ii}\right) X^{n-1} + \dots$$

on a

$$\chi_A(X) = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

Proposition 3.4.5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

1. A et tA ont le même polynôme caractéristique. Autrement dit : $\chi_{{}^tA} = \chi_A$.
2. Si A et B sont semblables alors $\chi_A = \chi_B$

Preuve. 1. Soit $x \in \mathbb{K}$, alors $\chi_{{}^tA}(x) = \det(xI_n - {}^tA) = \det({}^t(xI_n - A)) = \det(xI_n - A) = \chi_A(x)$.
 2. Comme A et B sont semblables, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = PAP^{-1}$, donc, pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a : $\chi_B(x) = \det(xI_n - B) = \det(xI_n - PAP^{-1}) = \det(P(xI_n - A)P^{-1}) = \det(P)\det(xI_n - A)\det(P^{-1}) = \det(xI_n - A) = \chi_A(x)$, on a utilisé que $\det(P^{-1}) = (\det(P))^{-1}$.

Remarque. La réciproque n'est pas vraie, voici un contre exemple : On prends $E = \mathbb{R}^3$ et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $\chi_A = \chi_B = X(X-1)^2$, cependant $E_1(A)$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$, à savoir : $\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$ alors que $E_1(B)$ est une droite vectorielle, à savoir $\mathbb{R}e_3$. Donc A et B ne sont pas semblables.

Remarquons que A et B ont aussi le même rang (elles ont le même déterminant et la même trace puisqu'elles ont le même polynôme caractéristique).

Definition 3.4.4

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n (avec $n \geq 1$). Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u de E est le polynôme caractéristique d'une matrice qui le représente dans une base quelconque de E .

Remarque. Cette définition est pourvue de sens car si deux matrices A et B représentent u dans des bases respectives, les matrices A et B sont semblables, donc d'après la proposition 3.4.5, on a $\chi_A = \chi_B$, donc le polynôme caractéristique en question ne dépend que de u .

| **Exemple :** Soit π un projecteur de E de rang r tel que $0 < r < n = \dim(E)$. On sait que $\text{Im}(\pi) \oplus \ker(\pi) = E$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à cette somme directe, alors la matrice de π relativement à cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de sorte que : $\chi_\pi = \chi_A = (X-1)^r X^{n-r}$.

3.4.2.2 Polynôme caractéristique et stabilité

Rappel : Si $M = \text{diag}(M_1, \dots, M_s)$ est une matrice triangulaire supérieure par blocs diagonaux, c'est-à-dire, M est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & \ddots & \star & \\ & & \ddots & \\ O & & & M_s \end{pmatrix}$$

alors

$$\det(M) = \prod_{k=1}^s \det(M_k).$$

Remarque. C'est valable aussi si la matrice est triangulaire inférieure pa blocs.

Proposition 3.4.6. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel non nul de E u -stable et u_F l'endomorphisme induit associé. Alors $\chi_{u_F} \mid \chi_u$

Preuve. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u et F' un supplémentaire de F , donc

$$(\star\star) \quad F \oplus F' = E$$

Soit

$$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_r, \dots, v_n)$$

une base adaptée à la somme directe $(\star\star)$, alors la matrice de u relativement à $\mathcal{B}$ est :

$$A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Donc $\chi_u = \chi_B \chi_D = \chi_{u_F} \chi_D$ et $\chi_{u_F} \mid \chi_u$. ■

3.4.2.3 Polynôme caractéristique et spectre

Proposition 3.4.7. $\lambda \in \text{Sp}(A)$ si et seulement si $\chi_A(\lambda) = 0$. En particulier A a au plus n valeurs propres

Corollaire 3.4.3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\text{Sp}(u)$ est fini et $\text{card}(\text{Sp}(u)) \leq \dim(E)$.

Definition 3.4.5

multiplicité d'une vp : Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$, la multiplicité de λ est son ordre de multiplicité $m_\lambda(u)$ dans le polynôme caractéristique χ_u .

Proposition 3.4.8. Si $\lambda \in \text{Sp}(u)$ alors $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m_\lambda(u)$

Preuve. Posons $d = \dim(E_\lambda(u))$ et $m = m_\lambda(u)$. Comme λ est une valeur propre de u , on a $d \geq 1$. Soit E' un supplémentaire de $E_\lambda(u)$. Si $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$ est une base adaptée à la somme directe $E_\lambda(u) \oplus E' = E$ alors la matrice de u relativement à $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda I_d & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Il en résulte que le polynôme caractéristique de u est

$$\chi_u = (X - \lambda)^d \chi_D$$

en particulier $((X - \lambda)^d \mid \chi_u)$. Comme $m = m_\lambda(u)$ est la multiplicité de λ dans χ_u , alors :

$$\chi_u = (X - \lambda)^m Q \quad \text{et} \quad (X - \lambda) \nmid Q;$$

donc :

$$(X - \lambda)^d \mid (X - \lambda)^m Q \quad \text{et} \quad (X - \lambda) \wedge Q = 1$$

et par le lemme de Gauss,

$$(X - \lambda)^d \mid (X - \lambda)^m,$$

donc $d \leq m$. ■

3.4.2.4 Cas où χ_u est scindé

- Lorsque le polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie ou d'une matrice carrée est

scindé, on propose deux façons de l'écrire :

- Première façon :

$$\chi_u = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de u , comptées avec leur ordres de multiplicités.

- Deuxième façon :

$$\chi_u = \prod_{k=1}^s (X - \mu_k)^{m_k}$$

avec $s = \text{card}(\text{Sp}(u))$ et $\mu_1, \dots, \mu_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u .

- Lorsque le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est scindé, on peut calculer son déterminant et sa trace en fonction des valeurs propres, ce qui est résumé par la :

Proposition 3.4.9. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé, précisément :

$$\chi_u = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k) = \prod_{k=1}^s (X - \mu_k)^{m_k}$$

avec les $\lambda_k, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ les valeurs propres de u comptées avec leur multiplicités et les $\mu_j, j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u ; alors :

$$\begin{cases} \det(u) = \prod_{k=1}^n \lambda_k = \prod_{j=1}^s \mu_j^{m_j} \\ \text{tr}(u) = \sum_{k=1}^n \lambda_k = \sum_{j=1}^s m_j \mu_j \end{cases}$$

Remarque. C'est aussi valable pour une matrice carrée ayant le polynôme caractéristique scindé.

3.5 Valeurs propres et polynômes annulateur

3.5.1 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 3.5.1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $\chi_u(u) = 0$.

Preuve. On va démontrer que pour tout vecteur $x \in E$, on a $\chi_u(u)(x) = 0$.

- Si $x = 0$, c'est vrai.

- si $x \neq 0$, il existe un entier naturel non nul p maximal tel que la famille $\mathcal{F}_x = (u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre : effet $p = 1$ convient et l'ensemble en question est une partie de $\mathbb{N}^*$ majorée par n , on prend son plus grand élément p . Par définition de p , la famille $x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)$ est liée donc il existe $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$u^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k(x)$$

Ainsi si on pose

$$P = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$$

on a

$$P(u)(x) = 0.$$

Le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(\mathcal{F}_x)$ est stable par u puisque les images des vecteurs de la famille $\mathcal{F}_x$, par u sont des combinaison linéaires de ceux ci. Si on note u_F l'endomorphisme induit on a $\chi_{u_F} | \chi_u$. On va montrer que :

$$\chi_{u_F} = P$$

et comme $P(u)(x) = 0$, il en découlera que par suite $\chi_{u_F}(u)(x) = 0$ donc $\chi_u(u)(x) = 0$.

La matrice de u_F relativement à la base $\mathcal{F}_x$ de F est :

$$B_p = \text{mat}_{\mathcal{F}_x}(u_F) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

Une récurrence sur p permet de démontrer que $\chi_B = P$.

En effet , il est aisé de prouver ce résultat pour $p = 2$. Soit $p \geq 3$ tel que le résultat est vrai pour $p - 1$, alors en développant suivant la première ligne , on a :

$$\begin{aligned} \chi_B &= \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & X & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & X & -a_{p-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & X - a_p \end{vmatrix} \\ &= X \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ -1 & X & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & X & -a_{p-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & X - a_p \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{p+1} a_0 \begin{vmatrix} -1 & X & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -1 & X \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Donc :

$$\chi_B = X \left(X^{p-1} - \sum_{k=1}^{p-1} a_k X^{k-1} \right) + (-1)^{p-1+1} a_0 (-1)^{p-1}$$

Donc :

$$\chi_B = X^p - \sum_{j=1}^{p-1} a_j X^j - a_0 = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$$

■

Remarques. Le théorème s'exprime aussi comme suit :

1. $\pi_u | \chi_u$
2. $\chi_u \in \mathcal{I}_u$
3. On a $\dim(\mathbb{K}[u]) \leq \dim(E)$. Notons que si $n \neq 0$ alors $\dim(\mathbb{K}[u]) > 0$; en effet $\text{Id}_E \in \mathbb{K}[u]$ et $\text{Id}_E \neq 0$.

3.5.2 Autres liens entre χ_A et π_A

Proposition 3.5.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors, χ_A et π_A ont les mêmes racines.

Preuve. En effet si λ est une racine de χ_A alors $\lambda \in \text{Sp}(A)$. On a déjà vu qu'alors $\pi_A(\lambda) = 0$. Réciproquement, si $\pi_A(\lambda) = 0$, alors, π_A s'écrit : $\pi_A = (X - \lambda)Q$. Forcément $Q(A) \neq 0$, donc il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $X = Q(A)Y \neq 0$. On a $(A - \lambda I_n)Q(A) = 0$, donc $(A - \lambda I_n)X = 0$ et $\lambda \in \text{Sp}(A)$. ■

Remarque. En particulier, si χ_A est scindé alors π_A est scindé et dans ce cas si $\text{Sp } A = \{\lambda_k, k \in \llbracket 1, s \rrbracket\}$ alors $\chi_A = \prod (X - \lambda_k)^{m_k}$ et $\pi_A = \prod (X - \lambda_k)^{m'_k}$ avec m_k, m'_k des entiers tel que $1 \leq m'_k \leq m_k$ et m_k est la multiplicité de λ_k dans χ_A .

Proposition 3.5.2. Si P est un polynôme annulateur de u alors toute valeur propre de u est une racine de P

Preuve. En effet toute valeur propre de u est une racine du polynôme minimal π_u de u et comme $P(u) = 0$, on a $\pi_u | P$ et le résultat en découle. ■

3.6 Diagonalisation

Dans tout ce qui suit les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie non nulle.

3.6.1 Endomorphisme, matrice diagonalisable

3.6.1.1 Endomorphismes diagonalisables

Proposition 3.6.1. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.
- (ii) $\text{Sp}(u)$ non vide et $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$
- (iii) E admet une base formée de vecteurs propres de u .

Preuve.

• Supposons qu'on a (i) et soit $\mathcal{B}$ une base de E tel que la matrice $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, les termes deux à deux distincts qui apparaissent dans la diagonale de A avec des éventuelles répétitions pour chacun d'eux. Pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, notons $\mathcal{C}_i$ la sous-famille de $\mathcal{B}$ de tous les vecteurs e tel que $u(e) = \lambda_i e$. Soit $\mathcal{C} = \bigcup \mathcal{C}_i$, la réunion étant faite de façon à ordonner les $\mathcal{C}_i$ par ordre croissant de l'indice i . On a alors :

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} \Delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Delta_s \end{pmatrix}$$

où

$$\forall k \in \llbracket 1, s \rrbracket \quad \Delta_k = \lambda_k I_{n_k}$$

avec n_k le nombre de vecteurs de la famille $\mathcal{C}_k$. Donc

$$E = \bigoplus_{k=1}^s E_k$$

avec $E_k = \text{Vect}(\mathcal{C}_k) = E_{\lambda_k}(u)$.

• Supposons que (ii) est vraie. Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, notons $\mathcal{C}_{\lambda}$ une base de $E_{\lambda}(u)$ et soit $\mathcal{C} = \bigcup_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \mathcal{C}_{\lambda}$. Alors, $\mathcal{C}$ est une base de E adaptée à la somme directe de l'hypothèse et c'est clairement une base formée de vecteurs propres de u puisque si e est un vecteur de $\mathcal{C}$, il existe $\lambda \in \text{Sp}(u)$ tel que e est un vecteur de E_{λ} , donc $e \in E_{\lambda}(u)$, donc $u(e) = \lambda e$ et par suite e est un vecteur propre de u .

• Supposons que (iii) est vraie, soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u . Alors

pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_i) = \lambda_i e_i$, donc la matrice de u relativement à $\mathcal{B}$ est :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Conclusion : On a démontré les implications : $(i) \Rightarrow (ii)$, $(ii) \Rightarrow (iii)$ et $(iii) \Rightarrow (i)$, donc les assertions (i) , (ii) et (iii) sont équivalentes. ■

Definition 3.6.1

Si l'une des assertions (i) , (ii) , (iii) de la proposition 3.6.1 est réalisée, on dit que u est diagonalisable.

Remarque. Toute base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de u est appelée base de diagonalisation de u .

Proposition 3.6.2. Soit u un endomorphisme tel que $\text{Sp}(u) \neq \emptyset$. Alors u est diagonalisable si et seulement si $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_\lambda) = \dim E$

Théorème 3.6.1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors une condition nécessaire pour que u soit diagonalisable est χ_u est scindé. Si cette condition est remplie alors u est diagonalisable si et seulement si pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on a $m(\lambda) = d(\lambda)$ où $m(\lambda)$ est la multiplicité de λ et $d(\lambda) = \dim(E_\lambda(u))$.

Preuve. En effet, le fait que χ_u soit scindé est une condition nécessaire pour que u soit diagonalisable puisque si u est diagonalisable il admet une matrice $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ dans une base de diagonalisation et par suite $\chi_u = \prod (X - \lambda_k)$. Supposons donc que χ_u est scindé alors on a $n = \sum m(\lambda_k)$. En particulier u est diagonalisable si et seulement si $n = \sum d(\lambda_k)$ si et seulement si $\sum (m(\lambda_k) - d(\lambda_k)) = 0$ si et seulement si $m(\lambda_k) = d(\lambda_k), \forall k$ car on sait que $m(\lambda_k) - d(\lambda_k) \geq 0$, pour tout $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$. ■

Exemple. Soit $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$ et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \lambda & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ pour que A soit diagonalisable.

Réponse : On remarque que $\alpha \in \text{Sp}(A)$ et que e_1 et e_3 sont des vecteurs propres associés à α , donc la multiplicité de α dans χ_A est supérieure ou égale à 2, donc le polynôme caractéristique de A est de la forme : $\chi_A = (X - \alpha)^2(X - b)$ de sorte que χ_A est scindé, donc $\text{tr}(A) = 2\alpha + b = 2\alpha + \gamma$ et $\gamma = b$. Il en découle que $\chi_A = (X - \alpha)^2(X - \gamma)$. La dimension du sous-espace vectoriel propre $E_\alpha(A)$ est $d(\alpha) = 3 - \text{rg}(A - \alpha A) = \text{rg}(A')$ avec :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & \gamma - \alpha & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $\alpha \neq \gamma$ alors $\text{rg}(A') = 1$ et $d(\alpha) = 2 = m(\alpha)$, donc A est diagonalisable.
- Si $\alpha = \gamma$ alors $m(\alpha) = 3$ d'une part, et d'autre part : si $\beta = \lambda = 0$ alors $\text{rg}(A') = 0$, donc $d(\alpha) = 3$ et A est diagonalisable, et si $\beta \neq 0$ ou $\lambda \neq 0$ alors $\text{rg}(A') = 1$, donc $d(\alpha) = 2 < 3 = m(\alpha)$ et A n'est pas diagonalisable.

Résumé : La matrice A est diagonalisable si et seulement si

$$\alpha \neq \gamma \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = \lambda = 0 \end{cases}$$

si et seulement si :

$$\alpha \neq \gamma \quad \text{ou} \quad \beta = \lambda = 0$$

3.6.1.2 Matrice carrée diagonalisable

Definition 3.6.2

Une matrice carrée est diagonalisable si l'endomorphisme canoniquement associé est diagonalisable.

Proposition 3.6.3. une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

3.6.2 Autres caractérisation des endomorphismes diagonalisables

3.6.2.1 Décomposition spectrale

Notation : Si $E = \bigoplus_{k=1}^s E_k$ on note $\widetilde{E}_k = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s E_j$ et π_k la projection sur E_k parallèlement à $\widetilde{E}_k$.

Proposition 3.6.4. Si u est diagonalisable et $\lambda_k, k \in \llbracket 1, s \rrbracket$ ses valeurs propres deux à deux distinctes alors $u = \sum_{k=1}^s \lambda_k \pi_k$ où les π_k sont les projecteurs associés à la somme directe : $E = \bigoplus_{k=1}^s E_k$

Preuve. si $x = x_1 + \dots + x_s$ avec $x_k \in E_k(u)$ alors $u(x) = u(x_1) + \dots + u(x_s) = \sum \lambda_k x_k = \sum \lambda_k \pi_k(x)$ ■

Théorème 3.6.2. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ alors, avec les notations ci-dessus, $P(u) = \sum_{k=1}^s P(\lambda_k) \pi_k$

Preuve. Si $P = X^m$, raisonnons par récurrence sur m . Pour $m = 0$, il vient $\text{Id}_E = \sum \pi_k$, chose juste. Pour $m = 1$ c'est la prop ci-dessus. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^m = \sum \lambda_k^m \pi_k$. On a $\pi_j u^m = \sum \lambda_k^m \pi_j \pi_k = \lambda_j^m \pi_j$ de sorte que $u^{m+1} = u \cdot u^m = \sum \lambda_j \pi_j u^m = \sum_j \lambda_j^{m+1} \pi_j$.

Pour finir, soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = \sum_{m=0}^N a_m X^m$, alors :

$$\begin{aligned} P(u) &= \sum_{m=0}^N a_m u^m \\ &= \sum_{m=0}^N \sum_{j=1}^s a_m \lambda_j^m \pi_j \\ &= \sum_{j=1}^s \left(\sum_{m=0}^N a_m \lambda_j^m \right) \pi_j \\ &= \sum_{j=1}^s P(\lambda_j) \pi_j. \end{aligned}$$

■

3.6.2.2 Conséquences

Proposition 3.6.5. Si u est diagonalisable de valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ alors le polynôme scindé à racines simples : $\pi = \prod_{j=1}^s (X - \lambda_j)$ annule u .

Preuve. Comme $\pi(\lambda_j) = 0$ pour tout j , c'est une conséquence immédiate du théorème précédent. ■

Théorème 3.6.3. u est diagonalisable ssi son polynôme minimal π_u est scindé à racines simples.

Preuve. Si u est diagonalisable et $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ alors le polynôme $\pi = \prod (X - \lambda_j)$ annule u . Or chaque λ_j est une racine du polynôme minimal π_u , donc $\pi | \pi_u$ et par suite $\pi = \pi_u$, donc π_u est scindé simple. Réciproquement si $\pi_u = \prod (X - \lambda_j)$ avec les λ_j deux à deux distincts, alors par le lemme des noyaux et $\pi_u(u) = 0$, on a $E = \bigoplus_{j=1}^s E_{\lambda_j}(u)$ donc u est diagonalisable. ■

Corollaire 3.6.1. u est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$. Dans un tel cas les valeurs propres de u sont parmi les racines de P .

Preuve. Si u est diagonalisable alors $P = \pi_u$ est un polynôme annulateur de u scindé à racines simples d'après le théorème 3.6.3.

Réciproquement, si P est un polynôme scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$ alors $\pi_u | P$ et par suite π_u est scindé à racines simples, donc, d'après le théorème 3.6.3, l'endomorphisme u est diagonalisable. ■

Corollaire 3.6.2. Si $\dim E = n$ et u admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors u est diagonalisable et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Remarques. On fait les remarques suivantes :

1. Si $\dim(E) = n$, un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ possède exactement n valeurs propres si et seulement si le polynôme caractéristique de u est scindé à racines simples.
2. Si $\dim(E) = n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme possédant exactement n valeurs propres alors $\pi_u = \chi_u$.

Proposition 3.6.6. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable et F est un sous-espace vectoriel de E . Si F est stable par u alors l'endomorphisme induit u_F est diagonalisable

Preuve. Comme u est diagonalisable, son polynôme minimal π_u est scindé à racines simples, or le polynôme minimal π_{u_F} de u_F divise π_u , donc π_{u_F} est scindé à racine simples, par suite u_F est diagonalisable. ■

3.7 Trigonalisation

Tout espace vectoriel considéré dans ce paragraphe est de dimension finie non nulle

3.7.1 Définitions

3.7.1.1 Endomorphisme trigonalisable

Definition 3.7.1

Un endomorphisme u est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que $T = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieur.

Remarques. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (E étant un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie non nulle n .) On a les remarques suivantes :

1. S'il existe une base $\mathcal{C}$ de E tel que $\text{mat}_{\mathcal{C}}(u)$ est triangulaire inférieure alors u est trigonalisable.

Preuve. Si $\mathcal{C} = (c_k)_{1 \leq k \leq n}$ Soit $\mathcal{B} = (b_k)_{1 \leq k \leq n}$ tel que $b_k = c_{n-k+1}$ alors $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire sup. ■

2. Si u est trigonalisable représenté par une matrice triangulaires $T = (t_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ alors les termes diagonaux $t_{11}, \dots, t_{nn}$ sont exactement les valeurs propres de u comptées avec leur multiplicités.

Preuve. Si u est représenté par T alors son polynôme caractéristique est $\chi_u = \prod_{k=1}^n (X - t_{kk})$, ce qui prouve le résultat énoncé. ■

Exemples. On donne les exemples suivants :

1. Tout endomorphisme diagonalisable est trigonalisable.
2. $u : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]; P \mapsto (X + 3)P'$. Si $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ est la base canonique de E alors :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.7.1.2 Matrice trigonalisable

Definition 3.7.2

Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice carrée. M est trigonalisable si l'endomorphisme canoniquement associé est trigonalisable.

Proposition 3.7.1. M est trigonalisable si et seulement si M est semblable à une matrice triangulaire sup si et seulement si M est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

Remarque. Toute matrice triangulaire supérieure ou inférieure, toute matrice diagonale est trigonalisable.

3.7.2 Caractérisation par les polynômes caractéristique

3.7.2.1 Caractérisation

Théorème 3.7.1. Soit u un endomorphisme. les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est trigonalisable
- (ii) Le polynôme caractéristique χ_u est scindé .

Preuve. - Si u est trigonalisable, il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure T , donc $\chi_u = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ où les λ_k sont les termes diagonaux de T .

- Réciproquement, par récurrence sur la dimension n de E .

- Si $n = 1$, on a forcément $\pi_u = X - c$, donc u est une homothétie donc u est même diagonalisable.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété à démontrer est vraie pour tout espace vectoriel de dimension n . Soit E un espace vectoriel de dimension $n + 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. Soit λ une racine de χ_u , donc λ est une valeur propre de u , e_1 un vecteur propre associé et E' un supplémentaire de $\mathbb{K}e_1$. Considérons une base $\mathcal{B}' = (e_2, \dots, e_{n+1})$ de E' et la base de E sous-jacente $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$. alors :

$$A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline 0 & B \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right)$$

avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. On a alors $\chi_u = (X - \alpha)\chi_B$, et comme χ_u est scindé, il en est de même de χ_B . Soit v l'endomorphisme canoniquement associé à B , alors $\chi_v = \chi_B$, donc χ_v est scindé, donc, par hypothèse de récurrence, on a v est trigonalisable, donc B est trigonalisable, donc il existe $Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ et

une matrice triangulaire supérieure $T_1 \in \mathcal{M}_n(K)$ tel que $B = QT_1Q^{-1}$, donc $A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline 0 & QT_1Q^{-1} \end{array} \right)$.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, alors $P \in \mathbf{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$. On a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & LQ \\ \hline 0 & T_1 \end{pmatrix} =$

T est une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ et comme $A = PTP^{-1}$, la matrice A est trigonalisable, donc l'endomorphisme u est trigonalisable, ce qui termine la preuve du théorème. ■

Remarque. On a un théorème similaire pour les matrices carrées : Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_A est scindé.

3.7.2.2 Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Théorème 3.7.2. Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie. Alors tout endomorphisme de E est trigonalisable.

Théorème 3.7.3. Toute matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

3.7.3 Endomorphismes et matrices nilpotents

3.7.3.1 Rappel

Definition 3.7.3

Soit E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u nilpotent s'il existe un entier naturel non nul k tel que $u^k = 0$. Le plus petit k vérifiant $u^k = 0$ s'appelle indice de nilpotence de u .

Definition 3.7.4

Soit A une matrice carrée. A est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$. le plus petit $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^k = 0$ s'appelle indice de nilpotence de A .

Exemple : Si E est de dimension finie non nulle n alors un endomorphisme u est nilpotent si et seulement si $u^n = 0$.

3.7.3.2 Caractérisation

Proposition 3.7.2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Un endomorphisme u de E est nilpotent si et seulement si u est trigonalisable et admet 0 comme unique valeur propre.

Preuve. Si u est nilpotent alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice représentant u .

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors A est trigonalisable, et comme $A^k = 0$, la seule valeur propre de A est 0.
- Si $\mathbb{K} \neq \mathbb{C}$, la matrice A est toujours dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et elle est par conséquent trigonalisable, et comme $A^k = 0$, la seule valeur propre de A est 0 donc le polynôme caractéristique de A est $P_A = X^n$ et comme $P_A \in \mathbb{K}[X]$, le polynôme caractéristique de A en tant qu'élément de $\mathbb{K}[X]$ est $\chi_A = X^n$, donc A est trigonalisable avec unique valeur propre 0. Donc u est trigonalisable avec unique valeur propre 0.

Réciproquement si u est trigonalisable et 0 est l'unique valeur propre de u alors il existe une base $\mathcal{C}$ de E

tel que la matrice T de u relativement à $\mathcal{C}$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \star & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

triangulaire supérieure avec les termes diagonaux nuls, donc $\chi_u = X^n$ et par Cayley-Hamilton, on a $u^n = 0$ et par suite u est nilpotent. ■

Remarques. Ces remarques sont très utiles en pratique :

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice dont le polynôme caractéristique χ_A est scindé et si A admet une unique valeur propre λ , alors A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda I_n$.
- On a une remarque similaire pour un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie n .
- Cela revient à dire : un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n (resp. matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) trigonalisable avec une unique valeur propre λ est diagonalisable si et seulement si $u = \lambda \text{Id}_E$ (resp. $A = \lambda I_n$).

3.7.4 Une autre réduction d'endomorphisme trigonalisable

Soit u un endomorphisme trigonalisable, donc χ_u est scindé. Si $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ alors $\chi_u = \prod_{k=1}^s (X - \lambda_k)^{m_k}$. Pour tout $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$, on a $1 \leq m_k \leq n$ où $n = \dim(E)$. Le lemme de décomposition des noyaux permet d'écrire :

$$E = \bigoplus_{k=1}^s \ker(u - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k}.$$

Puisque $(u - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k} \in \mathbb{K}[u]$, le sous-espace vectoriel $F_k = \ker(u - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k}$ est stable par u et si on note u_k l'endomorphisme induit associé on a $u_k = \text{Id}_{F_k} + \nu_k$ avec $\nu_k = u_k - \lambda_k \text{Id}_{F_k}$. On remarque que $F_k = \ker(\nu_k)^{m_k}$, ce qui se traduit par $\nu_k^{m_k} = 0$, donc ν_k est nilpotent. Ceci est résumé par la :

Proposition-Définition 3.7.1. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme trigonalisable alors si

$$\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$$

et

$$\chi_u = \prod_{k=1}^s (X - \lambda_k)^{m_k}$$

alors :

$$E = \bigoplus_{k=1}^s \ker(u - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k}$$

les sous-espaces vectoriels $F_k = \ker(u - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k}$; $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$, sont stables par u et si pour tout $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$, on note u_k l'endomorphisme de F_k induit par u à F_k , alors $u_k = \lambda_k \text{Id}_{F_k} + \nu_k$ où $\nu_k \in \mathcal{L}(F_k)$ est un endomorphisme nilpotent de F_k .

Les sous-espaces vectoriels $F_k = \ker(u - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k}$ sont appelés les sous-espaces caractéristiques associés à l'endomorphisme u .

Remarque. Avec les notations ci-dessus, si on note π_k les projecteurs sur F_k parallèlement à

$$\widehat{F_k} = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s F_j$$

et pour tout $x \in E$:

$$\nu(x) = \sum_{j=1}^s \nu_j(\pi_j(x))$$

alors ν est un endomorphisme nilpotent de E et on a

$$u = \nu + \delta \quad \text{et} \quad \nu \circ \delta = \delta \circ \nu$$

où

$$\delta = \sum_{j=1}^s \lambda_j \pi_j.$$

Preuve. On à démontrer :

- ν est nilpotent :

En effet : $\nu^n = 0$ où $n = \dim(E)$ car pour tout $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$, on a $\nu_k^{m_k} = 0$ et $m_k \leq n$ donc $\nu_k^m = 0$

- δ est diagonalisable :

En effet $\oplus F_k = E$ et pour tout $x \in F_k$, $\delta(x) = \lambda_k x$, donc les λ_k sont les valeurs propres de δ et les sous-espaces propres associés F_k son en somme directe.

- δ et ν commutent :

En effet, si $x = \sum_{k=1}^s x_k$ avec $x_k \in F_k$ alors

$$\delta(x) = \sum_{k=1}^s \lambda_k x_k,$$

donc

$$\nu(\delta(x)) = \sum_{k=1}^s \lambda_k \nu_k(x_k);$$

par ailleurs

$$\nu(x) = \sum_{k=1}^s \nu_k(x_k)$$

et comme $\nu_k(x_k) \in F_k$, on a

$$\delta(\nu(x)) = \sum_{k=1}^s \lambda_k \nu_k(x_k),$$

ce qui prouve $\nu \circ \delta = \delta \circ \nu$. ■

Remarque. La décomposition de Dunford hors programme postule que toute endomorphisme u trigonalisable se décompose de façon unique sous le forme $u = \delta + \nu$ tel que :

- δ un endomorphisme diagonalisable de E
- ν un endomorphisme nilpotent de E
- $\delta \circ \nu = \nu \circ \delta$.

Les remarques ci-dessus ont déjà prouvé l'existence d'une telle décomposition. L'unicité est un peu plus difficile et de toute façon c'est du hors programme.