

Chapitre 11 : Séries entières

Exercice 1

[id=674]

- 1 Montrer que la série entière de terme général $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.
- 2 Pour tout x réel, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{e}} e^{ex}.$$

Montrer que lorsque x tend vers $+\infty$, on a

$$f(x) \sim g(x).$$

Exercice 2

[id=683]

Démontrer que la fonction $x \mapsto f(x) = \exp(\exp(x))$ est développable en série entière et préciser son rayon de convergence.

Exercice 3

[id=324]

- 1 Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\text{a) } \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 1}{3^n} z^n \quad \text{b) } \sum_{n \geq 0} e^{-n^2} z^n \quad \text{c) } \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n} \quad \text{d) } \sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$$

- 2 Déterminer le rayon de convergence de :

$$\text{a) } \sum_{n \geq 0} n! z^n \quad \text{b) } \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} z^n \quad \text{c) } \sum_{n \geq 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n \quad \text{d) } \sum_{n \geq 0} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \right) z^n$$

- 3 Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\text{a) } \sum_{n \geq 0} z^{n^2} \quad \text{b) } \sum_{n \geq 0} \sin(n) z^n \quad \text{c) } \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$$

Exercice 4

[id=325]

- a) Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$$\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n \quad \text{et} \quad \sum \sin(e^{-n}) x^n$$

- b) Une série entière converge-t-elle normalement sur son disque ouvert de convergence ?

Exercice 5

[id=326]

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ où (a_n) est la suite déterminée par

$$a_0 = \alpha, a_1 = \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 6

[id=327]

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} d(n) z^n \text{ et } \sum_{n \geq 1} s(n) z^n$$

où $d(n)$ et $s(n)$ désignent respectivement le nombre de diviseurs supérieurs à 1 de l'entier n et la somme de ceux-ci.

Exercice 7

[id=328]

On considère un nombre réel strictement positif a et soit (a_n) la suite réelle définie par $a_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$.

- 1 Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum a_n x^n$.
- 2 Donner un équivalent de a_n et retrouver le résultat de la question 1).
- 3 On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la fonction associée à la série entière en question. Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tends vers R à gauche.

Exercice 8

[id=329]

On considère la série entière $\sum a_n z^n$ où $a_n = \frac{1}{\sin(n\pi\sqrt{3})}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On note R son rayon de convergence

- 1 Prouver que $R \leq 1$.
- 2
 - a Prouver que : $\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}|t| \leq |\sin(t)| \leq |t|$.
 - b Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un et un seul entier naturel k_n tel que $(n\sqrt{3} - k_n)\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
 - c En déduire l'existence d'une suite (b_n) tel que $|a_n| \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b_n = O(n)$ quand n tends vers $+\infty$.
 - d En déduire que $R = 1$.

Exercice 9

[id=330]

- 1 Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes. On suppose que la série $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R . Déterminer les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n \ln(n) z^n$ et $\sum a_n H_n z^n$ où $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 2 Donner un équivalent simple de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$ quand x tend vers 1 à gauche.

Exercice 10

[id=331]

- 1 Soit une série entière de coefficient $a_n, n \geq 0$ de rayon de convergence R avec $R > 0$. Montrer que la série entière de coefficient $\frac{a_n}{n!}$ est de rayon de convergence infini.
- 2 Pour tout nombre réel t on pose :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x > r$, la fonction φ définie par

$$\varphi(t) = f(t)e^{-xt}$$

soit intégrable sur $[0, +\infty[$ et exprimer cette intégrale sous la forme de série entière en $\frac{1}{x}$.

Exercice 11

[id=332]

- 1 Montrer que, pour tout entier naturel p , il existe un polynôme R_p tel que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^p x^n = \frac{R_p(x)}{(1-x)^{p+1}}$$

Que vaut $R_p(1)$?

- 2 Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels admettant un développement asymptotique de la forme $a_n = P(n) + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où P est un polynôme de degré p
 - a Trouver le rayon de convergence R de la série entière de coefficient a_n
 - b Pour $x \in]-R, R[$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Montrer que S admet en R une limite infinie et en $-R$ une limite finie.

Exercice 12

[id=333]

Pour tout nombre réel x , on note $E(x)$ la partie entière de x . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$a_n = \frac{\sqrt{n} - E(\sqrt{n})}{n},$$

et on considère la série entière $a = \sum a_n x^n$.

1 Déterminer le rayon de convergence R de la série entière a .

2 On note :

$$\begin{cases} \mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} / \sum a_n z^n \text{ converge} \} \\ \mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} / \sum a_n z^n \text{ converge absolument} \} \end{cases}$$

Déterminer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$.

Exercice 13

[id=334]

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{n!}$$

et on considère la série entière $a = \sum a_n x^n$.

1 Déterminer le rayon de convergence de la série entière a .

2 Déterminer $\mathcal{C}_a = \{x \in \mathbb{R} / \sum a_n x^n \text{ CV} \}$ et $\mathcal{A}_a = \{x \in \mathbb{R} / \sum a_n x^n \text{ ACV} \}$. On pourra utiliser la formule de Stirling : quand n tends vers $+\infty$, on a $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Exercice 14

[id=335]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et on considère la série entière $a = \sum a_n x^n$ et la fonction associée : $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

1 Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

2 Étudier la convergence de $\sum a_n x^n$ aux points $x = -R$ et $x = R$.

3 a Soit $M > 0$. Montrer que :

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \exists \delta > 0, \forall x \in]1 - \delta, 1[, \quad \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \geq M.$$

b En déduire la limite de $f(x)$ quand x tends vers 1 à gauche.

4 On considère la série entière $\sum b_n x^n$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, b_n = \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right) x^n,$$

et soit $g : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} b_n x^n$ la fonction qui lui est associée.

a Démontrer que la série $\sum b_n x^n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

b En déduire que $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x) = 0$

Exercice 15

[id=336]

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, on pose : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

- 1 Soit $r \in]0, R[$. Montrer que :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

- 2 En déduire que si $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ alors, $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$.

- 3 **Application** : Supposons f bornée sur $\mathbb{C}$, développable en série entière de rayon de convergence infini. Montrer qu'alors f est constante.

Exercice 16

[id=337]

Soit $\sum u_n x^n$, ($n \geq 0$) une série entière de rayon de convergence 1, de somme $f(x)$ sur $] -1, 1[$. On suppose que : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = S$, et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = 0$.

- 1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, 1[$ et $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer que :

$$|S_n - f(x)| \leq (1-x) \left(\sum_{k=0}^n |k u_k| \right) + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} |k u_k| x^k$$

- 2 En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(S_n - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right) = 0$$

- 3 Montrer alors que la série $\sum u_n$ converge et a pour somme S

Exercice 17

[id=338]

On étudie la série entière $\sum a_n x^n$ avec :

$$a_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n} \right).$$

Préciser la convergence, le domaine de définition de la somme puis en donner un équivalent en 1

Exercice 18

[id=339]

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et soit z_0 un complexe tel que $|z_0| = R$ et la série numérique $\sum a_n z_0^n$ est convergente, alors la série entières $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur la segment $[0, z_0]$. On pourra remarquer qu'en posant $z = t z_0$, on peut se ramener à $R = 1$ et le segment $[0, 1]$

Exercice 19

[id=340]

Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue tel que : $\forall t \in [0, 1] \quad \varphi(t) > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t^n + \varphi(t)} dt$.

- 1 Calculer de façon très simple le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
- 2 On se propose de donner un équivalent simple de a_n et de déduire le résultat trouvé dans 1).
- a Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = \ln \frac{1 + \varphi(0)}{\varphi(0)}.$$

- b Retrouver le résultat de la question 1) ci-dessus.

Exercice 20

[id=341]

- 1 On considère une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R .
 - a Démontrer que pour tout nombre réel non nul q le rayon de convergence de la série entière $\sum q^n a_n x^n$ est $R_q = \frac{R}{|q|}$
 - b Démontrer que pour tout nombre réel α , le rayon de convergence de la série entière $\sum n^\alpha a_n x^n$ est $R_\alpha = R$.
- 2 Soit (α_n) une suite de complexes non nuls tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} \right| = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
 - a Démontrer que pour toute série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R , le rayon de convergence de $\sum \mu_n a_n x^n$ est $R_\alpha = \frac{R}{\ell}$.
 - b Retrouver le résultat établi dans 1)b) ci-dessus avec $\mu_n = n^\alpha$

Exercice 21

[id=342]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt$

- 1 Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
- 2 Étudier la convergence de $\sum a_n R^n$ et celle de $\sum (-1)^n a_n R^n$.

Exercice 22

[id=343]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$

- 1 Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
- 2 Étudier la convergence de $\sum a_n R^n$ et celle de $\sum (-1)^n a_n R^n$.

Exercice 23

[id=663]

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle n et f et g deux endomorphismes de E tel que $f \circ g = \theta$ et $f + g \in \mathbf{GL}(E)$. Démontrer que $\text{Im}(f) = \ker(g)$.

Une question qu'on peut ajouter :

Donner des exemples de tels endomorphismes.

Exercice 24

[id=677]

Soit la série entière de terme général

$$a_n = \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n t}{1+t} dt$$

Déterminer le rayon de convergence R de cette série et écrire sa somme sous forme d'intégrale lorsque x appartient à l'intervalle $[-R, R]$.