1 Rappels

1.1 Définitions, généralités

E.P.H.R. : Espace préhilbertien réel.
✍ **E.P.H.R.** = couple $(E, \langle , \rangle)$ où $\langle , \rangle : E^2 \to \mathbb{R}$ forme bilinéaire symétrique positive définie.
✍ **E.P.H.R.** de dimension finie= espace euclidien.
✍ Inégalité de Cauchy Scshwarz :
$\forall x, y \in E, |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ avec égalité $\iff$ la famille (x, y) liée.
✍ Norme associée : $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, appelée norme euclidienne.
✍ Identités remarquables, $\forall x, y \in E$:
$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$
$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$
$\langle x+y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$
✍ du parallélogramme, $\forall x, y \in E$:
$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$
✍ Identités de polarisation, $\forall x, y \in E$:
$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$
$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$

2 Orthogonalité

On note $(E, \langle . \rangle)$ un **E.P.H.R.** Le sigle **s.e.v.** pour sous-espace vectoriel et **s.e.v.s.** pour sous-espaces vectoriels.
✍ $x, y \in E$, $x \perp y \iff \langle x, y\rangle = 0$.
✍ $\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x \perp y \Rightarrow \alpha x \perp \beta y$.
✍ $\forall x \in E, x \perp x \iff x = 0$,
✍ $\forall x \in E, x \perp 0$
✍ $A, B \subset E$, $A \perp B \iff \forall (a, b) \in A \times B, a \perp b$
✍ $A \subset E$, $A^\perp = \{x \in E / \forall a \in A, x \perp a\}$.
✍ $A^\perp$ est un s.e.v. fermé de E.
✍ $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$, $A \subset (A^\perp)^\perp$,
✍ Si F, G des **s.e.v.s** de E alors $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
✍ Théorème de Pythagore :
$\forall x, y \in E, x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
Généralement si $(x_k)_{1 \leq k \leq m}$ est une famille orthogonale alors $\| \sum\limits_{k=1}^{m} x_k\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{m} \|x_k\|^2$, mais on n'a pas la réciproque quand $m > 2$.

2.1 Bases orthonormée

s.s.s. est un sigle pour **si et seulement si.**
✍ Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite
• orthogonale **s.s.s.** $\forall i, j \in I, i \neq j \Longrightarrow \langle x_i, x_j\rangle = 0$,
• orthonormée **s.s.s.** $\forall i, j \in I, \langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j}$.
✍ Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
✍ Toute famille orthonormée est libre.
✍ Une base orthonormée est une famille orthonormée qui est une base de E.
✍ Procédé de Gramm-Schmidt : Soit $(E, \langle , \rangle)$ est un espace préhilbertien. Si $\mathcal{L} = (u_1, \ldots, u_n)$ est une famille

libre de E, il existe une et une seule base orthonormée $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ tel que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) \\ \langle u_k, e_k \rangle > 0 \end{array} \right. .$$

✍ Algorithme : $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$, $\forall k \in [\![1, n]\!]$ si $k < n$ et $e_1, \dots, e_k$ connus alors $\left\{ \begin{array}{l} \widehat{e}_{k+1} = u_{k+1} - \sum\limits_{j=1}^{k} \langle u_{k+1}, e_j \rangle e_j \\ e_{k+1} = \frac{\widehat{e}_{k+1}}{\|\widehat{e}_{k+1}\|} \end{array} \right.$.

✍ Tout espace euclidien non nul admet au moins une **B.O.N.**

✍ Si $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ est une **B.O.N.** de E et $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k e_k$ de vecteurs et $X = (x_k)$ et $Y = (y_k)$ les colonnes de coordonnées de x et y alors

• $\langle x, y \rangle = X^\top Y = Y^\top X = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$,

• $\|x\|^2 = X^\top X = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$, donc $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$.

2.2 Projection orthogonale

✍ **Théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien :** Pour toute forme linéaire φ de E il existe un et un seul vecteur $a \in E$ tel que $\varphi = \langle a, . \rangle$ c'est-à-dire $\forall x \in E, \varphi(x) = \langle a, x \rangle$.

✍ Si F est un **s.e.v.** de E alors $F \cap F^\perp = \{0\}$ et si $F + F^\perp = E$ alors $F \oplus F^\perp = E$ on dit que F admet un supplémentaire orthogonal. Si c'est la cas alors $F^{\perp\perp} = F$.

✍ Soit F un **s.e.v.** de E. Si F est de dimension finie alors $F \oplus F^\perp = E$ et $F^{\perp\perp} = F$.

✍ Soit F un **s.e.v.** de E tel que $F \oplus F^\perp = E$. La projection de E sur F parallèlement à $F^\perp$ s'appelle la projection orthogonale de E sur F, notée p_F.

✍ Caractérisation :

$(\forall x \in E), \left\{ \begin{array}{l} p_F(x) \in F \\ x - p_F(x) \in F^\perp \end{array} \right.$

$\forall x, y \in E, p_F(x) = y \iff \left\{ \begin{array}{l} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{array} \right.$.

✍ Caractérisation métrique du projeté orthogonal :

$\forall x, y \in E, p_F(x) = y \iff \left\{ \begin{array}{l} y \in F \\ \|x - y\| = \mathrm{d}(x, F) \end{array} \right.$;

en particulier, on a :

$\forall x \in E, d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

✍ Si $\dim(F) = p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de F alors $\forall x \in E, p_F(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} \langle x, e_k \rangle e_k$.

3 Matrice orthogonale, endomorphisme orthogonal, groupe orthogonal

Dans tout ce paragraphe $(E, \langle , \rangle)$ est un espace euclidien de dimension non nulle.

3.1 Matrices orthogonales

Soit $M \in \mathcal{M}_n\mathbb{R}$ de colonnes $C_1, \dots, C_n$, et de lignes $L_1, \dots, L_n$ alors $\left\{ \begin{array}{l} M^\top M = (\langle C_i, C_j \rangle)_{1 \le i,j \le m} \\ M M^\top = (\langle L_i, L_j \rangle)_{1 \le i,j \le n} \end{array} \right.$. En particulier la famille (C_k) est orthonormée dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique si et seulement

si la famille (L_k) des lignes est orthonormée dans $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique si et seulement si $M^\top M = I_n$ si et seulement si $MM^\top = I_n$. Si c'est le cas on dit que M est une matrice orthogonale.
✍ M est une matrice orthogonale si et seulement si M est inversible et $M^{-1} = M^\top$.
✍ M est une matrice orthogonale si et seulement si M est la matrice de passage entre deux bases orthonormée $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$.
✍ On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonale, alors $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, appelé groupe orthogonal.
✍ Pour toute matrice $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ on a $\det(M) \in \{-1, 1\}$. On note $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) / \det(M) = 1\}$, on le note aussi $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, c'est un sous-groupe du groupe orthogonal, appelé groupe orthogonal spécial. On note aussi $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) / \det(M) = -1\}$, mais ce n'est pas un sou-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
✍ Deux matrices A et A' sont orthogonalement semblables si et seulement si $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), A' = PAP^\top$.

3.2 Automorphisme orthogonal ou isometrie

$u \in \mathcal{L}(E)$ est un automorphisme orthogonale $\iff \forall x, y \in E, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle \iff \forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
✍ On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux.
✍ $u \in \mathcal{O}(E) \iff \forall \mathscr{E}$ BON de E, la matrice $M = \mathrm{mat}_{\mathscr{E}}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff \exists \mathscr{E}$ BON de E, la matrice $M = \mathrm{mat}_{\mathscr{E}}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff \forall \mathscr{E}$ BON de E, $u(\mathscr{E})$ est une BON de $E \iff \exists \mathscr{E}$ BON de E, $u(\mathscr{E})$ est une BON de E.
✍ $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}(E)$ isomorphe à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\forall u \in \mathcal{O}(E), \det(u) = \pm 1$ et $\mathcal{SO}(E) = \mathcal{O}^+(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) / \det(u) = 1\}$ est un sou-groupe de $\mathcal{O}(E)$ isomorphe à $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$, appelé le groupe orthogonal spécial.

3.3 Réduction

Dans tout ce paragraphe $(E, \langle,\rangle)$ est un espace euclidien de dimension non nulle.
✍ Pour tout automorphisme orthogonal u de E on a $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$, même chose pour toute matrice orthogonale M on a $\mathrm{Sp}(M) \subset \{-1, 1\}$.
✍ Si F est un sev stable par un endomorphisme orthogonal u alors $F^\perp$ est stable par u.
✍ Si pour tout nombre réel θ on note :
$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$; alors $\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta, S_\theta / \theta \in \mathbb{R}\}$. On nomme R_θ et S_θ respectivement la rotation et la symétrie d'angle θ. On a $\mathcal{O}^+(\mathbb{R}) = \{R_\theta / \theta \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{O}^-(\mathbb{R}) = \{S_\theta / \theta \in \mathbb{R}\}$.
✍ Toute matrice $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs

$$U = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & (0) & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix}$$

avec $p, q, s \in \mathbb{N}$ et $p + q + 2s = n$ et si $s \neq 0$, $\forall i \in [\![1, s]\!], \theta_i \not\equiv 0[\pi]$ avec la convention $p = 0$(resp. $q = 0$(resp. $s = 0$)) veut dire l'absence du bloc I_p(resp du bloc $-I_q$ (resp(des blocs $R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_s}$)).

4 Endomorphisme symétrique

Dans tout ce paragraphe $(E, \langle,\rangle)$ est un espace euclidien de dimension non nulle.

4.1 Adjoint d'un endomorphisme

✍ Soit u un endomorphisme de E. Il existe un et un seul endomorphisme $u^\star$ de E tel que :
$\forall x, y \in E, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$, appelé l'adjoint de u.
✍ $v = u^\star \iff \mathrm{mat}_{\mathscr{E}}(v) = (\mathrm{mat}_{\mathscr{E}}(u))^\top$ pour toute $\mathscr{E}$ **B.O.N.** de E.
✍ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors, pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\langle AX, Y\rangle = \langle X, A^\top Y\rangle = Y^\top AX = X^\top A^\top Y$.
✍ $\forall u \in \mathcal{L}(E), (u^\star)^\star = u$,
✍ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathcal{L}(E), (\alpha u + \beta v)^\star = \alpha u^\star + \beta v^\star$
✍ $\mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E); u \mapsto u^*$ est un automorphisme involutif, c'est-à-dire $\Phi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}$, c'est-à-dire que Φ est une symétrie vectorielle de $\mathcal{L}(E)$.
✍ Pour tout en domorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ on a :
$\ker(u^\star) = (\mathrm{Im}(u))^\perp$ et $\mathrm{Im}(u^\star) = (\ker(u))^\perp$
et $\mathrm{rg}\,(u^\star) = \mathrm{rg}\,(u)$ et $\det(u^\star) = \det(u)$.
✍ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et F un **s.e.v.** de E, alors :
F est $u-$stable $\iff$ $F^\perp$ est $u^\star-$stable.
✍ $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $u \in \mathcal{O}(E) \iff \begin{cases} u \in \mathbf{GL}(E) \\ u^\star = u^{-1} \end{cases} \iff u \circ u^\star = \mathrm{Id}_E \iff u^\star \circ u = \mathrm{Id}_E$. On dit alors que u est une isométrie vectorielle de E.

4.2 Endomorphisme symétrique ou autoadjoint

$u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si $u^* = u$ si et seulement si $\forall x, y \in E, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$ si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathscr{E}}(u)$ est une matrice symétrique pour toute **B.O.N.** $\mathscr{E}$ de E. On note $\mathcal{S}_n(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

4.3 Réduction des endomorphismes symétriques

✍ **Lemme :** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe au moins un sous-espace vectoriel F $u-$stable tel que $1 \leq \dim(F) \leq 2$.
✍ Si u est symétrique alors :
(i) $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$.
(ii) $\forall \lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(u), \lambda \neq \mu \Longrightarrow E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$.
(iii) Pour tout F **s.e.v.** de E on a :
F est $u-$stable $\iff$ $F^\perp$ est $u-$ stable
✍ **Théorème spectral :**
(i) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ alors :
u est symétrique **s.s.s.** E admet une base orthonormée formée de vecteurs propres de E. On dit aussi u est diagonalisable dans une base orthonormée de E.
(ii) Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors :
M est symétrique **s.s.s.** M est orthogonalement diagonalisable, c'est-à-dire :
$\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), M = P\Delta P^\top$ où $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est une matrice diagonale.

4.4 Endomorphisme symétrique positif, défini positif

Dans tout ce qui suit le sigle **L.A.S.S.E** veut dire : **Les assertions suivantes sont équivalentes.**

✍ Soit $u \in \mathcal{S}_n(E)$ un endomorphisme symétrique,
(i) **L.A.S.S.E.** :

- (1) $\forall x \in E, \langle u(x), x\rangle \geq 0$,
- (2) $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.

Si (1) ou (2) est vrai on dit que u est un endomorphisme symétrique positif de E. On note $\mathcal{S}_n^+(E)$ leur ensemble.

(ii) **L.A.S.S.E.** :

— (1′) $\forall x \in E\backslash\{0\}, \langle u(x), x\rangle > 0$,

— (2') $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Si (1') ou (2') est vraie on dit que u est un endomorphisme symétrique défini positif. On note $\mathcal{S}_n^{++}(E)$ leur ensemble.

✍ Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique,

(i) **L.A.S.S.E.** :

— (1) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^\top AX \geq 0$,

— (2) $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.

Si (1) ou (2) est vrai on dit que A est une matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ leur ensemble.

(ii) **L.A.S.S.E.** :

— (1') $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}, X^\top AX > 0$,

— (2') $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Si (1') ou (2') est vrai on dit que A est une matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ leur ensemble.