

Chapitre 10 : Suites séries de fonctions II

Exercice 1

[id=682]

On pose, pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

- 1 Montrer que F est continue sur $[0; +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$.
- 2 Montrer que F est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer $F''(x)$.
- 3 En déduire la valeur de $F(0)$ puis la valeur de l'intégrale convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Exercice 2

[id=13]

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit : $E_a = \{P \in E / (X - a) | P\}$. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $a \neq b$ alors $E = E_a + E_b$. La somme est-elle directe ?

Exercice 3

[id=300]

- 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt$ (intégrale de Wallis) et on se propose de prouver que quand n tends vers $+\infty$ on a $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
 - a Démontrer que $W_0 = \frac{\pi}{2}$, $W_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \pi 2$ et $W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)}{(2n+1)!}$.
 - b Prouver que la suite (W_n) est décroissante et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.
 - c Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$ (Remarquer que $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$).
 - d En déduire que quand n tends vers $+\infty$ on a $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
- 2 On se propose dans cette question de démontrer, en utilisant la question 1) et d'autres résultats que l'intégrale de Gauss $\alpha = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Pour cela on utilisera la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définie par : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq t \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } t > \sqrt{n} \end{cases}$
 - a Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers une application $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ à préciser.
 - b Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(t)| \leq e^{-t^2}$.
 - c En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ avec $I_n = \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$.
 - d Conclure.

Exercice 4

[id=301]

On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Démontrer que $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt = \frac{\pi^2}{6}$.

Indication : On pourra remarquer que : $\forall t \in]0, 1[, \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$.

Exercice 5

[id=302]

Montrer que $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

Indication : On pourra écrire $x^{-x} = e^{-x \ln(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x \ln(x))^n}{n!}$.

Exercice 6

[id=303]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+\dots+t^n} dt$$

et

$$v_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+\dots+t^n} dt$$

Démontrer que la série $\sum u_n$ est divergente alors que la série $\sum v_n$ est convergente.

Exercice 7

[id=304]

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t-1} e^{-nt} dt$.

- 1** Montrer l'existence de l'intégrale définissant S_n .
- 2** Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, on pose : $T(a, b) = \int_0^{+\infty} t^a e^{-bt} dt$. Simplifier l'expression de $T(a, b)$.
- 3** Montrer que pour tout naturel n , on a : $S_0 = p! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{p+1}} + S_n$.
- 4** Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$.
- 5** Montrer que $S_0 = p! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+1}}$.
- 6** Retrouver ce résultat en effectuant une intégration terme à terme et l'expression intégrale de S_0 .

Exercice 8

[id=305]

On pose

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \text{ pour } x \in]0, 1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

a) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

b) Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $]0, 1]$.

c) En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

Exercice 9

[id=306]

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)} \right)$$

a) Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$.

b) Déterminer la limite de sa somme en $+\infty$. On pourra exploiter la formule de Stirling

Exercice 10

[id=307]

Si $x > 1$, on pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

- 1** Quelle est la limite de $\zeta(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$?
- 2** Pour quels réels x la série $\sum \frac{\zeta(n)}{n} x^n$ converge-t-elle ?
- 3** On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{n} x^n.$$

Montrer que F est continue sur $[-1, 1[$ et de classe C^1 sur $] -1, 1[$

- 4** Démontrer que :

$$F(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\ln \left(\frac{p}{p-x} \right) - \frac{x}{p} \right)$$

Exercice 11

[id=308]

On se donne deux nombres réels p et q tel que $\sup(p, q) > 1$ et on considère la série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n(x) = \frac{x}{n^p + x^2 n^q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on note sa somme $f(x)$ pour tout x tel que la série $\sum f_n(x)$ est convergente.

- 1 Prouver que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, pour toutes valeurs de p et q .
- 2 Donner une condition suffisante et nécessaire sur p et q pour que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
- 3 Démontrer que si $p < q$ alors $\sum f_n$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $I_a = [a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.
- 4 Démontrer que si $p > 1$ alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. En déduire que dans ce cas f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- 5 Prouver que si $p \leq 1$ alors f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 12

[id=309]

On considère la fonction ζ de Riemann définie par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

- 1 Prouver que l'ensemble de définition de ζ est $D =]1, +\infty[$.
- 2 Démontrer que la série de fonctions définissant ζ converge normalement sur tout intervalle de la forme $D_a = [a, +\infty[$ avec $a > 0$. En déduire que ζ est continue sur D .
- 3 Démontrer que : $\forall x \in]1, +\infty[, 1 + \frac{2^{1-x}}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{x}{x-1}$.
- 4 En déduire que :
 - a Au voisinage de 1 à droite : $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$.
 - b Au voisinage de $+\infty$: $\zeta(x) \sim \frac{x}{x-1}$.
- 5 Démontrer que la série définissant ζ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$.
- 6 On considère la fonction η définie par $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.
 - a Prouver que l'ensemble de définition de η est $]0, +\infty[$.
 - b Démontrer que la série définissant η est uniformément convergente sur tout intervalle de la forme $I_a = [a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.
 - c Prouver que η est continue sur $]0, +\infty[$.
 - d Démontrer que : $\forall x \in]1, +\infty[, \zeta(x) = \frac{2^x}{2-2^x} \eta(x)$.

Exercice 13

[id=310]

On considère la fonction Γ définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

- 1 Déterminer l'ensemble de définition D de Γ
- 2 Montrer que Γ est continue sur tout segment $[a, b]$ contenu dans D .
- 3 Montrer que Γ est de classe C^1 puis C^2 sur tout segment $[a, b] \subset D$. En déduire que Γ est de classe C^2 sur D et déterminer Γ' et Γ''
- 4 Montrer que Γ est une fonction convexe.

- 5 Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- 6 Calculer $\Gamma(1)$, et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(n+1) = n!$
- 7 Déterminer un équivalent de $\Gamma(x)$ lorsque x tend vers 0. En déduire la limite de Γ en 0.
- 8 Donner la limite de Γ en $+\infty$, ainsi que celle de $x \mapsto \frac{\Gamma(x)}{x}$

Exercice 14

[id=311]

Dans cet exercice, on admet la formule de Sterling : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, quand n tends vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(t) = \frac{t^n e^{-t}}{n!}$

- 1 Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!$.
- 2 Etudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions (f_n) . On note $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$, quand celle-ci existe.
- 3 Comparer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$
- 4 Que peut-on en conclure ?

Exercice 15

[id=312]

Montrer que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \sin nx}$$

est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 16

[id=313]

Etudier l'ensemble de définition, la continuité et la dérivabilité de la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$$

Exercice 17

[id=314]

Montrer que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{n}(1+nx^2)}$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 18

[id=315]

- 1 Montrer que $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$. On note alors $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.
- 2 Montrer que, pour $t > 0$, $\frac{1}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}$.
- 3 En déduire que pour tout $x > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t-1}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{(n+1)^{x+1}}$.

Exercice 19

[id=316]

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-t^2+itx)}dt$$

- 1 Existence de f ?
- 2 Continuité de f ?
- 3 Dérivabilité de f ?
- 4 En intégrant par partie, montrer que f vérifie : $xf(x) + f'(x) = 0$
- 5 Trouver f sachant que $f(0) = \sqrt{\pi}$

Exercice 20

[id=317]

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}dt$.

- 1 Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- 2 Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner $f'(x)$ sous forme intégrale.
- 3 Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \arctan(x)$.

Exercice 21

[id=318]

Montrer que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} \sin(nx)$ est définie sur $[0, +\infty[$ et qu'elle est continue sur $]0, +\infty[$. Expliciter $S(x)$. La fonction S est-elle continue en 0?

Exercice 22

[id=319]

- 1 Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de parties compactes de $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} K_n \neq \emptyset \\ K_{n+1} \subset K_n \end{cases}.$$

Démontrer que $\cap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.

- 2** Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq f_{n+1}$ et (f_n) converge simplement vers f , application de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ et que les f_n et f sont continues sur $[a, b]$. On se propose de prouver que la convergence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur $[a, b]$. Pour cela, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $g_n = f - f_n$.
- a** Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} g_n \geq 0 \\ g_{n+1} \leq g_n \end{cases}$.
 - b** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application g_n est bornée sur $[a, b]$. On note alors $\alpha_n = \sup_{x \in [a, b]} g_n(x)$.
 - c** Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell \geq 0$. On suppose désormais que $\ell > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $K_n = \{x \in [a, b] / g_n(x) \geq \frac{\ell}{2}\}$.
 - d** Démontrer que $\cap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ et en déduire une contradiction puis conclure.

Exercice 23

[id=320]

En utilisant le théorème de convergence dominée calculer les limites suivantes :

- 1** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} (\sin(t))^n dt$
- 2** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^n + e^t} dt$

Exercice 24

[id=321]

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suites d'applications de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On suppose que :

- (1) les applications f_n et f sont continues sur $[a, b]$;
- (2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est croissante sur $[a, b]$;
- (3) la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $[a, b]$ vers f .

Démontrer que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers f .

Exercice 25

[id=322]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = nx \sin(x) e^{-nx}$.

- 1** Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction f nulle sur $\mathbb{R}_+$.
- 2** Démontrer que la fonction $t \mapsto u(t) = te^{-t}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. En déduire que (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[1, +\infty[$.
- 3** **a** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est dérivable sur $[0, 1]$ et calculer $f'_n(x)$, pour tout $x \in [0, 1]$.
- b** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [1, \frac{1}{n}]$, on a $f'_n(x) > 0$.

- c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$. En écrivant $f'_n(x)$ sous la forme $f'_n(x) = g_n(x)h_n(x)$ avec

$$h_n(x) = \tan(x) - \frac{x}{nx-1}$$

et g_n est une fonction à préciser et en calculant $f'_n\left(\frac{2}{n}\right)$ étudier les variations de f_n sur $[0, 1]$.

- d) Démontrer que (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$.
- 4) Dédurre de ce qui précède que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

Exercice 26

[id=323]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^n} dt$.

- 1) Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
- 2) Démontrer que quand n tend vers $+\infty$, on a $I_n \sim \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

Exercice 27

[id=544]

En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

Exercice 28

[id=659]

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application f_n définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}.$$

- 1) Tracer l'allure du graphe de f_n .
- 2) Soit $x \in \mathbb{R}$, fixé. La série $\sum f_n(x)$ est-elle convergente ?
- 3) Démontrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \varepsilon_n.$$

- 4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|.$$

Dédurre M_n de l'étude des variations de f_n . La série $\sum M_n$ est-elle convergente ?