VALEURS PROPRES COMPLEXES D'UNE MATRICE RÉELLE ANTISYMÉTRIQUE

Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle antisymétrique, alors M^2 est symétrique réelle donc elle est orthogonalement diagonalisable. Supposons que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre complexe de M, alors $\lambda^2 \in \mathrm{Sp}(M^2)$, donc $\lambda^2 \in \mathbb{R}$. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé à λ^2. On a

$$\|MX\|^2 = \langle X, M^\top MX \rangle = -\langle X, M^2 X \rangle = -\lambda^2 \|X\|^2,$$

par suite $\lambda^2 = -\frac{\|MX\|^2}{\|X\|^2}$, donc $\lambda^2 \in \mathbb{R}_-$. Il en découle que soit $\lambda = 0$ soit $\lambda^2 = -r$ avec $r > 0$, donc si on pose $\lambda = \rho e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\rho^2 e^{i2\theta} = -r = re^{i\pi}$, donc $\rho = \sqrt{r}$, et $2\theta = \pi + 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, donc $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ et par suite $\lambda = \pm\sqrt{r}i$. On vient de prouver que dans tous les cas $\lambda = \alpha i$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, donc toute valeur propre complexe de M est un imaginaire pur.