Si $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, on note $U=(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$. Donc , $\forall n\in\mathbb{N}, U_n=\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

On note $\widehat{u}$ la fonction réelle de variable réelle définie par $\widehat{u}(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}x^n$. En particulier, on dispose de la fonction réelle de variable réelle $\widehat{U}$ définie par $\widehat{U}(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{U_n}{n!}x^n$.

On dit que la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $B-$sommable si la fonction $\widehat{U}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et si $x\mapsto e^{-x}\widehat{U}(x)$ admet une limité réelle quand x tends vers $+\infty$. Dans ce cas, on pose : $S_B(u)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\widehat{U}(x)$.

On dit que la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $C-$sommable si la fonction $\widehat{u}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\widehat{u}(x)dx$ est convergente. Dans ce cas, on note : $S_C(u)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\widehat{u}(x)dx$.

Partie I

1. On considère la suite $u=(u_n)$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=(-1)^n$.
   (a) Montrer que u est $B-$sommable et calculer $S_B(u)$.
   (b) Montrer que u est $C-$sommable et calculer $S_C(u)$.
2. Soit a un nombre réel non nul. On considère la suite $u=(u_n)$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=a^n$.
   (a) Etudier, suivant les valeurs de a, la $B-$sommabilité de u et calculer $S_B(u)$ quand u est $B-$sommable.
   (b) Etudier, suivant les valeurs de a, la $C-$sommabilité de u et calculer $S_C(u)$ quand u est $C-$sommable.

Partie II

1. On considère une suite (u_n) *bornée*. Determiner l'ensemble de définition D de la fonction $\widehat{u}$ et justifier que $\widehat{u}$ est continue sur D.
2. On considère une suite (u_n) telle que la série numérique $\sum u_n$ est *convergente*. Determiner les ensembles de définition respectifs des fonctions $\widehat{u}$ et $\widehat{U}$.
3. On considère une suite (u_n) telle que la série numérique $\sum u_n$ est *convergente*.
   Montrer que $S_B(u)=L$, où $L=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
4. On considère une suite (u_n) telle que la série numérique $\sum u_n$ est *absolument* convergente.
   Montrer que $S_C(u)=L$, où $L=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
5. Donner un exemple d'une suite $u=(u_n)$ tel que u est $C-$sommable et la série $\sum u_n$ est divergente.
6. On considère une suite (u_n) telle que la série numérique $\sum u_n$ est *convergente*. On pose $U_{-1}=0$ et on considère la fonction B réelle de variable réelle définie par :

$$B(x)=e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{U_{n-1}}{n!}x^n.$$

(a) Montrer que B est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, B(x) = \int_0^x \left(e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n dt \right).$$

(c) Prouver l'égalité : $S_C(u) = L$ où $L = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

7. Soit $\sum a_n x^n, n \geq 0$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et on note f sa somme. Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$, on pose alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

8. Montrer que pour tout x tel que $|x| < R$, on a : $\int_0^{+\infty} e^{-t} G(xt) dt = f(x)$.

Partie III

1. On note $H(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ pour $x \neq 0$ et $H(0) = \frac{1}{2}$.
   (a) Montrer que la fonction H est développable en séries entière au voisinage de 0.
   (b) On note $\sum a_n x^n, (n \geq 0)$ le développement en série entière de H. Préciser son rayon de convergence.
2. (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum n! a_n x^n, (n \geq 0)$. Exprimer sa somme $h(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n! a_n x^n$, à l'aide de fonctions usuelles.
3. (a) Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a : $h(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} H(xt) dt$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $xh(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{x}} H(u) du$
4. On note $\Psi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{x}} H(u) du$. En utilisant la caractérisation séquentielle de la limite, montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \Psi(x) = \int_0^{+\infty} H(u) du$.
5. (a) Montrer que la fonction Ψ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, et qu'elle est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad xy'' + 2y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

   (b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur $]0, +\infty[$.
   (c) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2} du$