

Table des matières

8	SÉRIES DANS	3
	UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ,	
	FAMILLES SOMMABLES	
	DE NOMBRES COMPLEXES.	3
8.1	Ensembles dénombrables	3
8.2	Familles sommables de nombres complexes	5
8.2.1	Familles sommables de nombres réels positifs	5
8.2.2	Familles sommables de nombres complexes	6
8.2.2.1	Définitions	6
8.2.3	Propriétés de la somme	7
8.2.4	Suites doubles	7
8.2.5	Série produit de Cauchy	8
8.3	Séries dans un espace vectoriel normé de dimension finie	9
8.3.1	Généralités	9
8.3.1.1	Définition, exemples	9
8.3.1.2	Structure d'espace vectoriel	10
8.3.2	Convergence	10
8.3.3	Série absolument convergente	10
8.4	Séries dans une algèbre normée de dimension finie	11
8.4.1	algèbre normée de dimension finie	11
8.4.1.1	Série de Neumann	11
8.4.1.2	Série exponentielle	12
8.4.1.3	Cas particulier des matrices carrées	13

Chapitre 8

SÉRIES DANS UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ, FAMILLES SOMMABLES DE NOMBRES COMPLEXES.

8.1 Ensembles dénombrables

Definition 8.1.1

Soit E un ensemble.

On dit que E est dénombrable s'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \rightarrow E$.

On dit que E est au plus dénombrable si E est fini ou dénombrable.

Remarques. 1. E est dénombrable s'il existe une bijection g de E vers $\mathbb{N}$.

2. Si E est dénombrable alors si $f : \mathbb{N} \rightarrow E$ est une bijection, on a :

$$E = \{f(n)/n \in \mathbb{N}\}.$$

3. si A et B sont équipotentes alors A est dénombrable si et seulement si B est dénombrable.

Proposition 8.1.1. Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables.

Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Preuve.

• $\mathbb{N}$ est dénombrable puisque l'application identique de $\mathbb{N}$ est une bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

• $\mathbb{Z}$ est dénombrable, en effet, soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}; n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} + 1 & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{si } n \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases}$. C'est bien une application.

Elle est injective car si $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = f(m)$ alors si $f(n) \in \mathbb{N}^*$ forcément n et m sont pairs et alors $\frac{n}{2} + 1 = \frac{m}{2} + 1$ et $n = m$. Si, par ailleurs, $f(n) \in \mathbb{Z}_-$ alors n et m sont impairs et $\frac{n-1}{2} = \frac{m-1}{2}$, donc $m = n$.

f est surjective car si $k \in \mathbb{Z}$, deux cas sont possibles :

- Si $k > 0$ alors $2(k-1) \in \mathbb{N}$ et $f(2(k-1)) = k$.

- Si $k \leq 0$ alors $-2k+1 \in \mathbb{N}$ et $f(-2k+1) = k$

• Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$. Posons

$$\begin{cases} f(0) = \min(A) \\ \forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) = \min(A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}) \end{cases}.$$

f est bien définie puisque toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

- L'application f est injective car, par construction, elle est strictement croissante.
- L'application f est surjective car si $a \in A$, deux cas sont possibles :
 - Si $a = f(0)$ terminé.
 - Si $a \neq f(0)$ alors $a > f(0)$. Soit

$$I_a = \{k \in \mathbb{N} / a > f(k)\}.$$

I_a est une partie de $\mathbb{N}$, non vide car $0 \in I_a$ et majorée car si $k \in I_a$ on a $k \leq f(k)$ car f application strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ et comme $f(k) < a$, on a $k < a$ donc a est un majorant de I_a . Il en découle que I_a admet un plus grand élément p et on a alors $f(p) < a \leq f(p+1)$ donc $a \in A \setminus \{f(0), \dots, f(p)\}$ et comme $f(p+1) = \min(A \setminus \{f(k) / 0 \leq k \leq p\})$, on a $f(p+1) \leq a$ donc $a = f(p+1)$ et f est surjective, donc bijective. ■

Proposition 8.1.2. On a :

- $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathbb{N}^p$ est dénombrable.
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable.

Preuve. Soit $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}; (m, n) \mapsto f(m, n) = 2^m(2n+1) - 1$; Alors f est une bijection. En effet f est injective car si $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ tel que $f(m, n) = f(p, q)$ alors $2^m(2n+1) = 2^p(2q+1)$; si $m = 0$ alors forcément $p = 0$ car sinon on aurait l'égalité d'un entier pair et un autre impair. Donc $m = p = 0$, par suite $n = q$. Si $m \neq 0$ alors $2^m | 2^p(2q+1)$ et $2^m \wedge (2q+1) = 1$; par le lemme de Gauss, il en découle que $2^m | 2^p$ donc $m \leq p$; de manière similaire on a aussi $p \leq m$ donc $p = m$ et par suite $n = q$.
 f est surjective car : Soit $x \in \mathbb{N}$ alors :

- Si $x = 0$, on a $f(0, 0) = 0$.
- Si $x \geq 1$ alors $x+1 \geq 1$ et x s'écrit de façon unique

$$x+1 = \prod_{k=1}^{+\infty} p_k^{\alpha_k}$$

qui est la décomposition en produit de nombre premiers de $x+1$ avec $\alpha_k = 0$ si p_k ne divise pas $x+1$. On a $p_1 = 2$ et p_k impair pour tout $k > 1$ de sorte que $x+1 = 2^m u$ avec $m = \lambda_1$ et $m = \prod_{k=2}^{+\infty} p_k^{\alpha_k}$ est impair donc de la forme $2n+1$, de cette façon on a :

$$x = 2^n(2m+1) - 1 = f(n, m)$$

■

Proposition 8.1.3. Si A et B sont deux ensembles dénombrables alors $A \times B$ est dénombrable

Preuve. Si A et B sont dénombrables il existe $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow B$ applications bijectives; soit

$$h : \mathbb{N}^2 \rightarrow A \times B; (m, n) \mapsto h(m, n) = (f(m), g(n))$$

alors h est une bijection de $\mathbb{N}^2$ vers $A \times B$; et comme par la proposition 8.1.2 l'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable alors $A \times B$ est dénombrable. ■

Proposition 8.1.4. Toute union au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est un ensemble au plus dénombrable. Si au moins un des ensembles est dénombrable leur union est dénombrable.

Notons les précisions suivantes :

1. Toute union finie d'ensembles finies est finie.
2. Toute union finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable
3. Une union dénombrable d'ensembles finis est finie ou dénombrable.

Proposition 8.1.5. Soit I un ensemble non vide au plus dénombrable. Si $(I_k)_{k \in J}$ est une partition de I alors J est au plus dénombrable.

Proposition 8.1.6. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas dénombrables.

Preuve. Il suffit de démontrer que $[0, 1[$ n'est pas dénombrable. Par l'absurde, si $[0, 1[$ est dénombrable alors on peut noter ses éléments $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, on écrit $x_n = 0, a_{n,0}a_{n,1} \dots$, en utilisant le développement propre de x_n dans le système décimal. On considère le nombre réel $y = 0, b_0b_1 \dots$ avec

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{n,n} = 0 \\ 0 & \text{si } a_{n,n} \neq 0 \end{cases}. \text{ Il en découle que}$$

$$(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n,n} \neq b_n,$$

et comme $y \in [0, 1[$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y = x_n$, donc $b_n = a_{n,n}$, ce qui contredit $(\star)$ ci-dessus. ■

8.2 Familles sommables de nombres complexes

Toutes les familles considérées dans ce paragraphe sont indexées par des ensembles non vides au plus dénombrables.

Si I est un ensemble on note $\mathcal{P}(I)$ l'ensemble des parties de I , $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I et $\mathcal{P}_f^*(I)$ l'ensemble des parties non vides finies de I .

8.2.1 Familles sommables de nombres réels positifs

Definition 8.2.1

Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels positifs, I étant non vide au plus dénombrable. On dit que la famille a est sommable si l'ensemble

$$X_a = \left\{ \sum_{i \in J} a_i / J \in \mathcal{P}_f^*(I) \right\}$$

est une partie majorée de $\mathbb{R}$, auquel cas on note :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup X_a.$$

Remarque. :

i la famille de nombres réels positifs $(a_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable, on convient de poser :

$$\sum_{i \in I} a_i = +\infty$$

Proposition 8.2.1. Si $a = (a_i)_{i \in I}$ et $b = (b_i)_{i \in I}$ sont deux familles de nombres réels positifs tel que :

$$\forall i \in I, \quad a_i \leq b_i$$

alors :

1. b sommable $\Rightarrow a$ sommable et $\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$
2. a non sommable $\Rightarrow b$ non sommable.

Preuve. 1. Si b est sommable de somme B , soit $J \in \mathcal{P}_f^*(I)$, on a : $\sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in J} b_i \leq B$, donc l'ensemble

X_a est majoré et $\sup(X_a) \leq B$, donc la famille a est sommable et si A est sa somme on a $A \leq B$

2. Si a n'est pas sommable alors a n'est pas sommable (contraposée). ■

Théorème 8.2.1. Soit $\sigma : I \rightarrow I$ une bijection et $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels positifs et $a_\sigma = (a_{\sigma(i)})_{i \in I}$. Alors a est sommable si et seulement si a_σ est sommable, auquel cas, on a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_{\sigma(i)}$$

Preuve. Supposons que $a = (a_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de somme S et soit σ une permutation de I , et notons $a_\sigma = (a_{\sigma(i)})_{i \in I}$. Si J est une partie finie de I , alors $J' = \sigma(J)$ est une partie finie de I de même cardinal que J , de plus on a :

$$(\star) \quad \sum_{k \in J'} a_k = \sum_{j \in J} a_{\sigma(j)}$$

Il en découle qu'avec les notations adoptées ci-dessus, on a X_a est majoré si et seulement si X_{a_σ} est majoré ; donc a est sommable si et seulement si a_σ est sommable et si on note S et S_σ leur sommes respectives, on a en vertu de $(\star)$ ci-dessus, en cas de sommabilité, $S \leq S_\sigma$ et $S_\sigma \leq S$ donc $S = S_\sigma$. ■

Théorème 8.2.2. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels positifs.

1. Si la famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable alors, pour tout $(I_j)_{j \in J}$, partition au plus dénombrable de I (c'est-à-dire J ensemble au plus dénombrable) on a :

(a) Pour tout $j \in J$, la famille $(a_i)_{i \in I_j}$ est sommable.

(b) Si, pour tout $j \in J$, on note : $S_j = \sum_{i \in I_j} a_i$, alors la famille $(S_j)_{j \in J}$ est sommable et on a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} S_j$$

2. S'il existe une partition au plus dénombrable $(I_j)_{j \in J}$ de I tel que :

(a) Pour tout $j \in J$, la famille $(a_i)_{i \in I_j}$ est sommable.

(b) Si, pour tout $j \in J$, on note : $S_j = \sum_{i \in I_j} a_i$, la famille $(S_j)_{j \in J}$ est sommable

alors la famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable et on a : $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} S_j$

Remarque. Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels positifs. En tenant compte de la convention $\sum_{i \in I} a_i = +\infty$ si la famille a n'est pas sommable on peut énoncer que :

pour tout $(I_j)_{j \in J}$, partition au plus dénombrable de I , si pour tout $j \in J$, la famille $(a_i)_{i \in I_j}$ est sommable alors on a : $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} a_i$

8.2.2 Familles sommables de nombres complexes

8.2.2.1 Définitions

Definition 8.2.2

Soit $u = (u_i) \in \mathbb{C}^I$ une famille de nombres complexes indexée par I au plus dénombrable. On dit que u est sommable si la famille des modules $|u| = (|u_i|)_{i \in I}$ est sommable.

Proposition 8.2.2. Pour tout nombre réel x , on pose $x_+ = \sup(x, 0)$ et $x_- = \sup(-x, 0)$.

1. Soit $a = (a_n)$ une famille de nombres réels alors la famille a est sommable si et seulement si les familles $a_+ = ((a_i)_+)_{i \in I}$ et $a_- = ((a_i)_-)_{i \in I}$ sont sommables.
2. Soit $z = (z_j)_{j \in I}$ une famille de nombres complexes, alors la famille z est sommable si et seulement si les familles $\Re(z) = (\Re(z_j))_{j \in I}$ et $\Im(z) = (\Im(z_j))_{j \in I}$ sont sommables, auquel cas, on a : $\sum_{j \in I} z_j = \sum_{j \in I} \Re(z_j) + i \sum_{j \in I} \Im(z_j)$

Definition 8.2.3

Si $x = (x_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de nombre réels, on définit la somme de x comme suit : $S = S_+ - S_-$ où S_+ et S_- sont les sommes respectives de x_+ et x_- .

Autrement dit :

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} (x_i)_+ - \sum_{i \in I} (x_i)_-$$

Si $(z_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de nombres complexes, on définit la somme de z comme suit : $\Sigma = \sum_{k \in I} \Re(z_k) + i \sum_{k \in I} \Im(z_k)$

8.2.3 Propriétés de la somme

Proposition 8.2.3. Si (u_i) et (v_i) sont deux familles sommables de nombres complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors la famille $(u_i + \lambda v_i)$ est sommable et $\sum (u_i + \lambda v_i) = \sum u_i + \lambda \sum v_i$.

Proposition 8.2.4. la famille (z_k) est sommable si et seulement si la famille $(|z_k|)$ est sommable, auquel cas on a : $|\sum z_k| \leq \sum |z_k|$

Proposition 8.2.5. La famille (z_n) est sommable si et seulement si la série $\sum z_n$ est absolument convergente auquel cas, elle est convergente et on a $\sum_{n \in \mathbb{N}} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n$

Proposition 8.2.6. $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow I$ une bijection. La famille $(z_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si la série $\sum z_{\sigma(n)}$ est absolument convergente auquel cas, elle est convergente et on a $\sum_{i \in I} z_i = \sum_{n=0}^{+\infty} z_{\sigma(n)}$

Théorème 8.2.3. Sommation par paquets : Si I est un ensemble dénombrable et (I_n) une partition de I soit $(z_i)_{i \in I}$ une famille sommable; alors, pour tout n la famille $(z_i)_{i \in I_n}$ est sommable, et si on note s_n sa somme, alors la famille $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable et on a :

$$\sum_{i \in I} z_i = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n.$$

Remarques. On fait les remarques importantes suivantes :

1. Si on remplace $\mathbb{N}$ par un ensemble dénombrable J , le théorème reste valable.
2. On a une réciproque en appliquant la réciproque à la famille des modules : Si $(I_j)_{j \in J}$ est une partition dénombrable de I et si pour tout $j \in J$ la famille $(z_i)_{i \in I_j}$ est sommable et, pour tout $j \in J$, on note :

$$\begin{cases} s_j = \sum_{i \in I_j} z_i \\ \tilde{s}_j = \sum_{i \in I_j} |z_i| \end{cases},$$

et si la famille $(\tilde{s}_j)_{j \in J}$ est sommable alors :

- la famille $(z_i)_{i \in I}$ est sommable.
- La famille $(s_j)_{j \in J}$ est sommable.
- On a :

$$\sum_{i \in I} z_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} z_i$$

8.2.4 Suites doubles

Une suite double est une application $u : I \rightarrow \mathbb{C}$ où I est une partie non vide de $\mathbb{N}^2$, notée $(u_{pq})_{(p,q) \in I}$ où $u_{pq} = u(p, q)$ pour tout $(p, q) \in I$. Les cas usuels sont $\mathbb{N}^2, \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, (\mathbb{N}^*)^2$.

Théorème 8.2.4. Soit $a = (a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double sommable de nombres réels positifs. Alors : Pour tout $i \in \mathbb{N}$, la famille $(a_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ est sommable. Si, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $S_j = \sum_{i=0}^{+\infty} a_{ij}$, la famille $(S_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est sommable et $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{ij} = \sum_{j=0}^{+\infty} S_j$

Théorème 8.2.5. Soit (a_{ij}) une suite double de réels positifs. Si pour tout $i \in \mathbb{N}$, la famille $(a_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ est sommable et si, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $S_i = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij}$, la famille $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable, alors la famille $(a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{ij} = \sum_{i=0}^{+\infty} S_i$

Remarque. Les théorèmes ci-dessus restent valables si on interverti les rôles des indices i et j .

Si $(a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est une famille de nombres complexes, en appliquant le théorème 8.2.3 et ses remarques à la famille des modules $(a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ on obtient les résultats suivants :

Proposition 8.2.7. Soit $(a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double sommable, alors :

- Pour tout $i \in \mathbb{N}$, la famille $(a_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ est sommable.
- Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la famille $(a_{ij})_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable.
- Si on pose

$$S_i = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{ij},$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$ et

$$T_j = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_{ij},$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$ alors les familles $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sont sommables et :

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{ij} = \sum_{i=0}^{+\infty} S_i = \sum_{j=0}^{+\infty} T_j.$$

Proposition 8.2.8. Soit $(a_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ une suite double tel que :

- Pour tout $i \in \mathbb{N}$, la famille $(a_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ est sommable.
- En notant, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{S}_i = \sum_{j=0}^{+\infty} |a_{ij}|,$$

la famille $(\tilde{S}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable.

alors :

- En notant, pour tout $i, j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} S_i = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{ik} \\ T_j = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{kj} \end{cases},$$

les familles $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sont sommables.

- La famille $(a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.
- On a :

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{ij} = \sum_{i=0}^{+\infty} S_i = \sum_{j=0}^{+\infty} T_j.$$

8.2.5 Série produit de Cauchy

Si $a = \sum a_n$ et $b = \sum b_n$ sont deux séries de nombres complexes. On associe aux séries a et b :

1. La série $c = \sum c_n$, avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. La famille $u = (a_k b_\ell)_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2}$.

On cherche à étudier la série et c et la famille u , et dans le cas de sommabilité des deux comparer leur sommes.

Théorème 8.2.6. Si les série $a = \sum a_n$ et $b = \sum b_n$ sont absolument convergentes alors :

1. La série c est absolument convergente.
2. La famille u est sommable.
3. Si on note $A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$; $B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$; $C = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ et $S = \sum_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2} a_k b_\ell$. alors $AB = C = S$.

Preuve. - La série c est absolument convergente car si $C'_n = \sum_{k=0}^n |c_k|$ alors $C'_n \leq A'B'$ où $A' = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$;

$B' = \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|$, en effet :

$$\begin{aligned} C'_n &= \sum_{k=0}^n \left| \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k |a_j| |b_{k-j}| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n |a_j| |b_k| = \left(\sum_{j=0}^n |a_j| \right) \left(\sum_{k=0}^n |b_k| \right) \\ &\leq \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |a_j| \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |b_k| \right) = A'B' \end{aligned}$$

■

8.3 Séries dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Dans tout ce paragraphe, E est un espace vectoriel normé de dimension finie non nulle.

8.3.1 Généralités

8.3.1.1 Définition, exemples

Definition 8.3.1

Soit (u_n) une suite à valeurs dans E . La suite (S_n) où $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ s'appelle la série de terme général u_n , notée : $\sum u_n$.

S_n s'appelle la somme partielle d'ordre n .

Remarques. On fait les remarques suivantes :

1. Pour une suite $(u_n)_{n \geq p}$ avec p un entier naturel, la série associée peut se noter : $\sum_{n \geq p} u_n$.
2. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite, il existe une et une seule suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que a_n est la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$. C'est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = a_n - a_{n-1} \end{cases}$$

Exemples : Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si A est une matrice fixée, on dispose des séries :

1. La série $\sum \frac{A^n}{n!}$, appelée série exponentielle.
2. La série $\sum A^n$ appelée série de Neuman.

8.3.1.2 Structure d'espace vectoriel

Si $S = \sum u_n$ et $T = \sum v_n$ sont deux séries et si $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit la série $S + T = \sum (u_n + v_n)$ et la série $\lambda.S = \sum (\lambda u_n)$.

Proposition 8.3.1. L'ensemble des séries à valeurs dans E muni des lois $+$ et $\cdot$ ci-dessus est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

8.3.2 Convergence

Definition 8.3.2

La série $\sum u_n$ est convergente si la suite (S_n) des sommes partielles est convergente. Si c'est le cas $S = \lim(S_n)$ s'appelle la somme de la série et on note : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Proposition 8.3.2. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. L'ensemble $\mathcal{S}_c$ des séries convergentes à valeurs dans E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des séries à valeurs dans E . L'application qui associe à chaque série convergente sa somme est une application linéaire de $\mathcal{S}_c$ vers E . En particulier si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors la série $\sum (\lambda u_n + v_n)$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Proposition 8.3.3. Si la série $\sum u_n$ est convergente alors son terme général converge vers 0. C'est-à-dire $\lim(u_n) = 0$.

Si $\sum u_n$ est une série tel que la suite (u_n) est divergente ou tend vers une limite non nulle on dit que la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Definition 8.3.3

Si $\sum u_n$ est une série convergente de somme S ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = S - S_n$. R_n s'appelle le reste d'ordre n de la série convergente $\sum u_n$.

Proposition 8.3.4. Si la série $\sum u_n$ est convergente alors $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et R_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Preuve. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et considérons la série de terme général u_p avec $p \geq n+1$; Si on note Σ_p sa somme partielle, on a pour tout $p \geq n+1$, on a : $\Sigma_p = \sum_{k=n+1}^p u_k = S_p - S_n$ où (S_p) est la suite des sommes partielles de la série $\sum u_k$, donc $\lim(\Sigma_p) = S - S_n = R_n$, ce qui donne $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. ■

8.3.3 Série absolument convergente

Definition 8.3.4

On dit qu'une série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série numérique $\sum \|u_n\|$ est convergente.

Exemple : Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, muni de la norme euclidienne, soit $A = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; alors la série $\sum A^n$ est

absolument convergente. En effet on a $A = -\frac{1}{3}J$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc $A^n = \frac{1}{2}(-2/3)^n J$ de sorte que $\|A^n\| = (2/3)^n \|1/2J\|$ et comme la série géométrique $\sum (2/3)^n$ est convergente, on a l'absolue convergence recherchée.

Théorème 8.3.1. Si $\sum u_n$ est absolument convergente elle est convergente et

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$$

Attention : On rappelle que E est de dimension finie. Ce résultat n'est pas toujours vrai en dimension infinie.

8.4 Séries dans une algèbre normée de dimension finie

8.4.1 algèbre normée de dimension finie

Definition 8.4.1

On appelle $\mathbb{K}$ -algèbre normée de dimension finie une $\mathbb{K}$ -algèbre $\mathcal{A}$ de dimension finie tel que l'espace vectoriel sous-jacent est muni d'une norme $\|\cdot\|$ sous-multiplicative, c'est-à-dire :

$$\forall a, b \in \mathcal{A}, \|a \times b\| \leq \|a\| \|b\|$$

Exemple : Il existe des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui font de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une algèbre normée. Exemple la norme $\|M\| = \sqrt{\text{tr}({}^tAA)}$.

Remarque. Soit $\mathcal{A}$ est une algèbre normée alors :

1. $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathcal{A}, \|a^p\| \leq \|a\|^p$
2. Si $1_{\mathcal{A}}$ est l'unité de $\mathcal{A}$ alors $\|1_{\mathcal{A}}\| \geq 1$

8.4.1.1 Série de Neumann

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée de dimension finie dont l'unité est notée $1_{\mathcal{A}}$. Si $a \in \mathcal{A}$, la série $\sum a^n$ est appelée série de Neumann.

Théorème 8.4.1. Soit $a \in \mathcal{A}$ tel que $\|a\| < 1$, alors :

1. La série de Neumann $\sum a_n$ est absolument convergente.
2. $1_{\mathcal{A}} - a$ est inversible dans l'algèbre $\mathcal{A}$ et on a : $(1_{\mathcal{A}} - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$

Preuve. Soit $a \in \mathcal{A}$ tel que $\|a\| < 1$.

1. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|a^n\| \leq \|1_{\mathcal{A}}\| \|a^n\| \leq \|1_{\mathcal{A}}\| \|a\|^n$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|a^n\| \leq \|1_{\mathcal{A}}\| \|a\|^n$$

La série géométrique $\sum \|a\|^n$ est convergente puisque $\|a\| < 1$; donc la série de Neumann $\sum a^n$ est absolument convergente. (En particulier, elle est convergente).

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \sum_{k=0}^n a^k$ et $S = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k$, alors :

$$\begin{aligned} (1_{\mathcal{A}} - a)S_n &= S_n - S_n a \\ &= \sum_{k=0}^n a^k - \sum_{k=0}^n a^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n a^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^k \\ &= a^0 - a^{n+1} \\ &= 1_{\mathcal{A}} - a^{n+1} \end{aligned}$$

Par continuité de l'application : $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}; x \mapsto (1_{\mathcal{A}} - a)x$ (car linéaire en dimension finie), on a par passage à la limite $(1_{\mathcal{A}} - a) \times S = 1_{\mathcal{A}}$. La même méthode donne $S \times (1_{\mathcal{A}} - a) = 1_{\mathcal{A}}$. Il découle de tout ça que $1_{\mathcal{A}} - a$ est inversible et que : $(1_{\mathcal{A}} - a)^{-1} = S = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$. ■

Remarque. La condition $\|a\| < 1$ n'est qu'une condition suffisante pour la convergence de la série de Neumann ; en effet, si par exemple $\mathcal{A} = \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$; $m \in \mathbb{N}$; $m \geq 2$ et on considère la matrice E_{12} dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne 1 et la colonne 2, lequel valant 1 et soit $p \in \mathbb{N}$ et $A_p = pE_{12}$; alors $\|A_p\| = p\|E_{12}\|$ n'est pas bornée, cependant la série de Neumann $\sum A_p^n$ est convergente puisque la matrice A_p est nilpotente.

8.4.1.2 Série exponentielle

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée de dimension finie et $a \in \mathcal{A}$. La série $\sum \frac{a^n}{n!}$ s'appelle série exponentielle de a .

Théorème 8.4.2. Pour tout $a \in \mathcal{A}$, la série exponentielle $\sum \frac{a^n}{n!}$ est absolument convergente. Sa somme est notée e^a ou $\exp(a)$.

Preuve. En effet puisque $\mathcal{A}$ est une algèbre normée, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left\| \frac{a^n}{n!} \right\| \leq \|1_{\mathcal{A}}\| \frac{\|a\|^n}{n!}$. Donc si $S_n = \sum_{k=0}^n \left\| \frac{a^k}{k!} \right\|$, alors :

$$S_n \leq \|1_{\mathcal{A}}\| + \sum_{k=1}^n \left\| \frac{a^k}{k!} \right\| \leq \|1_{\mathcal{A}}\| + \|1_{\mathcal{A}}\| \sum_{k=1}^n \left\| \frac{a^k}{k!} \right\| \leq \|1_{\mathcal{A}}\| T_n$$

où

$$T_n = \sum_{k=0}^n \frac{\|a\|^k}{k!}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = e^{\|a\|}$, donc la série exponentielle $\sum \frac{a^n}{n!}$ est absolument convergente. ■

Proposition 8.4.1. Pour tout $a \in \mathcal{A}$ on a : $\|e^a\| \leq \|1_{\mathcal{A}}\| e^{\|a\|}$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}$ la somme partielle de la série exponentielle. Par l'inégalité triangulaire et la sous-multiplicativité de la norme, on a :

$$\|S_n\| \leq \|1_{\mathcal{A}}\| T_n$$

où :

$$T_n = \sum_{k=0}^n \frac{\|a\|^k}{k!}$$

est la n ème somme partielle de la série $\sum \frac{\|a\|^k}{k!}$. Par passage à la limite, on a l'inégalité désirée. ■

Remarque. Si la norme d'algèbre $\|\cdot\|$ vérifie la condition :

$$\|1_{\mathcal{A}}\| = 1$$

alors on a :

$$\forall a \in \mathcal{A}, \quad \|e^a\| \leq e^{\|a\|}$$

Proposition 8.4.2. Si $(a, b) \in \mathcal{A}^2$ tel que $a \times b = b \times a$ alors $e^{a+b} = e^a \times e^b$

Preuve. On sait que $\exp(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$. Notons $S_n(a)$ la somme partielle d'ordre n de cette série. Alors :

$$S_n(a)S_n(b) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} \frac{a^i b^j}{i! j!}$$

et

$$S_n(a+b) = \sum_{i=0}^n \frac{(a+b)^i}{i!} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \frac{1}{i!} \binom{i}{j} a^{i-j} b^j = \sum_{(k,j) \in V} \frac{a^k b^j}{k! j!}$$

où

$$V = \{(k, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 / k + j \leq n\}$$

Soit

$$U = \llbracket 1, n \rrbracket^2 \setminus V$$

Alors :

$$\begin{aligned} \|S_n(a)S_n(b) - S_n(a+b)\| &= \left\| \sum_{(j,k) \in U} \frac{a^j b^k}{j! k!} \right\| \\ &\leq \|1_{\mathcal{A}}\| \sum_{(j,k) \in U} \frac{\|a\|^j \|b\|^k}{j! k!} \\ &= \|1_{\mathcal{A}}\| (S_n(\|a\|)S_n(\|b\|) - S_n(\|a\| + \|b\|)) \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que le dernier membre de cette inégalité tends vers 0 quand n tends vers $+\infty$ puisque on a dans $\mathbb{R}$ la relation

$$\exp(\|a\| + \|b\|) = \exp(\|a\|) \exp(\|b\|).$$

■

Proposition 8.4.3. Soit $a \in \mathcal{A}$, alors :

1. $e^0 = e$
2. e^a est inversible et $(e^a)^{-1} = e^{-a}$
3. Si u est un inversible de $\mathcal{A}$ alors $e^{uau^{-1}} = ue^a u^{-1}$.

8.4.1.3 Cas particulier des matrices carrées

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et l'algèbre $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille m .

Proposition 8.4.4. On a :

1. Si $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ est une matrice diagonale alors $e^D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_m})$
2. Si T est une matrice triangulaire supérieure de termes diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ alors e^T est une matrice triangulaire supérieure de termes diagonaux $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_m}$
3. Si A est une matrice diagonalisable alors e^A est diagonalisable; si $A = PDP^{-1}$ avec D matrice diagonale et P matrice inversible alors $e^A = Pe^D P^{-1}$.
4. Si A est une matrice trigonalisable alors e^A est trigonalisable; si $A = PTP^{-1}$ avec T matrice

triangulaire supérieure et P matrice inversible alors $e^A = Pe^T P^{-1}$.