Notations

Soit n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1. $\mathbb{K}$ désignant le corps des réels ou celui des complexes, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ ayant n lignes et p colonnes. Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et est muni de sa structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité.
$0_{n,p}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n triangulaires supérieures à éléments dans $\mathbb{K}$.
Tout vecteur $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathbb{K}^n$ est identifié à un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne de X soit x_i. Dans toute la suite, nous noterons indifféremment $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ aussi bien que le vecteur de $\mathbb{K}^n$ qui lui est associé.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = (x_i)_{1\leq i\leq p}$ dans $\mathbb{K}^p$, on note $(AX)_i$ le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne de AX.
Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathrm{Sp}\,(A)$ l'ensemble des valeurs propres **complexes** de A et on appelle rayon spectral de A le réel $\rho(A)$ défini par :

$$\rho(A) = \max_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|.$$

Conformément à l'usage, on note N_∞ la norme définie sur $\mathbb{C}^n$ par :

$$\forall X = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{C}^n, N_\infty(X) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

On qualifie de norme matricielle toute norme ν définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant les propriété (i) et (ii) suivantes :

$$\begin{cases} (i) & \forall (A,B)\in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \nu(AB)\leq \nu(A)\cdot\nu(B) \\ (ii) & \nu(I_n) = 1 \end{cases}$$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ étant de dimension finie, on rappelle qu'une suite de matrices $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ converge vers une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si la convergence a lieu dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme quelconque.

Partie I

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si et seulement s'il existe des matrices P et T tel que :

$$(\star) \quad P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}), T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K}), \quad A = PTP^{-1}.$$

Trigonaliser A c'est trouver les matrices P et T qui vérifient $(\star)$ ci-dessus.

I.1 On note $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$ la base canonique de $\mathbb{C}^2$ et on considère la matrice $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ et on note f_1 l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à M_1.

a) Démontrer que M_1 admet un et un seul vecteur propre de la forme $\omega_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$ à determiner. On note $\omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Justifier que $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$ est une base de $\mathbb{C}^2$. On note Q_1 la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à Ω et $T_1 = \mathrm{mat}_\Omega(f_1)$. Calculer avec soin les matrices Q_1 et T_1.

b) Pourquoi M_1 est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

c) Trigonaliser M_1.

I.2 Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

a) La matrice M est-elle diagonalisable ?

b) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Montrer que M admet un unique vecteur propre v_1 de la forme $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, les nombres complexes β et γ à determiner. Vérifier que si on pose $v_2 = e_2$ et $v_3 = e_3$ alors $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

c) On note Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{V}$. Calculer $Q^{-1}MQ$ et en déduire, des matrices $P \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{T}_3(\mathbb{C})$ telles que $P^{-1}MP = T$.

I.3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si T est une matrice triangulaire supérieure semblable à A, que représentent, pour A, les éléments diagonaux de T ?

I.4 Soit $S = (s_{i,j})$ et $T = (t_{i,j})$ deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que ST est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont $s_{1,1}t_{1,1}$, $s_{2,2}t_{2,2}$, $\ldots$, $s_{n,n}t_{n,n}$.

b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, quels sont les éléments diagonaux de T^k ?

I.5 Montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\rho\left(A^k\right) = [\rho(A)]^k$.

I.6 Montrer que l'application $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}, A = (a_{i,j}) \mapsto \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, mais n'est pas en général une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

I.7 En admettant l'existence de normes matricielles sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (la suite du problème montrera effectivement cette existence), montrer que pour toute norme N définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une constante C réelle positive telle que :

$$\forall (A, B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\right)^2, N(AB) \leq CN(A)N(B).$$

I.8 Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers A si et seulement si la suite $(P^{-1}A_kP)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $P^{-1}AP$.

I.9 **a)** Soit $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer T^k et en déduire que la suite $\left(T^k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si ($|\lambda| < 1$) ou ($\lambda = 1$ et $\mu = 0$).

b) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de A pour que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit convergente.

c) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable. Montrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $\rho(A) < 1$. Dans ce cas, préciser $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k$.

d) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\rho(A)$ pour que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

Partie II

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et N une norme quelconque sur $\mathbb{C}^n$. On pose :

$$M_A = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

II.1 **a)** Montrer que pour tout $X \in \mathbb{C}^n$: $N_\infty(AX) \leq M_A N_\infty(X)$.

b) Montrer qu'il existe une constante réelle C_A telle que :

$$\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX) \leq C_A N(X).$$

c) Montrer que l'ensemble $\left\{ \dfrac{N(AX)}{N(X)} \mid X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}$ possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

On notera dans la suite :

$$\widetilde{N}(A) = \sup_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{N(AX)}{N(X)}.$$

d) Montrer que : $\widetilde{N_\infty}(A) \leq M_A$.

e) On reprend dans cette question la matrice M introduite en **I.2**. Déterminer un vecteur X_0 de $\mathbb{C}^3$ tel que $N_\infty(X_0) = 1$ et $N_\infty(MX_0) = 10$. En déduire la valeur de $\widetilde{N_\infty}(M)$.

II.2 Soit i_0 un entier compris entre 1 et n tel que $\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = M_A$. En considérant le vecteur Y de $\mathbb{C}^n$ de composantes y_j définies par :

$$y_j = \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} \text{ si } a_{i_0,j} \neq 0 \text{ et } y_j = 1 \text{ si } a_{i_0,j} = 0$$

montrer que $M_A \leq \widetilde{N_\infty}(A)$ et en déduire $\widetilde{N_\infty}(A) = M_A$.

II.3 Montrer que :

a) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \widetilde{N}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_n$.

b) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall \lambda \in \mathbb{C}, \widetilde{N}(\lambda A) = |\lambda| \, \widetilde{N}(A)$.

c) $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \widetilde{N}(A+B) \leq \widetilde{N}(A) + \widetilde{N}(B)$.

d) $\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX) \leq \widetilde{N}(A) N(X)$.

e) Déduire de ces résultats que $\widetilde{N}$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On lui donne le nom de norme matricielle subordonnée à la norme N.

II.4 **a)** En considérant une valeur propre λ de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$, montrer que :

$$\rho(A) \leq \widetilde{N}(A).$$

b) Donner un exemple simple de matrice A non nulle vérifiant $\rho(A) = \widetilde{N_\infty}(A)$.

c) Montrer que si A est nilpotente non nulle, on a l'inégalité stricte :

$$\rho(A) < \widetilde{N}(A).$$

d) Montrer que si $\lim_{k \to +\infty} A^k = 0_n$, alors $\rho(A) < 1$.

II.5 **a)** Soit $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ et $\Delta = \mathrm{diag}(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ deux matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner le terme général m'_{ij} de la matrice $M' = DA\Delta$. En déduire le terme général de M' dans le cas $\alpha_k = p^k$ et $\beta_k = p^{-k}$ où $p \in \mathbb{N}^*$ donné et $k \in [\![1, n]\!]$.

b) Pour tout $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n$, on pose $\|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. On rappelle que $\|.\|_2$ est une norme de $\mathbb{C}^n$ et on ne demande pas de le démontrer. On note $|\!|\!|.|\!|\!|_2$ la norme subordonnée de $\|.\|_2$. Démontrer que si $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors $|\!|\!|D|\!|\!|_2 = \rho(D)$.

c) Soit $Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, on pose : $\|X\|_Q = \|QX\|_2$. Montrer que $\|.\|_Q$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$ et que sa norme subordonnée est $|||.|||_Q$ tel que

$$|||M|||_Q = |||QMQ^{-1}|||_2$$

pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

II.6 On suppose que $\rho(A) < 1$ et soit $\varepsilon = \frac{1-\rho(A)}{2}$.

a) Justifier l'existence d'une matrice $T = (T_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ triangulaire supérieure et une matrice inversible P tel que $A = PTP^{-1}$. On pose $\lambda_i = t_{ii}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et soit $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Que constituent $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ pour A ?

b) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on pose $D_p = \mathrm{diag}(p^k)_{1 \leq k \leq n}$ et $T_p = D_p T D_p^{-1}$. Démontrer que $\lim\limits_{p \to +\infty} T_p = \Delta$.

c) En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que : $|||D_m T D_m^{-1}|||_2 \leq \rho(A) + \varepsilon$.

d) Démontrer qu'il existe $Q \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $|||A|||_Q \leq \frac{1+\rho(A)}{2}$.

e) En déduire que : $\lim\limits_{p \to +\infty} A^p = 0_n$.

II.7 **a)** Montrer que pour tout k entier naturel non nul : $\rho(A) \leq \left[\widetilde{N}\left(A^k\right)\right]^{\frac{1}{k}}$.

b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\rho(\alpha A) = |\alpha| \, \rho(A)$.

c) Soit $\varepsilon > 0$ et $A_\varepsilon = \dfrac{A}{\rho(A) + \varepsilon}$. Vérifier que $\rho(A_\varepsilon) < 1$ et en déduire l'existence d'un entier naturel k_ε tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k \geq k_\varepsilon \Rightarrow \widetilde{N}\left(A^k\right) \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k .$$

d) En déduire $\lim\limits_{k \to +\infty} \left[\widetilde{N}\left(A^k\right)\right]^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

Partie III

Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est dite positive (resp. strictement positive) et on note $A \geq 0$ (resp. $A > 0$) si et seulement si tous ses coefficients sont positifs ou nuls (resp. strictement positifs). Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note $A \geq B$ (resp. $A \leq B$, $A > B$, $A < B$) si et seulement si $A - B \geq 0$ (resp. $B - A \geq 0$, $A - B > 0$, $B - A > 0$).

Notons que grâce à l'identification de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pourra parler de vecteur de $\mathbb{R}^n$ positif ou strictement positif.

III.1 Donner un exemple de matrice A montrant que les conditions $A \geq 0$ et $A \neq 0$ n'impliquent pas nécessairement $A > 0$.

III.2 A, B, A', B' désignent des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que si $0 \leq A \leq B$ et $0 \leq A' \leq B'$, alors $0 \leq AA' \leq BB'$.

b) Montrer que si $0 \leq A \leq B$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq A^k \leq B^k$.

c) Montrer que si $0 \leq A \leq B$, alors $\widetilde{N_\infty}(A) \leq \widetilde{N_\infty}(B)$.

d) Montrer que si $0 \leq A \leq B$, alors $\rho(A) \leq \rho(B)$.

e) Montrer que si $0 \leq A < B$, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $A \leq cB$ et en déduire $\rho(A) < \rho(B)$.

III.3 Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la somme des termes de chaque ligne soit constante égale à α. Montrer que α est valeur propre de A et que :

$$\rho(A) = \alpha = \widetilde{N_\infty}(A).$$

III.4 Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note α_i la somme des termes de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et $\alpha = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$. On définit la matrice $B = (b_{i,j})$ par $B = 0_n$ si $\alpha = 0$ et $b_{i,j} = \dfrac{\alpha}{\alpha_i} a_{i,j}$ si $\alpha > 0$. Montrer à l'aide de la matrice B ainsi construite que :

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right) \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right).$$

III.5 Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = (x_i)$ un vecteur strictement positif de $\mathbb{R}^n$.

On note D_x la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant pour termes diagonaux x_1, x_2, ..., x_n. Calculer les éléments de la matrice $D_x^{-1} A D_x$ et en déduire :

$$\min_{1 \leq i \leq n} \frac{(AX)_i}{x_i} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{(AX)_i}{x_i}.$$

III.6 Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A admet un vecteur propre strictement positif, alors la valeur propre associée est $\rho(A)$ et :

$$\rho(A) = \sup_{X > 0} \left(\min_{1 \leq i \leq n} \frac{(AX)_i}{x_i} \right) = \inf_{X > 0} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \frac{(AX)_i}{x_i} \right).$$