

# Chapitre 6 : Séries numériques et intégrales impropres

## Exercice 1

[id=18]

Quelle est la nature de la série numérique  $\sum u_n$  où  $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3(t)}{1+t} dt$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ?

## Exercice 2

[id=3]

Soit  $a \in ]0, 1[$  et  $(u_n)$  la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{2} \end{cases}$$

Démontrer que la série  $\sum u_n$  est convergente.

## Exercice 3

[id=671]

On se propose de démontrer que  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  et de calculer  $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

- 1 Soient deux réels  $a < b$  et une fonction  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $[a, b]$ . Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt = 0. \text{ (Utiliser une intégration par parties.)}$$

- 2 Soit un entier non-nul  $n \in \mathbb{N}^*$ . On définit la fonction  $S_n$  sur  $[0, \pi]$  par

$$S_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt)$$

Montrer sans utiliser de récurrence que  $\forall t \in ]0, \pi[ \quad S_n(t) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$ . et calculer  $S_n(0), S_n(\pi)$ .

- 3 Calculer l'intégrale  $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt$

- 4 On définit la fonction  $\phi$  sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  par :  $\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ . Montrer que la fonction  $\phi$  est dérivable en 0 et préciser  $\phi'(0)$ . Montrer ensuite que la fonction  $\phi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

- 5 Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t) \sin(2n+1)t dt$  et en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  où

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt.$$

- 6 Déterminer deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\pi} (\alpha t + \beta t^2) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$

- 7 En déduire que

$$2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \int_0^{\pi} (\alpha t + \beta t^2) S_n\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

est un réel indépendant de  $n$  que l'on précisera.

- 8** On définit la fonction  $h$  sur  $]0, \pi]$  par  $h(t) = \frac{(\alpha t + \beta t^2)}{\sin \frac{t}{2}}$ . Montrer que  $h$  se prolonge en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \pi]$ .
- 9** Montrer que les séries  $\sum \frac{1}{n^2}$  et  $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$  sont convergentes et calculer leur sommes respectives :  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  et  $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

## Exercice 4

[id=231]

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

- |                                                                                                                    |                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1</b> $\int_0^1 t^\alpha \ln t \, dt$ , avec $\alpha \in \mathbb{R}$ .                                          | <b>12</b> $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$ .                                                |
| <b>2</b> $\int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta dt$ , avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .                                | <b>13</b> $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} dx$ .                                 |
| <b>3</b> $\int_0^1 \frac{t^{\alpha+(1-t)^\beta}}{t^\alpha(1-t)^\beta} dt$ , avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .  | <b>14</b> $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{nt}} dt, n \in \mathbb{N}$ .                                   |
| <b>4</b> $\int_0^1 \frac{ \ln(t) ^\gamma}{t^\alpha(1-t)^\beta} dt$ , avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . | <b>15</b> $\int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{t}} dt$ .                                                       |
| <b>5</b> $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2} dt$ , avec $\alpha \in \mathbb{R}$ .                                  | <b>16</b> $\int_0^{+\infty} \left(1 + t \ln \left(\frac{t}{t+1}\right)\right) dt$ .                  |
| <b>6</b> $\int_0^{+\infty} x(\sin x) e^{-x} dx$ .                                                                  | <b>17</b> $\int_2^{+\infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x\sqrt[3]{x^3 + ax}) dx$ où $a \in \mathbb{R}$ . |
| <b>7</b> $\int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} dt$ .                                                                    | <b>18</b> $\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt$ .               |
| <b>8</b> $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$ .                                                                   |                                                                                                      |
| <b>9</b> $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t-1} dt$ .                                                                   |                                                                                                      |
| <b>10</b> $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$ .                                                     |                                                                                                      |
| <b>11</b> $\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$ .                                                           |                                                                                                      |

## Exercice 5

[id=232]

Discuter, suivant la valeur de  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la convergence des intégrales suivantes :

- 1**  $\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt$
- 2**  $\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x}) dx$

## Exercice 6

[id=233]

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

- 1**  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3+1}} dx$ .
- 2**  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2 e^{-x}}{x^2+e^{-2x}} dx$ .
- 3**  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^4}} dx$ .
- 4**  $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^3+x^2} dx$ .
- 5**  $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^6}} dx$ .

- 6  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} 2x} dx$
- 7  $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}} dx$
- 8  $\int_0^{+\infty} \frac{x-5}{x^2+4x+4} dx$
- 9  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx$
- 10  $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$
- 11  $\int_0^{+\infty} \frac{2+\ln x}{x+4} dx$
- 12  $\int_1^2 \frac{1}{t^2-t} dt$
- 13  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}} dt$
- 14  $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx$
- 15  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$
- 16  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx,$
- 17  $\int_0^1 \ln(x) dx$
- 18  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx.$
- 19  $\int_1^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x \ln(2+x^2)} dx,$
- 20  $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{t}} dx,$
- 21  $\int_0^1 \frac{\cosh x - \cos x}{x^{5/2}} dx,$
- 22  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} \sin(1/x^2)}{\ln(1+x)} dx.$

## Exercice 7

[id=234]

Étudier la convergence de la série  $\sum u_n$  dans chacun des cas suivants :

- 1  $u_n = \frac{3^n + n^4}{5^n - 3^n}$
- 2  $u_n = \frac{\operatorname{ch}(2n)}{\operatorname{ch}(3n)}$
- 3  $u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n$
- 4  $u_n = \tanh(n+a) - \tanh(n), a \in \mathbb{R} \text{ donné.}$
- 5  $u_n = \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$
- 6  $u_n = \frac{1}{1+x^{2n}}, x \in \mathbb{R}, \text{ donné.}$
- 7  $u_n = 1 - \cos \frac{1}{n}$
- 8  $u_n = \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} - 1$

- 9**  $u_n = n^{-(1+\frac{2}{n})}$
- 10**  $u_n = \exp\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \exp\left(\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$
- 11**  $u_n = x^{\ln(n)}, x > 0$ , donné.
- 12**  $u_n = n^2 a^{\sqrt{n}}, a > 0$  donné.
- 13**  $u_n = \frac{n!}{a^n}, a > 0$ , donné.
- 14**  $u_n = \frac{n!}{n^n}$
- 15**  $u_n = \frac{a^n}{n^a}, a > 0$  donné.
- 16**  $u_n = \left(a + \frac{1}{n}\right)^n, a > 0$  donné.
- 17**  $u_n = \frac{1}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}, a > 0$  donné.
- 18**  $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n^2}, x \in \mathbb{R}$ , donné.
- 19**  $u_n = \left(\frac{\sin^2 n}{n}\right)^n$
- 20**  $u_n = \left(1 - \exp\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sqrt{\ln(n)}$
- 21**  $u_n = \frac{1}{\ln(n!)}$
- 22**  $u_n = n^{n^{-a}} - 1, a > 0$  donné.
- 23**  $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
- 24**  $u_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$
- 25**  $u_n = \frac{n^2}{n^3+1}$
- 26**  $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}$
- 27**  $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$
- 28**  $u_n = \frac{1}{\ln(n^2+n+1)}$
- 29**  $u_n = \frac{n^2}{(1+\delta)^n}, \delta$  un nombre réel tel que  $|\delta| < \frac{1}{2}$ .
- 30**  $u_n = \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sum_{k=1}^n k^2} = \frac{1+\dots+n}{1^2+\dots+n^2}$ .
- 31**  $u_n = \frac{a^n+1}{n+a^{2n}}, a > 0$  donné.
- 32**  $u_n = 2^{-\sqrt{n}}$ .
- 33**  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$
- 34**  $u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \exp\left(\frac{1}{n+a}\right), a > 0$  donné.

- 35**  $u_n = f\left(a + \frac{1}{n}\right) + f\left(a - \frac{1}{n}\right) - 2f(a)$  avec :  $a \in \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction réelle de classe  $C^2$  sur un intervalle de la forme  $]a - \alpha, a + \alpha[, \alpha > 0$
- 36**  $u_n = \frac{1}{an+b} - \frac{c}{n}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  : discuter suivant  $a, b$  et  $c$ .
- 37**  $u_n = \frac{2^n + a^n}{2^n + b^n}, (a, b) \in \mathbb{R}^2$  : discuter suivant  $a$  et  $b$ .
- 38**  $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \arctan \frac{1}{n}$
- 39**  $u_n = \sin\left(\left(n + \frac{a}{n}\right)\pi\right), a \in \mathbb{R}$
- 40**  $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^a}, a \in \mathbb{R}$  et  $a \neq 0$ .
- 41**  $u_n = \frac{\cos(an+b)}{n^\alpha}$ , avec  $(a, b, \alpha) \in \mathbb{R}^3$  et  $\alpha > 0$  et  $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$ .
- 42**  $u_n = \frac{(-1)^n}{n+2\sin n}$
- 43**  $u_n = (-1)^n(\sqrt{n^2+1} - n)$
- 44**  $u_n = \ln\left(1 + \frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right)$
- 45**  $u_n = \frac{\sin(2n)}{n^2 - n + 1}$
- 46**  $u_n = \frac{1 + \ln(n)}{n^2}$
- 47**  $u_n = \frac{2^n + 5}{3^n + 11}$
- 48**  $u_n = \frac{5^n + 2}{11^n + 3}$
- 49**  $u_n = e^{-\sqrt{n}}$
- 50**  $u_n = \frac{n!}{n^n}$
- 51**  $u_n = \frac{(n+1)^4}{n!+1},$
- 52**  $u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n,$
- 53**  $u_n = \frac{n^{\ln(n)}}{\ln(n)^n},$
- 54**  $u_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{2^n}\right),$
- 55**  $u_n = (n^6 + 3)^a - (n^2 + 2)^{3a},$  où  $a \in \mathbb{R}$
- 56**  $u_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)},$
- 57**  $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - 1\right)^\alpha,$  où  $\alpha > 0$ , DL2 de la suite  $u_n$ .
- 58**  $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).$
- 59**  $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n},$
- 60**  $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n \ln(n)},$  DL2 de la suite  $u_n$ .

- 61**  $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n+1}},$
- 62**  $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha+(-1)^n}$  avec  $\alpha > 0$ .
- 63**  $u_n = \ln \left( 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} \right)$  avec  $\alpha > 0$ .
- 64**  $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n+(-1)^n}$
- 65**  $u_n = \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right),$
- 66**  $u_n = (-1)^n \sqrt{n} \sin(\frac{1}{n}),$
- 67**  $u_n = \cos \left( n^2 \pi \ln \left( \frac{n-1}{n} \right) \right),$
- 68**  $u_n = \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}}{e^{\left( \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right)} - 1} - 1,$
- 69**  $u_n = \ln \left( \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n-4}} \right),$
- 70**  $u_n = \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \right),$
- 71**  $u_n = \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$  et équivalent du reste.
- 72**  $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}.$
- 73**  $u_n = \frac{x^n}{1+y^{2n}}$  selon les valeurs des réels  $x$  et  $y$ .
- 74**  $u_n = \left( n \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right)^n$
- 75**  $u_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}} - \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)^n$
- 76**  $u_n = n^{\frac{1}{1+n^2}} - 1$
- 77**  $u_n = \sin \left( \frac{1}{n} \right) - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$
- 78**  $u_n = \frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\sin(\frac{1}{n})},$  DL2 de la suite  $u_n$ .
- 79**  $u_n = \frac{n^2+n-3}{n!}$
- 80**  $u_n = \arctan \left( \frac{2}{n^2} \right)$
- 81**  $u_n = \frac{n-1}{n(n+1)(n+2)}$
- 82**  $u_n = \ln \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$
- 83**  $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$
- 84**  $u_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n} \sin(1/\sqrt{n})}{n+(-1)^n}$
- 85**  $u_n = \frac{\cos(\ln n)}{n}$
- 86**  $u_n = \prod_{p=2}^n (2 - \sqrt[p]{e})$

- 87**  $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$  : généraliser à  $u_n = \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha + e^{in\theta}}$
- 88**  $u_n = (\sin(\pi en!))^p$
- 89**  $u_n = \sum_n \sin \pi \sqrt{n^2 + 1}$  ;
- 90** Pour  $n \geq 1$ ,  $u_n = (\frac{1}{p(n)})^{p(n)}$ , où  $p(n)$  est le nombre de chiffres de l'écriture décimale de  $n$  ;
- 91** Pour  $n \geq 1$ ,  $u_n = \frac{\sigma(n)}{n^2}$ , où  $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  est une bijection ;
- 92**  $u_n = \sin(\pi(2 + \sqrt{5})^n)$
- 93**  $u_n = \frac{n+1}{n^3 - 7}$ ,
- 94**  $u_n = \frac{n+1}{n^2 - 7}$ ,
- 95**  $u_n = \frac{n+1}{n-7}$ ,
- 96**  $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ,
- 97**  $u_n = \frac{2^n + 3^n}{n^2 + 5^n}$ ,
- 98**  $u_n = \frac{1}{n^{(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}}$ ,
- 99**  $u_n = \frac{1}{\ln(n^2 + 2)}$ ,
- 100**  $u_n = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$ ,
- 101**  $u_n = \frac{n}{2^n}$ ,
- 102**  $u_n = \frac{n^{100\,000}}{2^n}$ ,
- 103**  $u_n = \frac{1}{n!}$ ,
- 104**  $u_n = \frac{n^{100\,000}}{n!}$ ,
- 105**  $u_n = \frac{2^n}{n!}$ ,
- 106**  $u_n = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n)!}$ ,
- 107**  $u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$ ,
- 108**  $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ ,
- 109**  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ .

- 110**  $u_n = \frac{1}{n^{3/4}} + \frac{\sin(2n)}{n^{3/4}},$
- 111**  $u_n = \frac{1}{n^{3/4}} + \frac{1 - n^{(n-3/4)}}{n^n},$
- 112**  $u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}} - \exp\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n^{3/4}}\right).$
- 113**  $u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$
- 114**  $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}}.$
- 115**  $u_n = (-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)},$
- 116**  $u_n = \sin\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right),$
- 117**  $u_n = (-1)^n(\sqrt{1+n} - \sqrt{n}).$
- 118**  $u_n = (-1)^n \frac{n^3}{n!},$
- 119**  $u_n = \frac{a^n}{n!}$  avec  $a \in \mathbb{C},$
- 120**  $u_n = na^{n-1}$  avec  $a \in \mathbb{C},$
- 121**  $u_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+p)^2}$  (comparer à une intégrale)
- 122**  $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{2/3} + \cos n}$
- 123**  $u_n = \frac{\cos \sqrt{n}}{n(\ln n)^2}$
- 124**  $u_n = x^{-\sqrt{1+n}} \quad (x \in \mathbb{R}_+^*).$
- 125**  $u_n = \frac{\cos(\ln n)}{n}$
- 126**  $u_n = \left(\frac{2n}{3n+2}\right)^{\mathbb{Y}_n},$
- 127**  $u_n = \frac{1}{n^n},$
- 128**  $u_n = \frac{n!}{n^n},$
- 129**  $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!},$

$$130 \quad u_n = \frac{(n+1)2^n}{n!},$$

$$131 \quad u_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}}$$

$$132 \quad u_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$$

### Exercice 8

[id=235]

Calculer la somme de la série  $\sum u_n$  dans chacun des cas suivants, après justification de sa convergence.

$$1 \quad u_n = \frac{3^n}{7^{n-2}}, n \geq 2;$$

$$2 \quad u_n = \frac{1}{n(n+1)}, n \geq 1;$$

$$3 \quad u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, n \geq 1;$$

$$4 \quad u_n = \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}, n \geq 1 \text{ et } p \in \mathbb{N}^* \text{ fixé};$$

$$5 \quad u_n = \ln \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}, n \geq 1;$$

$$6 \quad u_n = \ln(1 + 2^{-2^n}), n \geq 0.$$

$$7 \quad u_n = \frac{n^2 + 9n + 5}{(n+1)(2n+3)(2n+5)(n+4)}.$$

$$8 \quad u_n = n \ln \left( \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4 + 2n^3} \right).$$

$$9 \quad u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k! 2^{n-k}}.$$

$$10 \quad u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)! k!}.$$

$$11 \quad u_n = \frac{E(\sqrt{n+1}) - E(\sqrt{n})}{n}.$$

$$12 \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}.$$

$$13 \quad u_n = na^n, a \in [0, 1[.$$

$$14 \quad u_n = \frac{a^n}{n}, a \in [0, 1[.$$

### Exercice 9

[id=236]

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$1 \quad \int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} dx$$

$$2 \quad \int_1^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{\sin x}{x^\alpha} \right) dx, \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha > 0.$$

**Exercice 10**

[id=237]

Démontrer que l'intégrale  $I = \int_1^{+\infty} ((1+x)^{\frac{1}{1+x}} - x^{\frac{1}{x}}) dx$  est convergente.

**Exercice 11**

[id=238]

Quelle est la nature de l'intégrale suivante  $\int_0^{+\infty} e^{\cos(x)} dx$  ?

**Exercice 12**

[id=239]

Déterminer les valeurs possibles de  $\alpha$  et  $\beta$  pour lesquelles l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{\alpha x + \beta x^2} dx$  est convergente.

**Exercice 13**

[id=240]

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$u_n = \frac{n^2}{\left( \prod_{k=1}^n k^k \right)^{\frac{4}{n^2}}}$$

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

**Exercice 14**

[id=241]

Démontrer que pour tout nombre réel  $\alpha$ , si  $\alpha > \frac{1}{2}$  alors la série  $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n^\alpha}$ ,  $n \geq 1$  est convergente.

**Exercice 15**

[id=242]

Soit  $a$  un nombre réel et  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  une application de classe  $C^1$  tel que les intégrales  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  et  $\int_a^{+\infty} |f'(t)| dt$  sont convergentes. Démontrer que la série  $\sum f(n)$ ,  $n \geq p$  est convergente,  $p$  étant le plus petit entier naturel supérieur ou égal à  $a$ .

**Exercice 16**

[id=243]

Soit  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  tel que  $1 - \alpha < \beta < 1$ .

- 1 Démontrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{e^{in^\beta}}{n^\alpha}$$

est convergente.

- 2 En déduire que les séries de termes généraux respectifs

$$c_n = \frac{\cos(n^\beta)}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad s_n = \frac{\sin(n^\beta)}{n^\alpha}$$

sont convergentes.

### Exercice 17

[id=244]

Quelle est la nature de la série de terme générale  $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}} + (-1)^n}$  ?

### Exercice 18

[id=245]

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt$ .

- 1) Montrer que  $(a_n)$  est décroissante.
- 2) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n$ . En déduire que  $a_n \sim a_{n+1}$ .
- 3) Montrer que la suite de terme générale  $b_n = (n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1}$  est constante. En déduire un équivalent de  $a_n$  et la nature de la série  $\sum a_n$ .

### Exercice 19

[id=246]

Soit  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une application strictement positive de classe  $C^1$  tel que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$$

- 1 Montrer que  $f$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$
- 2 Démontrer que, quand  $x$  tends vers  $+\infty$ , on a

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt = o(f(x))$$

### Exercice 20

[id=247]

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Montrer que, si  $f^2$  et  $f'^2$  sont intégrables sur  $[0, +\infty[$  alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

### Exercice 21

[id=248]

Soit  $\alpha$  un nombre réel *strictement* positif. Pour tout nombre réel strictement positif  $x$ , on pose  $F_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} du$ .

- 1 Montrer que  $F_\alpha$  est bien définie pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .
- 2 Calculer  $F_1(x)$  et  $F_{\frac{1}{2}}(x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .
- 3 Trouver la limite, quand  $x$  tend vers 0 à droite de  $F_\alpha(x)$ .
- 4 Montrer que sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto F_\alpha(x)$  est la seule solution de l'équation différentielle  $(E_\alpha) \quad xy' + \alpha y = \frac{1}{x+1}$  qui ait une limite finie quand la variable  $x$  tend vers 0 à droite.
- 5
  - a Montrer que, pour tout  $x > 0$ , on a  $F_\alpha(x) \geq \frac{1}{\alpha(1+x)}$ .
  - b Montrer que, sur l'intervalle  $x > 0$ , la fonction  $x \mapsto F_\alpha(x)$  est décroissante.
- 6
  - a Si  $\alpha > 1$ , montrer que, pour tout  $x > 0$ , on a  $F_\alpha(x) \leq \frac{1}{(\alpha-1)x}$ .
  - b Si  $0 < \alpha < 1$ , montrer qu'il existe un nombre réel  $c_\alpha$ , ne dépendant que de  $\alpha$ , tel que, pour tout  $x > 0$ , on ait :  $F_\alpha(x) \leq \frac{c_\alpha}{x^\alpha}$ .
- 7
  - a Trouver une relation simple entre  $F_\alpha(x)$  et  $F_{\alpha+1}(x)$ .
  - b En déduire la limite, quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , de  $xF_{\alpha+1}(x)$ .

### Exercice 22

[id=249]

Etudier la convergence de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x+\cos(x)}} dx$ .

### Exercice 23

[id=250]

On pose  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

- 1) Justifier l'existence de  $R_n$ .
- 2) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ .
- 3) Montrer qu'il existe  $\beta \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathbb{R}^*$  tels que  $R_n = A \frac{(-1)^{n+1}}{n^\beta} + O\left(\frac{1}{n^{\beta+1}}\right)$ . En déduire la convergence de  $\sum R_n$ .
- 4) Calculer  $\sum_{n=0}^{\infty} R_n$ .

### Exercice 24

[id=251]

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à termes positifs. Montrer que la série  $\sum u_n$  de terme général

$$u_n = \frac{a_n}{(1+a_0)(1+a_1) \cdots (1+a_n)}$$

converge et calculer sa somme en fonction des  $a_n$ .

---

**Exercice 25**

[id=252]

Démontrer que pour tout nombre complexe  $p$ , l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{x^2} e^{-px} dx$$

est divergente.

---

**Exercice 26**

[id=274]

Soit  $(a_{n,k})_{n,k \geq 0}$  une famille de réels. On suppose que :

- Pour tout  $k \geq 0$ , la suite  $(a_{n,k})_{n \geq 0}$  est convergente, de limite  $a_k$ .
  - Il existe une famille  $(b_k)_{k \geq 0}$  telle que  $|a_{n,k}| \leq b_k$  pour tout  $k, n \geq 0$  et telle que  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$ .
- Montrer que les quantités  $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}$  et  $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$  sont bien définies, puis que l'on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ .
- 

**Exercice 27**

[id=478]

Soit  $(a_n)$  la suite définie par  $a_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sqrt{a_0 + \cdots + a_n}$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}$ .

---

**Exercice 28**

[id=481]

On considère la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 \in ]1; +\infty[$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$$

a) Montrer :  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ .

b) Existence et calcul de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$ .

---

**Exercice 29**

[id=483]

Donner un équivalent simple de  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

---

### Exercice 30

[id=487]

Soit  $(u_n)$  une suite réelle tel que les séries  $\sum u_n$  et  $\sum u_n^2$  sont convergentes.

- 1 Démontrer qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq k \Rightarrow u_n + 1 \neq 0$ . On note  $p$  le plus petit  $k \in \mathbb{N}$  réalisant (1) ci-dessus.
- 2 Démontrer que la série  $\sum_{n \geq p} \frac{u_n}{1+u_n}$  est convergente

### Exercice 31

[id=488]

Nature des séries  $\sum u_n$  et  $\sum U_n$  pour  $u_n = \int_0^1 \tan(x^n) dx$  et  $U_n = \int_0^1 \tan(x^{n^2}) dx$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

### Exercice 32

[id=489]

Nature des séries  $\sum u_n$  et  $\sum U_n$  pour  $u_n = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n k!$  et  $U_n = \frac{1}{(n+2)!} \sum_{k=0}^n k!$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

### Exercice 33

[id=490]

- 1 Soit  $(u_n)$  une suite de nombre complexes et  $(U_n)$  définie par  $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ . Démontrer que si  $(u_n)$  est convergente vers  $\ell \in \mathbb{C}$  alors  $(U_n)$  converge aussi vers  $\ell$ .
- 2 Soit  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $(x_n)$  la suite définie par  $\begin{cases} x_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \sin(x_n) \end{cases}$ .
  - a Montrer que  $(x_n)$  converge vers 0.
  - b Montrer que  $x_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .
- 3 **Généralisation** : Soit  $a$  un nombre réel tel que  $a > 0$  et  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  une application concave strictement croissante tel qu'il existe  $k$  et  $p$  constantes réelles strictement positives tel que, pour  $x$  voisin de 0 dans  $[0, a]$ , on aie :

$$f(x) = x - kx^{p+1} + o(x^{p+1}).$$

Soit alors  $(x_n)$  une suite définie par  $x_0 \in ]0, a[$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$ . Démontrer que quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on a :  $x_n \sim \left(\frac{1}{pkn}\right)^{\frac{1}{p}}$ .

### Exercice 34

[id=492]

On note la fonction  $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ . On pose  $u_n = \int_n^{n+1} \ln \Gamma(x) dx$ . Préciser la nature de  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{u_n}$ .

---

**Exercice 35**

[id=493]

- 1 Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists! a_n \in \mathbb{R}, e^{a_n} + na_n = 2$ .
- 2 Déterminer la nature de  $\sum a_n$  et  $\sum (-1)^n a_n$ .
- 3 Déterminer la limite de  $n(1 - na_n)$  en  $+\infty$ .
- 4 Développer  $a_n$  à la précision  $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ .

---

**Exercice 36**

[id=494]

On pose  $a_n = -\int_0^1 \frac{t^n \ln t}{t+1} dt$

- 1 Montrer que  $(a_n)$  est définie. Donner sa limite.
- 2 Calculer  $a_n + a_{n+1}$ . En déduire un équivalent de  $a_n$ .
- 3 Calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .

---

**Exercice 37**

[id=496]

Soit  $(u_n)$  une suite réelle strictement positive. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_n = \sum_{p=0}^n u_p$ . Comparer la nature des séries  $\sum u_n$  et  $\sum \frac{u_n}{S_n}$ .

---

**Exercice 38**

[id=502]

Soit  $(x_n)$  la suite définie par

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \sum_{k=0}^n x_k \end{cases}.$$

Démontrer que la série  $\sum \frac{1}{x_n}$  converge et calculer sa somme.

---

**Exercice 39**

[id=518]

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(t) = \frac{2t-1}{\ln t - \ln(1-t)}$$

et soit :

$$I = \int_0^1 f(t) dt.$$

- 1 Justifier l'existence de I

- 2** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\frac{1}{4n} \leq I - \frac{\pi}{2n^3} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \leq \frac{3}{4n}$$

- 3** En déduire que  $I = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{x(1-x)}{\sin(\pi x)} dx$ .

## Exercice 40

[id=522]

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de complexes telle que  $\sum_{n \geq 1} a_n^2$  est absolument convergente.

- 1** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \left( \sum_{k=1}^n (-1)^k |a_k| e^{ikx} \right)^2 dx = \frac{2\pi}{i} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq p \leq n}} \frac{|a_k| |a_p|}{k+p}.$$

- 2** Montrer que la famille  $\left( \frac{a_p a_q}{p+q} \right)_{p,q \in \mathbb{N}^*}$  est sommable.

## Exercice 41

[id=546]

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue tel que  $f(1) \neq 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$ . Démontrer que  $I_n \sim \frac{f(1)}{n}$  dans les deux cas suivants :

- 1**  $f$  est de classe  $C^1$ .  
**2**  $f$  est de classe  $C^0$ .