Théorème Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$. C'est-à-dire, toute matrice réelle symétrique A d'ordre n admet au moins une valeur propre réelle.

Nous allons donner une démonstration de ce théorème en proposant trois méthodes. On aura besoin dans la méthode 1, du lemme 2, lequel aura besoin du lemme 1 qu'on donne ci-dessous et qu'on démontrera.

Lemme 1 : Si n est un entier naturel impair alors pour tout $\mathbb{R}-$espace vectoriel E de dimension n et tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \neq \emptyset$.

Preuve : Dans un tel cas $\deg(\chi_u) = n$ est impair et comme χ_u est unitaire on a

$$\lim_{t-\infty} \chi_u(t) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} \chi_u(t) = +\infty.$$

L'application $t \mapsto \chi_u(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_u(\lambda) = 0$.

Lemme 2 : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension n avec $n \geq 1$. Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe au moins un sous-espace vectoriel F de E tel que F est stable par u et $\dim(F) = 1$ ou $\dim(F) = 2$.

Preuve : Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \neq \emptyset$, soit λ une valeur propre de u alors si x est un vecteur propre associé la droite $F = \mathbb{R}x$ est stable par u. Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \emptyset$, forcément n est pair et si on pose $n = 2s$, alors le polynôme caractéristique de u se décompose $\chi_u = \prod_{k=1}^{s} P_k$ avec P_k trinôme unitaire de discriminent $\Delta_k < 0$. Par Cayley-Hamilton, $\chi_u(u) = \theta$, donc $P_1(u) \circ \cdots \circ P_s(u) = 0$, donc $\exists j \in [\![1, s]\!]$ $\det(P_j(u)) = 0$, donc $P_j(u)$ non injectif, donc $\exists x \in E \backslash \{0\}$, $P_j(u)(x) = 0$. Posons $P_j = X^2 - bX - a$, donc $P_j(u) = u^2 - bu - a\,\mathrm{Id}_E$ et $u^2(x) = ax + bu(x)$. Soit $F = \mathrm{Vect}(x, u(x))$, c'est un plan vectoriel de E et F est stable par u car $u(x) \in F$ et $u(u(x)) = ax + bu(x) \in F$.

MÉTHODE 1

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
• Si $n = 1$ alors $A = (a)$ avec $a \in \mathbb{R}$, donc a est une valeur propre de A.
• Si $n \geq 2$, alors :
• Pour $n = 2$ alors $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ donc $\chi_A = X^2 - (a+c)X + ac - b^2$, de discriminent $\Delta = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2$, donc $\Delta \geq 0$ et χ_A admet au moins une racine λ, laquelle est une valeur propre de A.
• Si $n \geq 2$ alors, d'après le lemme E admet un sous-espace vectoriel F stable par u tel $1 \leq \dim(F) \leq 2$, si on note v l'endomorphisme induit alors v est symétrique donc d'après la vérité pour $n = 1$ et pour $n = 2$, on peut dire que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(v) \neq \emptyset$, donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \neq \emptyset$.

MÉTHODE 2

Cette méthode est adoptée en classe lors de l'exposé du cours. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit λ une valeurs propre complexe de A, il existe $X \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$, donc $A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$, donc $X^\top A\overline{X} = \overline{\lambda} X^\top \overline{X}$, or $X^\top A = (AX)^\top = \lambda X^\top$, donc $\lambda X^\top \overline{X} = \overline{\lambda} X^\top \overline{X}$, or si $X = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$, alors $X^\top \overline{X} = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$ et comme $X \neq 0$, on a $X^\top \overline{X} \neq 0$, donc $\lambda = \overline{\lambda}$ et on vient de preouver que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A), \lambda \in \mathbb{R}$, donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ en particulier $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$.

MÉTHODE 3

L'application $\Phi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; X \mapsto \langle AX, X\rangle$ est continue car elle est polynômiale en les coordonnées de X, donc elle est bornée et atteint ses bornes sur la sphère unité $\mathfrak{S} = \{X \in \mathbb{R}^n / \|X\| = 1\}$, soit alors $V \in \mathfrak{S}$ tel que $\langle AV, V\rangle = \max\limits_{\|X\|=1} \langle AX, X\rangle$. On va démontrer que V est un vecteur propre de A, pour cela soit $W \in \mathfrak{S}$ tel que $W \perp V$, on a va prouver que $W \perp AV$, pour cela remarquons que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le vecteur $\varphi(t) = \cos(t)V + \sin(t)W$ réalise $\varphi(t) \in \mathfrak{S}$ car comme $V \perp W$, par Pythagore on e $\|\varphi(t)\|^2 = \cos^2(t)\|V\|^2 + \sin^2(t)\|W\|^2 = 1$. Il en découle que si g est l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto \Phi_A(\varphi(t))$ compte tenu de $g(0) = \Phi_A(V)$, on a $g(0)$ est un maximum globale de g et comme g est dérivable on a $g'(0) = 0$, or pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$g'(t) = \langle \varphi'(t), A\varphi(t)\rangle + \langle \varphi(t), A\varphi'(t)\rangle,$$

en particulier compte tenu de $\varphi'(t) = -\sin(t)V + \cos(t)W$, on a $\varphi'(0) = W$, donc

$$g'(0) = \langle W, AV\rangle + \langle V, AW\rangle$$

et comme A est symétrique on a $\langle V, AW\rangle = \langle W, AV\rangle$, donc $2\langle AV, W\rangle = 0$ et $AV \perp W$. On a donc prouvé que

$$\forall W \in \mathfrak{S}, W \perp V \Rightarrow W \perp AV,$$

ce qui veut dire que $(\mathbb{R}V)^\perp \subset (\mathbb{R}AV)^\perp$, donc $\mathbb{R}AV \subset \mathbb{R}V$, donc $AV \in \mathbb{R}V$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AV = \lambda V$, ce qui prouve que $\mathrm{Sp}(A) \neq \emptyset$.