

# Table des matières

|                                                                                |          |
|--------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>14 Équations différentielles</b>                                            | <b>3</b> |
| 14.1 Généralités                                                               | 3        |
| 14.1.1 Terminologie                                                            | 3        |
| 14.1.2 Problème de Cauchy                                                      | 4        |
| 14.1.3 Équation intégrale associée à une équation différentielle               | 4        |
| 14.2 Équation différentielle linéaire                                          | 4        |
| 14.2.1 Définitions                                                             | 4        |
| 14.2.1.1 Version avec les endomorphismes                                       | 4        |
| 14.2.1.2 Version matricielle                                                   | 4        |
| 14.2.2 Principe de superposition                                               | 4        |
| 14.2.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire                                   | 5        |
| 14.2.4 Conséquence : Structure des espaces de solutions                        | 5        |
| 14.2.4.1 Structure                                                             | 5        |
| 14.2.4.2 Système fondamental de solutions de l'équation homogène               | 6        |
| 14.2.4.3 Équation avec second membre : Méthode de la variation des constantes  | 6        |
| 14.2.5 Système différentiel linéaire à coefficients constants                  | 7        |
| 14.2.5.1 Système homogène                                                      | 7        |
| 14.2.5.2 Système avec second membre                                            | 7        |
| 14.2.5.3 Cas particulier important : $A$ est diagonalisable.                   | 8        |
| 14.2.6 Équation différentielle scalaire linéaire d'ordre $n$                   | 10       |
| 14.2.6.1 Cas général                                                           | 10       |
| 14.2.6.2 Cas $n = 2$                                                           | 13       |
| 14.2.6.3 Équation différentielle linéaire d'ordre $n$ à coefficients constants | 14       |



# Chapitre 14

## Équations différentielles

Dans tout ce qui suit,  $E$  désigne un espace vectoriel normé de dimension finie.

### 14.1 Généralités

#### 14.1.1 Terminologie

$\Omega$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R} \times E$  ou un ensemble de la forme  $I \times E$  où  $I$  est intervalle de  $\mathbb{R}$ . La donnée d'une application  $f : \Omega \rightarrow E$  permet de parler de l'équation différentielle  $(E) \quad y' = f(t, y)$ .

##### Definition 14.1.1

On appelle solution de  $(E)$  tout couple  $(J, \varphi)$  où  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\varphi$  une application de  $J$  vers  $E$  dérivable sur  $J$  tel que :  $\forall t \in J, (t, \varphi(t)) \in \Omega$  et  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ .

##### Definition 14.1.2

Si  $(J_1, \varphi_1)$  et  $(J_2, \varphi_2)$  sont deux solutions de  $(E)$  tel que  $J_2 \subset J_1$  et  $\varphi_1|_{J_2} = \varphi_2$ , on dit que  $(J_1, \varphi_1)$  est un prolongement de  $(J_2, \varphi_2)$  ou que cette dernière est une restriction de  $(J_1, \varphi_1)$ .

##### Definition 14.1.3

On appelle solution maximale de  $(E)$  toute solution  $(J, \varphi)$  tel que si  $(J_1, \varphi_1)$  est une solution de  $(E)$  tel que  $(J, \varphi)$  est une restriction de  $(J_1, \varphi_1)$  alors  $J = J_1$  et  $\varphi = \varphi_1$ .

**Remarque.** Si on note  $\mathcal{S}_{(E)}$  l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = f(t, y)$$

et  $\preceq$  la relation définie sur  $\mathcal{S}_{(E)}$  par : pour tout  $\gamma_1 = (I_1, \varphi_1)$  et  $\gamma_2 = (I_2, \varphi_2)$  éléments de  $\mathcal{S}_{(E)}$  :

$$\gamma_1 \preceq \gamma_2 \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 \subset I_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2|_{I_1} \end{cases}$$

alors  $\preceq$  est une relation d'ordre sur  $\mathcal{S}_{(E)}$  et une solution maximale de  $(E)$  n'est autre qu'un élément maximal de l'ensemble ordonné  $(\mathcal{S}_{(E)}, \preceq)$ .

##### Definition 14.1.4

On appelle courbe intégrale ou trajectoire associée à une solution  $\gamma = (J, \varphi)$  la partie  $\mathcal{C}_\gamma$  de  $\Omega$  définie par :

$$\mathcal{C}_\gamma = \{(t, \varphi(t)) / t \in J\}$$

### 14.1.2 Problème de Cauchy

Si  $(t_0, y_0) \in \Omega$ , le problème  $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$  est appelé problème de Cauchy ou équation différentielle avec condition initiale. Une solution du problème de Cauchy ci-dessus est un couple  $(J, \varphi)$  tel que  $(J, \varphi)$  est une solution de l'équation différentielle  $y' = f(t, y)$  et  $t_0 \in J$  et  $\varphi(t_0) = y_0$

### 14.1.3 Équation intégrale associée à une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = f(t, y)$$

où  $f : \Omega \rightarrow E; (t, y) \mapsto f(t, y)$  est une application continue sur  $\Omega$ .

Si  $(I, \varphi)$  est une solution de  $(E)$  alors pour  $t_0 \in I$  fixé, on a pour tout  $t \in I$  :

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(u, \varphi(u)) du$$

On dit que  $(I, \varphi)$  est solution de l'équation intégrale associée à  $(E)$  et  $(t_0, y_0) \in \Omega$  :

$$(\mathcal{E}\mathcal{I}) \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du$$

## 14.2 Équation différentielle linéaire

### 14.2.1 Définitions

#### 14.2.1.1 Version avec les endomorphismes

Soit  $I$  un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$ ,  $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$  et  $b : I \rightarrow E$  des applications. L'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = a(t)(y) + b(t)$$

représente un cadre général d'équation différentielle linéaire avec second membre. L'équation différentielle :

$$(EH) \quad y' = a(t)(y)$$

est appelée équation différentielle homogène associée à  $(E)$ . On se contente de parler de  $(E)$  car  $(EH)$  en est une quand  $b$  est nulle.

Notons que si  $t \in I$  alors  $a(t) \in \mathcal{L}(E)$ , donc  $a(t)$  est un endomorphisme de  $E$ . Ainsi  $a(t)(y)$  est en fait la composée de  $a(t)$  et l'application  $y$ .

Si  $T$  est un endomorphisme de  $E$ , on convient parfois de noter  $T.x$  au lieu de  $T(x)$  pour tout vecteur  $x$  de  $E$ , l'image de  $x$  par  $T$ . Ainsi on convient d'écrire l'équation différentielle comme suit :

$$(E) \quad y' = a(t).y + b(t).$$

Une solution de  $(E)$  est un couple  $(J, \varphi)$  avec  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenu dans  $I$  et  $\varphi : J \rightarrow E$  une application dérivable sur  $J$  tel que :  $\forall t \in J, \quad \varphi'(t) = a(t)(\varphi(t)) + b(t)$ .

#### 14.2.1.2 Version matricielle

On considère  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(K)$  et l'équation différentielle :

$$(E) \quad Y' = A(t)Y + B(t)$$

c'est la version matricielle de l'équation différentielle linéaire ci-dessus, appelé aussi système différentiel linéaire.

### 14.2.2 Principe de superposition

On considère un intervalle non trivial  $I$  de  $\mathbb{R}$ . On se propose de trouver les solutions d'une équation différentielle linéaire

$$(E) \quad y' = a(t)(y) + b(t)$$

dans le cas où  $b(t) = b_1(t) + b_2(t)$ , ce qui permet par exemple de déterminer des solutions quand c'est plus facile d'en trouver pour chacune des équations différentielles :

$$(E_k) \quad y' = a(t)(y) + b_k(t)$$

pour  $k \in \{1, 2\}$ . On donne la proposition suivante appelée *principe de superposition*.

**Proposition 14.2.1.** On considère les équations différentielles :

$$(E_1) \quad y' = a(t)(y) + b_1(t)$$

$$(E_2) \quad y' = a(t)(y) + b_2(t)$$

$$(E) \quad y' = a(t)(y) + b(t)$$

avec  $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$  une application de  $I$  vers  $\mathcal{L}(E)$  et  $b_1, b_2, b : I \rightarrow E$  des applications de  $I$  vers  $E$ . Si  $b = b_1 + b_2$  et si  $Y_1$  et  $Y_2$  sont des solution respectives de  $(E_1)$  et  $(E_2)$  sur  $I$  alors  $y = y_1 + y_2$  est une solution de  $(E)$  sur  $I$ .

**Preuve.** En effet si  $y_1$  et  $y_2$  sont des solutions respectives de  $(E_1)$  et  $(E_2)$  sur  $I$  alors elles sont dérivables sur  $I$  et pour tout  $t \in I$ , on a 
$$\begin{cases} y_1'(t) = a(t)(y_1(t)) + b_1(t) \\ y_2'(t) = a(t)(y_2(t)) + b_2(t) \end{cases}$$
. Par sommation, et par linéarité de  $a(t)$ , il vient  $y'(t) = (y_1 + y_2)'(t) = y_1'(t) + y_2'(t) = a(t)(y_1(t) + y_2(t)) + b_1(t) + b_2(t)$ , donc  $y'(t) = a(t)(y(t)) + b(t)$ , donc  $y$  est bien une solution de  $(E)$  sur  $I$ . ■

### 14.2.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Dans tout ce qui suit  $I$  est un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$ ,  $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ ,  $b : I \rightarrow E$  des applications et on considère l'équation différentielle :  $(E) \quad y' = a(t).y + b(t)$ .

**Théorème 14.2.1.** Si  $a$  et  $b$  sont continues sur l'intervalle  $I$  alors pour tout  $(t_0, y_0) \in I \times E$ , le problème de Cauchy

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} y' = a(t).y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale. De plus cette solution est globale, c'est-à-dire que son intervalle est  $I$  tout entier.

**Remarques.** 1. On note les différences suivantes avec le théorème de Cauchy-Lipschitz non linéaire (C.L.N.L.) :

- Dans le cas non linéaire,  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R} \times E$  alors que pour le cas linéaire  $\Omega = I \times E$ , en particulier  $\Omega$  n'est pas forcément un ouvert puisque l'intervalle  $I$  est quelconque de  $\mathbb{R}$ .
- Au niveau des hypothèses, C.L.L. exige seulement la continuité de  $a$  et  $b$ , alors que C.L.N.L. exige que  $f$  soit de classe  $C^1$ .
- L'intervalle de la solution maximale varie dans le cas de C.L.N.L. alors que pour C.L.L. c'est toujours  $I$  (intervalle où  $a$  et  $b$  sont définies et continues)

2. L'équation différentielle  $y' = a(t).y + b(t)$  s'écrit :  $y' = f(t, y)$  avec  $f(t, y) = a(t)(y) + b(t)$  donc on ne sort pas du cadre général sauf que  $\Omega = I \times U$  n'est pas forcément un ouvert de  $\mathbb{R} \times E$ .

### 14.2.4 Conséquence : Structure des espaces de solutions

#### 14.2.4.1 Structure

On note  $n = \dim(E)$  et on note  $\mathcal{S}_{(EH)}$  et  $\mathcal{S}_{(E)}$  l'ensemble des solutions maximales de  $(EH)$  et de  $(E)$  respectivement. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire montrer que toutes les solutions maximales de  $(EH)$  et  $(E)$  sont définies sur  $I$  tout entier, c'est pour cela qu'on se contentera de noter  $\varphi$  au lieu de  $(I, \varphi)$  une solution ;

**Théorème 14.2.2.**  $\mathcal{S}_{(EH)}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et si  $\varphi_0$  est une solution particulière de  $(E)$  alors  $\mathcal{S}_{(E)} = \varphi_0 + \mathcal{S}_{(EH)}$  est un espace affine de dimension  $n$  de direction  $\mathcal{S}_{(EH)}$

**Preuve.**  $\mathcal{S}_{(EH)}$  est un sous-espace vectoriel de  $C^1(I, E)$ , ensemble des applications de classe  $C^1$  de  $I$  vers  $E$ , car :

- l'application nulle  $\theta : I \rightarrow E; t \mapsto \theta(t) = 0$  est une solution de  $(EH)$ .
- Si  $\varphi_1, \varphi_2$  sont deux solutions de  $(EH)$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$  alors  $\varphi = \varphi_1 + \alpha\varphi_2$  est par simple vérification une solution de  $(EH)$ .

L'application  $\Psi : \mathcal{S}_{(EH)} \rightarrow E; \varphi \mapsto \varphi(t_0)$  est un isomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathcal{S}_{(EH)}$  vers  $E$ . En effet,  $\Psi$  est une application car si  $\varphi \in \mathcal{S}_{(EH)}$  alors  $\varphi$  est bien définie sur  $I$ , en particulier au point  $t_0$ . L'application  $\Psi$  est linéaire car si  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}_{(EH)}$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ , alors  $\Psi(\varphi_1 + \alpha\varphi_2) = (\varphi_1 + \alpha\varphi_2)(t_0) = \varphi_1(t_0) + \alpha\varphi_2(t_0) = \Psi(\varphi_1) + \alpha\Psi(\varphi_2)$ .

$\Psi$  est bijective car si  $y \in E$ , on sait d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire qu'il existe une et une unique solution  $\varphi$  de  $(EH)$  sur  $I$  tel que  $\varphi(t_0) = y$ .

Ainsi  $\mathcal{S}_{(EH)}$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ .

Soit  $\phi_0$  une solution particulière de  $(E)$ . Si  $\phi$  est une solution de  $(E)$  alors pour tout  $t \in I$ , on a :

$$\begin{cases} \phi'(t) = a(t) \cdot \phi(t) + b(t) \\ \phi_0'(t) = a(t) \cdot \phi_0(t) + b(t) \end{cases}, \text{ de sorte que la différence } \varphi = \phi - \phi_0 \text{ est une solution de } (EH). \text{ On a bien}$$

$\phi = \varphi + \phi_0$ . Réciproquement si  $\varphi$  est une solution de  $(EH)$  et si on pose  $\phi = \varphi + \phi_0$  alors il est aisé de vérifier que  $\phi$  est une solution de  $(E)$ , donc  $\mathcal{S}_{(E)} = \phi_0 + \mathcal{S}_{(EH)}$  ■

#### 14.2.4.2 Système fondamental de solutions de l'équation homogène

##### Definition 14.2.1

Soit  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  une famille de solutions de  $(EH)$ . Si la famille  $\Phi$  est libre, elle est appelée système fondamental de solutions de  $(EH)$

Un système fondamental de solutions (S.F.S.) de  $(EH)$  est donc une base de  $\mathcal{S}_{(EH)}$ . Si  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est un S.F.S. de  $(EH)$  alors  $\mathcal{S}_{(EH)} = \{\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k / (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n\}$

**Proposition 14.2.2.** Soit  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  une famille de solutions de  $(EH)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $\Phi$  est un S.F.S. de  $(EH)$ .
- (2) Pour tout  $t \in I$ , la famille  $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$  est une famille libre de  $E$ .
- (3) Il existe  $t_0 \in I$  tel que la famille  $\Phi(t_0) = (\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$  est une famille libre de  $E$ .

**Preuve.** (1)  $\Rightarrow$  (2) : Supposons  $\Phi$  est un S.F.S de  $(EH)$  et soit  $t \in I$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  tel que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(t) = 0$ . Il en découle que  $\varphi = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$  est une solution de  $(EH)$  avec la condition initiale  $\varphi(t) = 0$ . Or la fonction nulle  $\theta$  est une solution vérifiant la même condition initiale. Par unicité, en vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, on a  $\varphi = \theta$  et par liberté de  $\Phi$ , on a  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3) : C'est clair.

(3)  $\Rightarrow$  (1) : Supposons qu'il existe  $t_0 \in I$  tel que  $\Phi(t_0)$  est une famille libre de  $E$ . Alors  $\Phi$  est libre car si  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont des scalaires tel que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k = \theta$ , en appliquant à  $t_0$  on a  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ , ce qui prouve que l'on a (1). ■

La proposition 14.2.2 est très utile pour savoir si une famille de solutions est une base en étudiant uniquement la liberté d'une famille de vecteurs. Considérons par exemple le système différentiel :  $Y' = AY$  avec  $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ce qui précède nous dit que l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de ce système est un espace vectoriel de dimension 2. Remarquons que  $\phi_1(t) = (e^{2t}, 2e^{2t})$  et  $\phi_2(t) = (e^{3t}, 3e^{3t})$  sont deux solutions du système. Par ailleurs, on a  $\phi_1(0) = (1, 2)$  et  $\phi_2(0) = (1, 3)$  et  $\det((1, 2), (1, 3)) = 1 \neq 0$ , donc la famille  $(\phi_1(0), \phi_2(0))$  est libre et  $(\phi_1, \phi_2)$  est un S.F.S. du système ci-dessus, donc sa solution générale et  $\varphi(t) = \lambda\phi_1(t) + \mu\phi_2(t); \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , soit :

$$\varphi(t) = (\lambda e^{2t} + \mu e^{3t}, 2\lambda e^{2t} + 3\mu e^{3t}), \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

#### 14.2.4.3 Équation avec second membre : Méthode de la variation des constantes

**Théorème 14.2.3.** Si  $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  est un système fondamental de solutions de  $(EH)$  alors

1. Pour tout application  $f \in \mathcal{C}^0(I, E)$  il existe une et une seule famille  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  d'application de  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$  tel que  $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k$ .
2. Si de plus  $f$  est de classe  $C^1$  alors les  $\alpha_k$  sont de classe  $C^1$ .

Une conséquence de cette proposition est de dire que si  $f$  est une solution particulière de  $(E)$  alors comme  $f$  est de classe  $C^1$  elle s'écrit de façon unique :

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k$$

Alors  $f$  est solution de  $(E)$ , si et seulement si :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = a(t)f(t) + b(t)$$

Comme  $b$  est continue, elle s'écrit de manière unique :

$$b = \sum b_k \phi_k \quad \text{avec} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, b_k \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}).$$

Il en découle que  $f$  est solution de  $(E)$  si et seulement si :

$$\sum_{k=1}^n \alpha'_k \phi_k = \sum_{k=1}^n b_k \phi_k$$

Par unicité donnée par le théorème ci-dessus,  $f$  est solution de  $(E)$  si et seulement si :

$$\begin{cases} f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k \\ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha'_k = b_k \end{cases}$$

Ceci permet de dire que la solution générale de  $(E)$  est

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \left( \beta_k + \int_{t_0}^t b_k(u) du \right) \phi_k(t)$$

avec  $t_0 \in I$  et  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \beta_k \in \mathbb{K}$ .

### 14.2.5 Système différentiel linéaire à coefficients constants

Il s'agit des systèmes de la forme :

$$(E) \quad Y' = AY + B(t)$$

avec  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ .

#### 14.2.5.1 Système homogène

**Théorème 14.2.4.** La solution générale de  $(EH)$  est :

$$Y(t) = e^{tA} \cdot \Lambda$$

avec  $\Lambda \in \mathbb{K}^n$ .

**Preuve.** Supposons que  $Y$  est une solution de  $(EH)$  et soit  $Z$  définie par  $Z(t) = e^{-tA} \cdot Y(t)$ , alors  $Z'(t) = -Ae^{-tA}Y(t) + e^{-tA} \cdot Y'(t) = 0$ , donc  $Z$  est constante sur  $I$ , donc il existe  $\Lambda \in \mathbb{K}^n$  tel que  $Z(t) = \Lambda$  pour tout  $t \in I$ , ce qui fournit :

$$\forall t \in I, \quad Y(t) = e^{tA} \cdot \Lambda$$

■

#### 14.2.5.2 Système avec second membre

**Théorème 14.2.5.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $I$  un intervalle.

1. Pour toute application continue  $Y \in \mathcal{C}^0(I, E)$  il existe une et une seule application continue  $\Theta : I \rightarrow E$  tel que  $\forall t \in I, Y(t) = e^{tA} \cdot \Theta(t)$ .
2. Si de plus  $Y$  est de classe  $C^1$  alors  $\Theta$  est de classe  $C^1$ .

Si  $Y \in C^0(I, E)$  alors  $Y$  s'écrit de façon unique  $Y(t) = e^{tA} \cdot \Theta(t)$ .  $Y$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $\Theta$  de classe  $C^1$  et :

$$\Theta'(t) = b(t)$$

où  $b(t) = e^{-tA} B(t)$  pour tout  $t \in I$ , si et seulement si  $\Theta(t) = \Lambda + \int_{t_0}^t e^{-uA} B(u) du$  avec  $\Lambda \in E$ , ce qui fournit la solution générale :

$$Y(t) = e^{tA} \left( \Lambda + \int_{t_0}^t e^{-uA} B(u) du \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t_0 \in I \\ \Lambda \in E \end{cases}$$

#### 14.2.5.3 Cas particulier important : $A$ est diagonalisable.

Dans tout ce qui suit on suppose que  $A$  est diagonalisable et que  $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$  est une base de vecteurs propres associée aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

**Théorème 14.2.6.** La solution générale de  $(EH)$  est :

$$Y(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{\lambda_k t} \Gamma_k$$

Pour chercher la solution générale on écrit

$$Y(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(t) e^{\lambda_k t} \Gamma_k$$

avec les  $\alpha_k : I \rightarrow \mathbb{K}$  continues : l'existence est garantie par le fait que si  $(y_k)$  sont les composantes de  $Y$  dans la base  $\Gamma$ , on pose  $\alpha_k(t) = y_k(t) e^{-\lambda_k t}$  pour tout  $t \in I$ .

On a alors  $Y$  est solution de  $(E)$  si et seulement si

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \alpha'_k(t) = B_k(t) e^{-\lambda_k t}$$

où les  $B_k$  sont les composantes de  $B$  dans la base  $\Gamma$ . Ceci fournit la solution générale de  $(E)$  :

$$Y(t) = \sum_{k=1}^n \left( \mu_k + \int_{t_0}^t B_k(u) e^{-\lambda_k u} du \right) e^{\lambda_k t} \Gamma_k \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t_0 \in I \\ \mu_k \in \mathbb{K}, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{cases}$$

**Exemple.** Résolvons le système linéaire :

$$\begin{cases} x' = x - y + z + e^t \\ y' = -x + y + z \\ z' = -x - y + 3z + e^{3t} \end{cases}$$

Le système se traduit en l'équation différentielle linéaire :

$$(E) \quad Y' = AY + B(t)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Commençons par résoudre l'équation différentielle linéaire homogène associée :

$$(EH) \quad Y' = AY.$$

Le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 1 & 1 & X-3 \end{vmatrix}$$

En effectuant les opérations  $L_k \leftarrow L_k - L_3$  pour  $k \in \{1, 2\}$ , il vient :

$$\chi_A(X) = (X-2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-2)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ X-2 & 1 & X-3 \end{vmatrix}$$

Finalement, il vient :

$$\chi_A = (X-1)(X-2)^2,$$

donc les valeurs propres de  $A$  sont  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$  dont des vecteurs propres associés sont  $\Gamma_1 =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  donc la forme générale de la solution de l'équation homogène est

$Y(t) = \alpha_1 e^t \Gamma_1 + \alpha_2 e^{2t} \Gamma_2 + \alpha_3 e^{2t} \Gamma_3$ . Soit  $Y$  une solution de l'équation  $(E)$  et  $\lambda(t) = e^{-tA} Y(t)$  alors  $\Lambda$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , et comme  $Y$  est solution de  $(E)$ , on a  $\Lambda'(t) = e^{-tA} B(t)$ . En projetant la relation ci-dessus  $\Lambda'(t) = e^{-tA} B(t)$  dans la base  $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ , il vient, en notant  $b_k(t)$  les composantes de  $B(t)$  relativement à  $\Gamma$  :

$$\Lambda'(t) = e^{-tA} \sum_{k=1}^3 b_k(t) \Gamma_k = \sum_{k=1}^3 b_k(t) e^{-tA} \Gamma_k$$

et comme :

$$e^{-tA} \Gamma_k = \lambda_k e^{-\lambda_k t}$$

on a :

$$\Lambda'(t) = \sum_{k=1}^3 b_k(t) e^{-t\lambda_k} \Gamma_k$$

Les composantes  $b_k(t)$  sont donnée par la relation :

$$\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

où  $P$  est la matrice de passage de la base canonique à la base  $B$  de sorte que :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et par suite on obtient :

$$\begin{aligned} \Lambda'(t) &= (e^t - e^{3t})e^{-t} \Gamma_1 + e^{3t}e^{-2t} \Gamma_2 + (e^{3t} - e^t)e^{-2t} \Gamma_3 \\ &= (1 - e^{2t})\Gamma_1 + e^t \Gamma_2 + (e^t - e^{-t})\Gamma_3 \end{aligned}$$

En intégrant, il vient :

$$\Lambda(t) = \left( \alpha_1 + t - \frac{e^{2t}}{2} \right) \Gamma_1 + (\alpha_2 + e^t) \Gamma_2 + (\alpha_3 + e^t + e^{-t}) \Gamma_3$$

avec  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ .

Il en découle que la solution générale de  $(E)$  est :

$$Y(t) = \left( \alpha_1 e^t + t e^t - \frac{e^{3t}}{2} \right) \Gamma_1 + (\alpha_2 e^{2t} + e^{3t}) \Gamma_2 + (\alpha_3 e^{2t} + e^{3t} + e^t) \Gamma_3$$

avec  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ . ce qui donne en définitif :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{2t} + t e^t + \frac{1}{2} e^{3t} \\ y(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_3 e^{2t} + t e^t + e^t + \frac{1}{2} e^{3t} \\ z(t) = \alpha_1 e^t + (\alpha_2 + \alpha_3) e^{2t} + t e^t + e^t + \frac{3}{2} e^{3t} \end{cases}$$

avec  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ .

## 14.2.6 Équation différentielle scalaire linéaire d'ordre $n$

### 14.2.6.1 Cas général

Les équations différentielles de la forme :

$$(E) \quad a_n(t)y^{(n)} + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)$$

où  $a_0, \dots, a_n$  et  $b$  sont des applications d'un intervalle  $I$  vers  $\mathbb{K}$ , continues sur  $I$ . On s'intéresse uniquement au cas où :

$$\forall t \in I, \quad a_n(t) \neq 0$$

L'équation s'écrit donc :

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{a}_k(t) y^{(k)} + \widetilde{b}(t),$$

avec

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \widetilde{a}_k = -\frac{a_k}{a_n} \quad \text{et} \quad \widetilde{b} = \frac{b}{a_n}$$

Désormais on considère donc l'équation différentielle de la forme :

$$(E) \quad y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)} + b(t).$$

dont l'équation différentielle homogène associée est :

$$(EH) \quad y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)}.$$

On rappelle que  $a_0, \dots, a_{n-1}$  et  $b$  sont des applications continues de  $I$  vers  $\mathbb{K}$ .

On associe à cette équation différentielle, le système différentiel :

$$(\widehat{E}) \quad Y' = A(t).Y + B(t)$$

$$(\widehat{EH}) : \quad Y' = A(t).Y$$

avec pour tout  $t \in I$  :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0(t) & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  est une application de classe  $C^n$ , on note :

$$\widehat{f} = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

On dispose de la proposition suivante :

**Proposition 14.2.3.** Avec les notations ci-dessus, on a :

1. Pour tout  $f \in C^n(I, \mathbb{K})$ ,  $\widehat{f} \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$
2. Pour tout  $f \in C^n(I, \mathbb{K})$  :

$$\begin{cases} f \in \mathcal{S}_{(E)} \Leftrightarrow \widehat{f} \in \mathcal{S}_{(E)} \\ \text{et} \\ f \in \mathcal{S}_{(EH)} \Leftrightarrow \widehat{f} \in \widehat{\mathcal{S}_{(EH)}} \end{cases}$$

3. L'application :

$$\Phi : \mathcal{S}_{(EH)} \rightarrow \widehat{\mathcal{S}_{(EH)}}; y \mapsto \widehat{y}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Grâce à cette proposition on peut ramener l'étude d'une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  à celle d'un système différentielle linéaire d'ordre  $n$ . On obtient en particulier la version du théorème de Cauchy-Lipschitz associée à ce cas.

**Théorème 14.2.7.** Pour tout  $t_0 \in I$  et pour tout  $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{K}$ , il existe une et une seule solution  $\varphi$  de  $(E)$  définie sur  $I$  tel que :

$$\begin{cases} \varphi(t_0) = y_0 \\ \varphi'(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

On en déduit en particulier la :

**Proposition 14.2.4.** On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)} + b(t)$$

et l'équation différentielle homogène associés :

$$(EH) \quad y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)}$$

où les  $a_k$  et  $b$  sont des applications continues d'un intervalle  $I$  vers  $\mathbb{K}$ . On note  $\mathcal{S}_{(E)}$ . Une solution de  $(E)$  est une application  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $n$  fois dérivable tel que :

$$\forall t \in I, \quad \varphi^{(n)}(t) = \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) \varphi^{(k)}(t) \right) + b(t).$$

On note  $(\mathcal{S}_{(EH)})$  les ensembles de solutions respectifs de  $(E)$  et  $(EH)$ . Alors :

1.  $\mathcal{S}_{(EH)}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .
2. Si  $\phi_1$  est une solution particulière de  $(E)$  alors  $\mathcal{S}_{(E)} = \phi_1 + \mathcal{S}_{(EH)}$ . En particulier  $\mathcal{S}_{(EH)}$  est un espace affine de direction  $\mathcal{S}_{(EH)}$ .

**Remarque.** Si  $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  est une famille de solutions de  $(EH)$ . Pour tout  $t \in I$ , on pose :

$$W_\Phi(t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \cdots & \phi_n(t) \\ \phi_1'(t) & \cdots & \phi_n'(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

$W_\Phi(t)$  s'appelle le wronskien.

Alors,  $\Phi$  est un système fondamental de solutions de  $(EH)$  si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$(1) \quad \forall t \in I, \quad W_\Phi(t) \neq 0$$

$$(1) \quad \exists t \in I, \quad W_\Phi(t) \neq 0$$

La méthode de variation des constantes conduit au résultat suivant :

**Théorème 14.2.8.** On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)} + b(t)$$

et l'équation différentielle homogène associés :

$$(EH) \quad y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)}$$

où les  $a_k$  et  $b$  sont des applications continues d'un intervalle  $I$  vers  $\mathbb{K}$ .

Soit  $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  un système fondamental de solutions de  $(EH)$  et  $\varphi$  une application de classe  $C^n$  de  $I$  vers  $\mathbb{K}$ .

Pour que  $\varphi$  soit solution de  $(E)$ , il faut et il suffit qu'il existe des applications  $\alpha_k : I \rightarrow \mathbb{K}$  de classe  $C^1$  sur  $I$  tel que :

$$\phi = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k \quad \text{et} \quad (1) : \begin{cases} \alpha_1' \phi_1 + \cdots + \alpha_n' \phi_n = 0 \\ \alpha_1' \phi_1' + \cdots + \alpha_n' \phi_n' = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1' \phi_1^{(n-2)} + \cdots + \alpha_n' \phi_n^{(n-2)} = 0 \\ \alpha_1' \phi_1^{(n-1)} + \cdots + \alpha_n' \phi_n^{(n-1)} = b \end{cases}$$

**Preuve.** Il suffit d'appliquer la variation des constantes à  $(E)$ . On note  $B$  l'application de  $I$  vers  $\mathbb{K}^n$  tel que :

$$\forall t \in I, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

On sait que  $B$  s'écrit de façon unique :

$$(2) \quad B = \sum_{k=1}^n \beta_k \widehat{\phi_k}$$

c'est-à-dire :

$$(2)' \quad \begin{cases} \beta_1 \phi_1 + \cdots + \beta_n \phi_n = 0 \\ \beta_1 \phi_1' + \cdots + \beta_n \phi_n' = 0 \\ \vdots \\ \beta_1 \phi_1^{(n-2)} + \cdots + \beta_n \phi_n^{(n-2)} = 0 \\ \beta_1 \phi_1^{(n-1)} + \cdots + \beta_n \phi_n^{(n-1)} = b \end{cases}$$

avec les  $\beta_k$  des applications continues de  $I$  vers  $\mathbb{K}$  et que la solution générale de  $(\widehat{E})$  est de la forme :

$$\widehat{\phi} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \widehat{\phi}_k$$

où les  $\alpha_k : I \rightarrow \mathbb{K}$  de classe  $C^1$  tel que :

$$(3) \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \alpha_k' = \beta_k$$

Tenant compte de  $(2)'$  et  $(3)$  ci-dessus, on obtient le système  $(1)$  ci-dessus du théorème. ■

#### 14.2.6.2 Cas $n = 2$

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' = a(t)y' + b(t)y + c(t)$$

C'est un cas particulier du cas général ci-dessus. On note en particulier :

1. L'ensemble des solution  $\mathcal{S}_{(EH)}$  de  $(EH)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 2, c'est-à-dire un plan vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .
2. l'ensemble des solutions de  $(E)$  est un plan affine de direction  $\mathcal{S}_{(EH)}$  et si  $\varphi_1$  est une solution particulière de  $(E)$  alors  $\mathcal{S}_{(E)} = \varphi + \mathcal{S}_{(EH)}$
3. Si  $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$  est une famille de solutions de  $(EH)$  et si pour tout  $t \in I$ , on pose :

$$W_{\Phi}(t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{vmatrix} = \phi_1(t)\phi_2'(t) - \phi_1'(t)\phi_2(t)$$

$W_{\Phi}(t)$  s'appelle le wronskien de  $\Phi$  au point  $t$ .

Alors  $\Phi$  est un système fondamental de solutions de  $(EH)$  si et seulement si l'une des conditions suivantes est vraie :

- (a)  $\forall t \in I, \quad W_{\Phi}(t) \neq 0$
- (b)  $\exists t \in I, \quad W_{\Phi}(t) \neq 0$

4. La solution générale de  $(E)$  est donnée par :

$$\varphi(t) = \alpha_1(t)\phi_1(t) + \alpha_2(t)\phi_2(t)$$

avec :  $\lambda_1, \alpha_2 : I \rightarrow \mathbb{K}$  des applications de classe  $C^1$  tel que :

$$\alpha_1, \alpha_2 \in C^1(I, \mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha_1'(t)\phi_1(t) + \alpha_2'(t)\phi_2(t) = 0 \\ \alpha_1'(t)\phi_1'(t) + \alpha_2'(t)\phi_2'(t) = c(t) \end{cases}$$

Autrement dit :

$$\alpha_1'(t) = \frac{-c(t)\phi_2(t)}{\phi_1(t)\phi_2'(t) - \phi_1'(t)\phi_2(t)} \quad \text{et} \quad \alpha_2'(t) = \frac{c(t)\phi_1(t)}{\phi_1(t)\phi_2'(t) - \phi_1'(t)\phi_2(t)}$$

et par suite la solution générale de  $(E)$  est :

$$y(t) = \left( \lambda_1 - \int_{t_0}^t \frac{c(u)\phi_2(u)}{W(u)} du \right) \phi_1(t) + \left( \lambda_2 + \int_{t_0}^t \frac{c(u)\phi_1(u)}{W(u)} du \right) \phi_2(t)$$

avec :

$$\begin{cases} \forall u \in I, W(u) = \phi_1(u)\phi_2'(u) - \phi_1'(u)\phi_2(u) \\ t_0 \in I \\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \end{cases}$$

**Méthode pour la recherche d'une deuxième solution de l'équation homogène (appelée : méthode de descente de degré).**

On considère l'équation différentielle homogène :

$$(EH) : y'' = a(t)y' + b(t)y$$

où  $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$  continues, et on suppose qu'elle admet une solution  $\phi_1$  tel que :

$$\forall t \in I, \quad \phi_1(t) \neq 0$$

Posons  $y = z\phi_1$  alors :

$$y' = z'\phi_1 + z\phi_1'$$

$$y'' = z''\phi_1 + 2z'\phi_1' + z\phi_1''$$

De  $y'' = ay' + by$  on déduit :

$$z''\phi_1 + 2z'\phi_1' + z\phi_1'' = az'\phi_1 + az\phi_1' + bz\phi_1$$

Or  $\phi_1'' =$ , donc :

$$z''\phi_1 + 2z'\phi_1' + za\phi_1' + zb\phi_1 = az'\phi_1 + az\phi_1' + bz\phi_1$$

Finalement :  $z''\phi_1 + 2z'\phi_1' = az'\phi_1$  donc en posant  $w = z'$ , il vient :

$$w' = \frac{a\phi_1 - 2\phi_1'}{\phi_1}w$$

C'est une équation différentielle de premier ordre qu'on peut résoudre facilement, ce qui permet de déterminer  $z$  donc  $y$  donc une seconde solution  $\phi_2 = y$  de l'équation différentielle  $(EH)$

#### 14.2.6.3 Équation différentielle linéaire d'ordre $n$ à coefficients constants

Dans tout ce qui suit  $n$  est un entier naturel tel que  $n \geq 2$ ,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $b : I \rightarrow \mathbb{K}$  est une application continue sur  $I$ . On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} + b(t)$$

où  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$  donnés. On considère l'équation différentielle homogène associée :

$$(EH) : y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}$$

et on se propose de résoudre  $(EH)$  en déterminant un système fondamental de solutions de  $(EH)$ .

**Théorème 14.2.9.** Toute solution de  $(EH)$  est une application de classe  $C^\infty$  de  $I$  vers  $\mathbb{K}$ , autrement dit :

$$\mathcal{S}_{(EH)} \subset C^\infty(I, \mathbb{K})$$

**Preuve.** Si  $y$  est une solution de  $(EH)$  alors  $y$  est de classe  $C^n$  par définition. Une récurrence immédiate permet de prouver que  $y$  est de classe  $C^k$  pour tout  $k \geq n$ . ■

Soit  $D$  l'application de  $C^\infty(I, \mathbb{K})$  vers  $C^\infty(I, \mathbb{K})$  défini par  $D(f) = f'$  pour tout  $f \in C^\infty(I, \mathbb{K})$ . Il est clair que l'application  $D$  est un endomorphisme de  $C^\infty(I, \mathbb{K})$ , par suite si on pose  $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ , on a  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $P(D)$  est aussi un endomorphisme de  $C^\infty(I, \mathbb{K})$ .

**Théorème 14.2.10.** On a  $\mathcal{S}_{(EH)} = \ker(P(D))$

**Preuve.** Soit  $y \in \mathbb{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ , alors : puisque pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a  $y^{(k)} = D^k(y)$ , on a :

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S}_{(EH)} &\Leftrightarrow y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} \\ &\Leftrightarrow D^n(y) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k(y) \\ &\Leftrightarrow (D^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k)(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow P(D)(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow y \in \ker(D) \end{aligned}$$

■

Supposons que le polynôme  $P$  est scindé et que :

$$P = \prod_{k=1}^s (X - \lambda_k)^{m_k}$$

avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  les racines deux à deux distinctes de  $P$  et  $m_k$  leur ordres de multiplicité respectifs. Le lemme des noyaux permet d'écrire :

$$\mathcal{S}_{(EH)} = \bigoplus_{k=1}^s \ker(D - \lambda_k \text{Id})^{m_k}$$

où  $\text{Id}$  est l'application identique de  $C^\infty(I, \mathbb{K})$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ , on se propose de déterminer  $\ker(D - \lambda \text{Id})^m$ . Soit  $f \in \mathbb{C}^\infty(I, \mathbb{K})$  et  $g$  l'application définie par  $g(t) = f(t)e^{-\lambda t}$ , alors on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g^{(k)}(t) = (D - \lambda \text{Id})^k(f)(t)e^{-\lambda t}$$

Par récurrence :

Pour  $k = 0$  ça donne  $g(t) = f(t)e^{-\lambda t}$ , c'est la définition de  $g$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que la propriété est vraie.

$$D^{k+1}(g)(t) = [D \circ (D - \lambda \text{Id})^k - \lambda(D - \lambda \text{Id})^k](f)(t)e^{-\lambda t} = (D - \lambda \text{Id})^{k+1}(f)(t)e^{-\lambda t}$$

Il en découle que  $f \in \ker(D - \lambda \text{Id})^m \Leftrightarrow D^m(g) = 0 \Leftrightarrow g \in C^\infty(I, \mathbb{K}) \cap \mathbb{K}_{m-1}[t]$ .

Ceci permet de dire que :

$$\ker(D - \lambda \text{Id})^m = \{Q(t)e^{\lambda t} / Q \in \mathbb{K}_{m-1}[X]\}$$

ce qui permet d'énoncer le :

**Théorème 14.2.11.** Un système fondamental de solutions de  $(EH)$  est :

$$(t \mapsto t^j e^{\lambda_k t})_{\substack{1 \leq k \leq s \\ 0 \leq j \leq m_k - 1}}$$

Autrement dit, la solution générale de  $(EH)$  est :

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^s \sum_{j=0}^{m_k-1} a_{kj} t^j e^{\lambda_k t}$$

où  $a_{kj} \in \mathbb{K}$  pour tout  $(k, j) \in \llbracket 1, s \rrbracket \times \llbracket 0, m_k - 1 \rrbracket$

**Remarque.** Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , le polynôme  $P$  est toujours scindé, donc le théorème 14.2.11 ci-dessus s'applique. Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $P$  non scindé, on cherche les solutions complexes et on considère les parties réelles et imaginaires de  $t^j e^{\lambda t}$  pour toute racine complexe non réelle  $\lambda$  de  $P$ . Notons que si  $\lambda$  est une telle racine alors  $\bar{\lambda}$  aussi, il ne faut prendre qu'une seule car  $\lambda$  et  $\bar{\lambda}$  fournissent les mêmes parties réelles et imaginaire à un signe près.

Plus précisément, si :

$$\prod_{j=1}^r (X - \mu_j)^{m_j} \prod_{k=1}^s (X - \lambda_k)^{m_k} (X - \bar{\lambda}_k)^{m_k}$$

avec  $\mu_j \in \mathbb{R}$  et  $\lambda_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  tel que  $\mathcal{I}m(\lambda_k) > 0$  et les  $(\mu_j)_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$  et les  $(\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k)_{k \in \llbracket 1, s \rrbracket}$  deux à deux distinctes alors un système fondamentale de solutions de  $(EH)$  est :

$$(t \mapsto t^\ell e^{\mu_j t}; t \mapsto t^\nu e^{\alpha_k t} \cos(b_k t), t \mapsto t^\nu e^{\alpha_k t} \sin(b_k t)) \begin{matrix} 1 \leq j \leq r \\ 0 \leq \ell < m_j \\ 1 \leq k \leq s \\ 0 \leq \nu < m_k \end{matrix}$$