

Chapitre 14 : Equations différentielles

Exercice 1

[id=678]

Chercher les fonctions y développables en série entière au voisinage de 0 , solutions de l'équation différentielle

$$(2 + x^2) y'' - xy' + y = 0.$$

Exercice 2

[id=427]

Résoudre le système différentiel :

$$(E) \quad \begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z \end{cases}$$

avec la condition initiale : $x(0) = 3, y(0) = 1, z(0) = 1$.

Dissiner la projection sur la plan xOy de la courbe intégrale associée à la solution trouvée.

Exercice 3

[id=428]

Résoudre le système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} x' = x - y + z + e^t \\ y' = -x + y + z \\ z' = -x - y + 3z + e^{3t} \end{cases}$$

Exercice 4

[id=429]

Soit T un nombre réel strictement positif et $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une application continue T -périodique. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad Y' = A(t)Y.$$

Démontrer que (E) admet une solution non nulle X tel qu'il existe un nombre complexe α tel que : $(\forall t \in \mathbb{R}) \quad X(t+T) = \alpha X(t)$

Exercice 5

[id=430]

a est un nombre réel strictement positif, on pose : $I_a =]-a, a[$.

Soit $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $X : I_a \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable tel que :

$$\begin{cases} (\forall t \in I_a) & X'(t)X(t) = A \\ X(0) = I_n \end{cases}.$$

- 1 Démontrer que : $(\forall t \in I_a) \quad X(t)A = AX(t)$
- 2 Démontrer que si A est symétrique alors $X(t)$ est symétrique pour tout $t \in I_a$.

Exercice 6

[id=431]

On considère le système différentiel :

$$(E) \quad \begin{cases} x' = y + t \\ y' = \frac{1}{t^2}x - \frac{1}{t}y + t^2 \end{cases}$$

et soit (EH) le système homogène associé.

- 1 I désigne l'un des intervalles $] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$. Déterminer les solutions φ sur I de (EH) de la forme : $\begin{pmatrix} \alpha t^a \\ \beta t^b \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$.
- 2 En déduire la solution générale de (EH)
- 3 Résoudre (E)

Exercice 7

[id=432]

On considère le système différentiel

$$(E) : \quad \begin{cases} x' &= -x + 4z + t \\ y' &= -4x + 3y + 4z - t \\ z' &= 3z \end{cases}$$

- 1 Résoudre le système homogène associé :
 - a En résolvant ses équations de proche en proche.
 - b En diagonalisant la matrice associée.
- 2 Résoudre (E) .

Exercice 8

[id=433]

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' &= 5x - 10y + 4z + e^t \\ y' &= 2x - 7y + 4z - 1 \\ z' &= 2x - 10y + 7z \end{cases}$$

Exercice 9

[id=434]

p et q sont deux application de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + py' + qy = 0.$$

- 1 Soit y une solution non identiquement nulle de (E) .
 - a Montrer que les fonctions y et y' ne s'annulent pas simultanément.
 - b Montrer que les zéros de y sont en nombre fini.
- 2 Soient y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de (E) ; on suppose que y_1 admet au moins deux zéros et on note a et b deux zéros consécutifs.
 - a Montrer que y_2 admet au moins un zéro dans l'intervalle ouvert $]a, b[$ (Penser au wronskien).
 - b La fonction y_2 peut elle avoir plusieurs zéros dans $]a, b[$?

Exercice 10

[id=435]

Soit $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $\mathbb{R}$ et paire et on considère l'équation différentielle :

$$(E_\lambda) \quad y'' + (\lambda - q(t))y = 0$$

- 1 Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz adapté à (E_λ) .
- 2 En déduire qu'une solution φ de (E_λ) est impaire si, et seulement si $\varphi(0) = 0$
- 3 Prouver, par exemple, à l'aide du wronskien que (E_λ) ne peut admettre un système fondamental de solutions constitué de fonctions de même parité.

Exercice 11

[id=436]

Soit p une application de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ continue et intégrable et on considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + (p(t) + 1)y = 0$$

- 1 Soit φ une solution de (E) . Prouver que φ est une solution de l'équation différentielle :

$$(F) \quad z'' + z = g(t)$$

où g est à déterminer.

- 2 En déduire que toute solution de (E) est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 12

[id=437]

On considère l'équation différentielle : $(E) \quad (x^2 - 1)y' + xy = x^3 - x$

- 1 Déterminer une fonction polynomiale p solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
- 2 Résoudre (E) sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$, $]1, +\infty[$.

- 3** Expliquer pourquoi la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est p .

Exercice 13

[id=438]

On considère un intervalle I non trivial de $\mathbb{R}$, des applications a, b de I vers $\mathbb{R}$ et l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' = a(t)y' + b(t)y$$

- 1** Démontrer que si (I, ϕ) est une solution maximale de (E) alors les zéros de ϕ sont isolés.
- 2** Montrer que si (I, ϕ) et (J, ψ) sont deux solutions maximales de (E) alors soit elles sont proportionnelles soit pour tous zéros x_1, x_2 de ϕ , il existe un zéro x_0 de ψ tel que $x_1 < x_0 < x_2$

Exercice 14

[id=439]

Soit $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application strictement positive et continue sur $\mathbb{R}$.

- 1** Démontrer que toute solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad y'' + p(t)y = 0$$

admet au moins un zéro sur $\mathbb{R}$

- 2** Démontrer que toute solution non identiquement nulle de l'équation différentielle :

$$(E_2) \quad y'' - p(t)y = 0$$

admet au plus un zéro sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15

[id=440]

Trouver les $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle :

$$\begin{vmatrix} y' & y'' & y \\ y'' & y & y' \\ y & y' & y'' \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 16

[id=441]

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et a et b deux applications de I vers $\mathbb{R}$, continues sur I . On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

et soit φ une solution non identiquement nulle de (E) .

- 1** Montrer que pour tout sous intervalle compact K de I , l'ensemble :

$$Z_{\varphi, K} = \{t \in K / \varphi(t) = 0\}$$

est fini. Que peut-on en déduire pour l'ensemble Z_φ des zéros de φ sur I ?

- 2 On suppose que φ s'annule au moins deux fois sur I et on considère α, β deux zéros consécutifs de φ (on expliquera pourquoi cela a un sens). Montrer que, si ψ est une autre solution sur I de (E) , non proportionnelle à φ , alors $\psi(\alpha)\psi(\beta) \neq 0$ et que ψ s'annule une seule fois sur $]\alpha, \beta[$.
- 3 On considère deux équations différentielles :

$$(E_f) \quad y'' + f(t)y = 0$$

et

$$(E_g) \quad y'' + g(t)y = 0$$

avec $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues tel que $f \geq g$. Montrer que, si v est une solution de (E_g) dont α et β sont deux zéros consécutifs et u une solution de (E_f) tel que $u(\alpha)u(\beta) \neq 0$ alors u admet un zéro dans $]\alpha, \beta[$.

Exercice 17

[id=442]

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(tx) dt, \quad v(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(tx) dt$$

- 1 Montrer que u et v sont solutions de classe C^1 d'un système différentiel de premier ordre.
- 2 En déduire les valeurs de $u(x)$ et $v(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 18

[id=443]

Soit $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une application continue et 2π -périodique. On considère l'équation différentielle linéaire homogène suivante :

$$(E) \quad x' = A(t)x.$$

Soit φ_1 et φ_2 deux solutions linéairement indépendantes de (E) et $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ la matrice dont les colonnes sont celles des coordonnées de φ_1 et φ_2 dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$.

- 1
 - a Vérifier que $t \mapsto \varphi_1(x + 2\pi)$ et $t \mapsto \varphi_2(x + 2\pi)$ sont encore deux solutions de (E) .
 - b En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversible telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t + 2\pi) = M(t)P.$$

- 2 Déduire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $P : t \mapsto P(t) = M(t)e^{tB}$ soit 2π -périodique.

Exercice 19

[id=444]

On considère l'équation différentielle : $(E) \quad y' = y^3 + t^3$. Pour tout $a \in [0, +\infty[$, on note (I_a, φ_a) la solution maximale de (E) tel que $\varphi_a(0) = a$.

- 1 Démontrer que φ_a est strictement croissante sur I_a
- 2 Démontrer que I_a est majoré, soit alors $b = \sup(I_a)$
- 3 Prouver que : $\lim_{t \rightarrow b^-} \varphi_a(t) = +\infty$

Exercice 20

[id=445]

On considère le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{C}) \quad \begin{cases} y' = y^2 + t^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

- 1 Justifier l'existence d'une solution maximale (I, φ) pour $(\mathcal{C})$
- 2 Démontrer que φ est impaire
- 3 Étudier la monotonie et la concavité de φ
- 4 Démontrer que l'intervalle I est borné
- 5 Dresser le tableau de variations de φ et donner une allure de sa courbe représentative
- 6 Généralisation du 4) : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et h une fonction continue positive sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}_+$ de $\mathbb{R}$. Démontrer que si (J, g) est une solution maximale du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = y^n + h(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

alors l'intervalle J est majoré.

Exercice 21

[id=446]

Montrer que si (J, φ) est une solution maximale de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = \sqrt{y^2 + t^2}$$

sur un intervalle J contenu dans $]0, +\infty[$ alors $J =]0, +\infty[$

Exercice 22

[id=447]

On considère l'équation différentielle : $(E) \quad y' = y^3 + t^3$. Pour tout $a \in [0, +\infty[$, on note (I_a, φ_a) la solution maximale de (E) tel que $\varphi_a(0) = a$.

- 1 Démontrer que φ_a est strictement croissante sur I_a
- 2 Démontrer que I_a est majoré, soit alors $b = \sup(I_a)$
- 3 Prouver que : $\lim_{t \rightarrow b^-} \varphi_a(t) = +\infty$

Exercice 23

[id=476]

- 1 Déterminer les séries entières solutions au voisinage de 0 de l'équation différentielle $(E) \quad y'' + 2xy' + 2y = 0$.
- 2 Exprimer parmi celles-ci, celles dont la somme est une fonction paire.

Exercice 24

[id=477]

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'' + \cos^2(t)y = 0$$

- 1 Justifier l'existence d'une solution u de (E) telle que $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.
- 2 Démontrer l'existence de deux réels α, β vérifiant

$$\alpha < 0 < \beta, u'(\alpha) > 0 \text{ et } u'(\beta) < 0$$

En déduire que u possède au moins un zéro dans $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

- 3 Justifier l'existence de réels

$$\gamma = \max\{t < 0 \mid u(t) = 0\} \text{ et } \delta = \min\{t > 0 \mid u(t) = 0\}$$

- 4 Soit v une solution de (E) linéairement indépendante de u . En étudiant les variations de

$$W = uv' - u'v$$

montrer que v possède au moins un zéro dans $] \gamma; \delta[$.

- 5 Soit w une solution non nulle de (E) . Démontrer que w admet une infinité de zéros. On pourra introduire pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$w_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto w(t - n\pi)$$

Exercice 25

[id=556]

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction 2π -périodique. Existe-t-il $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, une fonction 2π -périodique et solution de

$$y'' + y = f?$$