Chapitre 9 : Suites séries de fonctions I

Exercice 1 [id=676]

Soit f_n la fonction définie sur $[-1,1]$ par

$$f_n(x) = x^n\left(1-x^2\right).$$

1 Étudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n).

2 Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de terme général f_n.

3 Étudier la convergence normale et uniforme de la série de terme général f_n sur $[-1,\alpha]$, lorsque α appartient à $[0,1[$.

Exercice 2 [id=2]

Soit (f_n) la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{\sin(nx^2)}{n^2+1}$$

1 Démontrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f à préciser.

2 La convergence est-elle uniforme ?

3 Quelle est la nature de la série de fonctions $\sum f_n$?

Exercice 3 [id=675]

Soit f_n la fonction définie sur $[0,\pi/2]$ par

$$f_n(x) = \sin^{2n+1} x \cos^3 x.$$

1 Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de terme général f_n.

2 Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de terme général nf_n.

3 Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de terme général nf_n sur $[0,\pi/2-\alpha]$, lorsque α appartient à $]0,\pi/2[$.

Exercice 4 [id=284]

Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonction (f_n).

a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{n+1}{n^2+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$

b) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{nx^2}{1+nx}, n \in \mathbb{N}^*$

c) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x}{x^2+n^2}, n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5 [id=285]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+x}$.

1 Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une application $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et que la convergence est normale sur tout intervalle de la forme $I_a = [a, +\infty[, a > 0$ et n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.

2 Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6 [id=286]

Dans chacun des cas suivants étudier la convergence simple, absolue, uniforme et normale de la série $\sum f_n$.

1 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}, n \in \mathbb{N}$

2 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}; x \mapsto n^2 x^n (1-x)^n, n \in \mathbb{N}$.

3 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{nx^2}{n^3+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$.

4 $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x}{n} e^{-n^2 x^2}, n \in \mathbb{N}^*$.

5 $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{n+x}{n^2+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$.

6 $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$.

7 $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7 [id=287]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

Sur quels intervalles de $\mathbb{R}$, la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge-t-elle uniformèment ?

Exercice 8 [id=288]

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par $f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$ pour tout $x \in [0, +\infty[$

Exercice 9 [id=289]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}; x \mapsto (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+x}$.

1 Etudier la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.

2 Montrer que la somme $S=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Exercice 10 [id=290]

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

1 Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f à préicser.

2 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, calculer $f_n(2^n\pi)$. En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

3 Démontrer que (f_n) converge uniformèment vers f sur tout ségment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

Exercice 11 [id=291]

On considère la fonction réelle de variable réelle définie par $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+n^2x}$.

1 Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2 Démontrer que f est continue sur D_f.

3 Déterminer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

4 Démontrer que : Quand x tends vers 0 à droite, on a $f(x)\sim-\ln(x)$ et quand x tends vers $+\infty$, on a $f(x)\sim\frac{\pi^2}{6x}$.

Exercice 12 [id=292]

Dans tout ce qui suit $(E,\|.\|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère un vecteur $x_0\in E$ tel que $\|x_0\|\leq 1$ et $\gamma:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ une application tel que $\gamma(t)\leq kt$ où $k\in[0,1]$. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_+$ vers E tel que :

$$\begin{cases}\forall t\in\mathbb{R}_+, f_0(t)=x_0\\ \forall n\in\mathbb{N},\forall t\in\mathbb{R}_+, f_{n+1}(t)=x_0+\int_0^t f_n(\gamma(s))ds\end{cases}$$

1 Prouver que la suite (f_n) est bien définie.

2 Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad \|f_{n+1}(x)-f_n(x)\|\leq\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

3 Prouver que la suite (f_n) converge simplement vers une application $f:\mathbb{R}_+\to E$ et que la convergence est uniforme sur tout compact K inclus dans $\mathbb{R}_+$.

4 Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\forall x\in\mathbb{R}_+, f'(x)=f(\gamma(x))$.

Exercice 13 [id=293]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \arctan(x+n) - \arctan(n)$.

1 Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2 Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3 Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4 En déduire que la convergence de $\sum f_n$ n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 14 [id=294]

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction definie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0;n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ si } x \geq n$$

Démontrer que la suite (f_n) converge uniformèment sur $\mathbb{R}_+$ vers f définie par $f(x) = e^{-x}$.

Exercice 15 [id=295]

Soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

a) Etudier la limite simple de (f_n) et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) \geq \lim f_n(x)$$

b) En partant de l'encadrement suivant valable pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$$

justifier que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[0;a]$ (avec $a > 0$) c) Etablir qu'en fait, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 16 [id=296]

Pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{nx}{x^2 + n^3 + 1}.$$

1 Vérifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2 La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

3 Étudier la convergence uniforme de la série $\sum f_n$, sur tout compact K inclus dans $\mathbb{R}$.

4 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > \frac{1}{2}$, et $(g_n)_{n \geq 0})$ la suite de fonctions définie par :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{1}{n^\alpha} f_n(x).$$

Démontrer que la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 [id=297]

1 Soit $x \in]0,+\infty[$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = +\infty$.

2 En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(x+k)} \mathrm{d}x = 0$$

Exercice 18 [id=298]

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3} \mathrm{d}x.$$

1 Justifier que (u_n) est bien définie.

2 Démontrer que, quand n tend vers $+\infty$, on a $u_n \sim \frac{c}{n^{\frac{5}{3}}}$.

Exercice 19 [id=299]

1 Soit $\alpha \in]0,1]$. Démontrer que la fonction $u : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est concave sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}_+$, on a $0 \leq (1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$.

2 Démontrer que la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{n}}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$ est simplement convergente vers une fonction f à préciser.

3 Démontrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 20 [id=661]

On considère la suite de fonction (f_n) définie de l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = (\cos(x))^n \sin(x).$$

1 Montrer que (f_n) convergence uniformément vers la fonction nulle sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

2 Soient (g_n) la suite de fonction définie par $g_n = (n+1)f_n$ et γ un réel de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

- **a** Montrer que sur $\left[\gamma,\frac{\pi}{2}\right]$, la suite (g_n) converge uniformément vers la fonction nulle.
- **b** La suite de fonction (g_n) converge-t-elle uniformément sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction nulle.