Centre Salmane El Farissi	DEVOIR SURVEILLÉ 2	2025/2026
CPGE , Salé.	Commun pour les classes :	Durée : 4h
Donné le : 17 - 11 - 2025	MP1,MP2,MP3.	

EXERCICE

1. Dans cette question on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Calculer M^2 et en déduire un polynôme annulateur de M de degré 2.
   (b) Justifier que M est diagonalisable.
   (c) Préciser le polynôme minimal π_M de M.
   (d) Préciser avec le minimum de calculs possible, χ_M le polynôme caractéristique de M.
2. Dans cette question toutes les matrices considérées sont dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) La somme de deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est elle forcément diagonalisable ? Justifier votre réponse.
   (b) Le produit de deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est elle forcément diagonalisable ? Justifier votre réponse.
3. Soit dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $A + B$ et AB.
   (b) A et B sont elles diagonalisables ? Justifier bien votre réponse.
   (c) $A + B$ est elle trigonalisable ? diagonalisable ? Justifier bien votre réponse.
   (d) AB est elle trigonalisable ? diagonalisable ? Justifier bien votre réponse.

PROBLÈME

✍ Dans ce problème n désignera un entier strictement positif.
✍ Soit f est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie E, χ_f désignera son polynôme caractéristique, pour tout scalaire $\lambda, E_\lambda(f)$ désignera $\operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Sp}(f)$ désignera le spectre de f.

✍ De même, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \chi_A$ désignera son polynôme caractéristique, pour tout scalaire $\lambda, E_\lambda(A)$ désignera $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$ et $\operatorname{Sp}(A)$ désignera son spectre.
✍ Si $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ on note $M^\top$ la matrice transposée de M. Cela veut dire que si $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}$ alors $M^\top = (m'_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq q\\ 1\leq j\leq p}}$ avec :

$$\forall (i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!], \quad m'_{i,j} = m_{j,i}.$$

✍ Pour toutes matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $h_{A,B}$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad , \quad h_{A,B}(M) = AM - MB$$

Partie I : Un premier exemple

Soit A_0 et B_0 les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ données par :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère la base $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et on note H_0 la matrice de l'endomorphisme $\varphi = h_{A_0,B_0}$ dans cette base.

1. Déterminer $\operatorname{Sp}(A_0)$ et $\operatorname{Sp}(B_0)$.
2. Déterminer H_0 puis $\operatorname{Sp}(H_0)$. On pourra admettre que

$$\chi_{H_0} = X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 2X.$$

   Vérifier que $\operatorname{Sp}(H_0) = \{a - b / (a,b) \in \operatorname{Sp}(A_0) \times \operatorname{Sp}(B_0)\}$.
3. Montrer que A_0 et B_0 sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
4. La matrice H_0 est-elle diagonalisable ?

Partie II : étude du cas général

Dans la suite du problème, A et B sont quelconques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On se propose d'étudier les liens existant entre la diagonalisabilité de A et B et celle de $h_{A,B}$

5. Montrer que B et $B^\top$ ont même polynôme caractéristique. Que peut-on en conclure au niveau des spectres ?

6. Soit $a \in \mathrm{Sp}(A)$ et $b \in \mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(B^\top)$. On fixe $(V, W) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \left\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\right\}\right)^2$ tels que $AV = aV$ et $B^\top W = bW$.
   (a) Expliciter les coefficients de $VW^\top$ en posant $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$.
   En déduire que $VW^\top \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$
   (b) Montrer que $VW^\top$ est un vecteur propre de $h_{A,B}$.
   (c) En déduire une inclusion entre les ensembles
   $$\mathrm{Sp}\left(h_{A,B}\right) \quad \text{et} \quad \{a - b/(a,b) \in \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)\}.$$
7. Soient $(V_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $(W_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ deux bases de $\mathbb{C}^n$, identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
   On note P et Q les matrices dont les colonnes sont respectivement $(V_1, V_2, \cdots, V_n)$ et $(W_1, W_2, \cdots, W_n)$.
   (a) Montrer que pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $V_i W_j^\top = P E_{i,j} Q^\top$.
   ($(E_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.)
   (b) En déduire que la famille de $(V_i W_j^\top)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
8. Déduire des questions **6)** et **7)** que si A et B sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $h_{A,B}$ est diagonalisable.
9. On note $a_1, a_2, \cdots, a_n$ les valeurs propres non nécessairement distinctes de A dans $\mathbb{C}$. On a donc $\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$. Exprimer $\chi_A(B)$ et montrer que la matrice $\chi_A(B)$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$
10. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(h_{A,B})$, et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \left\{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\right\}$ un vecteur propre associé.
   (a) Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$, $A^k M = M\left(B + \lambda I_n\right)^k$.
   (b) En déduire que pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ on a la relation :
   $$P(A)M = MP\left(B + \lambda I_n\right)$$
   (c) Montrer que : $\chi_A\left(B + \lambda I_n\right)$ est non inversible.
   (d) En déduire en utilisant **6)** et **9)** que
   $$\mathrm{Sp}\left(h_{A,B}\right) = \{a - b/(a,b) \in \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)\}.$$
   (e) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe M non nulle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MB$.

Dans la suite du problème, on suppose que $B = A$, et on considère l'endomorphisme $h_{A,A}$ que l'on notera plus simplement h_A.

11. On suppose que la matrice carrée A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et on note $(\ V_1, V_2, \cdots, V_n\ )$ une base de vecteurs propres de A, chaque vecteur V_i étant associé à la valeur propre λ_i. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on définit la matrice M_{ij} de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad , \quad M_{ij}V_k = \delta_{jk}V_i$$

   (a) Montrer que la famille de matrices $(M_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (b) Montrer que : $\forall (i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3 \quad , \quad h_A\left(M_{ij}\right)V_k = \left(\lambda_i - \lambda_j\right)M_{ij}V_k$.
   En déduire que les matrices M_{ij} sont des vecteurs propres de h_A.

   (c) On note $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p$ les valeurs propres distinctes de $A, m_1, m_2, \cdots, m_p$ leurs ordres de multiplicité respectifs, et $J = \left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 / \lambda_i = \lambda_j\right\}$.
   Montrer que :

$$\mathrm{Ker}\left(h_A\right) = \mathrm{Vect}\left\{M_{ij}/(i,j) \in J\right\} \quad \text{ et } \quad \dim\left(\mathrm{Ker}\left(h_A\right)\right) = \sum_{i=1}^{p} m_i^2$$

   (d) Montrer que $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(h_A\right)\right) \geqslant n$ et que l'égalité a lieu si et seulement si A admet n valeurs propres distinctes.

   (e) On note $\mathbb{C}[A] = \{Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / \exists P \in \mathbb{C}[X] \quad Q = P(A)\}$.
   Montrer que si les n valeurs propres de A sont distinctes, alors la famille $(I_n, A, A^2, \cdots, A^{n-1})$ constitue une base de $\mathbb{C}[A]$, et en déduire que dans ce cas, $\mathrm{Ker}\left(h_A\right) = \mathbb{C}[A]$.

12. On suppose que h_A est diagonalisable.
   On note $(P_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une base de vecteurs propres de h_A, chaque matrice P_{ij} étant associée à la valeur propre λ_{ij}. Montrer que si X est un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ, la famille $(P_{ij}X)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}^n$. En déduire que A est diagonalisable.

13. On suppose que A est une matrice réelle et on considère

$$h_A : M \mapsto AM - MA$$

   l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que h_A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.