

Chapitre 5 : Espaces préhilbertiens réels

Exercice 1

[id=672]

On se fixe un entier naturel non nul n et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que A est antisymétrique. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1 Montrer que pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et toute matrice carrée B d'ordre n , on a $X^\top BX = X^\top B^\top X$. En déduire que $X^\top AX = 0$.
- 2 Soit une matrice colonne X telle que $(A + I)X = 0$. En calculant $X^\top(A + I)X$ de deux manières différentes, montrer que $X = 0$.
- 3 En déduire que $A + I$ est inversible.
- 4 Montrer que la matrice $B = (I - A)(I + A)^{-1}$ est orthogonale.
- 5 Calculer $(I + B)(I + A)$. En déduire que $I + B$ est inversible.
- 6 Réciproquement, soit B une matrice orthogonale telle $I + B$ soit inversible. On considère la matrice $C = (I + B)^{-1}(I - B)$. Montrer que l'on a $C^\top = I - B^{-1} - C^\top B^{-1}$, puis que la matrice C est antisymétrique.

Exercice 2

[id=673]

n est un entier naturel non nul. On se propose de démontrer que pour toute matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a S est symétrique positive si et seulement si

$$\forall M \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(SM) \leq \operatorname{tr}(S).$$

On munit l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique et on rappelle que $\langle X, Y \rangle = \operatorname{tr}(X^\top Y)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1 Démontrer l'implication directe.
- 2 Démontrer que si A est une matrice antisymétrique alors e^A est une matrice orthogonale.
- 3 Démontrer que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$, la matrice $\Omega_x = I_n - 2xx^\top$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 4 Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(SM) \leq \operatorname{tr}(S).$$

et soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a Démontrer que l'application $u : t \mapsto \operatorname{tr}(e^{tA})$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $u'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- b Justifier que $u'(0) = 0$ et en déduire que $\langle S, A \rangle = 0$.
- c Démontrer que $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- d Soit λ une valeur propre de S et x un vecteur propre de S associé à λ tel que $\|x\| = 1$. En utilisant la matrice Ω_x définie dans la question 3) ci-dessus prouver que $\lambda \geq 0$.
- 5 Conclure.

Exercice 3

[id=7]

Soit E un espace euclidien de dimension n et $f \in \mathbf{O}(E)$.

- 1 On suppose que n est impair et $f \in \mathbf{O}^+(E)$. Montrer que $1 \in \text{Sp}(f)$. (*Indication* : Comparer $\det(f - \text{Id}_E)$ et $\det(f^{-1} - \text{Id}_E)$.)
- 2 Que peut-on dire quand n est pair ?
- 3 Soit n quelconque et $f \in \mathbf{O}^-(E)$. Montrer que $-1 \in \text{Sp}(f)$

Exercice 4

[id=17]

- 1 Montrer que l'application $\Phi : (A, B) \mapsto \text{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 2 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f : X \mapsto AX - XB$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et trouver son adjoint f^*

Exercice 5

[id=20]

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- 1 Justifier que la matrice A est diagonalisable.
- 2 Trouver une matrice orthogonale $P \in \mathbf{O}_3(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Exercice 6

[id=34]

Soit E un espace vectoriel euclidien et u et v deux endomorphismes symétriques de E .

- 1 Démontrer que $\ker(u) \oplus^\perp \text{Im}(u) = E$.
- 2 Démontrer que $u \circ v$ est symétrique si et seulement si $u \circ v = v \circ u$.

Exercice 7

[id=37]

Soit E un espace vectoriel euclidien. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $\rho(f) = \max\{|\lambda|; \lambda \text{ valeur propre de } f\}$. On pose également $\|f\| = \sup\{\|f(x)\|; \|x\| \leq 1\}$. Démontrer que si f est symétrique, alors $\|f\| = \rho(f)$.

Exercice 8

[id=201]

On dit qu'une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive si S est symétrique et vérifie la condition :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0 \Rightarrow {}^tX S X > 0$$

On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles matrices. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée réelle. Pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose :

$$\langle X, Y \rangle_S = \langle S X, Y \rangle$$

- 1 Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que :

$$S \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$$

- 2 Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si S est symétrique définie positive.
- 3 Soit φ un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une et une seule matrice $S \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle_S$.

Exercice 9

[id=202]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A {}^t A A = I_n$. Démontrer que $A = I_n$.

Exercice 10

[id=203]

E est un espace euclidien et u un endomorphisme de E .

- 1 Démontrer que si x et y sont deux vecteurs propres de u associés aux valeurs propres λ, μ tel que $\lambda\mu \leq 0$ alors il existe un vecteur $z \in E$ tel que $z \neq 0$ et $u(z) \perp z$.
- 2 Démontrer que si $\text{tr}(u) = 0$ alors il existe aux moins un vecteur $z \in E$ tel que $\|z\| = 1$ et $z \perp u(z)$.
- 3 Démontrer que $\text{tr}(u) = 0$ si et seulement si il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E tel que les termes diagonaux de la matrice de u relativement à $\mathcal{B}$ sont nuls.
- 4 Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Démontrer qu'il existe $\Omega \in \mathbf{SO}(3)$ tel que $A = \Omega \Delta {}^t \Omega$ avec Δ une matrice dont tous les termes de la diagonale sont égaux à 1.

Exercice 11

[id=204]

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $x, y \in E$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $x \perp y$
- (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|x + \lambda y\| \geq \|x\|$

Exercice 12

[id=205]

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$$

- a) Etablir l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes (P_n) formée de polynômes deux à deux orthogonaux avec chaque P_n de degré n et de coefficient dominant 1.
- b) Etudier la parité des polynômes P_n .
- c) Prouver que pour chaque $n \geq 1$, le polynôme $P_{n+1} - XP_n$ est élément de l'orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
- d) En déduire alors qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$P_{n+1} = XP_n + \lambda_n P_{n-1}$$

Exercice 13

[id=206]

Dans ce sujet, on identifie polynôme et fonction polynomiale associée sur $[-1, 1]$. On munit l'espace $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit le polynôme P_n défini par :

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n)$$

- 1 Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.
- 2 Montrer que P_n est une fonction polynôme de degré n orthogonal à tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$.
- 3 En commençant par dériver deux fois $(x^2 - 1)^{n+1}$, établir que pour tout $n \geq 1$:

$$P'_{n+1} = (2n + 1)P_n + P'_{n-1}$$

- 4 En déduire :

$$\|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n + 1}}$$

Exercice 14

[id=207]

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de $n \geq 2$ vecteurs d'un espace préhilbertien réel. On suppose

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n, (x_i | x_j) < 0$$

Montrer que toute sous famille de $n - 1$ vecteurs de $\mathcal{F}$ est libre.

Exercice 15

[id=208]

1) Calculer

$$\inf \left\{ \int_0^1 t^2 (\ln t - at - b)^2 dt, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2) Calculer

$$\inf \left\{ \int_0^1 (\ln t - at - b)^2 dt, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 16

[id=209]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\| \leq \|X\|$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur l'espace des colonnes.**1** Montrer que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|^tAX\| \leq \|X\|.$$

2 Montrer que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX = X \Rightarrow {}^tAX = X.$$

3 Prouver que :

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \ker(A - I_n) \oplus \text{Im}(A - I_n).$$

Exercice 17

[id=210]

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de A .**1** Étudier la convergence de

$$\frac{1}{p+1} (I_n + A + \cdots + A^p)$$

lorsque $p \rightarrow +\infty$.**2** La suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?**Exercice 18**

[id=211]

Soit $E = \mathbb{R}^4$, muni de son produit scalaire canonique et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de E . On considère le sous-espace vectoriel F de E défini par le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

1 Donner une base orthonormée de F et $F^\perp$.**2** On note p_F la projection orthogonale de E sur F . Donner la matrice de p_F relativement à $\mathcal{B}$.**3** Calculer $d(a, F)$ où $a = (2, 3, 2, 3)$

Exercice 19

[id=212]

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre n . Pour tout $X, Y \in E$, on note $\langle X, Y \rangle = \text{tr}({}^tXY)$.

- 1 Démontrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E .
- 2 Déterminer $(D_n(\mathbb{R}))^\perp$, où $D_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices diagonales de E .

Exercice 20

[id=213]

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$. Pour tout $f, g \in E$, on note $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions polynomiales.

- 1 Prouver que pour tout $h \in E$, il existe une suite $(f_n) \in F^\mathbb{N}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = h$ dans $(E, \langle, \rangle)$.
- 2 En déduire que $F^\perp = \{\theta\}$, où θ est la fonction nulle de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice 21

[id=214]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique : pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques (resp. antisymétriques).

- 1 Démontrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
- 2 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $d(M, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ en fonction de M .
- 3 **Exemple :** Calculer $d(M, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ pour $M = I_n + E_{1,n}$, puis pour $M = J$ où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 22

[id=215]

Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à la fois symétriques et orthogonales.

Exercice 23

[id=216]

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & x & y \\ c & y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Comment choisir $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour qu'il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ telle que M soit une matrice orthogonale ?

Exercice 24

[id=217]

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$\Phi(a, b) = \int_0^\pi (\sin t - (at^2 + bt))^2 dt$$

Calculer $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \Phi(a, b)$.

Exercice 25

[id=218]

Soit E un espace euclidien.

- 1** Soit $f : E \rightarrow E$ une application telle que :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \end{cases}.$$

Montrer que f est un endomorphisme orthogonal de E .

- 2** Soit $f : E \rightarrow E$ une application telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

Que peut-on dire de f ?

Exercice 26

[id=219]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

- 1** Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que la matrice $P(A)$ est symétrique à valeurs propres positives ou nulles et $(P(A))^2 = A$.

- 2** Trouver P pour $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 27

[id=220]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ étant muni de son produit scalaire canonique, calculer :

$$\inf_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}} \text{tr}((A - tX^t X)^2).$$

Exercice 28

[id=221]

n est un entier naturel non nul, On note :

$$Z = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

$$J = Z^t Z \quad \text{et} \quad M = I_n - \frac{1}{n} J.$$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle X, Y \rangle = \text{tr}({}^tXY)$$

et $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, c'est-à-dire, si $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ alors

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

On note π l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M .

- 1 Démontrer que π est une projection orthogonale de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, (|))$, et en préciser les éléments caractéristiques.
- 2 On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \Phi(X) = MXM.$$

Démontrer que Φ est une projection orthogonale de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Exercice 29

[id=222]

Soit

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

une matrice tel que

$$\text{rg}(A) = 1$$

Soit

$$\Omega = (\omega_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$$

une matrice orthogonale. Démontrer que

$$A + \Omega \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow 1 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_{i,j} a_{i,j} \neq 0.$$

Exercice 30

[id=223]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On admet que si pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$ alors il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Φ_Ω et Ψ_Ω les endomorphsimes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

définis par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \begin{cases} \Phi_\Omega(M) = M\Omega \\ \Psi_\Omega(M) = \Omega^{-1}M\Omega \end{cases}.$$

- 1 Prouver que Φ_Ω est un endomorphisme orthogonal de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si Ω est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 2 Prouver que Ψ_Ω est un endomorphisme orthogonal de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe un scalaire non nul $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\alpha\Omega$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 31

[id=224]

E est un espace euclidien de dimension n avec $n \geq 2$ et u est un endomorphisme symétrique de E , c'est-à-dire que $u \in \mathcal{S}_n(E)$ où $\mathcal{S}_n(E)$ est l'ensemble des endomorphismes symétriques de E . On pourra confondre un vecteur $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ et la colonne $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ des coordonnées de x relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique qui fait de sa base canonique une base orthonormée.

On note

$$\alpha = \min(\text{Sp}(u)), \beta = \max(\text{Sp}(u))$$

Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on pose :

$$R_u(x) = \frac{\langle u(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}.$$

Partie I : Quotient de Rayleigh, endomorphisme(resp. matrice) symétrique positif(resp. défini positif)

- 1 Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et $x \in E_\lambda(u)$. calculer $R_u(x)$.
- 2
 - a Justifier l'existence de α et β .
 - b Justifier l'existence de deux vecteurs $v, w \in E$ tel que $\|v\| = \|w\| = 1$ et $u(v) = \alpha v$ et $u(w) = \beta w$.
 - c Prouver que :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \alpha \leq R_u(x) \leq \beta$$

- 3 On note $\mathcal{S}^1$ la sphère unité de E et on considère l'application

$$\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \varphi(t) = R_u(\cos(t)v + \sin(t)w).$$

- a Démontrer que $R_u(E \setminus \{0\}) = R_u(\mathcal{S}^1)$.
 - b Justifier que φ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $\varphi(0)$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
 - c En déduire que $R_u(E \setminus \{0\}) = [\alpha, \beta]$
- 4 Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (1) $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \geq 0$.
 - (2) $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.
 Désormais si l'une des assertions (1) et (2) est vraie on dit que l'endomorphisme symétrique u est positif. On note $\mathcal{S}_n^+(E)$ l'ensemble de tels endomorphismes.
- 5 Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (1)' $\forall x \in E \setminus \{0\}, \langle u(x), x \rangle > 0$.
 - (2)' $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Désormais si l'une des assertions (1)' et (2)' est vraie on dit que l'endomorphisme symétrique u est défini positif. On note $\mathcal{S}_n^{++}(E)$ l'ensemble de tels endomorphismes. Il est clair que $\mathcal{S}_n^{++}(E) \subset \mathcal{S}_n^+(E) \subset \mathcal{S}_n(E)$.

- 6** Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que A est symétrique. on dit que A est positive (resp. définie positive) si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geq 0$ (resp. $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tXAX > 0$).
- a** Vérifier que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f_A l'endomorphisme canoniquement associé à A alors A est positive (resp. définie positive) si et seulement si f_A est positif (resp. défini positif).
 - b** En déduire une autre caractérisation de A positive (resp. A définie positive) utilisant le spectre de A .

Partie II : Racine carrée d'une matrice symétrique positive

- 1** Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Démontrer qu'il existe une matrice B symétrique positive tel que $B^2 = A$.
- 2** Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. On suppose que M est une matrice symétrique positive tel que $M^2 = A$. Soient u et v les endomorphismes respectifs canoniquement associés à A et M .
- a** Justifier que u et v sont symétriques positifs.
 - b** Montrer que u et v commutent.
 - c** Soit λ une valeur propre de u et on note u_λ l'endomorphisme induit par u sur le sous-espace propre $E_\lambda(u)$. Que peut-on dire de u_λ ?
 - d** Justifier que $E_\lambda(u)$ est stable par v . On note v_λ l'endomorphisme de $E_\lambda(u)$ induit par v .
 - e** Justifier que v_λ est diagonalisable.
 - f** Prouver que v_λ admet une et une seule valeur propre qu'on exprimera en fonction de λ .
- 3** Déduire de la question précédente que pour toute matrice symétrique positive A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une et une seule matrice symétrique positive B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $B^2 = A$. B sera appelée la racine carrée de A .

Partie III : Application : Décomposition polaire

- 1** Soit $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.
- Démontrer que si $A = \Omega S$ avec Ω une matrice orthogonale et S une matrice symétrique alors forcément S est la racine carrée de tAA .
- a** Démontrer que si S est la racine carrée de tAA alors S est symétrique définie positive. On pose alors $\Omega = AS^{-1}$. Démontrer que Ω est une matrice orthogonale.
 - b** Déduire de ce qui précède que :

$$\forall A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), \exists ! (\Omega, S) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \quad A = \Omega S$$

- 2** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- a** Justifier l'existence d'une suite $(A_p) \in (\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{p \rightarrow +\infty} A_p = A$.
 - b** Montrer que le groupe orthogonal $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - c** En déduire qu'il existe une suite convergente (Ω_k) de matrices orthogonales tel que $\Omega = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Omega_k$ est une matrice orthogonale et tel que $\forall k \in \mathbb{N}, A_k = \Omega_k S_k$ où $S_k \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

- Ⓓ Démontrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- 3 En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $\Omega \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = \Omega S$.

Exercice 32

[id=225]

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n avec $n \geq 2$. Soit u un endomorphisme symétrique de E . On se propose de donner une démonstration du fait que $\text{Sp}(u) \neq \emptyset$. Pour tout $x \in E$, on pose $g(x) = \langle u(x), x \rangle$.

- 1 Démontrer que si $v_1, v_2 \in E$ tel que $v_1 \neq 0$ et $\forall x \in E, x \perp v_1 \Rightarrow x \perp v_2$ alors $v_2 \in \mathbb{R}v_1$.
- 2 Justifier que g est continue sur E .
- 3 Démontrer que si on note S^1 la sphère unité de E alors g est bornée sur S^1 et atteint ses bornes. On note $\lambda = \min_{x \in S^1} g(x)$.
- 4 Soit $\omega_1 \in S^1$ tel que $g(\omega_1) = \min_{x \in S^1} g(x) = \lambda$. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$ et $x \perp \omega_1$. On pose $\omega_2 = \frac{1}{\|x\|}x$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(t) = \cos(t)\omega_1 + \sin(t)\omega_2$ et $f(t) = g(\varphi(t))$.
 - a Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - b Démontrer que f admet un minimum absolu au point $t_0 = 0$. Que vaut $f'(0)$?
 - c En déduire que $x \perp u(\omega_1)$.
 - d Montrer que la famille $(\omega_1, u(\omega_1))$ est liée et en déduire que $\text{Sp}(u)$ est non vide.

Exercice 33

[id=226]

On pose $E = \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$ et

$$\forall f, g \in E, \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$$

- (a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .
- (b) On pose $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \mid f \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ et } f'' = f\}$ Montrer que V et W sont supplémentaires et orthogonaux. Exprimer la projection orthogonale sur W .
- (c) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et

$$E_{\alpha, \beta} = \{f \in E \mid f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$$

Calculer

$$\inf_{f \in E_{\alpha, \beta}} \int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2) dt$$

Exercice 34

[id=227]

n désigne un entier naturel. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt$$

- 1 Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$
- 2 Calculer $\langle X^k, X^\ell \rangle$, pour tout $k, \ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
- 3 On suppose dans cette question que $n = 3$. Vérifier que $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ n'est pas orthonormée et trouver par le procédé de Schmidt une base orthonormée $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
- 4 On suppose toujours que $n = 3$ et soit $F = \text{Vect}(X + 1, -3X + 2)$. Déterminer $F^\perp$, le supplémentaire orthogonal de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 35

[id=228]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$. Démontrer que l'on a les inégalités suivantes :

- 1 $0 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \leq n$
- 2 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq n\sqrt{\text{rg}(A)}.$
- 3 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq n^{\frac{3}{2}}$

Exercice 36

[id=229]

Soit E un espace euclidien de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère deux bases orthonormées $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ et $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ de E et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que le réel $\alpha_u = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle u(b_i), c_j \rangle^2$ est indépendant des bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$

Exercice 37

[id=230]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que pour toute matrice symétrique positive S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a l'inégalité :

$$1 + \sqrt[n]{\det(S)} \leq \sqrt[n]{\det(I_n + S)}$$

Exercice 38

[id=360]

Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace préhilbertien réel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que :

- 1 Si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$.

- 2 $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
- 3 $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
- 4 $F \subset (F^\perp)^\perp$. Montrer que c'est une égalité si E est de dimension finie et donner un exemple où l'inclusion est stricte.

Exercice 39

[id=462]

On munit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.

- 1 Déterminer l'orthogonal de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
- 2 Calculer la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.

Exercice 40

[id=486]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1 Justifier qu'il existe $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\text{tr}(A\Omega) \geq \text{tr}(AU)$ pour toute matrice $U \in O_n(\mathbb{R})$.
- 2 Montrer que la matrice $S = A\Omega$ est alors symétrique à valeurs propres positives. On pourra commencer par étudier le cas $n = 2$.

Exercice 41

[id=495]

Soit n dans $\mathbb{N}^*$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, et

$$M(a) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

On dit qu'une matrice symétrique réelle d'ordre n est :

- positive si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geq 0$
- définie-positive si : $\forall X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX > 0$

Dans les questions 1)a) et 1)b) on étudie le rang de $M(a)$

Question 1.a

On suppose $a_i \neq a_{i+1}$ pour tout $i \in \llbracket 1, \dots, n-1 \rrbracket$. Montrer que $M(a)$ est inversible.

Question 1.b Dans le cas général, donner une méthode donnant $\text{rg}(M(a))$ en fonction de $(a_1, \dots, a_n)$

Dans les questions 2)a) à 2)d), on étudie le caractère positif de la matrice symétrique $M(a)$

Question 2.a

Montrer que si $M(a)$ est positive alors $a_i \geq 0$ pour tout i de $\{1, \dots, n\}$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} a_i & a_{i+1} \\ a_{i+1} & a_{i+1} \end{pmatrix}$ est positive pour tout i de $\{1, \dots, n-1\}$

Question 2.b

En déduire que si $M(a)$ est positive alors :

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$$

Question 2.c

Établir la réciproque par récurrence, avec $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients tous égaux à 1 .

Question 2.d

À quelles conditions la matrice $M(a)$ est-elle symétrique définie positive ?

Exercice 42

[id=536]

n est un entier naturel non nul et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1 Démontrer que si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie $\langle AX, X \rangle = 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ alors $A = 0$.
- 2 Soit $\Lambda = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \langle MX, X \rangle = 0, \forall X \in \mathbb{R}^n\}$.
 - a Montrer que Λ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - b Déterminer $\dim(\Lambda)$.