APPROXIMATION DES FONCTIONS CONTINUES, PAR UNE FONCTION EN ESCALIERS, ET PAR UNE FONCTION AFFINE PAR MORCEAUX CONTINUE.

I) Approximation d'une fonction continue par une fonction en escalier

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, elle y est uniformément continue par le théorème de Heine, donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a, b]$ on aie $(\star)|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Soit n un entier naturel non nul tel que $\frac{b-a}{n} < \delta$. Considérons alors la subdivision (a_k) de $[a, b]$ définie par $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, par suite $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$. Commençons la construction d'une fonction en escalier φ_ε dont la définition est comme suit : Pour tout $x \in [a, b[$, il existe un unique $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $x \in [a_k, a_{+1}[$, on pose alors $\varphi_\varepsilon(x) = f(a_k)$. Pour finie , on pose exclusivement $\varphi_\varepsilon(b) = f(b)$.

Explications :

On observe que la condition $\frac{b-a}{n} < \delta$, veut exactement dire $n > \frac{b-a}{\delta}$, ce qui inspire de prendre, par exemple $n = \lfloor \frac{b-a}{\delta} + 1 \rfloor$. L'idée étant de construire une subdivision de $[a, b]$ dont le pas ne dépasse pas δ de sorte que la distance mutuelles entre deus élément d'un intervalle de la subdivision ne dépasse pas δ.

Vérifions que l'on a effectivement $\|f - \varphi_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. Soit $x \in [a, b]$. Si $x < b$ alors il existe un unique entier naturel $k \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $x \in [a_k, a_{k+1}[$, donc $\varphi_\varepsilon(x) = f(a_k)$, par suite on a $|f(x) - \varphi_\varepsilon(x)| = |f(a_{k+1}) - f(a_k)|$ et comme $|a_{k+1} - a_k| = \frac{b-a}{n} < \delta$, alors par $(\star)$, on a l'inégalité (1) $\quad |f(x) - \varphi_\varepsilon(x)| < \varepsilon$. Si $x = b$, comme $f(b) = \varphi_\varepsilon(b)$, on a aussi (1). Il en découle que pour tout $x \in [a, b]$, on a $|f(x) - \varphi_\varepsilon(x)| < \varepsilon$, donc que $\|f - \varphi_\varepsilon\|_{\infty,[a,b]} \leq \varepsilon$.

II) Approximation d'une fonction continue par une fonction affine par morceaux et continue

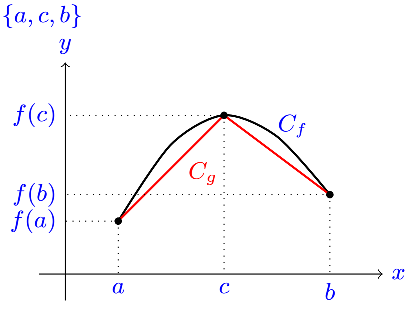
Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, elle y est uniformément continue par le théorème de Heine, donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a, b]$ on aie

$$(\star\star) \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit n un entier naturel non nul tel que $\frac{b-a}{n} < \delta$. Considérons alors la subdivision (a_k) de $[a, b]$ définie par $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, par suite, on a notamment : $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$. Commençons la construction d'une fonction ψ_ε affine par morceaux continue sur $[a, b]$ dont la définition est comme suit : Pour tout $x \in [a, b[$, il existe un unique $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $x \in [a_k, a_{+1}[$, on impose donc à ψ_ε d'être affine sur $[a_k, a_{k+1}]$ et que ψ_ε et f coincident au extrémités a_k et a_{k+1} de l'intervalle $I_k = [a_k, a_{k+1}]$, ce qui donne l'expression explicite qui définit ψ_ε sur le segment $I_k = [a_k, a_{k+1}]$, à savoir, $\forall x \in I_k, \psi_\varepsilon(x) = f(a_k) + (x - a_k)\frac{f(a_{k+1}) - f(a_k)}{a_{k+1} - a_k}$. A vrai dire on n'a pas besoin dans notre démonstration de cette formule explicite qui donne $\psi_\varepsilon(x)$ pour $x \in I_k$, mais on a juste besoin du fait que ψ_ε est affine sur I_ε d'une part et qu'elle coincide avec f aux extrémités de I_k, à savoir a_k et a_{k+1}. Vérifions que l'on a effectivement $\|f - \psi_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. Soit $x \in [a, b]$. Si $x < b$ alors il existe un entier naturel $k \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $x \in [a_k, a_{k+1}]$, donc $|f(x) - \psi_\varepsilon(x)| \leq |f(x) - f(a_k)| + |f(a_k) - \psi_\varepsilon(x)|$.

Explications :

Si $I = [a, b]$ est un segment de d $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une application continue alors pour tout $c \in]a, b[$, il existe une et une seule application g qui vérifie les conditions suivantes :
✍ La restriction de g à l'intervalles $[a, c]$(resp. $[c, b]$) est affine sur $[a, c]$((resp.$[c, b]$).
✍ Les applications f et g coincident sur $\{a, c, b\}$



• Si $f : [c, d] \to \mathbb{C}$ continue sur $[c, d]$, alors il existe une et une seule application affine $h : [c, d] \to \mathbb{C}$ tel que f et h coincident sur $\{c, d\}$; elle est définie par l'expression explicite : $\forall t \in [c, d], h(t) = f(c) + (t - c)\frac{f(d)-f(c)}{d-c}$.
• Si $f : [c, d] \to \mathbb{C}$ est affine sur le segment $[c, d]$ alors on a $\forall x \in [c, d], |f(x) - f(c)| \leq |f(d) - f(c)|$, en effet c'est vrai si $x = c$, et si $c < x$, on écrit : $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{f(d)-f(c)}{d-c}$, il en découle que $|f(x) - f(x)| = \left(\frac{x-c}{d-c}\right)|f(d) - f(c)|$. On conclut en observant que l'on a ce qui suit : $\forall x \in [c, d], 0 \leq \frac{x-c}{d-c} \leq 1$

Comme $x \in I_k = [a_k, a_{k+1}]$, on a $|x - a_k| \leq |a_{k+1} - a_k| = \frac{b-a}{n} < \delta$, donc par $(\star\star)$ tout en haut, on a $|f(x) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$. On va traiter $|f(a_k) - \psi_\varepsilon(x)|$ et tout d'abord, observons que $f(a_k) = \psi_\varepsilon(a_k)$ et comme ψ_ε est affine sur I_k, on a (voir l'encadré à droite) $|\psi_\varepsilon(x)-\psi_\varepsilon(a_k)| \leq |\psi_\varepsilon(a_{k+1})-\psi_\varepsilon(a_k)|$, donc compte tenu de ψ_ε et f coincident au points a_k et a_{k+1} et de $|a_{k+1}-a_k| < \delta$, on a $|f(a_k)-\psi_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ et on a finalement $\forall x \in [a,b], |f(x)-\psi_\varepsilon(x)| < \varepsilon$, donc $\|f-\psi_\varepsilon\|_{\infty,[a,b]} \leq \varepsilon$.

III) Lien avec l'approximation de $x \mapsto |x|$ de la première question

Notons que la question II)1) du DL7 propose de démontrer que la suite $(x \mapsto P_n(x))$ des polynômes proposés est une suite qui converge uniformément vers la fonction $x \mapsto |x|$ sur le segment $[-1,1]$. Quel est le lien entre cet exemple et le cas général ? Dans la partie suivante on a proposé de démontrer que la famille $(\varphi_\omega)_{\omega\in[a,b]}$ avec $\forall \omega, x \in [a,b], \varphi_\omega(x) = |x-\omega|$ est une famille génératrice de l'espace $\mathcal{AMC}([a,b],\mathbb{C})$ des applications affines par morceaux et continues sur $[a,b]$, en fait Ω est même une base de $\mathcal{AMC}([a,b],\mathbb{C})$. Avec plus de précision si $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ est une application affine par morceaux et continue sur $[a,b]$ on note

$$D'_f = \{x \in]a,b[/ f \text{ n'est pas dérivable au point } x\}.$$

Alors, D'_f est une partie finie de $[a,b]$. Si $D'_f \neq \emptyset$, on note $D'_f = \{a_1,\dots,a_{n-1}\}$ tel que $a_1 < \dots a_{n-1}$, et on note $a_0 = a$ et $a_n = b$, de sorte que $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n$ et f est non dérivable au points a_k pour tout $k \in \{1,\dots,n-1\}$ et f est continue sur $[a,b]$ et affine sur $I_k = [a_k, a_{k+1}]$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Dans ce cas précis il existe un unique $(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},\lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $f = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_{a_k}$.