Chapitre 3 : **Algèbre linéaire : Réduction**

Exercice 1 [id=6]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / AM = MA\}$ dit le commutant de A.

1 Montrer que $\mathscr{C}_A$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $\mathbb{K}[A] \subset \mathscr{C}_A$.

2 Soit $A = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux λ_i sont deux à deux distincts.

- **a** Chercher $\mathscr{C}_A$.
- **b** Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); M \mapsto MA - AM$. Montrer que $\text{Im}(\Phi)$ est l'ensemble des matrices à diagonale nulle.

Exercice 2 [id=16]

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 3$. Pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ avec $a_2 \neq 0$, on associe la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

1 Quel est le rang de A_n ? Qu'en déduit-on pour le polynôme caractéristique χ_n de A_n ?

2 Caclculer χ_2, χ_3.

3 On pose $b_n = \sum_{k=2}^{n} a_k^2$. Montrer par récurrence que $\chi_n = X^{n-2}(X^2 - a_1 X - b_n)$.

4 Si $b_n = 0$, la matrice A_n est-elle diagonalisable ?

5 On suppose que $b_n \neq 0$. A quelle condition A_n est elle diagonalisable ?

Exercice 3 [id=21]

Soient dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1 les matrices A et B sont elles diagonalisables ? trigonalisables ?

2 Calculer B^{-1} en utilisant le polynôme caractéristique de B.

Exercice 4 [id=23]

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A quelle condition sur le triplet (a, b, c) l'endomorphisme u est il diagonalisable ?

Exercice 5 [id=24]

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée nilpotente non nulle.

1 Montrer que $I_n - M$ n'est pas diagonalisable.

2 Généralement, montrer que si B est une matrice diagonalisable ayant une unique valeur propre alors $B + M$ n'est pas diagonalisable.

3 Donner un exemple de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A \neq 0$ nilpotente et B diagonalisable et $A + B$ aussi diagonalisable.

Exercice 6 [id=25]

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ considérée dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1 Quel est le rang de A ?

2 En déduire une valeur propre de A et calculer la dimension du sous-espace propre qui lui est assicié.

3 On note $0, \lambda, \mu$ les valeurs propres complexes de A comptées avec leur ordres de multiplicités. Justifier leur existence et calculer $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(A^2)$ en fonction de λ et μ.

4 Déduire de ce qui précéde que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner son polynôme minimal ainsi que son polynôme caractéristique.

5 Retrouver le resultat en calculant directement le polynôme caractéristique de A.

Exercice 7 [id=31]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à n et $B_n = (1, X, \ldots, X^n)$ sa base canonique. On considère les applications :

$$f : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_3[X], P \mapsto f(P) = P'$$

et

$$g : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_4[X], P \mapsto g(P) = XP$$

1 Montrer que f et g sont des applications linéaires.

2 Donner les matrices $\mathrm{mat}_{B_4,B_3}(f)$ et $\mathrm{mat}_{B_3,B_4}(g)$.

3 Donner la matrice de $g \circ f$ relativement à la base B_4.

4 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer suivant les valeurs de λ la dimension

$$d_\lambda = \dim(g \circ f - \lambda \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_4[X]}).$$

Exercice 8 [id=120]

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1 Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A.

2 Démontrer que A admet deux valeurs propres λ et μ tel que $\lambda < \mu$.

3 Déterminer $\dim(E_\lambda(A))$ et $\dim(E_\mu(A))$.

4 En déduire que A est semblable à la matrice D avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

Exercice 9 [id=121]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle valeur propre de M tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \neq 0$ et $MX = \lambda X$. Le vecteur X est alors appelé vecteur propre de M associé à la valeur propre λ.
On suppose que $n \geq 2$ et on considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1 Soit V un vecteur propre de A de composantes $(v_k)_{1 \leq k \leq n}$ relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Démontrer que si on pose $v_0 = v_{n+1} = 0$ alors :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad v_{k+1} - (2 - \lambda)v_k + v_{k-1} = 0$$

2 Montrer que 0 et 4 ne sont pas des valeurs propres de A.

3 Soit $\lambda \in]0, 4[$ une valeur propre de A et soit $\rho e^{i\theta}$ une solution complexe de l'équation $t^2 - (2 - \lambda)t + 1 = 0$. Démontrer que nécessairement $\sin((n + 1)\theta) = 0$.

4 On conserve les notations de la question 3). Montrer que $\rho = 1$ et que A admet n valeurs propres $\lambda_k, k \in [\![1, n]\!]$, distinctes dans $]0, 4[$ qu'on explicitera en fonction de k.

Exercice 10 [id=122]

On considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices :
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
1) Démontrer que A, B et C ont le même polynôme caractéristique, la même trace et le même déterminant.
2) A, B et C ont-elles le même rang ?
3) A et B sont-elles semblables ?
4) A et C sont-elles semblables ?

Exercice 11 [id=123]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soit f l'application de E vers E tel que

$$\forall P \in E, \quad f(P) = X(P(X) - P(X-1)).$$

1 Vérifier que f est un endomorphisme de E.

2 Former la matrice A de f relativement à la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ de E.

3 Determiner $\ker f, \operatorname{Im} f, \operatorname{Sp} f$.

4 Montrer que f est diagonalisable et préciser les dimensions respectives des sous-espaces propres.

Exercice 12 [id=124]

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1 Démontrer que A admet au plus trois valeurs propres complexes distinctes dont au moins une est nulle.

2 Donner les expressions explicites des valeurs propres de A et prouver qu'elles sont réelles.

3 A quelle condition sur n les valeurs propres de A sont entières ?

Exercice 13 [id=125]

1 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour quelles valeurs de a la matrice A est elle diagonalisable.

2 Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Prouver sans trop de calculs que B est diagonalisable.

Exercice 14 [id=126]

Soit $M \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$. Exprimer le polynôme caractéristique de M^{-1} en fonction de χ_M.

Exercice 15 [id=127]

n est un entier naturel tel que $n \geq 2$.

1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\operatorname{rg}(A) = 1$. Démontrer que le polynôme minimal de A est $\mu_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)X$.

2 Determiner le polynôme minimal de $B = \begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 16 [id=128]

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n avec $n \geq 1$ et soit Φ l'endomorphisme de de $\mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $\Phi(f) = f + \operatorname{tr}(f)\operatorname{Id}_E$.

1 Determiner les éléments propres de Φ et donner le polynôme caractéristique χ_Φ de Φ.

2 Calculer $\operatorname{tr}(\Phi)$ et $\det(\Phi)$.

3 Montrer que Φ est inversible et determiner son inverse.

Exercice 17 [id=129]

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ et μ_u le polynôme minimal de u. Démontrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on a $P(u)$ est inversible si et seulement si $P \wedge \mu_u = 1$

Exercice 18 [id=130]

On se propose de démontrer que :
$(\star)\quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists U, V \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}), \quad A = U + V$
par trois méthodes :

1 **Méthode 1 :**

(a) Démontrer que $(\star)$ est vrai si $A = 0$ ou A inversible.

(b) On suppose que $A = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ où I_r est la matrice unité de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ et 0_{n-r} la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$. Démontrer que A vérifie $(\star)$.

(c) Démontrer que si $\operatorname{rg}(A) = r$ avec $0 < r < n$ alors A vérifie $(\star)$.

2 **Méthode 2 :** Démontrer qu'il existe au moins un réel λ tel que $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$. Conclure.

3 **Méthode 3 :** Nécessite le chapitre sur les espaces vectoriels normés.

(a) Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); t \mapsto \det(I_n - tA)$ est continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Calculer $f(0)$.

(c) En déduire qu'il existe un voisinage V non vide de 0 tel que $f(V) \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

(d) Conclure.

Exercice 19 [id=131]

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie , $u \in \mathcal{L}(E)$ et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, c'est-à-dire $F \oplus G = E$. Démontrer que si F et G sont stables par u et $v \in \mathcal{L}(F)$ et $w \in \mathcal{L}(G)$ les endomorphismes induits par u à F et G respectivement alors on a :

$$\mu_u = \mu_v \vee \mu_w$$

Exercice 20 [id=132]

1 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ tel que :

$$(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \exists P \in \mathbb{K}[X], \quad \begin{cases} P \in F \\ \deg(P) = n \end{cases}.$$

Prouver que $F = \mathbb{K}[X]$.

2 Soit $u : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], P \mapsto P'$. Démontrer que les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ stables par u sont : $\{0\}$, $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21 [id=133]

Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^p = I_n$ et ω une racine $p$ème de l'unité dans $\mathbb{C}$ telle que $\omega^{-1} \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \omega^k A^k = 0.$$

Exercice 22 [id=134]

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \in \mathrm{Sp}(u \circ v) \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}(v \circ u)$$

Exercice 23 [id=135]

On rappelle et on ne demande pas de le démontrer que :

$$(\star) \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M^{\mathbf{t}}(\mathrm{Com}(A)) = \det(M) I_n.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = {}^{\mathbf{t}}(\mathrm{Com}(A))$. Montrer que tout vecteur propre de A est un vecteur propre de B.

Exercice 24 [id=136]

Dans tout ce qui suit, n est un nombre entier naturel, E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et u est un endomorphisme de E.

1 Démontrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, si $(n_0, \dots, n_m)$ est une famille d'entiers naturels tel que $n_0 < \dots < n_m$ alors $m \leq n_m$.

2 Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que :
- si $\ker(u^p) = \ker(u^{p+1})$ alors $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq p \Rightarrow \ker(u^k) = \ker(u^p)$.
- si $\ker(u^p) \neq \ker(u^{p+1})$ alors $p < n$.

3 Démontrer que $u^n = u^{n+1}$ et que $E = \ker(u^n) \oplus \mathrm{Im}(u^n)$.

Exercice 25 [id=137]

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice tel que $A^3 + A^2 + A = 0$. Démontrer que rg (A) est un entier naturel pair.

Exercice 26 [id=138]

Soit n un entier tel que $n \geq 2$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice carrée dont tous les coefficients valent 1. On note I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1 Calculer J^2 et en déduire que J est diagonalisable.

2 En remarquant que le rang de J est égal à 1, montrer que le polynôme caractéristique de J est scindé et que J possède exactement deux valeurs propres.

3 Donner le polynôme caractéristique de J

4 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $K = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$. Exprimer J en fonction de K, I, a et b. En déduire que K est diagonalisable et préciser le polynôme caractéristique χ_K de K.

5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Démontrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

Exercice 27 [id=139]

Soit dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calculer le polynôme caractéristique de A.
b) Trigonaliser la matrice A.

Exercice 28 [id=140]

1 E est un espace vectoriel de dimension n avec $n \neq 0$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- **a** Démontrer que pour toutes matrices M_1, M_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ si M_1 et M_2 sont semblables, il en est de même de $M_1 + \lambda I_n$ et $M_2 + \lambda I_n$.
- **b** Soit u un endomorphisme de E. Démontrer que u est une homothétie si et seulement si pour tout vecteur x de E, la famille $(x, u(x))$ est liée. En déduire que si E est de dimension 2 et u est un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie alors il existe au moins un vecteur x tel que la famille $(x, u(x))$ est une base de E.
- **c** Démontrer que pour toute matrice carrée A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on a A est scalaire ou bien A est semblable à la matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ 1 & \tau \end{pmatrix}$ où $\delta = \det(A)$ et $\tau = \operatorname{tr}(A)$.
- **d** Démontrer que si $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sont deux matrices non scalaires alors A et B sont semblables si et seulement si $\det(A) = \det(B)$ et $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

2 Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E. Justifier que le polynôme caractéristique de E est de la forme

$$\chi_u = (X - \lambda)Q(X) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{K} \quad \text{et} \quad Q \in \mathbb{K}[X].$$

- **a** Démontrer que si $Q(\lambda) \neq 0$ alors il existe une base b de E tel que la matrice de u relativement à b est de la forme : $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}$ où $M' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
- **b** Démontrer que si $Q(\lambda) = Q'(\lambda) = 0$ alors $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ est nilpotent.
- **c** Démontrer que si $Q(\lambda) = 0$ et $Q'(\lambda) \neq 0$, alors on se ramène au cas du a) ci-dessus.

3 Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, on considère les matrices J et K suivantes :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice p avec $p \in \{2, 3\}$. Démontrer que si $p = 3$, alors A est semblable à J et si $p = 2$, alors A est semblable à K.

4 En déduire que si A et B sont deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ tel que $\chi_A = \chi_B$ et $\mu_A = \mu_B$ alors A et B sont semblables.

5 En utilisant tout ce qui précède, démontrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_3(K)$ tel que $\chi_A = \chi_B$ et $\mu_A = \mu_B$ alors A et B sont semblables.

Exercice 29 [id=141]

On se propose de démontrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a A et ${}^{\mathbf{t}}A$ sont semblables. On admet que ce résultat est vrai pour toute matrice nilpotente.

1 Démontrer que le résultat est vrai s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A - \lambda I_n$ est nilpotente.

2 Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Démontrer que u est une homothétie si et seulement si pour tout vecteur x de E, la famille $(x, u(x))$ est liée. En déduire que si E est de dimension 2 et u est un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie alors il existe au moins un vecteur x tel que la famille $(x, u(x))$ est une base de E.

3 Démontrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on a soit A est scalaire soit A est semblable à la matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ 1 & \tau \end{pmatrix}$ où $\delta = \det(A)$ et $\tau = \operatorname{tr}(A)$.

4 En déduire que la propriété à démontrer est vraie si $n = 2$.

5 Démontrer que si $A_1, \dots, A_s$ sont des matrices carrées tel que $A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{K})$ pour tout $k \in [\![1, s]\!]$ avec $n_k \in \mathbb{N}^*$ et si $B_1, \dots, B_s$ sont des matrices carrées tel que $b_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{K})$ et A_k et B_k sont sembalbles alors les matrices diagonales par blocs : $U = \operatorname{diag}(A_1, \dots, A_s)$ et $V = \operatorname{diag}(B_1, \dots, B_s)$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $n = \sum_{k=1}^{s} n_k$.

6 Démontrer par récurrence que la propriété ci-dessus est vrai dans le cas où A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que le polynôme caractéristique de A est de la forme $\chi_A = P_1(X)P_2(X)$ où P_1 et P_2 sont deux polynômes non constants et premiers entre eux.

7 Démontrer le résultat admis pour les matrices nilpotentes dans le cas où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'indice de nilpotence n.

Exercice 30 [id=142]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si A et B sont deux matrices carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables alors A et B sont semblables si et seulement si elles ont même polynôme caractéristique, c'est-à-dire si et seulement si $\chi_A = \chi_B$.

Exercice 31 [id=143]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice tel que $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$ et A non nilpotente. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est semblable à une matrice de la forme $B = \operatorname{diag}(O_p, M_1, \dots, M_q)$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, O_p la matrice nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et pour tout $j \in [\![1, q]\!]$, $M_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$, avec $(\alpha_j, \beta_j) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha_j^2 + \beta_j^2 > 0$ et les couples (α_j, β_j) sont deux à deux distincts.

(ii) Le polynôme minimal de A est de la forme : $\pi_A = XP_1 \dots P_q$, avec pour tout $k \in [\![1, q]\!]$, on a P_k est un trinôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$ et les P_k sont deux à deux distincts.

Exercice 32 [id=144]

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel quelconque.

1 Soit u un endomorphisme de E. Démontrer que u est une homothétie si et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.

2 Soit u un endomorphisme de E tel que :

$$\forall v \in \mathbf{GL}(E), v \circ u = u \circ v$$

On se propose de prouver que u est une homothétie. Pour cela on considére un vecteur x non nul de E et on va prouver que la famille $(x, u(x))$ est liée. Soit H un sous-espace supplémentaire de la droite vectorielle $\mathbb{K}x$, donc $\mathbb{K}x \oplus H = E$ et v l'endomorphisme de E tel que $v(x) = x$ et pour tout $h \in H$, $v(h) = -h$.

a Soit $y \in E$ un vecteur tel que $y = \alpha x + h$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et $h \in H$. Exprimer $v(y)$ en fonction de α, x et h.

b Determiner $\ker(v - \mathrm{Id}_E)$.

c Prouver que $v \in \mathbf{GL}(E)$.

d En déduire que $\mathbb{K}x$ est stable par u.

e Conclure.

Exercice 33 [id=145]

On considère deux matrices diagonales :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_n \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Δ et D et sont semblables.

(ii) Il existe une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ tel que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mu_k = \lambda_{\sigma(k)}$$

Exercice 34 [id=146]

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ designe $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que rg $(A) = 1$.

a Démontrer qu'il existe $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $X \neq 0$ et $Y \neq 0$ et $A = X{}^{\mathbf{t}}Y$.

b Démontrer que $\mathrm{tr}(A) = {}^{\mathbf{t}}YX = {}^{\mathbf{t}}XY$.

c Prouver que le polynbôme minimal de A est $\pi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X$.

2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que rg $(A) = 1$.

a Montrer que si $\operatorname{tr}(A) = 0$ alors A est semblable à la matrice :

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b Montrer que si $\tau = \operatorname{tr}(A) \neq 0$ alors A est semblable à D_τ avec :

$$D_\tau = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ (0) & & & \tau \end{pmatrix}$$

Pour tout $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$M(x) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x_n \end{pmatrix}$$

Soit $a = (a_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $b = (b_k)_{1 \leq k \leq n}$ deux éléments $\mathbb{K}^n \backslash \{(0, \dots, 0)\}$. Démontrer que les matrices $M(a)$ et $M(b)$ sont semblables si et seulement si $a_n = b_n$.

Exercice 35 [id=147]

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On considère les matrices par blocs :

$$C = \begin{pmatrix} xI_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -B & xI_n \end{pmatrix}.$$

1 Calculer $\det(CD)$ et $\det(DC)$

2 Montrer que : $x^n \chi_{AB} = x^m \chi_{BA}$

3 Montrer que si $m = n$ alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Exercice 36 [id=148]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est inversible.

1 Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^*$, on a :

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \frac{(-1)^n}{\det(A)} x^n \chi_A\left(\frac{1}{x}\right)$$

2 En déduire que le coéfficient du monôme de degré 1 dans $\chi_A(X)$ est

$$a_1 = (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(\operatorname{Com}(A))$$

Exercice 37 [id=149]

On se propose de donner un exemple d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que A n'a aucune valeur propre réelle et A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1 Vérifier que si une telle matrice existe forcément n est pair.

2 Démontrer que si $n = 2$, une telle matrice n'existe pas.

3 Donner un exemple d'une telle matrice :

- **a** Si $n = 4$.
- **b** Généralement si $n = 2m$ avec $m \geq 2$.

Exercice 38 [id=150]

On considère deux nombres réel a et b tel que $a^2 \neq b^2$ et la matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
n est un entier naturel tel que $n \geq 2$, on considère la matrice $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dont les blocs $A_{i,j}$ pour $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ sont tous égaux à B, c'est-à-dire que

$$A = \begin{pmatrix} B & \dots & B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B & \dots & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & \dots & a & b \\ b & a & \dots & b & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & b & \dots & a & b \\ b & a & \dots & b & a \end{pmatrix}.$$

1 Calculer le rang de A.

2 Démontrer que $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ et préciser la dimension du sous-espace propre $E_0(A)$.

3 Démontrer que A est diagonalisable.

Exercice 39 [id=151]

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel non nul.

1 Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Démontrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme doiagonalisable alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $\ker(u - \lambda \,\mathrm{Id}_E) = \ker(u - \lambda \,\mathrm{Id}_E)^2$.

2 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que A et B sont diagonalisables et $A^2 = B^2$ et $A^3 = B^3$. Démontrer que $A = B$.

3 Est ce que le résultat demeure vrai si on ne suppose plus que f et g sont diagonalisables ?

Exercice 40 [id=152]

On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} y & x-y & 0 \\ 0 & x & 0 \\ x-y & -x+y & x \end{pmatrix},$$

et soit

$$\mathscr{A} = \{M(x, y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On note a et b les endomorphismes canoniquement associés à A et B respectivement.

1 Démontrer que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par la multiplication des matrices,c'est-à-dire : $\forall M_1, M_2 \in \mathscr{A}, M_1M_2 \in \mathscr{A}$.

2 Démontrer que a est diagonalisable et préciser ses sous-espaces propres.

3 Démontrer que tout sous-espace vectoriel propre de a est stable par b.

4 En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dont les vecteurs sont des vecteurs propres à la fois pour a et b.

5 Démontrer que toute M appartenant à $\mathscr{A}$ est diagonalisable.

Exercice 41 [id=153]

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie non nulle. $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme de E.

1 Soit F un sous-espace stable par u et v l'endomorphisme induit par u. Démontrer que $\pi_v | \pi_u$.

2 Soit P un polynôme irréductible tel que $P | \chi_u$. Démontrer que $P | \pi_u$

Exercice 42 [id=154]

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que P est scindé et $P(u) = 0$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on a $P(\lambda) = 0$ et $P'(\lambda) \neq 0$. Démontrer que u est diagonalisable.

Exercice 43 [id=155]

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n avec $n \geq 1$. et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1 Montrer que si λ est valeur propre de $g \circ f$ alors λ est valeur propre de $f \circ g$ (on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$).

2 On suppose dans cette question de $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que si $f \circ g = g \circ f$ alors f et g ont au moins un vecteurs propre commun.

Exercice 44 [id=156]

Dans tout l'exercice $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Soient f et g deux endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$, ayant chacun n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$. Montrer que $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si f et g ont les mêmes vecteurs propres.

2 Supposons maintenant que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que tout sous-espace propre de f est $g-$stable et qu'il existe un vecteur propre commun à $f$et g.

Exercice 45 [id=157]

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie ou non, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = QR$ est un polynôme annulateur de u et $Q \wedge R = 1$. Démontrer que $\mathrm{Im}(Q(u)) = \ker(R(u))$

Exercice 46 [id=158]

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1 Calculer le polynôme caractéristique de A.

2 Pourquoi A est elle trigonalisable ? Est elle diagonalisable ?

3 Trigonaliser la matrice A.

4 En déduire le polynôme minimal de A.

5 Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n sous forme de combinaison linéaire de A et I_n.

Exercice 47 [id=159]

On considére les matrices A et B de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 Démontrer que $\chi_A = \chi_B$ (A et B on même polynôme cractéristique). En déduire que $\det(A) = \det(B)$ et $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$

2 Démontrer que $\pi_A = \pi_B$ (A et B ont même polynôme minimal).

3 Montrer que $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(B)$ et le calculer.

4 Démontrer que A et B ne sont pas semblables.

Exercice 48 [id=471]

Soit $n \geq 2$ un entier et soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit la matrice par blocs :

$$N = \varphi(M) = \begin{pmatrix} M & M^2 \\ 0_n & M \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

1 Si $m \in \mathbb{C}$ et $\varphi(m) = \begin{pmatrix} m & m^2 \\ 0 & m \end{pmatrix}$, la matrice $\varphi(m)$ est-elle diagonalisable ?

2 Dans cette question, on suppose $n = 2$. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et soit $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale si M est diagonalisable ou triangulaire sinon. En utilisant la matrice P, montrer que $N = \varphi(M)$ est diagonalisable si et seulement si $M = 0$.

3 (a) Pour $Q \in \mathbb{C}[X]$, determiner $Q(N)$.

(b) Montrer que si N est diagonalisable , alors M est diagonalisable.

(c) Montrer que si N est diagonalisable , alors $M^2 = 0$, et conclure

4 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Exprimer le polynôme minimal de $N = \varphi(M)$ en fonction de celui de M.

Exercice 49 [id=473]

Considérons la matrice A suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

1 On suppose k réel, la matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$? (sans calculs).

2 (a) Déterminer le rang de A.

(b) Donner la raison pour laquelle le polynôme caractéristique de A est de la forme $\chi_A = X^2(X - u_1)(X - u_2)$ avec u_1 et u_2 des nombres complexes non nuls vérifiant : $u_1 + u_2 = k$ et $u_1^2 + u_2^2 = k^2 + 6$.

(c) Etudier les éléments propres dans le cas où $u_1 = u_2$.

(d) En déduire les valeurs de k pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

Exercice 50 [id=474]

Montrer que l'application

$$f : P(X) \mapsto (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X)$$

est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}_n[X]$. Former la matrice de f relative à la base canonique de E. En déduire la diagonalisabilité de f ainsi que ses valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

Exercice 51 [id=475]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.
(a) Donner un exemple d'endomorphisme f de E dont l'image et le noyau ne sont pas supplémentaires.
(b) On suppose, dans cette question seulement, que f est une endomorphisme de E diagonalisable. Justifier que l'image et le noyau de f sont supplémentaires.
(c) Soit f un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe un entier nature non nul k tel que

$$\operatorname{Im}\left(f^k\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(f^k\right) = E$$

L'endomorphisme f^k est-il nécessairement diagonalisable ?
(d) Le résultat démontré en c) reste-t-il valable si l'espace est de dimension infinie ?

Exercice 52 [id=513]

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$ et E un espace vectoriel de dimension finie de dimension n. On considère un endomorphisme nilpotent u de E d'indice de nilpotence p. On note

$$\mathscr{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) / u \circ v = v \circ v\},$$

appelé la commutant de u. Donner la dimension $\dim(\mathscr{C}(u))$, dans chacun des cas particuliers suivants :

1 Le cas $p = n$.

2 Le cas $p = n - 1$

Exercice 53 [id=514]

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et soit $u : P \mapsto P(2X)$ défini de E dans E.

1 Vérifier que u est un automorphisme de E.

2 Soit $\mathbb{R}[u]$ la $\mathbb{R}$-algèbre engendrée par la famille $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ (autrement dit $\mathbb{R}[u]$ est l'ensemble des polynômes de l'endomorphism u). Montrer que u^{-1} n'appartient pas à $\mathbb{R}[u]$.

3 Conclusion ?

Exercice 54 [id=515]

Théorème de Hadamard - Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver que si

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \sum_{1\leq j\leq n, j\neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$$

alors A est inversible.

Exercice 55 [id=516]

Soit $u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P(X+1)$.

1 Démontrer que u est un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

2 Démontrer que $u \notin \mathbb{R}[u]$.

Exercice 56 [id=517]

1 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On note θ l'endomorphisme nul de E , $\mathfrak{I}_u = \{P \in \mathbb{K}[X]/P(u) = \theta\}$ l'idéal annulateur de u et $\mathbb{K}[u] = \{P(u)/P \in \mathbb{K}[X]\}$ l'algèbre des polynômes en u. Démontrer que si $u \in \mathbf{GL}(E)$ alors

$$u^{-1} \in \mathbb{K}[u] \Leftrightarrow \mathfrak{I}_u \neq \{0\}$$

2 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ défini par :

$$u : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]; P \mapsto u(P) = P(X+1).$$

(a) Prouver que u est un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

(b) Prouver que $u^{-1} \notin \mathbb{K}[X]$.

3 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et soit $u : P \mapsto P(2X)$ défini de E dans E.

(a) Vérifier que u est un automorphisme de E.

(b) Montrer que u^{-1} n'appartient pas à $\mathbb{R}[u]$.

Exercice 57 [id=519]

1 Montrer que :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

est trigonalisable. A est-elle diagonalisable ? Réduire A et déterminer son polynôme minimal.

2 Même question pour :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 58 [id=520]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n}$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ O_n & O_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1 Déterminer le polynôme caractéristique de M.

2 (a) Déterminer le noyau de f.

(b) Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 59 [id=521]

Soit $n \in \mathbb{N}^*, u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^{2n+1}\right)$. On suppose $u^3 = u, \operatorname{tr}(u) = 0$ et $\operatorname{tr}\left(u^2\right) = 2n$. On note

$$C(u) = \left\{v \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^{2n+1}\right) \mid uv = vu\right\}$$

1 Calculer la dimension $C(u)$.

2 Quels sont les n tels que $C(u) = \mathbb{R}[u]$?

Exercice 60 [id=523]

1 Montrer que si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ diagonalisable, alors l'endomorphisme $f^2 = f \circ f$ est aussi diagonalisable.

2 Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$. On note I_3 ma matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Déterminer la matrice A^2, puis établir que $A^4 = I_3$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.

(b) Montrer que $\dim(\ker(g - \mathrm{Id})) = 1$ et donner une base (V_1) de $\ker(g - \mathrm{Id})$.

(c) Determiner $\ker(g + \mathrm{Id})$.

(d) En déduire que g n'est pas diagonalisable.

3 Résoudre l'équation $A^2X = -X$, d'inconnue X élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et en déduire une base (V_2, V_3) de $\ker(g^2 + \mathrm{Id})$.

4 Montrer que la famille (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

5 Ecrrire la matrice de g^2 dans la base (V_1, V_2, V_3).

6 Est ce que la réciproque du résultat prouvé en 1) est vraie ?

Exercice 61 [id=524]

On considère un entier naturel n tel qu $n \geq 2$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de la base canonique dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i et la colonne j, lequel vaut 1. et soit $U = E_{1,n} + E_{n,1}$.

1 Calculer le polynôme caractéristique χ_U de U.

2 Démontrer que U est diagonalisable.

3 Calculer le polynôme minimal π_U de U.

4 Soit $x \in \mathbb{K}$ et $M_x = xU + I_n$. Démontrer que M_x est diagonalisable et préciser son spectre, son polynôme caractéristique et son polynôme minimal.

Exercice 62 [id=525]

Soient $n \geq 2, A$ et B des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ de déterminants non nuls et premiers entre eux. Montrer qu'il existe U et V dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que

$$UA + VB = \mathrm{I}_n$$

On pourra écrire $\chi_A(X) = XQ_A(X) \pm \det(A)$.

Exercice 63 [id=526]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ la matrice par blocs : $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$. Donner le polynôme caractéristique χ_B de B en foncion du polynôme caractéristique χ_A de A.

Exercice 64 [id=527]

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice telle que $\mathrm{rg}\,(A) = 1$. On note $\tau = \mathrm{tr}(A)$.

(a) Démontrer que A est semblable à une matrice de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \tau \end{pmatrix}$$

(b) En déduire que $A^2 = \tau A$ et determiner le polynôme minimal de A.

(c) Démontrer alors que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

(d) Determiner le polynôme caractéristique de A.

(e) Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2 Soit $a \in \mathbb{K}^*$ et on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ (On pourra utiliser judicieusement la question 1)b)).

Exercice 65 [id=530]

On note $E_n = \mathbb{K}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n. On définit l'endormorphisme de E suivant :

$$\phi : \begin{cases} E_n & \longrightarrow & E_n \\ P & \mapsto & P' + P \end{cases}$$

Écrire la matrice de ϕ dans la base canonique de E. En déduire que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

Exercice 66 [id=532]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier naturel premier. Démontrer que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \quad \operatorname{tr}((A+B)^p) \equiv \operatorname{tr}(A^p) + \operatorname{tr}(B^p)\,[p]$$

Exercice 67 [id=534]

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Si M désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par $\operatorname{Tr}(M)$ la trace de la matrice M, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.
On admet que l'application trace est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit A une matrice non nulle donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application f qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = \operatorname{Tr}(A)M - \operatorname{Tr}(M)A$$

1 Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2 Montrer que f n'est pas l'endomorphisme nul (on pourra distinguer les cas $\operatorname{Tr}(A) = 0$ et $\operatorname{Tr}(A) \neq 0$).

3 (a) Établir que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $(f \circ f)(M) = \operatorname{Tr}(A)f(M)$.

(b) Donner les valeurs propres possibles de f.

4 Montrer que 0 est valeur propre de f.

5 Montrer que, si $\operatorname{Tr}(A) = 0$, alors f n'est pas diagonalisable.

6 On suppose dans cette question que la trace de A est non nulle.

(a) Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker}(\operatorname{Tr})$?

(b) Conclure que f est diagonalisable.

Exercice 68 [id=537]

On cherche a déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ vérifiant :

$$\begin{array}{rl} (i) & (M^2+M+I_4)(M-2I_4)^2 = 0 \\ (ii) & (M^2+M+I_4)(M-2I_4) \neq 0 \\ (iii) & (M-2I_4)^2 \neq 0 \end{array}$$

où I_4 est la matrice unité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

1 Chercher les valeurs propres possibles d'une telle matrice.

2 Y a-i-il des solutions diagonalisables ?

3 Déterminer une solution qui soit triangulaire supérieure.

Exercice 69 [id=541]

Soit $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{K}); M \mapsto f(M)$, défini comme suit : si $M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ alors $f(M) = \begin{pmatrix} t & z \\ x & y \end{pmatrix}$.

1 Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

2 f est il diagonalisable ?

3 Si f est diagonalisable, diagonaliser f.

Exercice 70 [id=542]

Soit $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{K}); M \mapsto f(M)$, défini comme suit : si $M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ alors $f(M) = \begin{pmatrix} y & t \\ x & z \end{pmatrix}$.

1 Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

2 f est il diagonalisable ?

3 Si f est diagonalisable, diagonaliser f.

Exercice 71 [id=543]

Identifier les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que A est non inversible et :

$$\operatorname{rg}(A - I_n) + \operatorname{rg}(A + I_n) = n + 1.$$

Exercice 72 [id=555]

On définit les polynômes de Bernestein par

$$B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$. On se propose de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(B_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

1 On rappelle que si $P = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j X^j$, est un polynôme non nul la valuation de P est $\mathrm{val}(P) = \min\{k \in \mathbb{N} / a_k \neq 0\}$.

- **a** Quelle est la valuation de $B_{n,k}$?
- **b** Démontrer que si $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille de polynômes tel que $\mathrm{val}(A_k) = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ alors la famille $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre.
- **c** Démontrer que $(B_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ est libre.

2 On considère l'application :

$$f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], P \mapsto f(P) = nXP(X) + X(1-X)P'(X)$$

- **a** Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ et que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par f.
- **b** Démontrer que pour tout $(n, k) \in \mathbb{N} \times [\![0, n]\!]$, on a $f(B_{n,k}) = \lambda_{n,k} B_{n,k}$ où $\lambda_{n,k}$ est un scalaire à préciser.
- **c** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(B_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 73 [id=660]

On considère $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tel que $\det(A) = 1$. Démontrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on a la relation :

$$A^2 M - MA^2 = MA^{-2} - M^{-2} A.$$

Exercice 74 [id=679]

Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{R}$. Quelles sont les valeurs possibles de $\det(A)$ et $\mathrm{tr}(A)$?

Exercice 75 [id=680]

Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{R}$ et $A^2 + A + I_4 = 0$. Quelles sont les valeurs possibles de $\det(A)$ et $\mathrm{tr}(A)$?