
Chapitre 12 : Probabilités

Exercice 1

[id=344]

Soient $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble Ω et Ω' une partie de Ω .
Vérifier que $\mathcal{T}' = \{A \cap \Omega' / A \in \mathcal{T}\}$ définit une tribu sur Ω' .

Exercice 2

[id=345]

Soit Ω un ensemble. On introduit

$$\mathcal{T} = \{A \subset \Omega / A \text{ ou } A^c \text{ est au plus dénombrable}\}$$

- 1 Vérifier que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω .
- 2 Justifier que $\mathcal{T}$ est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant les singletons $\{\omega\}$ pour ω parcourant Ω .
- 3 Vérifier que si Ω est au plus dénombrable alors $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$

Exercice 3

[id=353]

Soit $(\Omega', \mathcal{T}')$ un espace probabilisable et Ω un ensemble quelconque et soit $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ une application. Démontrer que :

$$\mathcal{T}' = \{f^{-1}(A) / A \in \mathcal{T}'\}$$

est une tribu de Ω .

Exercice 4

[id=354]

Soient Ω et Ω' deux ensembles et $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ une application. Démontrer que :

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) / A = f^{-1}(f(A))\}$$

est une tribu de Ω .

Exercice 5

[id=355]

Soit $\Omega = \mathbb{Z}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $S_k = \{k, k+1, k+2\}$. Soit $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par l'ensemble $\mathcal{A} = \{S_k / k \in \mathbb{Z}\}$. Expliciter $\mathcal{T}$.

Exercice 6

[id=669]

Soit Ω un ensemble non vide. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n = \{A \subset \Omega / \text{card}(A) = n\}$ et on note $\mathcal{M}_n = \mathcal{T}(\mathcal{P}_n)$, la tribu engendré par $\mathcal{P}_n$.

- 1 Montrer que Ω est infini alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{M}_n = \mathcal{M}_1$.
- 2 On suppose que Ω est fini et que $\text{card}(\Omega) = N$ avec $N \in \mathbb{N}$ et $N \geq 2$. Montrer que $\forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \mathcal{M}_n = \mathcal{M}_1$.
- 3 On note $\mathcal{M}_0 = \{A \subset \Omega / A \text{ ou } A^c \text{ est au plus dénombrable}\}$. Montrer que $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_0$.
- 4 Montrer que Ω est au plus dénombrable si et seulement si $\mathcal{M}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$.
- 5 Donner un exemple d'existence d'une tribu $\mathcal{T}$ de Ω tel que $\mathcal{M}_1 \subsetneq \mathcal{T} \subsetneq \mathcal{P}(\Omega)$.
- 6 On suppose que Ω est non dénombrable et on considère $\mathbb{P} : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathbb{R}_+; A \mapsto \mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est au plus dénombrable} \\ 1 & \text{si } A^c \text{ est au plus dénombrable} \end{cases}$. Démontrer que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T}_0)$.

Exercice 7

[id=670]

Soit Ω un ensemble fini et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω . Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$I_\omega = \{X \in \mathcal{T} / \omega \in X\} \quad \text{et} \quad A(\omega) = \bigcap_{X \in I_\omega} X.$$

- 1 Démontrer que $\forall \omega \in \Omega, A(\omega) \neq \emptyset$ et $A(\omega) \in \mathcal{T}$.
- 2 Démontrer que $\forall x, y \in \Omega, A(x) = A(y)$ ou $A(x) \cap A(y) = \emptyset$.
- 3 Prouver qu'il existe $s \in \mathbb{N}^*$ et une famille $(\omega_k)_{1 \leq k \leq s} \in \Omega^s$ tel que l'ensemble

$$\mathfrak{P} = \{A(\omega_k) / k \in \llbracket 1, s \rrbracket\}$$

est une partition de Ω .

- 4 Démontrer que $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathfrak{P})$, c'est-à-dire la tribu engendrée par $\mathfrak{P}$.
- 5 En déduire que $\#\mathcal{T} = 2^s$.
- 6 Soit

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

et

$$\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}.$$

Donner en extension la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.

- 7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$, et

$$\Omega = \llbracket 1, 2n \rrbracket = \{1, 2, \dots, 2n\}.$$

On considère la partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ définie par

$$\mathcal{A} = \{\{1, k\} / k \in \llbracket 2, n \rrbracket\}$$

et soit $\mathfrak{T}$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}$. Déterminer $\text{card}(\mathfrak{T})$.

Exercice 8

[id=346]

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- 1 Démontrer que pour toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux disjoints, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$$

- 2 Démontrer que toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements, si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_n) = 1$$

alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$$

- 3 Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}))$. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 0$$

Exercice 9

[id=347]

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A et B deux événements non négligeables. Démontrer que :

$$\mathbb{P}(A|B) \geq \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(B|A) \geq \mathbb{P}(B)$$

Exercice 10

[id=348]

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels positifs de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$A_n = \{k \in \mathbb{N} / k \geq n\} = \llbracket n, +\infty[.$$

Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}))$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_n) = \lambda a_n$$

Exercice 11

[id=349]

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Pour $A, B \in \mathcal{T}$, on pose

$$d(A, B) = P(A \Delta B)$$

avec $A \Delta B$ la différence symétrique de A et B définie par

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

- 1 Vérifier

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$$

- 2 En déduire

$$|P(A) - P(B)| \leq P(A \Delta B)$$

Exercice 12

[id=350]

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.

- 1 Démontrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n \mathbb{P}(A_k^c)$$

- 2 On suppose $\mathbb{P}(A_n) \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$.
- (ii) $\sum \ln(\mathbb{P}(A_n^c))$ diverge.
- (iii) $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

Exercice 13

[id=357]

Un étudiant doit répondre à une question à choix multiple où 5 réponses sont proposées, une seule étant correcte. On introduit les événements :

B : « La réponse fournie par l'étudiant est correcte. »

C : « L'étudiant ignore la bonne réponse et répond en choisissant une au hasard. »

Soit A l'événement contraire de C . L'épreuve associée à cette situation est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et on note $x = \mathbb{P}(A)$.

Calculer en fonction de x la probabilité conditionnelle : $\mathbb{P}(A/B)$.

Exercice 14

[id=358]

Le roi Noble, lion, décide d'inviter tous les mois ses sujets Ysengrin, Tibert et Renart, à un grand banquet ; ils peuvent manger tant qu'ils veulent, mais l'étiquette exige qu'ils n'emportent rien chez eux. Tibert et Ysengrin ont chacun une probabilité p de chaparder un peu de nourriture à un banquet, indépendamment des autres fois et des autres convives. Renart, qui est plus fourbe que les autres, chapardera quant à lui avec une probabilité $p' > p$.

Noble fait discrètement surveiller le banquet par ses gardes (qui sont efficaces et repèrent toujours un voleur quand il agit).

- 1 Les gardes choisissent de se concentrer sur un seul des trois convives au hasard. Quelle est la probabilité q qu'ils observent un vol ?
- 2 Les gardes annoncent discrètement à Noble qu'ils ont surpris un voleur ; quelles est la probabilité que ce soit Renart ?
- 3 Noble décide de ne rien dire pour cette fois, et d'attendre le banquet suivant ; il recommande aux gardes de surveiller le même convive. Quelle est la probabilité q' qu'ils observent un vol ? Comparer q' à q à l'aide d'une application numérique où $p = 0.1$ et $p' = 0.8$.

Exercice 15

[id=361]

On dispose de N urnes numérotées de 1 à N . L'urne k contient k boules blanches et $N - k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, et, sans connaître son numéro, on en tire un nombre n fois de suite une boule, avec remise après chaque tirage.

- 1 Quelle est la probabilité que le tirage suivant donne encore une boule blanche, sachant qu'au cours des n premiers tirages, seules des boules blanches ont été tirées ?
- 2 Calculer la limite de cette probabilité lorsque N tends vers l'infini.

Exercice 16

[id=366]

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, on considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

- 1 Déterminer une densité de la variable aléatoire $Y_k = \max(X_1, \dots, X_k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
- 2 Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z_k = -Y_k$.
- 3 En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, la probabilité :

$$\mathbb{P}(X_n \geq \max(X_1, \dots, X_n))$$

Exercice 17

[id=372]

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et suivant respectivement $B(n, \frac{1}{4})$ et $B(n, \frac{3}{4})$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 0 \\ 2 & Y(\omega) \end{pmatrix}$$

- 1 Calculer la probabilité que $A(\omega)$ soit diagonalisable.
- 2 Calculer la probabilité que $A(\omega)$ soit inversible.

Exercice 18

[id=385]

- 1 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle vérifiant $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n \mathbb{P}(X > n)$$

- b) On suppose que la variable aléatoire X admet une espérance notée $\mathbb{E}(X)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq n \mathbb{P}(X > n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \mathbb{P}(X = k)$. En déduire que la série de terme général $\mathbb{P}(X > n)$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n) = \mathbb{E}(X)$$

- (c) On suppose que la série de terme général $\mathbb{P}(X > n)$ converge. Montrer que la série de terme général $k\mathbb{P}(X = k)$ converge et que X admet une espérance.
- (d) Énoncer le théorème qui vient d'être établi.

- 2 Un horticulteur plante n oignons de narcisse dans un jardin (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Chaque oignon est susceptible de fleurir au printemps et ne donne une fleur qu'avec la probabilité p ; de plus, s'il donne une fleur une année, il refleurit de manière certaine les années suivantes mais s'il n'en donne pas, cela n'influe en rien sur ce qui est susceptible de se passer les années suivantes.

Pour $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on note X_j le nombre aléatoire d'années nécessaires au narcisse numéro j pour produire une première fleur. On suppose que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires et qu'elles sont mutuellement indépendantes. On note X le nombre aléatoire d'années au bout duquel le jardin sera, pour la première fois, fleuri des n narcisses.

- (a) Exprimer X en fonction de $X_1, X_2, \dots, X_n$, et calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(X > k)$
- (b) En déduire que X admet une espérance et exprimer cette espérance comme somme d'une série.
- 3 Déterminer un équivalent simple de $\mathbb{E}(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On utilisera des intégrales bien choisies de la fonction $x \mapsto 1 - (1 - (1 - p)^x)^n$ ainsi que le changement de variable $x = \frac{\ln(1-t)}{\ln(1-p)}$

Exercice 19

[id=386]

On se fixe un réel $s > 1$ et on considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où $\Omega = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}$ est définie par :

$$\forall n \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)n^s}$$

ζ désignant la fonction de Riemann :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A_n l'événement : « p est multiple de n ».

- Justifier que $\mathbb{P}$ est bien une probabilité et calculer $\mathbb{P}(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Montrer que si $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers, les événements A_p , $p \in \mathcal{P}$ sont indépendants.
- En déduire que

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \quad \text{puis} \quad \zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Exercice 20

[id=387]

Dans cet exercice, Ω désigne un ensemble fini non vide, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω et $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de Ω dans $\mathbb{R}$. Si $X \in \mathcal{F}$, on note $E(X)$ l'espérance de la variable aléatoire X .

Si A est une partie de Ω , on note 1_A la fonction caractéristique de A , c'est-à-dire l'application définie pour tout $\omega \in \Omega$ par :

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Soit $A \subset \Omega$. Calculer $E(1_A)$.
2. Montrer que l'application φ définie sur $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ par :

$$\varphi : (X, Y) \mapsto E(XY)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{F}$ si et seulement si pour tout $\omega \in \Omega$, $P(\{\omega\}) > 0$. Dans la suite de l'exercice, on supposera que P vérifie cette propriété et $\mathcal{F}$ sera muni de ce produit scalaire.

3. Soit $X \in \mathcal{F}$ une variable aléatoire non constante. On note G le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par X et la variable aléatoire constante égale à 1, soit $G = \text{Vect}(X, 1_\Omega)$. Soit $Y \in \mathcal{F}$.
 - a) Déterminer les réels a_0 et b_0 pour lesquels $Y - a_0X - b_0$ est orthogonal à tout élément de G .
 - b) En déduire l'expression de la projection orthogonale de Y sur G qu'on notera $p_G(Y)$.
 - c) Comparer $E(p_G(Y))$ et $E(Y)$.
 - d) On suppose que $X = 1_A$, avec A partie de Ω non vide et distincte de Ω . Montrer que pour tout $B \subset \Omega$:

$$p_G(1_B) = P(B/A)1_A + P(B/\bar{A})1_{\bar{A}}$$

où $P(U/V)$ désigne la probabilité conditionnelle de l'événement U , sachant que l'événement V est réalisé.

Exercice 21

[id=388]

Soit n un entier naturel non nul. Tous les tableaux envisagés (type tab) sont des permutations de l'intervalle $\llbracket 1, n \rrbracket$ d'entiers.

- 1 Ecire en Python une fonction qui associe à toute permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ le nombre de ses points fixes. On considère cette fonction comme une variable aléatoire T_n sur l'univers S_n des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ muni de l'équiprobabilité.
- 2 Pour $1 \leq i \leq n$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si $(a[i] = i)$ est réalisé et la valeur 0 sinon.
 - a Quelle est la loi de X_i ? Pour $i \neq j$, les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes? Calculer $\text{Cov}(X_i, X_j)$.
 - b Exprimer T_n à l'aide des variables X_i et en déduire l'espérance et la variance de T_n .
- 3 a Calculer $P(T_n = n)$, $P(T_n = n - 1)$ et $P(T_n = n - 2)$.
 - b Exprimer $(T_n \neq 0)$ à l'aide des événements $(X_i = 1)$ et en déduire une expression de $P(T_n = 0)$ sous forme d'une somme. Donner un équivalent de $P(T_n = 0)$ lorsque n tend vers l'infini.
 - c Montrer que pour $1 \leq k \leq n - 2$, $P(T_n = k) = \frac{1}{k!} P(T_{n-k} = 0)$, et en déduire la loi de T_n .
 - d En déduire $\sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{(k-1)!j!}$.

Exercice 22

[id=389]

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $s = (s_1, \dots, s_p) \in \{0, 1\}^p$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $\alpha \in]0, 1[$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n = \{\omega \in \Omega / X_{np+1}(\omega) = s_1, X_{np+2}(\omega) = s_2, \dots, X_{(n+1)p}(\omega) = s_p\}$$

Si E est un événement, on désignera par E^c son complémentaire dans l'univers Ω .

1. Justifier l'assertion : $\omega \in \bigcap_{k=0}^{\infty} (\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i) \implies s$ apparaît une infinité de fois dans $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega), \dots)$
2. Montrer que la suite $(B_n)_{n \geq 0}$ est formée d'événements mutuellement indépendants.
3. Déterminer l'événement $(\bigcap_{k=0}^{\infty} (\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i))^c$.
4. Montrer que pour tout entier naturel k , on a : $P(\bigcap_{i=k}^{\infty} B_i^c) = 0$.
5. En déduire que $P(\bigcap_{k=0}^{\infty} (\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i)) = 1$ et interpréter ce résultat.

Exercice 23

[id=391]

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, n variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$, avec $\lambda > 0$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.
2. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = 1 - (1 - x)e^x$. Montrer que pour tout x de $[0, 1]$, on a : $0 \leq f(x) \leq 1$.
3. Pour tout entier $n > \lambda$ et pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note U_i une variable aléatoire indépendante de Y_i et suivant la loi de Bernoulli de paramètre $f(\frac{\lambda}{n})$. Pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, soit X_i la variable aléatoire définie par :

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{si } Y_i = U_i = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la loi de X_i .

4. Montrer que pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $\mathbb{P}(X_i \neq Y_i) \leq \frac{\lambda^2}{n^2}$.
5. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n [X_i = Y_i])$.

Exercice 24

[id=392]

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la variable $Y_n = \frac{1+X_n}{2}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p_n (avec $p_n \in]0, 1[$). Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la variable aléatoire S_n par : $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Quelle est la loi de X_n ?
2. Peut-on appliquer la loi faible des grands nombres à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$?
3. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n .
4. Montrer que $0 \leq p_k(1 - p_k) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $k \geq 1$. En déduire que la variance $V(S_n)$ est majorée par n .
5. Soit $\varepsilon > 0$, montrer que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}(S_n)}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{4}{n^2\varepsilon^2} \sum_{k=1}^n p_k(1 - p_k) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$. Que peut-on en conclure ?
6. Dans cette question, on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = 1 - \frac{1}{2^{n+2}}$. Soit L un entier fixé. On introduit l'événement A_L qui est égal à l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels la suite $(S_n(\omega))$

contient une infinité de termes qui se trouvent dans le segment $[-L, L]$.

a) Etudier la suite $\left(\frac{\mathbb{E}(S_n)}{n}\right)_{n \geq 1}$. En déduire l'existence d'un entier $N > 2L$ tel que pour tout $n \geq N$ on a : $\left|\frac{\mathbb{E}(S_n)}{n} - 1\right| \leq \frac{1}{4}$.

b) Montrer que pour $n \geq N$ on a $\left[\left|\frac{S_n}{n} - 1\right| \geq \frac{1}{2}\right] \subseteq \left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}(S_n)}{n}\right| \geq \frac{1}{4}\right]$. En déduire que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 1\right| \geq \frac{1}{2}\right) \leq \frac{16}{n^2}$.

c) Soit $n \geq N$, prouver que

$$[|S_n| \leq L] \subseteq \left[\left|\frac{S_n}{n} - 1\right| \geq \frac{1}{2}\right] \text{ et que } A_L \subseteq \bigcup_{k \geq n} [|S_k| \leq L]$$

d) Etablir que pour tout $n \geq N$, on a $\mathbb{P}(A_L) \leq 16 \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. (On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\mathbb{P}(E_1 \cup \dots \cup E_m) \leq \sum_{k=1}^m P(E_k)$ pour tout m -uplet d'événements $(E_1, \dots, E_m)$.) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(A_L)$.

Exercice 25

[id=538]

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire définie sur cet espace, discrète à valeurs strictement positives qui admet une espérance et une variance. L'image de X est notée $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$.

1 Soit $A \in \mathcal{A}$. On note $\mathbf{1}_A$ la variable aléatoire qui vaut 1 si $\omega \in A$ et 0 sinon.

a Pour tout $x_n \in X(\Omega)$, comparer $P(\mathbf{1}_A \times X = x_n)$ et $P(X = x_n)$.

b Montrer que la variable aléatoire $\mathbf{1}_A \times X$ admet une espérance.

On pose désormais : $P_X(A) = \frac{E(\mathbf{1}_A \times X)}{E(X)}$.

2 Dans cette question seulement, on suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit l'événement $A = (X \in 2\mathbb{N})$. Calculer $P(A)$ et $P_X(A)$.

3 Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements incompatibles. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$.

a Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $(E(\mathbf{1}_{B_n} \times X))^2 \leq E(X^2) \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i)$.

b En déduire que P_X est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exercice 26

[id=681]

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ tel que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On dit que X est sans mémoire si pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on

$$\mathbb{P}_{(X=n)}(X \geq n+m) = \mathbb{P}(X \geq m).$$

On pose $\mathbb{P}(X=0) = p$ et $q = 1-p$ et on suppose de plus que l'on a la condition :

$$(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X \geq n) > 0.$$

1 Montrer que $\mathbb{P}(X \geq 1) = q$. En déduire que $0 < q \leq 1$.

2 Montrer que $\forall n, m \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X \geq n+m) = \mathbb{P}(X \geq n)\mathbb{P}(X \geq m)$.

- 3** On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_n = \mathbb{P}(X \geq n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- a** Montrer que (u_n) est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme.
 - b** Donner u_n en fonction de q et n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - c** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \geq n) - \mathbb{P}(X \geq n + 1)$.
 - d** En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = pq^n$.
 - e** En déduire que $0 < q < 1$.
- 4** Donner la loi de la variable aléatoire $Y = X + 1$.
- 5** Démontrer qu'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ tel que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ est sans mémoire si et seulement si la variable aléatoire $Y = X + 1$ suit une loi géométrique de paramètre à préciser.

Exercice 27

[id=684]

On suppose que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On définit les matrices aléatoires :

$$U = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ et } M = U \times U^\top = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_1X_2 & X_1X_1 & \cdots & \cdots & X_1X_n \\ X_2X_1 & X_2^2 & X_2X_1 & \cdots & \cdots & X_2X_n \\ X_1X_1 & X_1X_2 & X_1^2 & \cdots & \cdots & X_1X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_nX_1 & X_nX_2 & X_nX_3 & \cdots & \cdots & X_n^2 \end{pmatrix}.$$

- 1** On pose $Y = \text{rg}(M)$. Montrer que la variable aléatoire Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1 - p)^n$.
- 2** Reconnaître la loi de la variable aléatoire $\text{Tr}(M)$.
- 3** Vérifier que $M^2 = \text{Tr}(M)M$ et en déduire la probabilité de l'évènement : « M est une matrice de projection. »

Exercice 28

[id=685]

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A et B deux parties de Ω non vides et distinctes. Expliciter la tribu engendrée par $\{A, B\}$

Exercice 29

[id=362]

- 1** Calculer l'intégrale $J_n = \int_0^1 x^n(1-x)^n dx$, avec $n \in \mathbb{N}$.
- 2** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dispose de p urnes numérotées de 1 à p . Pour $1 \leq k \leq p$, l'urne numéro k contient k boules noires et $p - k$ boules blanches. On choisit au hasard une urne puis on y effectue des tirages avec remise. On note $A_{n,p}$ l'évènement : « Après $2n$ tirages, on a obtenu n boules noires. »

Calculer $\mathbb{P}(A_{n,p})$.

- 3** Calculer $\lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_{n,p})$.

Exercice 30

[id=365]

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Y = \ln(e^X - 1)$.

- 1** Déterminer la fonction de répartition de Y et une densité de Y .
2 Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 31

[id=390]

- 1** Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit h une fonction réelle positive et croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel a :

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(h(X))}{h(a)}$$

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ (on a donc $\mathbb{P}(X = 1) = p$). Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

- 2** Déterminer la limite en probabilité de la suite $(\bar{X}_n)$.
3 Soit a tel que $p < a < 1$.
a Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}(\bar{X}_n \geq a) \leq (\mathbb{E}(e^{\lambda X_1}))^n e^{-an\lambda}$$

- b** En déduire que $\mathbb{P}(\bar{X}_n \geq a) \leq e^{-nh_p(a)}$, où pour tout $x \in]0, 1[$, on a posé :

$$h_p(x) = x \ln \left(\frac{x}{p} \right) + (1-x) \ln \left(\frac{1-x}{1-p} \right).$$

- 4** Soit a tel que $0 < a < p$. Déduire de ce qui précède une majoration de $\mathbb{P}(\bar{X}_n \leq a)$.

Exercice 32

[id=351]

On lance une infinité de fois une pièce de monnaie non triquée, les lancers étant mutuellement indépendants. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on introduit les événements :

A_n : « On obtient deux piles consécutifs lors des n premiers lancers »

B_n : « On obtient le premier couple de piles consécutifs aux rangs $n-1$ et n . »

L'épreuve étant modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$p_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $p_1 = 0$.

1 Calculer p_k pour tout $k \in \{2, 3, 4\}$.

2 Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=0}^n p_k \quad \text{et} \quad p_{n+3} = \frac{1}{8} \left(1 - \sum_{k=1}^n p_k \right)$$

3 En déduire une relation entre p_n, p_{n+2} et p_{n+3} , pour tout $n \geq 1$.

4 Exprimer p_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 33

[id=352]

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $p \in]0, 1[$. Une personne a oublié son parapluie dans un immeuble n niveaux avec une probabilité p . Les niveaux ont la même probabilité de contenir le parapluie. Il cherche aux $n - 1$ premiers niveaux et il ne trouve pas le parapluie. Quelle est la probabilité qu'il le trouve au dernier niveau ?

Exercice 34

[id=356]

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute famille $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'événements, on a :

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^n A_k \right) \geq \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \right) - n + 1$$

Exercice 35

[id=359]

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements, on note :

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k \quad \text{et} \quad \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k$$

1 Déterminer $\overline{\lim} A_n$ et $\underline{\lim} A_n$ dans les cas suivants :

a $A_n =] - \infty, n]$

b $A_n = [-n, n]$

c $A_n = [n, n + 1]$

d $A_n = \begin{cases} A & \text{si } n = 2k \\ B & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$ avec A et B deux événements donnés.

e $A_n = \left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} \right]$

2 Donner une interprétation concrète de la réalisation des événements respectifs : $\overline{\lim} A_n$ et $\underline{\lim} A_n$.

3 Montrer que $\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n$.

4 Démontrer les inégalités :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\varliminf A_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{p \geq n} \mathbb{P}(A_p) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{p \geq n} \mathbb{P}(A_p) \leq \mathbb{P}(\varlimsup A_n) \end{cases}$$

5 Donner un exemple où ces inégalités sont strictes.

Exercice 36

[id=363]

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes. On suppose qu'elle sont même loi $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_i = 2) = 1 - p$ où p est un réel tel que $p \in [0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $Y_k = \inf\{j \in \mathbb{N}^* / S_j \geq k\}$

- 1 Montrer l'existence de Y_k . Ecrire une fonction **Python** $Y_k(k, p)$.
- 2 Ecrire une fonction $mk(p)$ donnant une valeur approchée de $m_k = \mathbb{E}(Y_k)$. Tracer les points (k, m_k) pour $1 \leq k \leq 100$ et $p \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$.
- 3 Montrer que $\mathbb{P}(Y_k = n) = p\mathbb{P}(Y_{k-1} = n - 1) + (1 - p)\mathbb{P}(Y_{k-2} = n - 1)$.
- 4 Montrer que $\mathbb{E}(Y_k) = p\mathbb{E}(Y_{k-1}) + (1 - p)\mathbb{E}(Y_{k-2}) + 1$.
- 5 Montrer que $\mathbb{E}(Y_k) \sim kC_p$ quand $k \rightarrow +\infty$, avec C_p fonction de p .

Exercice 37

[id=364]

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On tire, au hasard et sans remise, n boules de l'urne. On note X_i la variable aléatoire associée au numéro de la boule obtenue au tirage numéro i , ceci pour $i \in [1, n]$.

1.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_i . Préciser son espérance et sa variance.

1.b. Déterminer la loi du n -uplet $(X_1, \dots, X_n)$.

A l'issue du tirage numéro n , les numéros obtenus sont classés par ordre croissant. On note Y_j la variable aléatoire associée au j -ième numéro, classé par ordre croissant, obtenu parmi les n numéros. Ainsi Y_1 est la variable aléatoire $\min(X_1, \dots, X_n)$, Y_2 est le nombre aléatoire venant juste après Y_1 , par ordre croissant, etc. et Y_n est la variable aléatoire $\max(X_1, \dots, X_n)$.

2.a. Déterminer la loi du n -uplet $(Y_1, \dots, Y_n)$.

2.b. Déterminer la loi de Y_j , pour $j \in [1, n]$.

2.c. Déterminer la loi du couple (Y_j, Y_k) pour $1 \leq i < j \leq n$.

On conserve les notations précédentes, en se restreignant au cas $n = 3$.

3.a. Préciser la loi du couple (Y_1, Y_3) . En déduire la loi de $D = Y_3 - Y_1$. Calculer l'espérance de D .

3.b. Déterminer la loi de Y_2 . Que peut-on remarquer

Exercice 38

[id=367]

Soient a et b deux nombres réels positifs distincts. On considère X et Y deux variables aléatoires

indépendantes suivant des lois de *Pareto* de densités respectives f_a et f_b définies par :

$$f_a(t) = \begin{cases} at^{a-1} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases}, \quad f_b(t) = \begin{cases} bt^{b-1} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases}$$

- 1 Reconnaître les lois respectives des variables aléatoires $\ln(X)$ et $\ln(Y)$.
- 2 En déduire la loi de la variable aléatoire $Z = XY$.

Exercice 39

[id=368]

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p avec $p \in]0, 1[$ et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Y_k = X_k X_{k+1}$.

- 1 Donner la loi de Y_k , ainsi que l'espérance et la variance de Y_k .
- 2 Soient i et j deux entiers naturels distincts. Discuter, suivant les valeurs de i et de j , de l'indépendance de Y_i et de Y_j .
- 3 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|Z_n - p^2| \geq \varepsilon) = 0$$

Exercice 40

[id=369]

Soit X une variables aléatoire réelle à densité, de loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$, et b un nombre réel strictement positif.

- 1 On pose $Y = -b \ln(X)$. Déterminer une densité de Y , ainsi que son espérance et sa variance.
Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi que Y . On pose $U = Y_1 + Y_2$, $V = \frac{Y_1}{Y_2}$, $S = \ln(V)$ et $W = \frac{1}{1+V}$.
- 2
 - a Déterminer une densité de U .
 - b Déterminer une densité de S (on déterminera au préalable une densité de $T = -\ln(Y_2)$).
 - c En déduire une densité de V , puis une densité de la variables aléatoire W . Préciser l'espérance et la variance de W .
 - d En exprimant W en fonction de Y_1 et de Y_2 , montrer que la valeur de l'espérance de W était prévisible.
 - e Calculer $\mathbb{E}(UW) - \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(W)$. Quelle remarque peut-on faire ?

Exercice 41

[id=370]

A. Soit k un entier naturel strictement positif. On considère une suite $(x_n)_{n \geq 0}$, de nombres

réels appartenant au segment $[0, k[$. On pose pour tout n entier strictement positif :

$$s_n = \sum_{j=1}^n x_j, \quad r_n = f(s_n) = s_n - \lfloor s_n \rfloor$$

où $\lfloor x \rfloor$ représente la partie entière de x .

- 1 Montrer que la suite (r_n) est bornée.
- 2 Montrer que $r_{n+1} = f(f(s_n) + x_{n+1})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

B. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles continues indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et toutes deux de loi uniforme sur l'intervalle $[0, k[$.

- 1 Déterminer une densité de la variable aléatoire S_2 , définie par $S_2 = X_1 + X_2$.
- 2 On définit la variable aléatoire R_2 par : $R_2 = S_2 - \lfloor S_2 \rfloor$. Déterminer la fonction de répartition de R_2 en fonction de celle de S_2 et en déduire une densité de R_2 dans les cas $k = 1$ puis $k = 2$.
- 3 Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, toutes de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1[$. On définit pour tout $n > 0$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad \text{et} \quad R_n = S_n - \lfloor S_n \rfloor$$

Déterminer la loi de R_n (on pourra utiliser les résultats de la question **A.2** et un raisonnement par récurrence).

Exercice 42

[id=371]

On considère une fonction f de classe C^2 de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = \lambda$ avec $\lambda \in]0, 1[$ et pour tout $x \in]0, 1[$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) < 0$.

- 1
 - a Montrer que pour tout $x \in]0, 1]$, on a $f(x) \leq \lambda x$.
 - b On prends $x_0 \in]0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit par récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que la suite (x_n) est décroissante et converge vers 0.
- 2 On considère des variables aléatoires indépendantes de Bernoulli $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de paramètre x_n , c'est-à-dire que la probabilité de succès la n -ème fois, ce qui correspond à $X_n = 1$ est x_n .
 - a Quelle est la probabilité p_n d'obtenir n échecs aux n premières épreuves ?
 - b Montrer que la suite (p_n) est décroissante et converge. On note ℓ sa limite ; Comment interpréter la propriété $\ell = 0$?
 - c Montrer que $\ell = 0$ si et seulement si la série de terme général x_n diverge.
- 3 On pose $f(x) = \frac{x}{1+x}$
 - a La fonction f vérifie-t-elle les hypothèses du 1) ?
 - b Calculer $\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}$; En déduire un équivalent de x_n quand n tends vers $+\infty$

Exercice 43

[id=373]

On note $\mathcal{VP}(\lambda, \theta)$ la loi de Pareto de paramètres $\lambda > 0$ et $\theta > 0$ qui est la loi d'une variable aléatoire continue à densité de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\theta} \left(\frac{\theta}{x}\right)^{\lambda+1} & \text{si } x > \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Un phénomène économique suit une loi $\mathcal{VP}(\lambda, \theta)$, θ étant un paramètre connu et λ un paramètre que l'on veut estimer. On dispose pour cela d'un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes suivant cette loi. On pose :

$$T = \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{X_i}{\theta} \right) \quad \text{et} \quad \hat{\lambda} = \frac{n}{T}.$$

- 1 Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{VP}(\lambda, \theta)$ et $Y = \ln \left(\frac{X}{\theta} \right)$.
 - a Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
 - b Déterminer, lorsqu'elles existent, l'espérance et la variance de X .
 - c Montrer que Y suit une loi Γ dont on précisera les paramètres.
- 2 Quelle est la loi de T ? En donner une densité.
- 3 Calculer l'espérance et la variance de $\hat{\lambda}$.
- 4 Justifier que la suite (Z_n) de variables aléatoires définies par $Z_n = \frac{\sqrt{n}(\hat{\lambda}-\lambda)}{\lambda}$ converge en loi vers la loi normal standard $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 44

[id=374]

Soit $a \in]0, 1[$ et X une variable aléatoire, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $[0, 1]$. On suppose que la loi conditionnelle de X conditionnée par l'événement $(X \leq a)$ est la loi uniforme sur $[0, a]$ et que la loi conditionnelle conditionnée par l'événement $(X > a)$ est la loi uniforme sur $[a, 1]$. On suppose de plus que : $\mathbb{P}(X \leq a) = \frac{1}{2}$.

- 1 Déterminer une densité de X , son espérance et sa variance.
- 2 Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que X et soit $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, déterminer l'espérance $\mathbb{E}(M_n)$ et la variance $\mathbb{V}(M_n)$. Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = 2M_n - \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{E}(T_n) = a$ et $\mathbb{V}(T_n) = 4\mathbb{V}(M_n)$. Que vaut alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}(T_n)$?
- 3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{V}(T_n) \leq \frac{5}{12n}$. En déduire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in [0, 1], \mathbb{P}(|T_n - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{5}{12n\varepsilon^2}$$

- 4 Justifier que la suite des variables aléatoires $\left(\frac{T_n - a}{\sqrt{\mathbb{V}(T_n)}} \right)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire T dont on précisera la loi.

Exercice 45

[id=375]

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit r un réel tel que $0 < r < 1$. Soit X une variable aléatoire réelle tel que $X \hookrightarrow \text{Ber}(r)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, soit S_n une variable aléatoire tel que $S_n \hookrightarrow B(n, r)$ (loi binomiale de paramètres (n, r)).

- 1 a Pour tout réel t tel que $t > 0$, on pose $g(t) = \mathbb{E}(\exp(-tX))$. Calculer $g(t)$, en fonction de t et r .

- b Justifier l'égalité :

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(-t \frac{S_n}{n} \right) \right) = g \left(\left(\frac{t}{n} \right) \right)^n$$

- 2 Soit a un réel tel que $0 < a < r < 1$ et t un réel positif fixé.

- a Montrer que :

$$\mathbb{P} \left(\frac{S_n}{n} \leq a \right) = \mathbb{P} \left(\exp \left(-t \left(\frac{S_n}{n} - a \right) \right) \geq 1 \right)$$

- b Soit Y une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs positives. Montrer que $\mathbb{P}(Y \geq 1) \leq \mathbb{E}(Y)$. En déduire que :

$$\mathbb{P} \left(\frac{S_n}{n} \leq a \right) \leq \exp(at) \left(g \left(\frac{t}{n} \right) \right)^n$$

- 3 a Étudier les variations de la fonction $t \mapsto \ln(\exp(at)g(t))$.

- b En déduire qu'il existe une constante M tel que $M > 0$ et :

$$\mathbb{P} \left(\frac{S_n}{n} \leq a \right) \leq \exp(-nM)$$

- 4 Soit $\varepsilon > 0$ donné ; Donner une interprétation probabiliste du résultat précédent lorsque $a = r - \varepsilon$.

Exercice 46

[id=376]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \dots, X_n$, qui suivent une loi normale d'espérance m et de variance σ^2 . On pose

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

et

$$U_n = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

- 1 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} n-1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Soit B le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

- a Justifier que la matrice A est diagonalisable.

- b Déterminer les valeurs propres de A ainsi qu'une base des sous-espaces propres associés.

- (c) Justifier l'existence d'une matrice P de $GL_n(\mathbb{R})$ dont la dernière colonne est proportionnelle à B et telle que ${}^tPAP = D$, où D est une matrice diagonale à déterminer (on ne demande pas la matrice P).
- (d) On note ${}^tP = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer que :

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \sum_{j=1}^n p_{i,j} = 0 \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n p_{i,j}^2 = 1 \end{cases}$$

- 2 On note $M = \frac{1}{n}A$ et q l'application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), q(X) = {}^tXMX$. On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$. Montrer que $q(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$, puis $q(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} x_j \right)^2$.
- 3 Pour tout i de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on pose $Y_i = \sum_{j=1}^n p_{i,j} X_j$.
- (a) Justifier que $E(Y_i) = 0$ et $V(Y_i) = \sigma^2$.
- (b) On suppose que les Y_i sont mutuellement indépendantes. Montrer que U_n suit la loi $\Gamma(2, \frac{n-1}{2})$.

Exercice 47

[id=377]

On considère une fonction F définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles, croissante, continue, telle que $F(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

- 1 On définit la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = F(n+1) - F(n)$. Montrer que la série de terme général p_n est convergente et déterminer sa somme.
- 2 (a) Soit x un réel fixé dans $[0, 1[$. Montrer que la série de terme général $F(x+n) - F(n)$ est convergente.
- (b) On considère la fonction φ définie sur $\left[0, 1\right[$ par : $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (F(x+n) - F(n))$. Montrer que φ est croissante.
- (c) Soient x et y deux réels fixés de $[0, 1]$. Montrer que pour tout ε réel fixé strictement positif, il existe N_0 entier positif indépendant de x et y tel que, pour tout $N \geq N_0$: $\sum_{n=N}^{+\infty} |F(x+n) - F(y+n)| < \varepsilon$. En déduire que φ est continue sur $[0, 1[$.
- 3 On considère désormais que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On considère les variables aléatoires notées $d(X)$ et $\lfloor X \rfloor$ définies par, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$d(X)(\omega) = X(\omega) - \lfloor X(\omega) \rfloor \text{ et } \lfloor X \rfloor(\omega) = \lfloor X(\omega) \rfloor$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x .

- (a) Déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor$ à l'aide des (p_n) et la fonction de répartition de $d(X)$.
- (b) On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Expliciter la loi de $\lfloor X \rfloor$ et la fonction de répartition de $d(X)$. Déterminer une densité de $d(X)$, puis calculer les espérances de ces deux variables aléatoires.

Exercice 48

[id=378]

Soit X une variable aléatoire réelle de densité g et de fonction de répartition G . On suppose que g est une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$.

- 1 Exprimer, pour tout réel x , $G(-x)$ en fonction de $G(x)$.
- 2 On définit la fonction $\tilde{g}$ par : $\tilde{g}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 2g(t) & \text{si } t > 0 \end{cases}$ Vérifier que $\tilde{g}$ est une densité de probabilité. On note $\tilde{X}$ une variable aléatoire de densité $\tilde{g}$.
- 3 Exprimer la fonction de répartition $\tilde{G}$ de $\tilde{X}$ en fonction de G . Donner en particulier, pour $0 < a < b$, $\tilde{G}(b) - \tilde{G}(a)$ en fonction de $G(b)$ et de $G(a)$.
- 4 Pour tout m de $[\frac{1}{2}, 1]$ et tout réel t , on pose : $f_m(t) = 2(1-m)g(t) + (2m-1)\tilde{g}(t)$
 - a Vérifier que f_m est une densité de probabilité et exprimer $f_m(t)$ en fonction de m et de $g(t)$
 - b Soit Y_m une variable aléatoire de densité f_m . Déterminer la fonction de répartition F_m de Y_m , en fonction de m et de G .
 - c Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $[|Y_m|]$ (partie entière de la valeur absolue de Y_m) en fonction de G , puis de G .
- 5 On considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que Y_m . On pose, pour tout entier naturel n non nul, $Z_n = (X_1, \dots, X_n)$ et $T_n = \sum_{i=1}^n 1_{(X_i \geq 0)}$, c'est-à-dire que T_n est le nombre de variables du n -uplet Z_n qui sont positives. On pose enfin $S_n = \frac{1}{n}T_n$. Donner la loi de T_n , son espérance, sa variance.
- 6 Soit φ une fonction de $[0, n]$ dans $\mathbb{R}$, telle que : $\forall m \in [\frac{1}{2}, 1[$, $E(\varphi(T_n)) = 0$. Montrer que $\varphi = 0$.

Exercice 49

[id=379]

- 1 Soit X et Y deux variables aléatoires réelles à densité définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f_Y une densité de Y . Pour tout z réel, justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq z - y) f_Y(y) dy$$

On admet que, si X et Y sont indépendantes, alors :

$$\forall z \in \mathbb{R}, P(X + Y \leq z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq z - y) f_Y(y) dy$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ fixé et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k suit la loi exponentielle de paramètre $k\alpha$. Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, Φ_n la fonction de répartition de S_n et $T_n = \frac{S_n}{n}$.

- 2 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\forall z \in \mathbb{R}_+), \Phi_n(z) = (1 - e^{-\alpha z})^n$ (On pourra employer (en le justifiant) le changement de variable $u = e^{-\alpha x}$.)
- 3
 - a Calculer l'espérance $E(T_n)$ de la variable aléatoire T_n . A-t-elle une limite pour n tendant vers $+\infty$? Déterminer un équivalent de $E(T_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
 - b Calculer la variance de T_n . A-t-elle une limite pour n tendant vers $+\infty$?
 - c Etudier la convergence en loi de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 50

[id=380]

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, toutes de même loi uniforme sur le segment $[0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$, on réordonne par ordre croissant les réels $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_{2n+1}(\omega)$ et on note $M_n(\omega)$ le terme médian, c'est-à-dire le $n+1$ ème de ces termes dans l'ordre croissant.

- 1 Pour tout réel x de $[0, 1]$, exprimer $P(M_n \leq x)$ à l'aide d'une somme.
- 2 En considérant les variables aléatoires $X'_k = 1 - X_k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'espérance de la variable aléatoire M_n est égale à $\frac{1}{2}$.
- 3 Prouver l'égalité : $E(M_n) = \int_0^1 P(M_n > x) dx$
- 4 Pour tous entiers naturels k et m tels que $0 \leq k \leq m$ calculer l'intégrale :

$$I_{k,m} = \int_0^1 x^k (1-x)^{m-k} dx$$

- 5 Retrouver ainsi, par un calcul, la valeur de l'espérance de M_n .

Exercice 51

[id=381]

Soit X, Y deux v.a.r. à valeurs dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Leur loi conjointe est définie par :

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{4^n} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$

- 1 Déterminer la loi de X . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
- 2 Diagonaliser la matrice $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de coefficients $m_{ij} = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$.

Exercice 52

[id=382]

$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé ; à tout entier naturel non nul n et tout $x \in [0, 1]$ on associe la variable aléatoire $X_{n,x}$ qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$, c'est-à-dire que $X_{n,x}(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\mathbb{P}(X_{n,x} = j) = C_n^j x^j (1-x)^{n-j}$$

A toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0, 1]$, on associe la variable aléatoire $Y_{n,x} = f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)$. Si on note $Y_{n,x}(\Omega) = \{y_k / k \in \llbracket 0, p \rrbracket\}$, alors on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \mathbb{P}(Y_{n,x} = k) = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ f(\frac{j}{n}) = y_k}} \mathbb{P}(X_{n,x} = j)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on désigne par $B_{n,k}$ la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in [0, 1], B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

et B_n est l'opérateur de Bernstein défini par :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}.$$

où $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel normé des applications continues de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ muni de la norme de convergence uniforme notée $\|\cdot\|_\infty$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $x \in [0, 1]$.

- 1 Montrer que l'espérance mathématique de $Y_{n,x}$ est $\mathbb{E}(Y_{n,x}) = B_n(f)(x)$.
- 2 Pour $\varepsilon > 0$, on désigne par $\tau > 0$ un réel strictement positif tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, pour tout $x, y \in [0, 1]$ vérifiant $|x - y| < \tau$ (l'existence de τ étant justifié par le théorème de Heine selon lequel f , continue sur $[0, 1]$ est uniformément continue sur $[0, 1]$.)
On note :

$$\begin{cases} J_{1,x} = \{j \in \llbracket 0, n \rrbracket / |f(\frac{j}{n}) - f(x)| < \varepsilon\} \\ J_{2,x} = \{j \in \llbracket 0, n \rrbracket / |f(\frac{j}{n}) - f(x)| \geq \varepsilon\} \end{cases}$$

- a Montrer que $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{j \in J_{2,x}} \mathbb{P}(X_{n,x} = j)$.
- b Montrer que $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|Y_{n,x} - f(x)| \geq \varepsilon)$.
- c Montrer que $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|X_{n,x} - nx| \geq n\tau)$.
- d En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev, montrer que :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\tau^2}$$

- 3 Démontrer que toute fonction f de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$, continue sur $[0, 1]$ est une limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur $[0, 1]$
- 4 Démontrer que le résultat est vrai pour tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Exercice 53

[id=383]

- 1 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles telles que X^2 et Y^2 admettent une espérance mathématique. Montrer que XY admet une espérance mathématique.
- 2 Soit $a \in [0, 1]$ et X une variable positive ayant une espérance mathématique. Montrer l'inégalité :

$$(1 - a)\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{X \geq a\mathbb{E}(X)})$$

Exercice 54

[id=384]

- 1 Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle convergeant vers un réel λ . Pour tout $n \geq 1$, on pose $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$. Montrer que la suite (v_n) converge vers λ .
- 2 Soit Y une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ telle que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. On suppose que Y admet une espérance. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y \geq k)$.
- 3 Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et admettant une espérance, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X < k)$. On se propose de déterminer un développement asymptotique de S_n .
a Démontrer que, quand n tends vers $+\infty$, on a $S_n \sim n$.

(b) Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - S_n) = \mathbb{E}(X)$.

(c) On suppose que X admet une variance.

i Montrer que : $S_n - n + \mathbb{E}(X) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{n}$

ii En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$ on a : $S_n = n - \mathbb{E}(X) + O\left(\frac{1}{n}\right)$.