

# Table des matières

## 10 Suites et séries de fonctions (II) :

|                                                                     |          |
|---------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Dérivabilité et Intégration.</b>                                 | <b>3</b> |
| 10.1 Convergence uniforme et intégration                            | 3        |
| 10.1.1 Segment , convergence uniforme                               | 3        |
| 10.1.2 Intervalle quelconque                                        | 4        |
| 10.1.2.1 Théorème de convergence dominée                            | 4        |
| 10.1.2.2 Intégration terme à terme                                  | 4        |
| 10.2 Dérivation                                                     | 5        |
| 10.2.1 Théorème pour les fonctions de classe $C^1$                  | 5        |
| 10.2.2 Extension des théorèmes ci-dessus : classe $C^k, k \geq 1$ . | 5        |
| 10.3 Intégrale avec paramètre                                       | 6        |
| 10.3.1 Continuité                                                   | 6        |
| 10.3.1.1 Énoncés des théorèmes                                      | 6        |
| 10.3.1.2 Exemples                                                   | 6        |
| 10.3.2 Dérivabilité                                                 | 7        |
| 10.3.2.1 Dérivées partielles                                        | 7        |
| 10.3.2.2 Les théorèmes                                              | 7        |



# Chapitre 10

## Suites et séries de fonctions (II) : Dérivabilité et Intégration.

### 10.1 Convergence uniforme et intégration

#### 10.1.1 Segment , convergence uniforme

**Proposition 10.1.1.** Soient  $I$  un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0$  un point de  $I$  et  $(f_n : I \rightarrow F)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions continues de  $I$  dans  $F$ . On suppose que la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur tout segment  $[a, b]$  contenu dans  $I$  vers une fonction  $f : I \rightarrow F$ . Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  et  $x$  dans  $I$ , on pose :  $g_n(x) = \int_{x_0}^x f_n(t)dt$  et  $g(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ . Alors la suite de fonctions  $(g_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément vers  $g$  sur tout segment contenu dans  $I$ . En particulier si  $(f_n : [a, b] \rightarrow E)_{n \geq 0}$  avec les  $f_n$  continues sur le segment  $[a, b]$  et la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f : [a, b] \rightarrow E$  sur  $[a, b]$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt = \int_a^b f(t)dt.$$

**Preuve.** Soit  $(a, b) \in I$  tel que  $a < b$  et  $[a, b] \subset I$ . Comme  $x_0 \in I$ , il existe  $\alpha, \beta \in I$  tel que  $[\alpha, \beta] \subset I$  et  $x_0, a, b \in [\alpha, \beta]$ . Pour tout  $x \in [a, b]$ , on a

$$\begin{aligned} \|g_n(x) - g(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^x (f_n(t) - f(t))dt \right\| \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} \|f_n(t) - f(t)\|dt \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} \sup_{u \in [\alpha, \beta]} \|f_n(u) - f(u)\|dt \\ &= (\beta - \alpha) \|f_n - f\|_{\infty, [\alpha, \beta]} \end{aligned}$$

et comme  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur le segment  $[\alpha, \beta]$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n - g\|_{\infty, [a, b]} = 0.$$

■

**Proposition 10.1.2.** Soient  $I$  un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0$  un point de  $I$  et  $(f_n : I \rightarrow F)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions continues de  $I$  dans  $F$ . On suppose que la suite  $\sum f_n$  converge uniformément sur tout segment  $[a, b]$  contenu dans  $I$  vers une fonction  $f : I \rightarrow F$ . Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  et  $x$  dans  $I$ , on pose :  $g_n(x) = \int_{x_0}^x f_n(t)dt$  et  $g(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ . Alors la série de fonctions  $\sum g_n$  converge uniformément vers  $g$  sur tout segment contenu dans  $I$ . En particulier si  $(f_n : [a, b] \rightarrow E)_{n \geq 0}$  avec les  $f_n$  continues sur le segment

$[a, b]$  et la série  $\sum f_n$  converge uniformément vers  $f : [a, b] \rightarrow E$  sur  $[a, b]$ , alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_a^b f_n(t)dt \right).$$

## 10.1.2 Intervalle quelconque

### 10.1.2.1 Théorème de convergence dominée

**Théorème 10.1.1.** Soit  $I$  un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$  et  $(f_n : I \rightarrow \mathbb{K})_n$  une suite d'applications continues par morceaux tel que :

1. La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  continue par morceaux sur  $I$ .
2. Il existe une application  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux intégrable sur  $I$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leq \varphi; \text{ (hypothèse de domination)}$$

Alors :

1. les  $f_n$  et  $f$  sont intégrables sur  $I$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f = \int_I \lim f_n$ .

### 10.1.2.2 Intégration terme à terme

On rappelle que  $[0, +\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ .  $I$  désigne un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$  et si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une application positive non intégrable alors  $\int_I f(t)dt = +\infty$ . On va donner deux théorèmes concernant l'intégration terme à terme.

Le premier théorème concerne les fonctions positives  $\mathcal{CM}$  sur l'intervalle  $I$ .

**Théorème 10.1.2.** Soit  $(f_n : I \rightarrow \mathbb{K})_{n \geq 0}$  une suite d'applications  $\mathcal{CM}$  sur  $I$  tel que la série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  vers une application  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ . Alors dans  $[0, +\infty]$ , on a

$$(1) \quad \int_I f(t)dt = \int_I \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt$$

De plus  $f$  est intégrable sur  $I$  si et seulement si la série  $\sum \int_I f_n(t)dt$  est convergente et dans ce cas on a l'égalité (1) ci-dessus dans  $\mathbb{R}_+$ .

Le deuxième théorème concerne les fonctions à valeurs dans  $\mathbb{K}$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , qui sont  $\mathcal{CM}$  sur  $I$  non forcément positives.

**Théorème 10.1.3.** Soit  $(f_n : I \rightarrow \mathbb{K})_n$  une suite de fonctions de l'intervalle  $I$  vers  $\mathbb{K}$  tel que :

1. La série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  vers une application  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  continue par morceaux sur  $I$ .
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'application  $f_n$  est continue par morceaux sur  $I$  et  $f_n$  est intégrable sur  $I$ .
3. La série numérique  $\sum \int_I |f_n|$  est convergente.

Alors :

1. La fonction  $f$  est intégrable sur  $I$ .
2. On a :  $\int_I f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt$ . Autrement dit :

$$\int_I \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_I f_n(t)dt \right)$$

## 10.2 Dérivation

### 10.2.1 Théorème pour les fonctions de classe $C^1$

**Proposition 10.2.1.** Soit  $I$  un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$  et  $(f_n)$  une suite d'applications de  $I$  vers  $F$  tel que :

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  ;
2. La suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $I$  vers une application  $f : I \rightarrow F$ .
3. La suite de fonctions  $(f'_n)$  converge simplement vers une application  $g : I \rightarrow F$  et la convergence est uniforme sur tout segment contenu dans  $I$

Alors :

1. La convergence de  $(f_n)$  vers  $f$  est uniforme sur tout segment  $[a, b] \subset I$ .
2. La fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $I$ .
3.  $f' = g$ , c'est-à-dire :  $\left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n$ .
4. La convergence de  $(f_n)$  vers  $f$  est uniforme sur tout segment  $[a, b] \subset I$ .

**Proposition 10.2.2.** Soit  $I$  un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$  et  $(f_n)$  une suite d'applications de  $I$  vers  $F$  tel que :

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  ;
2. La série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  vers une application  $f : I \rightarrow F$ .
3. La suite de fonctions  $\sum f'_n$  converge simplement vers une application  $g : I \rightarrow F$  et la convergence est uniforme sur tout segment contenu dans  $I$

Alors :

1. La fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $I$ .
2.  $f' = g$ , c'est-à-dire :

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$$

3. La convergence de  $\sum f_n$  vers  $f$  est uniforme sur tout segment  $[a, b] \subset I$ .

### 10.2.2 Extension des théorèmes ci-dessus : classe $C^k, k \geq 1$ .

**Théorème 10.2.1.** Soit  $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$  et  $(f_n : I \rightarrow F)_n$  une suite d'applications de  $I \rightarrow F$  tel que :

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est de classe  $C^k$  sur  $I$ .
2. Pour tout  $p \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ , la suite de fonctions  $((f_n)^{(p)})_n$  converge simplement vers une fonction  $f_p : I \rightarrow F$ .
3. La suite de fonctions  $((f_n)^{(k)})_n$  converge simplement vers une fonction  $g : I \rightarrow F$  et la convergence est uniforme sur tout segment contenu dans  $I$ .

Alors :

1.  $f = f_0$  est de classe  $C^k$  sur  $I$ .
2.  $f^{(k)} = g$ . Autrement dit :

$$\left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)^{(k)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n)^{(k)}.$$

3. La convergence de  $(f_n^{(j)})$  vers  $f^{(j)}$  est uniforme sur tout segment  $[a, b] \subset I$  pour tout  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ .

**Théorème 10.2.2.** Soit  $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$  et  $(f_n : I \rightarrow F)_n$  une suite d'applications de  $I \rightarrow F$  tel que :

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est de classe  $C^k$  sur  $I$ .
2. Pour tout  $p \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ , la série de fonctions  $\sum (f_n)^{(p)}$  converge simplement vers une fonction

$$f_p : I \rightarrow F.$$

3. La série de fonctions  $\sum (f_n)^{(k)}$  converge simplement vers une fonction  $g : I \rightarrow F$  et la convergence est uniforme sur tout segment contenu dans  $I$ .

Alors :

1.  $f = f_0$  est de classe  $C^k$  sur  $I$ .
2.  $f^{(k)} = g$ . Autrement dit :

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (f_n)^{(k)}.$$

3. Pour tout  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$  la convergence de  $\sum (f_n)^{(j)}$  vers  $g_p$  est uniforme sur tout segment  $[a, b] \subset I$ .

## 10.3 Intégrale avec paramètre

### 10.3.1 Continuité

#### 10.3.1.1 Énoncés des théorèmes

**Théorème 10.3.1.** Soit  $A$  une partie de  $E$ ,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$  une application tel que :

- (1) Pour tout  $x \in A$ , l'application  $f(x, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{K}; t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ .
- (2) Pour tout  $t \in I$ , l'application  $f(\cdot, t) : A \rightarrow \mathbb{K}; x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $A$ .
- (3) Il existe une application  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux, intégrable tel que :

$$\forall (x, t) \in A \times I, \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t) \text{ (hypothèse de domination)}$$

Alors : la fonction  $F : A \rightarrow \mathbb{K}; x \mapsto F(x) = \int_I f(x, t) dt$  est bien définie et continue sur  $A$ .

**Remarques.** Les remarque suivantes sont les plus utilisées en pratique :

1. Si on remplace l'hypothèse de domination (3) par :
- (3)' : Pour toute partie compacte  $K$  de  $E$  tel que  $K \subset A$ , il existe une application  $\varphi_K : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux et intégrable sur  $I$  tel que :

$$\forall (x, t) \in K \times I, \quad |f(x, t)| \leq \varphi_K(t)$$

La conclusion du théorème 10.3.1 reste valable.

2. Si  $I = [a, b]$  est un segment de  $\mathbb{R}$ , la condition
- (4) : L'application  $(x, t) \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $A \times [a, b]$  implique les conditions (1),(2) et (3)' par suite la conclusion du théorème 10.3.1 reste valable
3. Une conséquence immédiate : Si  $f : [c, d] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  est une application continue alors  $F : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$  est continue sur  $[c, d]$ .

#### 10.3.1.2 Exemples

Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t^2 + x} dt$$

Alors  $f(x, t) = \frac{\sin(xt)}{t^2 + x}$  vérifie

- $\forall x > 0, t \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .
- $\forall t > 0, x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .
- Hypothèse de domination : Pour tout  $a > 0$ , on a :

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[ \times ]0, +\infty[ \quad |f(x, t)| \leq \frac{1}{t^2 + a} = \varphi_a(t)$$

avec  $\varphi_a$  continue et intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

### 10.3.2 Dérivabilité

#### 10.3.2.1 Dérivées partielles

Si  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$  est une application et  $A = (a, b) \in I \times J$ .

- L'application :  $\varphi_A : x \mapsto f(x, b)$  de  $I$  vers  $\mathbb{K}$  est une fonction d'une variable réelle définie sur  $I$ .

Si  $\varphi_A$  est dérivable au point  $a$ , on note

$$\varphi'_A(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

le nombre dérivée de  $\varphi_A$  au point  $a$ .

Si  $\varphi_A$  est  $k$  fois dérivable au point  $a$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note :

$$\varphi_A^{(k)}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, b)$$

- L'application :  $\psi_A : y \mapsto f(a, y)$  de  $J$  vers  $\mathbb{K}$  est une fonction d'une variable réelle définie sur  $J$ .

Si  $\psi_A$  est dérivable au point  $b$ , on note

$$\psi'_A(b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

le nombre dérivée de  $\psi_A$  au point  $b$ .

Si  $\psi_A$  est  $k$  fois dérivable au point  $b$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note :

$$\psi_A^{(k)}(b) = \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(a, b)$$

#### 10.3.2.2 Les théorèmes

**Théorème 10.3.2.** Soit  $I$  et  $J$  des intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f : J \times I \rightarrow K$  une application tel que :

- (1) Pour tout  $x \in J$ , l'application  $f(x, \cdot) : I \rightarrow K; t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux et intégrable sur  $I$ .
- (2) Pour tout  $t \in I$ , l'application  $f(\cdot, t) : J \rightarrow \mathbb{K}; x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $C^1$  sur  $J$  et pour tout  $x \in J$ , l'application  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot) : t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ .
- (3) Il existe une application  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux, intégrable tel que :

$$\forall (x, t) \in A \times I, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t) \text{ (hypothèse de domination)}$$

Alors :

1. L'application  $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $J$ .
2. Pour tout  $x \in J$ , on a (Formule de Leibniz) :

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

**Remarque.** Si  $(J_k)_{k \in K}$  est une famille d'intervalles de  $\mathbb{R}$  tel que  $\bigcup_{k \in K} \text{Int}(J_k) = J$  (où  $\text{Int}(J_k)$  désigne l'intérieur de  $J_k$ ), et si on remplace la condition (3) ci-dessus par la condition (3)' suivante : Pour tout  $k \in K$ , il existe une application  $\psi_k, \mathcal{CM}$  sur et intégrable sur  $I$  tel que :

$$\forall (x, t) \in J_k \times I, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi_k(t)$$

alors la conclusion reste la même.

**Théorème 10.3.3.** Soit  $k$  un entier naturel non nul,  $I$  et  $J$  des intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$  une application à valeurs réelles ou complexes tel que :

1. Pour tout  $p \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ , et tout  $t \in I$ , l'application  $f(\cdot, t) : J \rightarrow \mathbb{K}; x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $C^p$  et pour tout  $x \in J$ , l'application  $\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, \cdot) : t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t)$  est continue par morceaux et intégrable sur  $I$ .
2. Pour tout  $t \in I$ , l'application  $f(\cdot, t)$  est de classe  $C^k$  et pour tout  $x \in J$ , l'application  $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \cdot)$  est continue par morceaux.

3. Il existe  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux et intégrable sur  $I$  tel que :

$$\forall (x, t) \in J \times I, \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \psi(t)$$

Alors :

1.  $F : J \rightarrow \mathbb{K}; x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est de classe  $C^k$  sur  $J$ .
2. On a la formule de Leibniz :

$$\forall x \in J, \quad F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$$