
Chapitre 4 : Espaces vectoriels normés

Exercice 1

[id=12]

$(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

- 1 Démontrer que si $(a, b) \in E^2$ et $a \neq b$, alors il existe U et V ouverts de E tel que $a \in U$ et $b \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.
- 2 Généralement, démontrer que si A et B sont deux parties non vides telles que $d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y) > 0$. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V de E tel que
$$\begin{cases} A \subset U \\ B \subset V \end{cases}.$$

Exercice 2

[id=160]

- 1 Démontrer que toute norme sur $\mathbb{R}$ est de la forme $N = c|\cdot|$ où c est une constante strictement positive.
- 2 Démontrer que si E est un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ toute norme N sur E en tant qu'application de E vers $\mathbb{R}_+$ est surjective.

Exercice 3

[id=161]

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E et $d_A : E \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto d_A(x) = d(x, A)$. Démontrer que :

$$\forall x, y \in E, \quad |d_A(x) - d_A(y)| \leq \|x - y\|$$

Exercice 4

[id=162]

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que pour tout $x, y, z, t \in E$, on a :

$$\|x - y\| + \|z - t\| \leq \|x - z\| + \|y - t\| + \|x - t\| + \|y - z\|$$

Exercice 5

[id=163]

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels et $N : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$N(x_1, \dots, x_n) = a_1 |x_1| + \dots + a_n |x_n|$$

A quelle condition sur les $a_1, \dots, a_n$, l'application N définit-elle une norme sur $\mathbb{K}^n$?

Exercice 6

[id=164]

Soient $f_1, \dots, f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues.

A quelle condition l'application

$$N : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x_1 f_1 + \dots + x_n f_n\|_\infty$$

définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice 7

[id=165]

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

- 1** Montrer que toute boule fermée ou ouverte de E est bornée.
- 2** Montrer que si A et B sont deux parties de E bornées alors $A + B$ est bornée.
- 3** Soit F un sous-espace vectoriel de E . Démontrer que F est borné si et seulement si $F = \{0\}$.

Exercice 8

[id=166]

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications réelles de classes C^1 sur $[0, 1]$ et pour tout $f \in E$, on pose :

$$N_1(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt$$

et

$$N_2(f) = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| + \int_0^1 |f'(t)| dt$$

- 1** Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E
- 2** Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes

Exercice 9

[id=167]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_p = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \text{rg}(A) = p\} \\ \mathcal{B}_p = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \text{rg}(A) \leq p\} \end{cases}$$

Les parties $\mathcal{A}_p$ et $\mathcal{B}_p$ sont-elles ouvertes ? fermées ?

Exercice 10

[id=168]

On note E l'ensemble des suites réelles bornées.

Pour tout $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, on pose :

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

- 1 Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E .
- 2 Montrer que chacun des ensembles suivants :

$$\begin{cases} F = \{u \in E / u_0 = 1\} \\ G = \{u \in E / u \text{ converge} \} \\ H = \{u \in E / \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0\} \end{cases}$$

est un fermé de E .

- 3 Montrer que

$$K = \{u \in E / \exists n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, u_p = 0\}$$

n'est pas un fermé de E . Déterminer l'adhérence de K .

- 4 L'espace E est-il complet ?

Exercice 11

[id=169]

On note $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ et $E' = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de E constitué des applications de classe C^1 de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$. et soit

$$F = \{f \in E' / f(0) = 0\}$$

Pour tout $f \in E$, on pose :

$$N(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|,$$

et pour tout $f \in E'$, on pose

$$N'(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)|.$$

- 1 On rappelle que N est une norme sur E . Est ce que N' est une norme sur E' ?
- 2 Démontrer que N' est une norme sur F .
- 3 Les normes N et N' considérées comme normes de F sont elles équivalentes ?

Exercice 12

[id=170]

$(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé. Soient $x, y, z \in E$ tel que $x + y + z = 0$. Montrer que :

$$\|x - y\| + \|y - z\| + \|z - x\| \geq \frac{3}{2} (\|x\| + \|y\| + \|z\|)$$

Exercice 13

[id=171]

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ et pour tout $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|; \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt; \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application f_n définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- 1 Donner une représentation graphique f_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- 2 Calculer $\|f_n\|_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \{1, 2, \infty\}$

Exercice 14

[id=172]

On note $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u \text{ est bornée}\}$ l'espace vectoriel réel des suites réelles bornées. Pour tout $u = (u_n) \in E$, on note :

$$\|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \quad \text{et} \quad N(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|u_n| + |u_{2n}|)$$

- 1 Montrer que $\|\cdot\|$ et N sont des normes sur E .
- 2 Montrer qu'elles sont équivalentes.
- 3 On note θ la suite nulle. Préciser les valeurs de :

$$k_1 = \sup_{\substack{u \in E \\ u \neq \theta}} \frac{\|u\|}{N(u)} \quad \text{et} \quad k_2 = \sup_{\substack{u \in E \\ u \neq \theta}} \frac{N(u)}{\|u\|}$$

Exercice 15

[id=173]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_p = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \text{rg}(M) \geq p\}$.

- 1 Étudier si Γ_p est ouvert, fermé.
- 2 Préciser l'adhérence et l'intérieur de Γ_p .

Exercice 16

[id=174]

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $N(x, y) = \max(|x|, |y|, |x - y|)$.

- 1 Prouver que N est une norme.
- 2 tracer la sphère unité associée à N .

Exercice 17

[id=175]

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

- 1 Montrer que pour toute partie A , on a :

$$\text{Int}(A) \neq \emptyset \Rightarrow \text{Vect}(A) = E$$

- 2 En déduire que pour tout sous-espace vectoriel F de E , si $F \neq E$ alors $\text{Int}(F) = \emptyset$.

Exercice 18

[id=176]

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel. On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel H de E tel qu'il existe $a \in E$ tel que $a \neq 0$ et $E = H \oplus \mathbb{K}a$.

- 1 Soit H un hyperplan de E . Montrer que :

$$\forall b \in E, E = H \oplus \mathbb{K}b \Leftrightarrow b \notin H$$

- 2 Soit H un hyperplan de E . Démontrer que pour tout sous-espace vectoriel H' de E , on a :

$$H \subset H' \Rightarrow H' = H \quad \text{ou} \quad H' = E$$

- 3 Montrer que pour tout sous-espace vectoriel H de E on a : H est un hyperplan si et seulement si : il existe une forme linéaire non nulle φ sur E tel que $H = \ker(\varphi)$.

- 4 Démontrer que si ϕ et ψ sont deux formes linéaires non nulles de E alors :

$$\ker(\phi) = \ker(\psi) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K}^*, \psi = \lambda\phi$$

- 5 On suppose que E est muni d'une norme $\|\cdot\|$.

- a Montrer que pour tout sous-espace vectoriel F l'adhérence de F , à savoir $\overline{F}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E .
- b En déduire que tout hyperplan de E est soit fermé soit dense.

- 6 On suppose toujours que E est muni d'une norme $\|\cdot\|$ et soit H un hyperplan de E tel que $H = \ker(\varphi)$ avec φ une forme linéaire non nulle de E . Démontrer que φ est continue si et seulement si H est fermé.

Exercice 19

[id=177]

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension n avec $n \geq 2$. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \neq E$ et soit $A = E \setminus F$.

- 1 Montrer que si $\dim(F) = n - 1$ alors A n'est pas connexe par arcs.
- 2 Montrer que si $\dim(F) \leq n - 2$, alors A est connexe par arcs.

Exercice 20

[id=178]

Dans cet exercice, n est un entier naturel tel que $n \geq 2$ et on note $\mathcal{N}_n$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}_n$ l'hyperplan des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont de trace nulle. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et on rappelle que :

$$\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|.$$

Pour tout couple (M_1, M_2) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $d(M_1, M_2) = \|M_1 - M_2\|_\infty$, la distance entre les matrices M_1 et M_2 et on pose :

$$d_\infty = d(I_n, \mathcal{N}_n) = \inf_{A \in \mathcal{N}_n} \|I_n - A\|_\infty = \inf_{A \in \mathcal{N}_n} d(I_n, A).$$

- 1 Prouver que $\mathcal{N}_n$ et $\mathcal{H}_n$ sont des fermés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{N}_n \subset \mathcal{H}_n$.
- 2 a Soit X une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que :

$$\alpha = \inf(X) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \text{ est un minorant de } X \\ \alpha \in \overline{X} \end{cases}$$

ou $\overline{X}$ est l'adhérence de X . En déduire que si α est un minorant de X alors $\alpha = \inf(X)$ si et seulement si il existe une suite $(x_p)_{p \geq 1}$ à valeurs dans X tel que : $\lim_{p \rightarrow +\infty} x_p = \alpha$.

- b Montrer que si X et Y sont deux parties de $\mathbb{R}$ tel que $X \neq \emptyset$ et $X \subset Y$ et Y est minorée alors X est minorée et $\inf(Y) \leq \inf(X)$.
- 3 Prouver que $d_\infty \leq 1$.
- 4 Prouver que pour toute matrice $M \in \mathcal{H}_n$, on a $1 \leq \|I_n - M\|_\infty$ (On pourra poser $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et remarquer, après justification, que

$$\|I_n - M\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} |1 - m_{i,i}|$$

et utiliser le fait que $\text{tr}(M) = 0$.)

- 5 Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_p = \frac{1}{p}E_{11} - \frac{1}{p}E_{22}$.
 - a Calculer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la distance $t_p = d(I_n, M_p) = \|I_n - M_p\|_\infty$.
 - b Calculer $d(I_n, \mathcal{H})$.
 - c En déduire que $d_\infty = 1$.

Exercice 21

[id=179]

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\|A\| = \sup_{\substack{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \neq 0}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$$

- 1 Démontrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le réel $\|A\|_\infty$ est effectivement bien défini.
- 2 Démontrer que $A \mapsto \|A\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 3 Démontrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\|A\| = \sup_{\|X\|_\infty \leq 1} \|AX\|_\infty = \sup_{\|X\|_\infty = 1} \|AX\|_\infty$$

4 Démontrer que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \|AX\|_{\infty} \leq \|A\|_{\infty} \|X\|_{\infty}$$

En déduire que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tel que $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On se propose dans cette question de démontrer que :

$$\|A\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right)$$

Pour cela on pose, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|, \quad \text{et} \quad \alpha = \sup_{1 \leq i \leq n} \alpha_i.$$

On veut donc prouver que $\alpha = \|A\|_{\infty}$.

a Justifier qu'il existe au moins un indice $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que

$$\alpha = \alpha_k = \sum_{j=1}^n |a_{k,j}|.$$

b Démontrer que si $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = AX = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$, alors :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |y_j| \leq \alpha_j \|X\|_{\infty}$$

En déduire que : $\|AX\|_{\infty} \leq \alpha \|X\|_{\infty}$ et que $\|A\| \leq \alpha$.

c Soit $X_0 = (\xi_j)_{1 \leq j \leq n}$ avec, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on aie :

$$\xi_j = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{k,j} = 0 \\ \frac{|a_{k,j}|}{a_{k,j}} & \text{si } a_{k,j} \neq 0 \end{cases}$$

Démontrer que $\|X_0\|_{\infty} = 1$. Que vaut $\|AX_0\|_{\infty}$?

d Conclure.

Exercice 22

[id=180]

On considère $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in E$, on pose : $\|P\| = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$. On considère l'application linéaire

$$\varphi : E \rightarrow E, P \mapsto \varphi(P) = P(X+1)$$

1 Etdier la continuité de φ de $(E, \|\cdot\|)$ vers lui même.

2 Etudier la continuité de ψ de $(E, \|\cdot\|)$ vers lui même où

$$\psi : E \rightarrow E, P \mapsto \psi(P) = AP$$

où $A \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme donné.

- 3** Reprendre les questions précédentes si on considère le norme :

$$\|P\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} e^{-|t|} |P(t)|$$

Exercice 23

[id=181]

Soit K une partie infinie bornée de $\mathbb{R}$. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on pose

$$\|P\|_K = \sup_{t \in K} |P(t)|.$$

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et Φ_A l'application linéaire définie par :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad \Phi_A(P) = AP$$

- 1** Montrer que $\|\cdot\|_K$ est une norme sur $\mathbb{K}[X]$.
- 2** Étudier la continuité de Φ_A de $(\mathbb{K}[X], \|\cdot\|_K)$ vers lui même dans chacun des cas suivants :
 - a** K est une partie compacte infinie de $\mathbb{K}$.
 - b** K est une partie bornée infinie de $\mathbb{K}$.
- 3** Étudier la continuité de Φ_A de $(\mathbb{K}[X], \|\cdot\|)$ vers $(\mathbb{K}[X], \|\cdot\|)$ lorsque $\mathbb{K}[X]$ est muni de la norme $\|P\| = \sum_{k=0}^N |a_k|$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$.
- 4** On suppose dans cette question que $K = [0, 1]$ et $A(X) = X^m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Étudier la continuité de Φ_A de $(\mathbb{K}[X], \|\cdot\|)$ vers $(\mathbb{K}[X], \|\cdot\|_K)$ où $\|\cdot\|_\infty$ est celle définie : $\|P\| = \max_{0 \leq k \leq N} |a_k|$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$.

Exercice 24

[id=182]

On considère un entier naturel m tel que $m \geq 2$, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(N_k)_{1 \leq k \leq m}$ une famille de normes de E . Pour tout $a = (a_k)_{1 \leq k \leq m} \in (\mathbb{R}_+^*)^m$ et tout vecteur $x \in E$, on pose $\|x\|_a = \sum_{k=1}^m a_k N_k(x)$.

- 1** Démontrer que $\|\cdot\|_a$ est une norme sur E , pour tout $a \in (\mathbb{R}_+^*)^m$.
- 2** Démontrer que les normes $\|\cdot\|_a$ sont deux à deux équivalentes quand a décrit $(\mathbb{R}_+^*)^m$.

Exercice 25

[id=183]

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A et B deux parties non vides bornées de E . On définit la distance de A à B comme suit $d(A, B) = \inf\{\|a - b\| / (a, b) \in A \times B\}$ et le diamètre d'une partie bornée non vide X de E par $\delta(X) = \sup\{\|x - y\| / x, y \in X\}$.

- 1** Montrer que $A \cup B$ est non vide bornée.
- 2** Montrer que $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$.

Exercice 26

[id=184]

Soit E un espace vectoriel normé, de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E et

$$\mathfrak{L}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) / \ker u = F\}.$$

- 1 Démontrer que $\mathfrak{L}_F \neq \emptyset$
- 2 Déterminer $\text{Adh}(\mathfrak{L}_F)$ et $\text{Int}(\mathfrak{L}_F)$, l'adhérence et l'intérieur de $\mathfrak{L}_F$

Exercice 27

[id=185]

- 1 Soient a, b, c, d des nombres réels tel que $a < b$ et $c < d$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $]a, b[\cap]c, d[\neq \emptyset$
- (ii) $\max(a, c) < \min(b, d)$
- (iii) $|a + b - c - d| \leq b - a + d - c$

- 2 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour tout $(x, r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$, on note $B_{x,r}$ la boule ouverte de centre x et de rayon r . Pour toutes parties non vides A et B de E , on note $A + B = \{a + b / (a, b) \in A \times B\}$.

- a Démontrer que pour tout $(x, x', r, r') \in E \times E \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$B_{x,r} \cap B_{x',r'} \neq \emptyset \Leftrightarrow \|x' - x\| < r + r'$$

- b Démontrer que pour tout $(x, x', r, r') \in E \times E \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$B_{x,r} + B_{x',r'} = B_{x+x', r+r'}$$

- c Démontrer que pour tout $(x, x', r, r') \in E \times E \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$B_{x,r} = B_{x',r'} \Leftrightarrow x = x' \quad \text{et} \quad r = r'$$

Exercice 28

[id=186]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une partie de $\mathbb{R}^n$. On suppose que A est convexe. Démontrer que $\text{Int}(A) = \emptyset$ si et seulement si A est contenue dans un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 29

[id=187]

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E . On suppose que A est convexe et $\text{Int}(A) \neq \emptyset$.

- 1 Démontrer que pour tout $a \in \text{Int}(A)$ et tout $b \in \text{Adh}(A)$, le segment $]a, b[$ est contenu dans $\text{Int}(A)$ (autrement dit, pour tout $t \in]0, 1[$, on a $(1-t)a + tb \in \text{Int}(A)$.)
- 2 Démontrer que $\text{Int}(A) = \text{Int}(\text{Adh}(A))$

Exercice 30

[id=188]

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Démontrer que :

- 1 Pour toutes parties A et B de E , Si $A \subset B$ alors $\text{Adh}(A) \subset \text{Adh}(B)$ et $\text{Int}(A) \subset \text{Int}(B)$ et $\text{Ext}(A) \supset \text{Ext}(B)$.
- 2 Pour toute partie A de E , on a $\text{Adh}(A^c) = (\text{Int}(A))^c$ et $\text{Int}(A^c) = (\text{Adh}(A))^c$ et $(\text{Ext}(A))^c = \text{Adh}(A)$ et $\partial(A^c) = \partial(A)$.
- 3 Pour toute partie A de E , on a : $\text{Adh}(A) = \text{Int}(A) \cup \partial A$.
- 4 Une partie A de E est fermée si et seulement si $\partial A \subset A$.
- 5 Pour toutes parties A et B de E , on a :
 - a $\text{Adh}(A \cup B) = \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$ et $\text{Adh}(A \cap B) \subset \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B)$.
 - b $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$ et $\text{Int}(A \cup B) \supset \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$.
 - c $\text{Ext}(A \cup B) = \text{Ext}(A) \cap \text{Ext}(B)$ et $\text{Ext}(A \cap B) \supset \text{Ext}(A) \cup \text{Ext}(B)$.
 - d $\partial(\text{Int}(A)) \subset \partial A$ et $\partial(\text{Adh}(A)) \subset \partial(A)$ et $\partial(A \cup B) \subset \partial(A) \cup \partial(B)$.
- 6 Pour toute partie A de E , on a $\partial(A) = \emptyset \Leftrightarrow A$ est ouverte ou A est fermée.
- 7 Pour toutes parties A et B de E , si $\partial(A) \cup \partial(B) = \emptyset$, alors on a les égalités suivantes : $\text{Adh}(A \cap B) = \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B)$ et $\text{Int}(A \cup B) = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$ et $\partial(A \cap B) = (\partial(A) \cap \text{Adh}(B)) \cup (\text{Adh}(A) \cap \partial(B))$.

Exercice 31

[id=189]

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n . Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\text{Im } z|^n$
2. Montrer que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables.

Exercice 32

[id=190]

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A une partie fermée non vide de E . Démontrer que :

$$\forall x \in E, \exists a \in A, \quad d(x, A) = \|x - a\|$$

Exercice 33

[id=191]

Soit E un espace vectoriel normé. Soit K une partie compacte convexe de E . Soit f une application de K dans K , 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe.

Indication : pour a dans K fixé et tout entier naturel n non nul, on pourra considérer l'application f_n définie sur K par : $f_n : x \mapsto \frac{1}{n}a + (1 - \frac{1}{n})f(x)$.

Exercice 34

[id=192]

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit A une partie finie non vide et $f : A \rightarrow E$ une application de A vers E tel que :

$$\begin{cases} f(A) \subset A \\ \exists k \in [0, 1], \forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\| \end{cases}$$

Soit $a \in A$ et (x_n) la suite définie par $\begin{cases} x_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$.

- 1 Démontrer que la série $\sum (x_{n+1} - x_n)$ est absolument convergente.
- 2 En déduire que la suite (x_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
- 3 Démontrer que ℓ est l'unique point fixe de f , c'est-à-dire l'unique $t \in A$ tel que $f(t) = t$.

Exercice 35

[id=193]

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit K une partie compacte non vide de E et $f : K \rightarrow E$ une application tel que $f(K) \subset K$ et $\forall (x, y) \in K^2, x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$. Démontrer que f admet un et un seul point fixe ℓ et que toute suite $(x_n)_{n \geq 0} \in K^{\mathbb{N}}$, définie par $x_0 \in K$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$ est convergente de limite ℓ .

Exercice 36

[id=194]

Soit E un espace vectoriel normé et Ω un ouvert de E . On note $\mathbf{O}(\Omega) = \bigcup_{\omega \in \Omega} B_f(\omega, 1)$. Démontrer que $\mathbf{O}(\Omega)$ est un ouvert de E .

Exercice 37

[id=195]

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$. Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_p)$ pour les cas $p = 1, p = 2$ et $p = \infty$, dans les deux cas suivants :

- 1 La suite (f_n) définie par :

$$\forall t \in [0, 1], f_n(t) = \begin{cases} -2n^2t + 2n & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

- 2 La suite (f_n) définie par :

$$\forall t \in [0, 1], f_n(t) = \begin{cases} -2n\sqrt{nt} + 2\sqrt{n} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Exercice 38

[id=196]

Soit $E = \mathcal{B}([-1, 1], \mathbb{R})$ l'espace des applications bornées de $[-1, 1]$ vers $\mathbb{R}$ muni de la norme de convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ et A la parties de E constituées des applications continues. Calculer $d(f, A)$ où f est l'application définie par :

$$\forall t \in [-1, 1], f(t) = \begin{cases} \frac{t}{|t|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 39

[id=197]

Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$. Si N_1 et N_2 deux normes de E , on dit que N_1 est moins fine que N_2 et on note $N_1 \prec N_2$ si et seulement s'il existe une constante $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leq \alpha N_2$. Pour tout $k \in \{1, 2\}$ et tout $(a, r) \in E \times \mathbb{R}_+$, on adoptera les notations suivantes :

- $\mathcal{O}_k$ l'ensemble des ouverts de l'espace normé (E, N_k) .
- $B^k(a, r)$ (resp. $B_f^k(a, r)$) la boule ouverte (resp. fermé) de centre a et de rayon r de l'espace vectoriel normé (E, N_k) .
- $\mathcal{J}_{1,2} = \{\frac{N_2(x)}{N_1(x)} / x \in E \setminus \{0\}\}$ et $\mathcal{J}_{2,1} = \{\frac{N_1(x)}{N_2(x)} / x \in E \setminus \{0\}\}$.

Dans tout ce qui suite N_1 et N_2 sont deux normes de E .

- 1 Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) N_2 est plus fine que N_1 .
 - (ii) $\mathcal{J}_{2,1}$ est majorée.
 - (iii) $\exists r > 0, B_f^2(0, r) \subset B_f^1(0, r)$.
 - (iv) $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$.
- 2 Démontrer que N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si $N_1 \prec N_2$ et $N_2 \prec N_1$.
- 3 Démontrer que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes si et seulement si $\mathcal{J}_{1,2}$ ou $\mathcal{J}_{2,1}$ n'est pas majorée. En déduire que si N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes alors il existe une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}^*}$ tel que (x_n) converge dans l'un des espace vectoriels normés $(E, N_1), (E, N_2)$ et diverge dans l'autre.
- 4 En déduire que N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si (E, N_1) et (E, N_2) ont les mêmes suites convergentes.
- 5 Démontrer que Si N_1 et N_2 sont équivalentes alors pour toute suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ convergente pour l'une des normes, elle converge pour l'autre et les limites sont égales.
- 6 Démontrer que N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si (E, N_1) et (E, N_2) ont les mêmes suites qui convergent vers 0.

Exercice 40

[id=198]

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ muni de la norme de convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$, c'est-à-dire :

$$\forall f \in E, \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Démontrer que la boule fermée unité de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas compacte.

Exercice 41

[id=199]

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé au moins de dimension 2, donc elle peut être éventuellement infinie.

- 1 Démontrer que si E_1, E_2, E_3 sont trois s.e.v. de E tel que $E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq E_3$ et si $a, b \in E$ tel que $a \in E_2 \setminus E_1$ et $b \in E_3 \setminus E_2$ alors $E_1 \cap [a, b] = \emptyset$.
- 2 En utilisant le résultat établi dans la question 1), démontrer que si F est un sous-espace vectoriel de E tel que $\text{codim}(F) \notin \{0, 1\}$ alors $E' = E \setminus F$ est une partie non vide connexe par arcs de E .

Exercice 42

[id=200]

$\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$ et

$$\mathcal{P}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / M^2 = M\}.$$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme quelconque.

- 1 $\mathcal{P}_n$ est-elle une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
- 2 Prouver que $\mathcal{P}_n$ n'est pas connexe par arcs.
- 3 Pour tout $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $\mathcal{P}_{n,r} = \{M \in \mathcal{P}_n / \text{rg}(M) = r\}$
 - a Prouver que $\mathcal{P}_{n,r}$ est connexe par arcs dans chacun des cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ puis $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
 - b Soit $r, r' \in \llbracket 0, r \rrbracket$ tel que $r \neq r'$. Démontrer que si $A \in \mathcal{P}_{n,r}$ et $B \in \mathcal{P}_{n,r'}$ alors il n'existe aucune chemin qui joigne A et B dans $\mathcal{P}_n$.
 - c En déduire les composantes connexes de $\mathcal{P}_n$.

Exercice 43

[id=467]

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$u_0 = 0, u_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$$

- 1 Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

Veuillez bien justifier votre réponse.

- 2 Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ de A et calculer ses valeurs propres λ_1 et λ_2 .
- 3 Soit $R_n(X) = a_n X + b_n$ le reste de la division euclidienne de X^n par $\chi_A(X)$. Calculer a_n et b_n (on pourra utiliser les racines λ_1, λ_2 de $\chi_A(X)$).
- 4 Montrer que $A^n = a_n A + b_n I_n$, en déduire que la suite $(A^n)_{n \geq 0}$ converge lorsque n tend vers $+\infty$ vers une limite A_∞ que l'on déterminera. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 44

[id=485]

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

- 1 Soit A une partie non vide de E . Montrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est continue sur E .
- 2 Soit K un compact non vide inclus dans un ouvert U . Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in K, B(x, \alpha) \subset U$$

Exercice 45

[id=528]

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

- 1 A et B sont deux parties non vides de E . Démontrer que

$$\forall x \in E, d(x, A \cup B) = \min(d(x, A), d(x, B))$$

- 2 Soit $x \in E$ et on note $B_x = B_f(x, \|x\|)$ la boule fermée de centre x et de rayon $\|x\|$. Soit F une partie de E tel que $F \cap B_x \neq \emptyset$. Démontrer que $d(x, F) = d(x, F \cap B_x)$.
- 3 En déduire que le résultat de la question précédente est vrai si F est un sous-espace vectoriel de E .
- 4 En déduire que si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E alors :

$$\forall x \in E, \exists y \in F, d(x, F) = \|x - y\|$$

Exercice 46

[id=529]

Soit (E, d) un espace métrique, I un ensemble non vide et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties *non vides* de E . Démontrer que :

$$(\star\star) \quad d(x, \bigcup_{i \in I} A_i) = \inf_{i \in I} d(x, A_i).$$

Exercice 47

[id=531]

p, q, r sont des nombres réelles strictement positifs tel que $p + q + r = 1$. On considère la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 48

[id=533]

On fixe $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et on considère $\Delta : M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA$.

- 1** Prouver que Δ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (M, N) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2, \Delta^n(MN) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k(M) \Delta^{n-k}(N)$$

- 2** On suppose que $B = \Delta(H)$ commute avec A . Montrer :

$$\Delta^2(H) = 0 \text{ et } \Delta^{n+1}(H^n) = 0$$

Vérifier $\Delta^n(H^n) = n!B^n$.

- 3** Soit $\| \cdot \|$ une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que $\|B^n\|^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- 4** En déduire que la matrice B est nilpotente.

Exercice 49

[id=535]

Soit $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \text{Sp}(A) \neq \emptyset\}$. Démontrer que $\mathcal{F}$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 50

[id=539]

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E pour laquelle il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait $\|x_m - x_n\| \geq \varepsilon$ pour tous entiers naturels m, n distincts.

- 1** Montrer qu'une telle suite n'admet aucune valeur adhérence.
Soit K une partie compacte d'un espace normé E .
- 2** Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, il existe un entier $p > 0$ et $x_1, \dots, x_p$ éléments de K tels que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^p B(x_k, \alpha)$$

Pour I un ensemble d'indexation quelconque, on considère une famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ de parties ouvertes de E telle que ¹

$$K \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i.$$

- 3** Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in K$, il existe un indice $i \in I$ pour lequel la boule $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert Ω_i .
- 4** En déduire qu'il existe une sous-famille finie $(\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_p})$ de la famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ telle que ₂

$$K \subset \bigcup_{k=1}^p \Omega_{i_k}$$

Exercice 51

[id=578]

- 1 Montrer que $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de complexes est une partie connexe par arcs.
- 2 Application : Établir que $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est une partie connexe par arcs.
On pourra considérer l'application $z \mapsto \det((1-z)A + zB)$ pour $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 52

[id=662]

On munit le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites réelles bornées de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :

- 1 $A = \{ \text{suites croissantes} \}$,
- 2 $B = \{ \text{suites convergeant vers } 0 \}$,
- 3 $C = \{ \text{suites convergentes} \}$,
- 4 $D = \{ \text{suites admettant } 0 \text{ pour valeur d'adhérence} \}$,
- 5 $E = \{ \text{suites périodiques} \}$.

Exercice 53

[id=668]

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel et on considère une partie $\mathbf{O}$ de E tel que $\mathbf{O}$ est convexe, ouvert bornée et symétrique ($\forall x \in E, x \in E \Rightarrow -x \in E$.) et $0 \in \mathbf{O}$. Pour tout $x \in E$, on pose :

$$N(x) = \inf \left\{ \lambda > 0 / \frac{x}{\lambda} \in \mathbf{O} \right\}.$$

Prouver que N est une norme sur E .