EXERCICE

1. (a) On a $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc

$$M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3M.$$

Résumé : $M^2 = 3M$.
Déduction : Il en découle que $M^3 - 3M = 0$, donc le polynôme $P(X) = X^2 - 3M$ est un polynôme annulateur de degré 2 de M.

(b) Le polynôme $P = X(X-3)$ est scindé à racines simples(deux racines simples 0 et 3), par suite comme il annule M, la matrice M est diagonalisable et ses valeurs propres sont parmi les racines 0 et 3 de P.

(c) Le polynôme minimal π_M de M est un polynôme unitaire de degré au moins 1 et π_M divise P car $P(M) = 0$, donc $\pi_M \in \{X, X-3, P\}$. On ne peut pas avoir $P = X$ car cela veut dire $M = 0$, ce qui n'est pas le cas, ni $\pi_M = X - 3$ car cela veut dire $P = 3I_3$, ce qui n'est pas le cas, donc $\pi_M = P = X^2 - 3X$.

(d) Il découle de la question 1)c) que $\mathrm{Sp}(M) = \{0, 3\}$ et comme M est diagonalisables les multiplicités respectives des valeurs propres 0 et 3 sont les dimensions des sous-espaces caractéristiques associés, donc

$$m(0) = \dim(E_0(M)) = 3 - \mathrm{rg}\,(M) = 3 - 1 = 2,$$

par suite sans le moindre calcul $m(3) = 1$ (la somme des multiplicités vaut 3), donc

$$\chi_M = X^2(X-3) = X^3 - 3X^2.$$

Autre méthode : On utilise la formule du cours

$$\chi_M = X^3 - \mathrm{tr}(M)X^2 + aX + \det(M), a \in \mathbb{R}.$$

Or, $\mathrm{rg}\,(M) = 1$ donc M non inversible, donc $\det(M) = 0$ et

$$\chi_M = X^3 - 3X^2 + aX,$$

or $\chi_M(3) = 0$, donc $3a = 0$ et $a = 0$, donc $\chi_M = X^3 - 3X^2$.

2. (a) Non, voici un contre exemple : $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $M_1^2 = M_1$, donc M_1 est diagonalisable (projecteur) et M_2 est diagonale donc diagonalisable, on a $M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable car

$$\dim(E_1(M_1)) = 2 - \mathrm{rg}\,(M_2 - I_2) = 2 - 1 = 1 < m(1) = 2.$$

(b) Non car pour M_1 et M_2 du 2)a), on a M_1 et M_2 sont diagonalisables et $M_1M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, n'est pas diagonalisable car si c'était le cas elle serait nulle car 0 est sa seule valeur propre.

3. On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Par les calculs habituels, on a :

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Les matrices A et B sont diagonalisables car :
• Un calcul simple donne $A^2 = A$, donc A est la matrice d'un projecteur donc A est diagonalisable.
• La matrice B est diagonale donc diagonalisable.

(c) Oui $A + B$ est trigonalisable car elle est triangulaire supérieure.
Non $A + B$ n'est pas diagonalisable car $1 \in \mathrm{Sp}(A + B)$ et $m_{A+B}(1) = 2$ est la multiplicité de 1 mais $A + B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et on a :

$$\dim(E_1(A + B)) = 3 - \mathrm{rg}\,(A + B - I_3) = 3 - 2 = 1 \neq m_{A+B}(1).$$

(d) Oui AB est trigonalisable car elle est triangulaire supérieure.
Non AB n'est pas trigonalisable car $0 \in \mathrm{Sp}(AB)$ et $m_{AB}(0) = 3$ est la multiplicité de 0 mais $\dim(E_0(AB)) = 3 - \mathrm{rg}\,(AB) = 3 - 1 = 2 \neq m_{AB}(0)$.

PROBLÈME

Partie I

1. On rappelle que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on a

$$\chi_M(X) = X^2 - \mathrm{tr}(M)X + \det(M).$$

On applique cette formule à chacune des matrices A_0 et B_0, donc :

$$\chi_{A_0} = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2),$$

il en découle que $\mathrm{Sp}(A_0) = \{1, 2\}$

De même on a

$$\chi_{B_0} = X^2 - X = X(X-1),$$

par suite $\mathrm{Sp}(B_0) = \{0, 1\}$.

2. On effectue les calculs des images des vecteurs de la base canonique :

$h_{A_0,B_0}(E_{1,1}) = A_0E_{1,1} - E_{1,1}B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$h_{A_0,B_0}(E_{1,2}) = A_0E_{1,2} - E_{1,2}B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$h_{A_0,B_0}(E_{2,1}) = A_0E_{2,1} - E_{2,1}B_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$h_{A_0,B_0}(E_{2,2}) = A_0E_{2,2} - E_{2,2}B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Il en découle que

$$H_0 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

On a

$$\chi_{H_0} = \det(XI_4 - H_0) = \begin{vmatrix} X+2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & X-1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & X-1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & X-4 \end{vmatrix}.$$

En effectuant l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, il vient :

$$\chi_{H_0} = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & X-1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & X-1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & X-4 \end{vmatrix}$$

et en effectuant les operations élémentaires $L_k \leftarrow L_k - L_1, \forall k \in \{2, 3, 4\}$, on trouve

$$\chi_{H_0} = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & X & 2 & -2 \\ 0 & 1 & X+1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & X-4 \end{vmatrix}$$

alors

$$\begin{aligned}
\chi_{H_0} &= (X-1)\begin{vmatrix} X & 2 & -2 \\ 1 & X+1 & -1 \\ 2 & 4 & X-4 \end{vmatrix} = (X-1)X\begin{vmatrix} X & 2 & 0 \\ 1 & X+1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad (\text{ on a effectué } C_3 \leftarrow C_3 + C_2) \\
&= X\begin{vmatrix} X & 2 & 0 \\ -1 & X-3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} (L_2 \leftarrow L_2 - L_3) \\
&= X(X-1)\begin{vmatrix} X & 2 \\ -1 & X-3 \end{vmatrix} = X(X-1)(X-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & X-3 \end{vmatrix} \\
&\quad (\text{ on a effectué } C_1 \leftarrow C_1 - C_2) \\
&= X(X-1)(X-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & X-1 \end{vmatrix} (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\
&= X(X-1)^2(X-2)
\end{aligned}$$

Alors $\mathrm{Sp}(H_0) = \{0, 1, 2\}$.

Le tableau suivant résume les valeurs de $a - b$ pour $(a, b) \in \mathrm{Sp}(A_0) \times \mathrm{Sp}(B_0)$:

$-$	0	1
1	1	0
2	2	1

,

on a bien

$$\mathrm{Sp}(H_0) = \mathrm{Sp}(A_0) - \mathrm{Sp}(B_0) = \{a - b/(a, b) \in \mathrm{Sp}(A_0) \times \mathrm{Sp}(B_0)\}.$$

3. Les matrices A_0 et B_0 sont toutes les deux diagonalisables car leurs polynômes caractéristiques respectifs sont scindés à racines simples.
4. Comme $\chi_{H_0} = X(X-1)^2(X-2)$ (scindé sur $\mathbb{C}$, bien évidemment) et comme les dimensions des sous-espaces propres associés aux valeurs propres sont aux moins égales à $1, H_0$ est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1(H_0)) = 2$, or par le théorème du rang, $\dim(E_1(H_0)) = 4 - \mathrm{rg}\,(H_0 - I_4)$. On a
$$H_0 - I_4 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$
de colonnes $C_k, k \in [\![1, 4]\!]$ avec comme on l'observe facilement
$$C_3 = 2C_2 \quad \text{et} \quad C_4 = -C_1 - 3C_3 \text{ et la famille } (C_1, C_2) \text{ est libre}$$
car sinon on aurait un nombre complexe α tel que $C_2 = \alpha C_1$ par suite on aurait $-3\alpha = 1$ et $-2\alpha = 0$, ce qui est absurde. Il découle de tout ça que $\mathrm{rg}\,(H_0 - I_4) = 2$, donc on a bien $\dim(E_1(H_0)) = 2$, donc H_0 est diagonalisable.

Partie II

5. On a

$$\chi_{B^\top} = \det(XI - B^\top) = \det((XI - B)^\top)) = \det(XI - B) = \chi_B,$$

donc χ_B et $\chi_{B^\top}$ ont mêmes racines et ainsi B et $B^\top$ ont même spectre.

6. (a) En posant $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$, on a :

$$VW^\top = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} (w_1, \dots, w_n) = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & \dots & v_1 w_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n w_1 & \dots & v_n w_n \end{pmatrix} = (v_i w_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

Comme V n'est pas nulle, il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $v_{i_0} \neq 0$. De même il existe $j_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $w_{j_0} \neq 0$. Ainsi V^tW n'est pas nulle puisque son coefficient $v_{i_0} w_{j_0}$ de la ligne i_0 et la colonne j_0 d'indice est non nul.

(b) On a

$$\begin{aligned} h_{A,B}\left(V^tW\right) &= AV^tW - V^tWB = (AV)^tW - V^t\left({}^tBW\right) \\ &= (aV)^tW - V^t(bW) = (a-b)V^tW \end{aligned}$$

Comme V^tW est de plus non nul, c'est un vecteur propre de $h_{A,B}$ associé à la valeur propre $a - b$.

(c) Par la question précédente, $\{a - b/(a, b) \in \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)\} \subset Sp\,(h_{A,B})$.

7. (a) Soit i et j compris entre 1 et $n.PE_{i,j} = (0|\dots|0\,|V_i|\,0|\dots|0)$ où la colonne V_i est à la $j^{\text{ème}}$ place.

$$PE_{i,j}Q^\top = \left(0_{n,1} \dots 0_{n,1}, \underbrace{V_i}_{j^{\text{ème}}\text{ place}}, 0_{n,1}, \dots, 0_{n,1}\right) \begin{pmatrix} W_1^\top \\ \vdots \\ W_j^\top \\ \vdots \\ W_n^\top \end{pmatrix} = V_i W_j^\top.$$

(b) L'application ψ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même qui à toute matrice M associe $PMQ^\top$ est un automorphisme car elle est linéaire bijective (sa réciproque étant l'application $M' \mapsto P^{-1}M'\left(Q^{-1}\right)^\top$). Comme $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, son image $\left(V_i W_j^\top\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ par ψ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

8. Supposons A et B diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Remarquons que $B^\top$ est aussi diagonalisable car si $B = RDR^{-1}$ avec $R \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ et D réelle diagonale, alors

$B^\top = \left(R^\top\right)^{-1} DR^\top$. Choisissant $(V_1, \ldots, V_n)$ base de vecteurs propres de A et $(W_1, \ldots, W_n)$ base de vecteurs propres de $B^\top$, la famille $\left(V_i W_j^\top\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de vecteurs propres de $h_{A,B}$. Ainsi $h_{A,B}$ est diagonalisable.

9. On a : $\chi_A(B) = \prod_{k=1}^{n} (B - a_k I)$. Si chacun des facteurs du produit ci-dessus est inversible, alors $\chi_A(B)$ est inversible comme produit de matrices inversibles.
Si au contraire au moins un des facteurs $B - a_{k_0} I$ du produit ci-dessus est non inversible donc de rang strictement inférieur à n, alors le rang de χ_n, qui est inférieur ou égal au rang de chacun des facteurs $B - a_k I$, est strictement inférieur à n donc $\chi_A(B)$ n'est pas inversible. variante : les $B - a_k I$ sont tous des polynômes en B donc commutent, donc $\chi_A(B)$ est égale à $C\,(B - a_{k_0} I)$ (pour une certaine matrice $C \in \mathbb{C}[A]$ et son noyau contient donc celui de $B - a_{k_0} I$ qui n'est pas réduit à $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$) Ainsi

$$\begin{aligned} \chi_A(B) \text{ est inversible } &\iff \forall k \in [\![1,n]\!], B - a_k I \text{ est inversible} \\ &\iff \forall k \in [\![1,n]\!], a_k \notin Sp(B) \\ &\iff Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset \end{aligned}$$

10. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(h_{A,B})$, et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \backslash \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\}$ un vecteur propre associé.
    (a) Par hypothèse, $\lambda M = h_{A,B}(M) = AM - MB$. On en déduit que

    $$AM = MB + \lambda M = N\,(B + \lambda I_n)\,.$$

    Montrons alors par récurrence sur k que pour tout k dans $\mathbb{N}$, $A^k M = M\,(B + \lambda I_n)^k$.

    - Initialisation : Pour $k = 0$, on trouve $M = M$ qui est vrai.
    - Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^k M = M\,(B + \lambda I_n)^k$. On a alors

    $$\begin{aligned} A^{k+1} M &= A\left(A^k M\right) \\ &= AM\,(B + \lambda I_n)^k \text{ par HR} \\ &= M\,(B + \lambda I_n)^{k+1} \text{ d'après la formule ci-dessus} \end{aligned}$$

    - **Conclusion :** On a bien montré que pour tout entier k dans $\mathbb{N}$, on a la relation $A^k M = M\,(B + \lambda I_n)^k$.

    (b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On pose $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ où N est supérieur au degré de P.
    On déduit de ce qui précède que :

    $$\begin{aligned} P(A)M &= \sum_{k=0}^{N} a_k A^k M = \sum_{k=0}^{N} a_k M\,(B + \lambda I_n)^k \\ &= M \sum_{k=0}^{N} a_k\,(B + \lambda I_n)^k = MP\,(B + \lambda I_n) \end{aligned}$$

(c) On peut appliquer ce qui précède au polynôme χ_A. Comme, d'après le théorème de **Cayley-Hamilton**, $\chi_A(A) = 0$ on obtient :

$$M\chi_A(B+\lambda I_n) = \chi_A(A)M = 0$$

Supposons par l'absurde que $\chi_A(B+\lambda I_n)$ est inversible. En multipliant par son inverse on en déduit $M = 0$ ce qui est absurde car M était supposé non nul puisque c'est un vecteur propre de $h_{A,B}$. On en déduit que $\chi_A(B+\lambda I_n)$ n'est pas inversible.

(d) On a vu à la question **II.6)** que :

$$\mathrm{Sp}(h_{A,B}) \subset \{a-b/(a,b) \in \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)\}.$$

Montrons l'inclusion inverse. Soit $\lambda \in Sp(h_{A,B})$. D'après **II.10.c)**, $\chi_A(B+\lambda I_n)$ n'est pas inversible ce qui implique, d'après **II.9)** que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B+\lambda I_n) \neq \emptyset$. Soit x un élément de cet ensemble. Il existe $a \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $x = a$ et un élément $b \in \mathrm{Sp}(B)$ tel que $x = b + \lambda$ (car les éléments du spectre de $B + \lambda I_n$ sont les éléments obtenus en ajoutant λ aux éléments du spectre de B). On en déduit que $a = b + \lambda$ et donc $\lambda = a - b$. Finalement,

$$\mathrm{Sp}(h_{A,B}) = \{a-b/(a,b) \in \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)\}.$$

(e) Le fait qu'il existe une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MB$ est équivalent au fait que 0 est valeurs propre de $h_{A,B}$. D'après **II.10.d)** cela est équivalent à $0 \in \{a-b/(a,b) \in \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)\}$. On en déduit donc qu'il existe M non nulle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MB$ si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \emptyset$.

11. (a) Montrons que la famille de matrices $(M_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est libre. Soit $(\lambda_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une famille de scalaires telle que $\sum\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \lambda_{ij}M_{ij} = 0$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$0 = \left(\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \lambda_{ij}M_{ij}\right) V_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ik}V_i$$

Comme la famille $(V_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre (puisque c'est une base) on en déduit que pour tout $i \in [\![1,n]\!], \lambda_{ik} = 0$. Ceci étant vrai pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on obtient finalement que tous les λ_{ij} sont nuls ce qui implique que la famille de matrices $(M_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est libre. C'est une famille qui contient n^2 matrices et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension n^2. La famille $(M_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Soit $(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3$, alors :

$$\begin{aligned} h_A(M_{ij})V_k &= (AM_{ij} - M_{ij}A)V_k \\ &= AM_{ij}V_k - M_{ij}AV_k \\ &= AM_{ij}V_k - \lambda_k M_{ij}V_k. \end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que V_k est un vecteur propre pour la valeur propre λ_k associé à A.

- Si $k \neq j$ alors $M_{ij}V_k = 0$, donc $h_A(M_{ij})V_k = 0 = (\lambda_i - \lambda_j)M_{ij}V_k$.
- Si $k = j$ alors $M_{ij}V_k = V_i$ et $AM_{ij}V_k = AV_i = \lambda_i V_i = \lambda_i M_{ij}V_k$. On en déduit que $h_A(M_{ij})V_k = \lambda_i M_{ij}V_k - \lambda_k M_{ij}V_k = (\lambda_i - \lambda_j)M_{ij}V_k$ car $k = j$. Dans tous les cas, on a bien, $h_A(M_{ij})V_k = (\lambda_i - \lambda_j)M_{ij}V_k$.

Maintenant, si on considère T et S les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ définis par $T : X \mapsto h_A(M_{ij})X$ et $S : X \mapsto (\lambda_i - \lambda_j)M_{ij}X$. On vient de montrer que ces deux endomorphismes coincident sur la base $(V_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$. Ils sont donc égaux, d'où l'égalité matricielle $h_A(M_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)M_{ij}$. Cela signifie bien que les matrices M_{ij} sont des vecteurs propres de h_A.

(c) D'après la question précédente la famille $(M_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de vecteurs propres pour h_A. Le noyau de h_A est donc l'espace vectoriel engendré par les matrices M_{ij} telles que $h_A(M_{ij}) = 0$. Or, en utilisant la question **II.11.b)**, on a $h_A(M_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)M_{ij}$ et donc $h_A(M_{ij}) = 0 \iff \lambda_i = \lambda_j \iff (i,j) \in J$. On en déduit que $\operatorname{Ker}(h_A) = \operatorname{Vect}\{M_{ij}, (i,j) \in J\}$. De ce fait $\dim(\operatorname{Ker}(h_A))$ est égal au cardinal de l'ensemble J. En posant pour tout $k \in [\![1,p]\!]$,

$$J_k = \{(i,j), \lambda_i = \lambda_j = \mu_k\},$$

on a

$$\dim(\operatorname{Ker}(h_A)) = \#J = \sum_{k=1}^{p} \#J_k = \sum_{k=1}^{p} m_k^2$$

(d) D'après la question précédente,

$$\dim(\operatorname{Ker}(h_A)) = \sum_{k=1}^{p} m_k^2 \geqslant \sum_{k=1}^{p} m_k = n.$$

En effet, comme m_k est supérieur ou égal à $1, m_k^2 \geqslant m_k$. De plus, il n'y a égalité que si $m_k = 1$. De ce fait, $\dim(\operatorname{Ker}(h_A)) = n$ si et seulement si pour tout entier $k, m_k = 1$ ce qui signifie que A admet n valeurs propres distinctes.

(e) Si les n valeurs propres de A sont distinctes on sait que le polynôme minimal $\mu_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ est de degré n donc $(\ I_n, A, A^2, \cdots, A^{n-1}\ )$ est une famille libre qui constitue une base de $\mathbb{R}[A]$. Comme il est clair que toute matrice M de $\mathbb{R}[A]$ (c'est-à-dire un polynôme en A) commute à A, on a

$$h_A(M) = AM - MA = 0.$$

Cela signifie que $\mathbb{C}[A] \subset \operatorname{Ker}(h_A)$. Comme d'après ce qui précède,

$$\dim \operatorname{Ker}(h_A) = n = \dim \mathbb{C}[A],$$

on obtient bien que $\operatorname{Ker}(h_A) = \mathbb{C}[A]$

12. On suppose que h_A est diagonalisable On note $(P_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une base de vecteurs propres de h_A, chaque matrice P_{ij} étant associée à la valeur propre λ_{ij}. Soit λ une valeur propre de A et X est un vecteur propre de A associé à λ. Soit Y un vecteur de $\mathbb{C}^n$, il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $MX = Y$. Pour s'en convaincre il suffit de compléter la famille libre $\{X\}$ (elle est libre car $X \neq 0$ puisque c'est un vecteur propre) en une base $\mathscr{B} = (X, X_1, \ldots, X_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$. On sait alors qu'il existe un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ qui envoie tous les vecteurs de la base $\mathscr{B}$ vers le vecteur Y. Maintenant, comme $(P_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une famille $(\lambda_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de scalaires tels que $\sum\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \lambda_{ij}P_{ij} = M$ et donc $Y = MX = \sum\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} P_{ij}X$. Cela montre bien que Y est dans l'espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs $(P_{ij}X)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. Maintenant, la famille considérée ci-dessus est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$. On peut donc en extraire une base. Il existe alors J une partie de $[\![1,n]\!]^2$ de cardinal n tel que $(P_{ij}X)_{(i,j)\in J}$ soit une base de $\mathbb{R}^n$. Notons alors que pour tout $(i,j) \in J$. comme $h_A(P_{ij}) = \lambda_{ij}P_{ij}$, on a alors $AP_{ij}X = (P_{ij}A + \lambda_{ij}P_{ij})X = (\lambda + \lambda_{ij})P_{ij}X$. On a donc trouvé une base de vecteurs propres de A. Cela implique que A est diagonalisable.

13. L'argument ci-dessus se recopie quand le corps de base est $\mathbb{R}$. Il faut juste s'assurer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et h_A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ alors A a (au moins) une valeur propre réelle. Par l'absurde, supposons que A n'ait pas de valeurs propres réelles. Elle a au moins une valeur propre complexe ω (de partie imaginaire non nulle). On sait que $\overline{\omega}$ est aussi une valeur propre de A car A est une matrice réelle. D'après les calculs de la question **II)6)** (qui restent vrais dans $\mathbb{R}$), on peut alors en déduire que $\omega - \overline{\omega}$ est une valeur propre de h_A. Cela est absurde car $\omega - \overline{\omega}$ est un imaginaire pur et h_A étant diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) il n'a que des valeurs propres réelles. Finalement, A admet au moins une valeur propre réelle et donc A est diagonalisable.