Activité en classe de la séance de Vendredi 2 janvier 2026 de 8h30 à 10h30

Une question de DL7 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$. Prouver que l'on a la relation : $\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x)$.

Dans le DL7 cette question n'existe pas et à la place on demande de faire trois calculs séparés qui correspondent aux trois blocs dans les calculs ci-dessous quand on a développé les calculs à l'étape $(\star\star)$ indiquée en bas. On a décidé de faire le calcul d'un seul coup et vous pouvez ensuit vous en inspirer pour faire les questions tel qu'elles sont posées au DL. L'idéal est de maîtriser les deux méthodes et comprendre le lien avec la suite du problème qui propose une démonstration du théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernestein.

On commence par développer $(nx-k)^2 = k^2 - 2nxk + n^2x^2$, ensuite pour traiter $k^2\binom{n}{k}$ et pouvoir simplifier, il faut transformer $k^2 = k(k-1)+k$, ce qui fournit des produits de facteurs consécutifs et permet une simplification $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$, valable si $k \geq 2$ et $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, valable si $k \geq 1$, sans oublier que l'on a supposé que $n \geq 2$.
et on voit que ces calculs sont valables si $n \geq 2$ et $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $k \geq 2$. Avant de commencer les calculs, on ordonne les termes suivant le degré du polynôme en k, comme suit : $(nx-k)^2 = k(k-1) + (1-2nx)k + n^2x^2$. Pour simplifier notons m la somme sous sa forme au membre à droite $m = \sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$, alors on a

$$m = \underbrace{n^2x^2\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{S_1} + \underbrace{(1-2nx)\sum_{k=0}^{+\infty}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{S_2} + \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{S_3}$$

Comme c'est indiqué et expliqué dans la marge, on voit l'apparition de trois blocs S_1, S_2, S_3 de nature différente selon la quantité qu'on somme et qui dépend de l'indice k. On souligne la distinction entre ces blocs notamment pour le deuxième bloc, le compteur de l'indice k pet démarrer avec 1 tandis que pour le troisième bloc il peut démarrer avec 2 sans changer le résultat.

Selon les remarques ci-dessus, on a donc :

$$m = \underbrace{n^2x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{S_1} + \underbrace{(1-2nx)\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{S_2} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{S_3}$$

Il vient alors pour les trois blocs :

✍ Compte tenu de la formule du binôme de Newton, on a pour le premier bloc la relation : $S_1 = n^2x^2(x+(1-x))^n = n^2x^2$.

✍ La factorisation par x et compte tenu de la formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, dont on a parlé dans l'encadré de la marge et le changement d'indice $k-1=\ell$, on a pour le deuxième bloc : $S_2 = (1-2nx)nx\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}x^\ell(1-x)^{n-1-\ell} = nx(1-2nx)$.

✍ Finalement la factorisation par x^2, la formule $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ et le changement d'indice $\ell = k-2$, et la formule du binôme de Newton donne pour le troisième bloc : $S_3 = n(n-1)x^2\sum_{\ell=0}^{n-2}\binom{n-2}{\ell}x^\ell(1-x)^{n-2-\ell} = n(n-1)x^2$.

✍ En combinant les trois relations donnant S_1, S_2, S_3, on a :
$m = n^2x^2 + nx(1-2nx) + n(n-1)x^2 = nx(nx+1-2nx+(n-1)x = nx(1-x)$

Les exercices traités pendant la séance :

Ce genre de série s'appelle série entière lacunaire car elle possède une infinité de coefficients nuls, précisément $a_k = e^n$ si $k = n^3$, pour un certain n de $\mathbb{N}$ et $a_k = 0$ sinon, d'où le tableau suivant des premiers coefficients de la première série entière

k	0	1	2	3	...	6	7	8	9	10	...	25	26	27
a_k	1	e	0	0	...	0	0	e^2	0	0	...	0	0	e^3

Il en découle que le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ est dépourvu de sens et la règle de D'Alembert version série entière ne marche pas ici. On opte pour la règle de D'Alembert séries numériques en posant $u_n = e^n z^{n^3}$ dans le premier exemple, et $u_n = n! z^{n^2}$ dans le deuxième exemple.

Exercice 1

Donner les rayons de convergence de

1. R_1 de la série entière $\sum e^n z^{n^3}$.
2. R_2 de la série entière $\sum n! z^{n^2}$.

On passe à la résolution : Pour la première question posons $u_n = e^n z^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = e|z|^{3n^2+3n+1}$ et on a tout de suite que si $|z| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0$, ce qui permet de déduire que le rayon de convergence R_1 vérifie $R_1 \geq 1$.

Exercice 2

1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum H_n x^n$
2. Calculer sa somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$, pour tout $x \in]-R, R[$.

1. On sait que $H_n \sim \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$, donc $\frac{H_{n+1}}{H_n} \sim \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \sim 1$. Par la règle de D'Alembert, le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$.
2. C'est la produit de Cauchy des séries $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, avec $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et sa série entière dérivée $-\ln(1-x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec $b_0 = 0$, $b_n = -\frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\frac{1}{1-x}.(-\ln(1-x)) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$, donc $c_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$, donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$, pour tout $x \in]-1, 1[$.

Exercice 3

Pour tout x on pose $f(x) = \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$

On a $f(x) = \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$, donc $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \underbrace{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}}_{g(x)}$.

On a $g(x) = \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = \frac{(1-x)-\sqrt{1-x^2}}{(1-x)+\sqrt{1-x^2}}$. Par le technique du conjugué, on a $g(x) = \frac{[(1-x)-\sqrt{1-x^2}]^2}{(1-x)^2-(1-x^2)}$. Tout calcul fait on trouve $g(x) = \frac{2(x-1)(1-\sqrt{1-x^2})}{2x(x-1)} = \frac{-1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.
Ainsi, $f'(x) = \frac{1}{2x}(1-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}})$.
Commençons par chercher le D.S.E. de $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$:
On a $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^4 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}x^4 + \cdots + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^{2n} + \ldots$
$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^4 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}x^4 + \cdots + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}x^{2n} + \ldots$.

Notons que $\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{2n-1}{2})}{n!} = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}\frac{-(2k-1)}{2} = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = (-1)^n\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$. Il en découle que $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}x^{2n}$.

Il en résulte que $f'(x) = \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}x^{2n-1}$.

Alors $f(x) = c + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}x^{2n}$ avec $c = f(0) = \ln(2)$.

Finalement $f(x) = \ln(2) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}x^{2n}$

Exercice 4

DSE de $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$ et $g(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3$

On propose pour f d'observer que $f(x) = \frac{1-x}{1-x^3}$ et profiter du D.S.E. de $\frac{1}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n}$ pour déduire que $f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n} - x^{3n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$, avec pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n = 1$ si $n = 3k$, $a_n = -1$ si $n = 3k+1$ et $a_n = 0$ si $n = 3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$.

Pour f des élèves ont proposé de factoriser $x^2+x+1 = (x-j)(x-\bar{j})$, ensuite décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{X^2+X+1} = \frac{1}{(X-j)(X-\bar{j})}$. C'est une bonne idée mais on a proposée une autre qui peut être est plus courte, cependant il est recommandé d'aborder avec la première méthode pour voir ce qui se passe avec. De la même manière pour le deuxième exemple des élèves ont proposé d'effectuer des produits de Cauchy, essayez de voir ce que ça donne. On a proposé une autre méthode basée sur la dérivation de la série géométrique.

Pour l'exemple2, on a proposé de considérer la série géométrique $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}x^n$, la dériver une une première fois $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}$, une seconde fois, $\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}$, puis observer que $g(x) = (1+x)^3\frac{1}{(1-x)^3}$, donc $g(x) = \frac{1}{2}(1+3x+3x^2+x^3)\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}$. On peut ensuite ordonner les termes grâce à des changements d'indices simples. Précisément :

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{3}{2}n(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{3}{2}n(n-1)x^{n} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2}n(n-1)x^{n+1}\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{2}n(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{2}n(n-1)x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}n(n-1)x^{n+1}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}(n+2)(n+1)x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{2}n(n+1)x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{2}n(n-1)x^{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)(n-2)x^{n}\\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)(n+2)+3n(n+1)+3n(n-1)+(n-1)(n-2)}{2}x^n\\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(4n^2+2)x^n
\end{aligned}$$

Conclusion $g(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty}(4n^2+2)x^n$, avec $R = 1$.

Exercice 5

$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$. DSE de f avec rayon de convergence

On a $f'(x)=-xf(x)+1$, donc $xf(x)+f'(x)-1=0$. On peut prouver que f est D.S.E. en remarquant que c'est le produit de Cauchy de deux séries entières de rayon de convergence $+\infty$ chacune. Précisément la fonction $x\mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est developable en série entière avec un rayon de convergence $R_1=+\infty$, car puisque pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $e^t=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}$, alors en particulier pour $t=-\frac{x^2}{2}$, on a : $h_1(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\frac{x^2}{2})^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^nn!}x^{2n}$, valable pour tout $x\in\mathbb{R}$, donc la rayon de convergence est le même $R_1=+\infty$.
On peut intégrer terme sur tout segment la série entière ci-dessus, donc pour tout réel x, on a $h_2(x)=\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^nn!}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^nn!(2n+1)}x^{2n+1}$, avec le même rayon de convergence $R_2=+\infty$. Comme $f=h_1h_2$, la fonction f est developable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence $R\geq\min(R_1,R_2)=+\infty$, donc $R=+\infty$.
Notons donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ la série entière associée à f et alors pour tout x réel $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, donc $f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n-1}$, il en découle que la relation $xf(x)+f'(x)-1=0$, valable pour tout réel x s'écrit $x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-1=0$, donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+1}++\sum\limits_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-1=0$, donc par changements d'indices, il vient : $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^n+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\right)-1=0$ donc $(a_1-1)+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{n-1}+(n+1)a_{n+1})x^n=0$. Par unicité des développement en série entière(ici celui de la fonction nulle), on a $a_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*, a_{n+1}=-\frac{1}{n+1}a_{n-1}$. Par ailleurs il est aisé de voir que $a_0=f(0)=0$, par suite, on a $\begin{cases}a_0=0, a_1=1\\ \forall n\in\mathbb{N}^*, a_{n+1}=-\frac{1}{n+1}a_{n-1}\end{cases}$, donc si on note $b_k=a_{2k}$ et $c_k=a_{2k+1}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a les relations suivantes : $\begin{cases}b_0=0\\ \forall k\in\mathbb{N}, b_{k+1}=-\frac{1}{2k+2}b_k\end{cases}$ et $\begin{cases}c_0=0\\ \forall k\in\mathbb{N}, c_{k+1}=-\frac{1}{2k+3}c_k\end{cases}$, donc pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $a_{2k}=0$ et $a_{2k+1}=\frac{(-1)\times\cdots\times(-1)}{(2k-1)\times\cdots\times 1}=\frac{(-1)^k}{1.3.\times.(2k-1)}=\frac{(-1)^k2^kk!}{(2k)!}$ et on finit par donner le DSE de f, à savoir $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n2^nn!}{(2n)!}x^{2n+1}$ avec le rayon de convergence $R=+\infty$.

Exercice 6

Pour tout $x\in[-1,1]$, on pose $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est de classe C^∞ et DSE au voisinage de 0.

Cet exercice n'est pas encore résolu car la séance avait expirée, je vous laisse réfléchir avant que je poste sa solution.