# EXTRAIT DU TRAVAIL DU VENDREDI 9-1-2026 DE 08H30 A 10H30

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ une matrice de symétrie vectorielle orthogonale et $u$ l'endomorphisme canoniquement associé à $u$. Le polynôme caractéristique de $u$ est $\chi_u = X^2 - 1$. On a vu donc que $u$ est orthogonalement diagonalisable c'est-à-dire diagonalisable dans une base orthonormée. On se propose de chercher une telle base. Soit $X = (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\begin{aligned}
X \in E_1(u) \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x\cos\theta + y\sin\theta = x \\ x\sin\theta - y\cos\theta = y \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} (1-\cos\theta)x - y\sin\theta = 0 \\ x\sin\theta - y(1+\cos\theta) = 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x\sin^2\frac{\theta}{2} - 2y\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 0 \\ 2x\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - 2y\cos^2\frac{\theta}{2} = 0 \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\sin\frac{\theta}{2}\left(x\sin\frac{\theta}{2} - y\cos\frac{\theta}{2}\right) = 0 \\ 2\cos\frac{\theta}{2}\left(x\sin\frac{\theta}{2} - y\cos\frac{\theta}{2}\right) = 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad x\sin\frac{\theta}{2} - y\cos\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

La dernière équivalence est justifié par le fait qu'au moins l'un des réels $\sin\frac{\theta}{2}$ ou $\cos\frac{\theta}{2}$ est non nul.
Si on note $V_1 = \cos\frac{\theta}{2}e_1 + \sin\frac{\theta}{2}e_2$ et $V_2 = -\sin\frac{\theta}{2}e_1 + \cos\frac{\theta}{2}e_2$ alors $\mathscr{V} = (V_1, V_2)$ est une base orthonormée de diagonalisation de $u$.