

Chapitre 2 : Algèbre linéaire : Rappels

Exercice 1

[id=1]

Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $J = (a_{i,j})$ avec $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,j} = 1$. On note que si u l'endomorphisme canoniquement associé à J . On note $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de E .

- 1 Calculer $\dim(\ker(u))$
- 2 Prouver que $\ker(u) \cap \ker(u - n \operatorname{Id}_E) = \{0\}$.
- 3 Calculer $u(e)$ où $e = \sum_{k=1}^n e_k$.
- 4 Dédurre de ce qui précède que l'on a : $\ker(u) \oplus \ker(u - n \operatorname{Id}_E) = E$.

Exercice 2

[id=5]

Soient $E_0, E_1, \dots, E_n, n+1$ espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$, de dimensions respectives $d_0, d_1, \dots, d_n$. On suppose qu'il existe n applications linéaires $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ telles que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, f_k \in \mathcal{L}(E_k, E_{k+1}).$$

et de plus :

- f_0 est injective ;
- $\forall j \in \{1, \dots, n-1\}, \operatorname{Im} f_{j-1} = \ker(f_j)$;
- f_{n-1} est surjective.

Montrer que

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j d_j = 0$$

Exercice 3

[id=9]

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- 1 Justifier que A est inversible
- 2 Calculer A^{-1} par au moins deux méthodes.

Exercice 4

[id=10]

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n avec $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que pour tous sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E , on a $\dim(F_1) = \dim(F_2)$ si et seulement si il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que $F_1 \oplus F = F_2 \oplus F = E$. (on exprime ça en disant F_1 et F_2 possèdent un

supplémentaire commun.)

Exercice 5

[id=14]

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ est $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ avec $e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$, $e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

- 1 Démontrer que $\mathcal{E}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- 2 Déterminer la matrice A' de f relativement à $\mathcal{E}'$.

Exercice 6

[id=15]

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E tel que $F_1 + \dots + F_n = E$. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels $G_1, \dots, G_n$ de E tel que $G_1 \subset F_1, \dots, G_n \subset F_n$ et $\bigoplus_{k=1}^n G_k = E$

Exercice 7

[id=22]

Soient $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On considère $(A, B) \in \mathbf{GL}_p(\mathbb{K}) \times \mathbf{GL}_q(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et la matrice définie par blocs : $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- 1 Démontrer que M est inversible.
- 2 Calculer M^{-1} en fonction de A, B et C

Exercice 8

[id=28]

On considère un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie et quatre endomorphismes u, v, f, g de E qui commutent deux à deux, et vérifient la relation :

$$(\star) \quad u \circ f + v \circ g = \text{Id}_E$$

- 1 Montrer que $\ker(f) \cap \ker(g) = \{0\}$ et $E = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.
- 2 Montrer que $\ker(f \circ g) = \ker(f) \oplus \ker(g)$ et $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)$.
- 3 On suppose dans cette question qu'on a de plus $f \circ g = 0$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \ker(g) = \text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g)$, $\ker(f) = \text{Im}(g)$, $\ker(g) = \text{Im}(f)$.

Exercice 9

[id=29]

On considère un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel E et quatre endomorphismes u, v, f, g de E qui commutent deux à deux, et vérifient la relation :

$$(\star) \quad u \circ f + v \circ g = \text{Id}_E$$

- 1 Montrer que $\ker(f) \cap \ker(g) = \{0\}$ et $E = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.
- 2 Montrer que $\ker(f \circ g) = \ker(f) \oplus \ker(g)$ et $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)$.
- 3 On suppose dans cette question qu'on a de plus $f \circ g = 0$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \ker(g) = \text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g)$, $\ker(f) = \text{Im}(g)$, $\ker(g) = \text{Im}(f)$.

Exercice 10

[id=30]

Soit E un espace vectoriel de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si H et K sont deux hyperplans différents de E alors $\dim(H \cap K) = n - 2$.

Exercice 11

[id=33]

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ –espaces vectoriels de dimensions finies p et n respectivement. On considère deux applications linéaires u et v de E vers F .

- 1 Démontrer que $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.
- 2 En déduire que $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v)$.
- 3 Vérifier dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \mathbb{R}_1[X]$ et $u(P) = P'$ et $v(P) = P(X + 1) - P(X)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 12

[id=78]

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ –espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et A, B deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que :

$$f(A) \subset f(B) \Leftrightarrow A + \ker f \subset B + \ker f$$

Exercice 13

[id=79]

Soit $m \in \mathbb{R}$ et on considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & m \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A .

Exercice 14

[id=80]

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer $\text{rg}(A)$.

Exercice 15

[id=81]

Soient A et B deux parties d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

- 1 Comparer $\text{Vect}(A \cap B)$ et $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$.
- 2 Montrer que : $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

Exercice 16

[id=82]

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E .

Montrer que : $F \cap G = F + G \Leftrightarrow F = G$.

Exercice 17

[id=83]

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que les vecteurs x et $f(x)$ sont colinéaires et ce pour tout $x \in E$.

- 1 Justifier que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x \cdot x$.
- 2 Montrer que pour tout couple de vecteurs non nuls x et y , on a $\lambda_x = \lambda_y$.
(indice : on pourra distinguer les cas : (x, y) liée ou (x, y) libre.)
- 3 Conclure que f est une homothétie vectorielle.

Exercice 18

[id=84]

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $f \circ g = \text{Id}$.

- 1 Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker f$ et $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im} g$.
- 2 Montrer
$$E = \ker f \oplus \text{Im} g$$
- 3 Dans quel cas peut-on conclure $g = f^{-1}$?
- 4 Calculer $(g \circ f) \circ (g \circ f)$ et caractériser $g \circ f$.

Exercice 19

[id=85]

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\text{Id} = 0$.

- 1 Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f .
- 2 Établir que $\ker(f - \text{Id})$ et $\ker(f - 2\text{Id})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Exercice 20

[id=86]

n désigne un entier naturel non nul et $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un entier naturel non nul k tel que $A^k = 0$. Le plus petit entier naturel non nul p réalisant $A^p = 0$ s'appelle l'indice de nilpotence de A . On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- 1 Démontrer que si A est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $A^n = 0$.
- 2 La somme de deux matrices nilpotentes est elle toujours nilpotente ?
- 3 Montrer que si A et B sont deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $AB = BA$ alors $A + B$ et AB sont nilpotentes.
- 4 $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ est il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
- 5 Démontrer que si $\mathcal{H}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \text{tr}(M) = 0\} = \ker(\text{tr})$ alors $\text{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{K})) = \mathcal{H}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 21

[id=87]

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que A n'est ni nulle ni inversible et soit $r = \text{rg}(A)$. On pose :

$$\mathcal{E}_1 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / AM = 0\};$$

$$\mathcal{E}_2 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / MA = 0\}$$

et

$$\mathcal{E}_3 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / AM = MA = 0\} = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2.$$

- 1 Démontrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $B \neq 0$ et $AB = BA = 0$.
- 2 Démontrer que $\mathcal{E}_k, k \in \{1, 2, 3\}$ sont des sous-espace vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- 3 Déterminer les dimensions de $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$

Exercice 22

[id=88]

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$g \circ f \circ g = g \text{ et } f \circ g \circ f = f.$$

- 1 Montrer que $\text{Im } f$ et $\ker g$ sont supplémentaires dans E .
- 2 Justifier que $f(\text{Im } g) = \text{Im } f$.

Exercice 23

[id=89]

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E tel qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ pour lequel la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E . On note

$$\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{L}(E) / g \circ f = f \circ g\}.$$

- 1 Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
- 2 On note $\mathbb{K}[f] = \{P(f) / P \in \mathbb{K}[X]\}$. Démontrer que $\mathbb{K}[f] \subset \mathcal{C}(f)$.
- 3 Soit $g \in \mathcal{C}(f)$. Justifier l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g(x_0) = P(f)(x_0)$. Prouver ensuite que $P(f) = g$. En déduire que

$$\mathcal{C}(f) = \{a_0 \text{Id} + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1} \mid a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\}$$

- 4 Déterminer la dimension de $\mathcal{C}(f)$.

Exercice 24

[id=90]

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$ stable par la multiplication matricielle, c'est-à-dire :

$$\forall (M, M') \in F^2, MM' \in F.$$

On suppose que $I_n \notin F$.

- 1 Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \text{Vect}(I_n)$.
- 2 a Soit p le projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\text{Vect}(I_n)$ parallèlement à F . Montrer que :

$$\forall (M, M') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, p(MM') = p(M)p(M').$$

- b Montrer que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que M^2 appartienne à F , on a $M \in F$.
- c Soit $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$ pour tout $i, j, k, l \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- d Montrer que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, E_{i,j} \in F$.
- e Conclure.

Exercice 25

[id=91]

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- 1 Démontrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que A non nulle et non inversible, il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $B \neq 0$ et $AB = BA = 0$.
- 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $\text{rg}(A) = 1$ si et seulement si :

$$\exists (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \begin{cases} X \neq 0 \\ Y \neq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad A = X^t Y$$

- 3** Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ tel que $A \neq 0$ et $A^2 = 0$. Démontrer que A est semblable à la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 26

[id=92]

- 1** On considère $n+1$ nombres réels deux à deux distincts $a_0, \dots, a_n$. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe un unique polynôme L_k de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_k(a_j) = \delta_{k,j}$. Expliciter le polynôme L_k sous forme factorisée.
- 2** **a** Montrer que $\mathcal{L} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- b** Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Donner les coordonnées de P dans la base $\mathcal{L}$
- c** Montrer que $\sum_{k=0}^n L_k = 1$.
- 3** On suppose dans cette question que $a_j = j$ pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
- a** Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$L_k(X) = \frac{(-1)^{n-k}}{n!} \binom{n}{k} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (X - j).$$

- b** Déterminer le polynôme $Q = \sum_{k=1}^n k L_k$.
- c** Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ à la base $\mathcal{L}$ trouvée ci-dessus. Préciser la première ligne de A , la somme des éléments des autres lignes de A et la somme des éléments des colonnes de A .
- d** Donner A^{-1}

Exercice 27

[id=93]

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

- 1** Calculer A^2 et A^3 .
- 2** Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 28

[id=94]

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Si f et g sont deux endomorphismes de E on note fg le composé $f \circ g$ et f^2 l'endomorphisme $f \circ f$.

- 1** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E . On suppose qu'il existe un projecteur p de E

tel que $u = pu - up$. Démontrer que $u^2 = 0$.

- 2 On suppose que $u^2 = 0$.
 - a Justifier que $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$.
 - b Prouver que si F est un sous-espace vectoriel de E tel que $\text{Im}(u) \subset F \subset \ker(u)$, G un supplémentaire de F dans E et p la projection de E sur F parallèlement à G , alors $pu = u$ et $up = 0$.
- 3 Dédurre de ce qui précède que pour tout endomorphisme u de E , il existe un projecteur p de E tel que $pu - up = u$ si et seulement si $u^2 = 0$.
- 4 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$. Caractériser par leur images, les projecteurs p vérifiant $u = pu - up$.

Exercice 29

[id=95]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$AB = A + B$$

Montrer que A et B commutent

Exercice 30

[id=96]

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On se propose de calculer A^{-1} par trois méthodes.

Première méthode :

- 1 Calculer N^n et N^{n-1} .
- 2 Exprimer A en fonction de N .
- 3 Montrer que $I_n - N$ est inversible et déterminer son inverse. Conclure.

Deuxième méthode : Soit $f : \mathbb{K}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{K}_{n-1}[X]; P \mapsto f(P) = \frac{P(0) + (X-1)P}{X}$

- 1 Montrer que f est bien une application.
- 2 Montrer que f est un isomorphisme du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
- 3 Déterminer $g = f^{-1}$.
- 4 Calculer les matrices de f et g relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{n-1})$ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et conclure.

Troisième méthode : Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et soit $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ avec pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on pose $\omega_k = \sum_{j=1}^k e_j$.

- 1 Déterminer les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à Ω et celle de Ω à $\mathcal{B}$.
- 2 Conclure.

Exercice 31

[id=97]

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ et $p_1, \dots, p_k$ des projecteurs de E . On note $p = \sum_{i=1}^k p_i$.

- 1** Démontrer que pour tout projecteur π de E on a $\text{rg}(\pi) = \text{tr}(\pi)$.
- 2** On suppose que p est un projecteur. Montrer que $\text{Im}(p) = \bigoplus_{i=1}^k \text{Im}(p_i)$.
- 3** Montrer que p est un projecteur si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2, p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i.$$

avec pour tout $i, j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ (le symbole de Kronecker).

Exercice 32

[id=98]

Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les assertions :

- (i) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$. (ii) p et q sont des projecteurs de même noyau.

Exercice 33

[id=99]

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E nilpotent i.e. tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $f^n = 0$. Montrer que $\text{Id} - f$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de f .

Exercice 34

[id=100]

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de dimension finie ou infinie et u un endomorphisme de E tel que :

$$\forall v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u$$

- 1** Démontrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$ alors f est une homothétie de E si et seulement si pour tout $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ est liée.
- 2** Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$. On note $F = \mathbb{K}x$ la droite vectorielle engendrée par x , G un supplémentaire de F (donc G est un hyperplan de E), et soit p la projection de E sur F parallèlement à G .
 - a** Prouver que $u(x) = p(u(x))$.
 - b** En déduire que $(x, u(x))$ est liée.
 - c** Énoncer le théorème démontré.

Exercice 35

[id=101]

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

- 1 Démontrer que pour tout $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, il existe une matrice carrée $N_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente de rang r .
- 2 En déduire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a A est non inversible si et seulement si il existe une matrice nilpotente N et une matrice inversible P tel que $A = PN$ si et seulement si il existe une matrice nilpotente M et une matrice inversible Q tel que $A = MQ$

Exercice 36

[id=102]

Rang de f^2 :

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

- 1 Montrer que $\text{rg}(f^2) = \text{rg } f - \dim(\ker f \cap \text{Im}(f))$
- 2 En déduire que $\dim(\ker(f^2)) \leq 2 \dim(\ker(f))$.

Exercice 37

[id=103]

E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et G un sous espace de E Montrer que $\dim(f(G)) = \dim(G) - \dim(\ker f \cap G)$.

Exercice 38

[id=104]

Dans l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sin(x).$$

Démontrer que la famille

$$\mathcal{F} = (f, f \circ f, f \circ f \circ f)$$

est une famille libre de vecteurs de E .

Exercice 39

[id=105]

On considère trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ des application linéaires. Démontrer que :

- 1 $f(\ker(g \circ f)) = \ker(g) \cap \text{Im}(f)$.
- 2 $g^{-1}(\text{Im}(g \circ f)) = \ker(g) + \text{Im}(f)$.
- 3 $\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker(g))$.
- 4 $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$.
- 5 $\text{Im}(g \circ f) = g(\text{Im}(f))$.
- 6 $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.

Exercice 40

[id=106]

E, F et G sont trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que :

- 1 $\ker(g \circ f) = \ker(f) \Leftrightarrow \ker(g) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$
- 2 $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g) \Leftrightarrow \ker(g) + \operatorname{Im}(f) = F$.

Exercice 41

[id=107]

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et on note θ l'endomorphisme nul de E et Id l'application identique de E , ce qui veut dire $\forall x \in E, \theta(x) = 0$ et $\operatorname{Id}(x) = x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $u^n = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E tel que $u \neq \theta$ et $u^3 + u = \theta$. On se propose de démontrer qu'il existe une base $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ de E tel que la matrice de u relativement à $\mathcal{V}$

$$\text{est } A = \operatorname{mat}_{\mathcal{V}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1 Montrer que $\ker(u) \oplus \ker(u^2 + 1) = E$
- 2 Prouver que u et $u^2 + \operatorname{Id}$ ne sont pas inversibles.
- 3 En déduire l'existence de $v_1, v_2 \in E$ tel que $v_1 \neq 0$ et $v_2 \neq 0$ et $u(v_1) = 0$ et $u^2(v_2) = -v_2$.
- 4 Démontrer que $\operatorname{Im}(u) \subset \ker(u^2 + \operatorname{Id})$ et en déduire que si on pose $v_3 = u(v_2)$ alors $u(v_3) = -v_3$.
- 5 Démontrer que (v_2, v_3) est une famille libre.
- 6 En déduire que $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E et que $\operatorname{mat}_{\mathcal{V}}(u) = A$ où A est la matrice indiquée ci-dessus.

Exercice 42

[id=108]

Soit $\mathbb{K}$ un corps infini et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Démontrer que pour toute entier naturel m tel que $m \geq 2$, si $F_1, \dots, F_m$ sont des sous-espaces vectoriels de E tel que $\bigcup_{k=1}^m F_k = E$ alors il existe $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tel que $F_i = E$.

Exercice 43

[id=109]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\dim(E) = n$. Démontrer qu'il existe deux bases $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_n)$ et $\mathcal{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$ de E tel que :

- 1 Les polynômes $Q_1, \dots, Q_n$ ont des degrés deux à deux distincts.
- 2 Les polynômes $P_1, \dots, P_n$ ont le même degré.

Exercice 44

[id=110]

Soit $D : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X], P \mapsto P'$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}[X]$ est stable par D si et seulement si $D(F) \subset F$. Démontrer que les seuls sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$ stables par D sont $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 45

[id=111]

- 1 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \text{Id}_E$ (Cela veut dire que u est une homothétie vectorielle.)
- 2
 - a Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ une matrice non scalaire (c'est-à-dire $\forall \lambda \in \mathbb{K}, A \neq \lambda I_2$). Démontrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ 1 & \tau \end{pmatrix}$, où $\tau = \text{tr}(A)$ et $\delta = \det(A)$.
 - b Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier rapidement que A_1 et A_2 sont semblables puis donner une matrice $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $A_2 = P^{-1}A_1P$.
- 3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 2$) tel que $\text{tr}(A) = 0$. Démontrer que A est semblable à une matrice A' dont tous les termes diagonaux sont nuls.
- 4 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

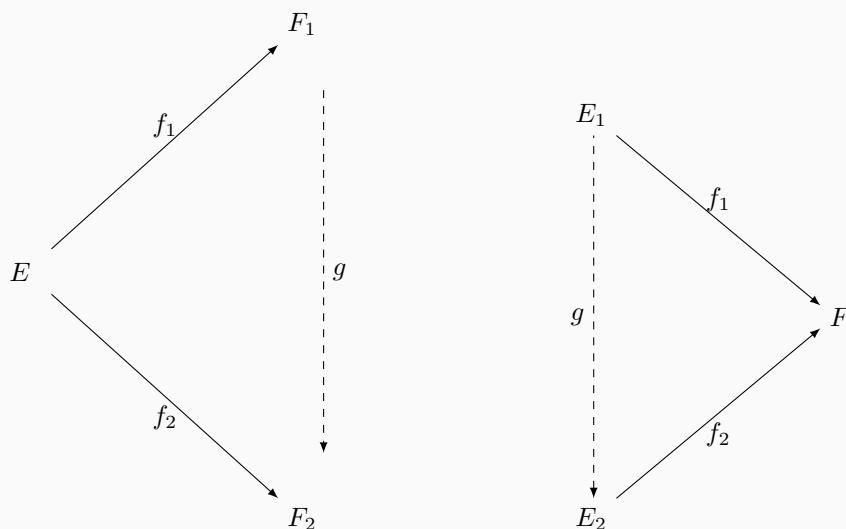
$$\forall v \in \mathcal{L}(E), \quad u \circ v = v \circ u$$

Démontrer que u est une homothétie vectorielle.

Exercice 46

[id=112]

- 1 Soient E, F_1, F_2 des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et on considère $f_1 \in \mathcal{L}(E, F_1)$, $f_2 \in \mathcal{L}(E, F_2)$ des applications linéaires. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (1) $\ker f_1 \subset \ker f_2$
 - (2) $\exists g \in \mathcal{L}(F_1, F_2), \quad f_2 = g \circ f_1$
- 2 On considère des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels E_1, E_2, F et des applications linéaires $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (1) $\text{Im}(f_1) \subset \text{Im}(f_2)$.
 - (2) $\exists g \in \mathcal{L}(E_1, E_2) \quad f_1 = f_2 \circ g$.



- 3** Soient E, F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.
- a** On considère des applications linéaires $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer que pour toute application linéaire $g \in \mathcal{L}(E, F)$, les assertions suivantes sont équivalentes :
- (1) $\ker(f_1) \cap \ker(f_2) \subset \ker(g)$.
 - (2) $\exists a, b \in \mathcal{L}(F), g = a \circ f_1 + b \circ f_2$.
- b** On considère des applications linéaires $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer que pour toute application linéaire $g \in \mathcal{L}(E, F)$, les assertions suivantes sont équivalentes :
- (1) $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(f_1) + \text{Im}(f_2)$.
 - (2) $\exists a, b \in \mathcal{L}(E), g = f_1 \circ a + f_2 \circ b$.

Exercice 47

[id=113]

- 1** Pour tout $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$, on note :

$$V(a) = V(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^{n-1} \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Démontrer que $V(a_0, \dots, a_{n-1}) = \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i)$.

- 2** APPLICATION : Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$ et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E tel que $m \geq 2$ et $\bigcup_{k=1}^m F_k = E$. Démontrer qu'il existe $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tel que $F_j = E$.

Indication : On pourra considérer une base $\mathcal{E} = (e_0, \dots, e_{n-1})$ de E et l'application

$$f : \mathbb{K} \rightarrow E; t \mapsto f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k e_k.$$

- 3** Prouver que le résultat du 2) reste vrai si on ne suppose plus E de dimension finie.

Exercice 48

[id=114]

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle hyperplan de E , un sous-espace vectoriel H de E de codimension 1, c'est-à-dire tel qu'il existe $a \in E$ tel que $a \neq 0$ et $H \oplus \mathbb{K}a = E$. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E vers $\mathbb{K}$. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, appelé le dual algébrique de E .

- 1 Soit H un hyperplan de E . Démontrer que :

$$\forall b \in E, \quad H \oplus \mathbb{K}b = E \Leftrightarrow b \notin H.$$

- 2 Soit H un hyperplan de E . Démontrer que pour tout sous-espace vectoriel H' de E on a :

$$H \subset H' \Rightarrow H' = H \quad \text{ou} \quad H' = E.$$

- 3 Soit H un sous-espace vectoriel de E . Démontrer que H est un hyperplan de E si et seulement si il existe une forme linéaire non nulle φ sur E tel que $H = \ker \varphi$.

- 4 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Démontrer que si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles de E alors :

$$\ker \varphi = \ker \psi \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K}^*, \quad \psi = \alpha \varphi$$

Exercice 49

[id=115]

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on rappelle que la comatrice de A est $A' = (a'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ tel que pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a'_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$ et $\Delta_{i,j} = \det(A_{i,j})$, avec $A_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue après suppression de la ligne i et la colonne j de A . On note $A' = \text{Com}(A)$, la comatrice de A et $\tilde{A} = {}^t(\text{Com}(A))$, appelée matrice complémentaire de A .

- 1 Prouver que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \tilde{A}A = A\tilde{A} = \det(A)I_n.$$

- 2 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on note $r = \text{rg}(A)$. Démontrer que :

$$\text{rg}(\tilde{A}) = \text{rg}(\text{Com}(A)) = \begin{cases} n & \text{si } r = n \\ 1 & \text{si } r = n - 1 \\ 0 & \text{si } r < n - 1 \end{cases}$$

Exercice 50

[id=116]

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les termes diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts. On considère l'application :

$$\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); X \mapsto \phi(X) = \Delta X - X \Delta$$

Pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $[X, Y] = XY - YX$, appelé crochet de Lie. Ainsi $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \Phi(X) = [\Delta, X]$.

- 1 Vérifier que Φ est linéaire et déterminer $\ker \Phi$ et $\text{Im } \Phi$.

- 2 Démontrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \text{tr}([A, B]) = 0$.

- 3 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\text{tr}(M) = 0$.

- a) Démontrer que M est semblable à une matrice M' dont les termes diagonaux sont nuls.
- b) En déduire qu'il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = [A, B]$.

Exercice 51

[id=117]

- 1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\psi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, X \mapsto \Psi_A(X) = \text{tr}(AX)$. Démontrer que l'application :

$$\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*; A \mapsto \Phi(A) = \Psi_A$$

est un isomorphisme.

- 2 Soit $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $r \neq 0$, et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$. Démontrer que $\text{tr}(J_r M) = \text{tr}(A)$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 3 Vérifier que la matrice

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

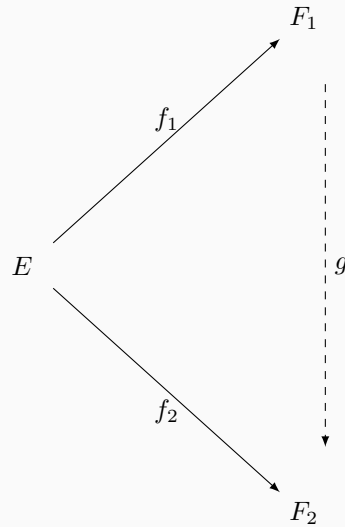
est inversible et que $\text{tr}(K) = 0$.

- 4 Démontrer que tout hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice A tel que $A \in \mathcal{H} \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 52

[id=118]

- 1 Soient E, F_1, F_2 des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et on considère $f_1 \in \mathcal{L}(E, F_1)$, $f_2 \in \mathcal{L}(E, F_2)$ des applications linéaires.



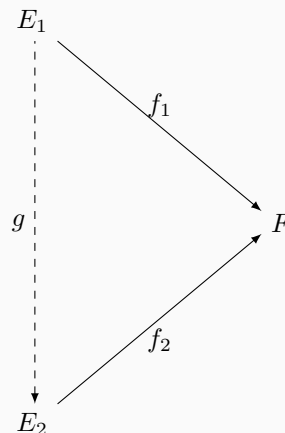
Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\ker f_1 \subset \ker f_2$
 - (2) $\exists g \in \mathcal{L}(F_1, F_2), \quad f_2 = g \circ f_1$
- 2** Soient E, F des $\mathbb{K}$ –espaces vectoriels et on considère des applications linéaires $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer que pour toute application linéaire $g \in \mathcal{L}(E, F)$, les assertions suivantes sont équivalentes :
- (1) $\ker(f_1) \cap \ker(f_2) \subset \ker(g)$.
 - (2) $\exists a, b \in \mathcal{L}(F), g = a \circ f_1 + b \circ f_2$.

Exercice 53

[id=119]

- 1** On considère des $\mathbb{K}$ –espaces vectoriels E_1, E_2, F et des applications linéaires $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :



- (1) $\text{Im}(f_1) \subset \text{Im}(f_2)$.
 - (2) $\exists g \in \mathcal{L}(E_1, E_2) \quad f_1 = f_2 \circ g$.
- 2** E, F sont des espaces vectoriels et on considère des applications linéaires $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer que pour toute application linéaire $g \in \mathcal{L}(E, F)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(f_1) + \text{Im}(f_2)$.
 (2) $\exists a, b \in \mathcal{L}(E), g = f_1 \circ a + f_2 \circ b$.

Exercice 54

[id=461]

Donner un exemple de matrices non semblables non inversible et non nulles dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice 55

[id=464]

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et on considère deux endomorphismes f et g de E . Démontrer que si $f + g$ est inversible et $f \circ g = 0$ alors $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = n$

Exercice 56

[id=465]

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et U un sous-espace vectoriel de E . Soit

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{L}(E) / U \subset \ker(u)\}.$$

- 1 Prouver que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de E .
- 2 Si E est de dimension finie n , calculer la dimension de $\mathcal{A}$ en fonction de n et $p = \dim(U)$.

Exercice 57

[id=468]

Soit A une matrice carrée de taille 2. Démontrer que si A est non scalaire alors $A \simeq \begin{pmatrix} 0 & -d \\ 1 & t \end{pmatrix}$ avec $t = \text{tr}(A)$ et $d = \det(A)$

Exercice 58

[id=469]

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E . On suppose $u^* \circ u = u \circ u^*$.

- 1 Montrer que les endomorphismes u et u^* ont les mêmes sous-espaces propres.
- 2 Montrer que les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

Exercice 59

[id=480]

On considère deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels E et F de dimensions finie et soit W un sous-espace vectoriel de E . On note $\mathcal{L}_W(E, F) = \{f \in \mathcal{L}(E, F) / \forall x \in W, f(x) = 0\}$.

- 1 Démontrer que $\mathcal{L}_W(E, F)$ est un espace vectoriel.
- 2 Trouver la dimension de $\mathcal{L}_W(E, F)$.

Exercice 60

[id=482]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (\text{Min}(i, j))_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 61

[id=484]

Soit E un espace vectoriel quelconque, f un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E .

- 1 Démontrer que si F est de dimension finie et $F \subset f(F)$ alors $f(F) = F$.
- 2 On suppose dans cette question que f est injective et $F \subset f(F)$. A-t-on $f(F) = F$? Justifier votre réponse.

Exercice 62

[id=497]

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$(\star) \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A + M) = \det(A) + \det(M).$$

Démontrer que $A = 0$.

Exercice 63

[id=498]

Soient : $n \in \mathbb{N}^*$, et Δ (dérivée discrète), l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Delta(P) = P(X + 1) - P(X).$$

- a. Montrer que Δ permet de définir un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, que l'on notera Δ_n .
- b. Montrer que : $\Delta^n \neq 0$ et $\Delta_n^{n+1} = 0$ (c'est-à-dire Δ_n est nilpotent d'indice de nilpotence $n + 1$).
- c. En déduire qu'il existe des constantes $a_0, \dots, a_{n+1}$ (que l'on déterminera) telles que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^{n+1} a_k P(X + k) = 0.$$

On pourra faire intervenir l'endomorphisme T de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], T(P) = P(X + 1)$.

Exercice 64

[id=499]

Soient f, g et h trois endomorphismes d'un K -espace vectoriel E , tels que : $f \circ g = h$ et $g \circ h = f$ et $h \circ f = g$.

- 1 Montrer que f, g et h ont même image et même noyau.
- 2 Montrer que : $f^5 = f$.
- 3 En déduire que : $E = \text{Im}(f) \oplus \ker(f)$.

Exercice 65

[id=500]

Dans $\mathcal{CM}_n(\mathbb{R})$ on définit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1 A l'aide de l'endomorphisme canoniquement associé à A , calculer A^k , pour tout entier : $k \in \mathbb{N}$.
- 2 En déduire M^k , pour tout entier : $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 66

[id=508]

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 2z = 0\}$

- 1 Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E , donner une base $\mathcal{B}_F$ de F .
- 2 Soit $G = \text{Vect}\{(0, 1, 1)\}$ le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{(0, 1, 1)\}$ Déterminer $F \cap G$, en déduire que $E = F \oplus G$.

Exercice 67

[id=509]

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . On considère l'endomorphisme f de E tel que :

$$f(e_1) = f(e_3) = e_3, f(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3.$$

- 1 Écrire la matrice A de f relativement à la base $\mathcal{B}$.
- 2 a) Déterminer $\ker(f)$.
b) Déterminer une base $\mathcal{B}_0$ de $\ker(f)$.
c) Compléter $\mathcal{B}_0$ en une base de E .
- 3 Déterminer $\text{Im}(f)$ et en donner une base $\mathcal{B}_1$.

- 4 On considère $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ avec :

$$e'_1 = e_1 - e_3, e'_2 = e_1 - e_2, e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3$$

- a Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E .
- b Écrire la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
- 5 Exprimer e_1, e_2, e_3 en fonction de e'_1, e'_2, e'_3 . En déduire P^{-1} , l'inverse de P .
- 6 Écrire la matrice A' de f dans $\mathcal{B}'$
- 7 Calculer A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 68

[id=510]

- 1 Soit a, b, c, d sont dans $\mathbb{K}$ avec $a \neq 0$. Montrer que :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

- 2 Plus généralement, si A et D sont des matrices carrées sur $\mathbb{K}$ d'ordre p et q telles que A soit inversible, trouver les matrices B_1, C_1, D_1 telles que

$$\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ C_1 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & B_1 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

- 3 On garde les notations de la question précédente.
- a Quel est l'inverse de la matrice $\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ C_1 & I_q \end{bmatrix}$?
- b Si D_1 est inversible, quel est l'inverse de $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$?

Exercice 69

[id=511]

Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E .

- 1 Montrer que $(A \cap C) + (B \cap C) \subset (A + B) \cap C$. Donner un exemple dans $\mathbb{R}^2$ pour lequel l'inclusion est stricte.
- 2 Montrer que, si $A + B = A + C, A \cap B = A \cap C$ et $B \subset C$, alors $B = C$.

Exercice 70

[id=664]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes. Calculer pour $k = 1, \dots, n-1$

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$